Potenčne funkcije in kovinska razmerja

dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V članku pokažemo, da obstajajo realne potenčne funkcije f, za katere je inverz f^{-1} enak n-temu odvodu $f^{(n)}$. Eksponent spremenljivke v funkciji se tedaj izraža s kovinskim razmerjem reda n. Pri tem je n naravno število. Obravnavamo tudi geometrijsko razlago kovinskih razmerij.

Ključne besede: potenčna funkcija, inverz, odvod, kovinsko razmerje, verižni ulomek, kovinski pravokotnik

Power functions and metallic ratios

Abstract

In the article we show that there are real power functions / which inverse f^{-1} equals n-th derivative $f^{(n)}$. In this case, the exponent of the variable in / is expressed by the metallic ratio of order n. The number n is natural. A geometric explanation of metallic ratios is discussed, too.

Keywords: power function, inverse, derivative, metallic ratio, continued fraction, metallic rectangle

Uvod

Za boljše razumevanje prispevka ponovimo najnujnejše o potenčnih funkcijah. Realne potenčne funkcije $x \to f(x) = cx^\alpha$ kjer sta c in α realni števili, so videti preproste, kar pa ni čisto res. Do njih vodi precej dolga pot. Težav ni, če je $\alpha = n$ naravno število. Tedaj je pač potenca x^n produkt n faktorjev, od katerih je vsak enak x. Pri razširitvi potence na cele negativne eksponente že nastopi težava. Za $x \neq 0$ je treba vzeti obratno vrednost ali inverz x^{-1}, ki obstaja po nekem aksiomu za realna števila, in nato definiramo $x^{-n} = (x^{-1})^n$ za vsako naravno število n. Posebej je $x^0 = 1$ za $x \neq 0$. S tem imamo za vsak $x \neq 0$ in vsako celo število m definirano potenco x^m. Naslednji korak je razširitev potence na racionalne eksponente. V tem primeru je treba najprej za naravno število n vpeljati n-ti koren, to se pravi $\sqrt[n]{x}$, za nenegativne x. Eksistenca in enoličnost n-tega korena se dokažeta na podlagi aksiomov realnih števil, lahko pa tudi z uporabo izrekov o zveznih funkcijah na intervalu. Nato definiramo potenco x^r za racionalno število $r = m/n$, kjer je m celo, n pa naravno število, s predpisom $x^r = \sqrt[n]{x^m}$. Vsako racionalno število r lahko predstavimo v obliki m/n, kjer je m celo in n naravno število. Za potrebe tega prispevka se bomo omejili: za $m > 0$ oziroma $r > 0$ na $x \geq 0$ in za $m < 0$ oziroma $r < 0$ na $x > 0$. Pri tem je treba tudi preveriti, da je definicija potence x^r neodvisna od predstavitve eksponenta r z ulomkom m/n. V vsakem primeru je $x^0 = 1$ za $x \neq 0$. Podrobneje o tem na primer v (3) . Za računanje s potencami veljajo običajna pravila. Zapomnimo si se zapis $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ za $x \geq 0$.

Resna težava nastane, ko želimo definirati potenco x^α za realne eksponente α. To lahko naredimo šele, ko poznamo pojem limite številskega zaporedja. Ker je množica racionalnih števil gosta v množici realnih števil, vzamemo poljubno racionalno zaporedje $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ki konvergira k α, nato pa postavimo za x^α limito zaporedja $x^{r_1}\, x^{r_2}\, x^{r_3}, \ldots$, ko n raste prek vseh meja. Če je $\alpha > 0$, to gre za $x \geq 0$, za $\alpha < 0$ pa za $x > 0$. Definicija ni odvisna od zaporedja $r_1, r_2, r_3, \ldots$, samo k α mora konvergirati.

Drugi način vpeljave potence x^α za realne eksponente α in za $x > 0$ je možen, ko že dobro poznamo število e:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

in eksponentno funkcijo

$$\exp(x) = e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

ki je ena od osnovnih elementarnih funkcij in jo sestavljajo potence z naravnimi eksponenti. Eksponentna funkcija je definirana za vse realne x, zavzame pa pozitivne vrednosti. Ima inverzno funkcijo $\exp^{-1} = \ln$, to je logaritemsko funkcijo z osnovo e. Potem lahko definiramo za vsak realen eksponent n in vsak $x > 0$ potenco

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)},$$

za $\alpha > 0$ pa vzamemo $0^\alpha = 0$. To lahko naredimo zato, ker $\alpha \ln(x) \to -\infty$, ko $x \to 0_{+0}$ in $e^x \to 0$, ko $x \to -\infty$. Za $\alpha < 0$ pa $\alpha \ln(x) \to \infty$, ko $x \to 0_{+0}$ zato tedaj x^α ne moremo razširiti na $x = 0$.

Odvodi in inverz potenčne funkcije

Da bi se izognili vsem neprijetnostim, bomo odslej uporabljali samo potence x^α za $x \geq 0$ 0 in $\alpha > 0$ ter potence x^α za $x > 0$ in $\alpha < 0$. Ogledali si bomo potenčne funkcije $x \to f(x) = cx^\alpha$, kjer je c pozitivna konstanta. Za $\alpha > 0$ so te funkcije naraščajoče, za $\alpha < 0$ pa padajoče. S tem je poskrbljeno, da $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ za $\alpha > 0$ in $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ za $\alpha < 0$.

Kakorkoli že, odvode znamo izračunati:

$$f'(x) = c\alpha x^{\alpha-1}, f''(x) = c\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, f'''(x) = c\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}.$$

V splošnem je n-ti odvod:

$$f^{(n)}(x) = c\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Navadno definiramo padajočo faktorielo $(\alpha)_n$ s predpisom:

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1).$$

Še posebej postavimo: $(\alpha)_0 = 1$. Zato je

$$f^{(n)}(x) = c(\alpha)_n x^{\alpha-n}$$

$n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Brez težav poiščemo funkciji f inverzno funkcijo. Kot po navadi zapišemo $y = cx^\alpha$ in zamenjamo med seboj x in y, to pomeni $x = cy^\alpha$. Iz te zveze je potem $y = (x/c)^{1/\alpha}$, ker je na splošno $(z^\alpha)^{1/\alpha} = z$ za vsak $z > 0$. S tem imamo par inverznih si funkcij iz $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$ oziroma iz $(0, \infty)$ na $(0, \infty)$, ki sta definirani s predpisoma:

$$f(x) = cx^\alpha, \ f^{-1}(x) = c^{-1/\alpha}x^{1/\alpha}.$$

Potemtakem je inverz potenčne funkcije tudi potenčna funkcija.

Enakost inverza in odvodov

Kdaj za dano naravno število n velja enakost $f^{-1}(x) = f^{(n)}(x)$ za vsak $x > 0$? Problem je obravnavan na več spletnih mestih. Pripomnimo, da koeficient $c(\alpha)_n$ pred potenco $x^{\alpha-n}$ ni vselej pozitiven.

Izenačimo inverz f^{-1} in n-ti odvod funkcije f:

$$c^{-1/\alpha}x^{1/\alpha} = c(\alpha)_n x^{\alpha-n}.$$

Ker mora ta relacija veljati za vsak $x > 0$, morata veljati enačbi:

$$c^{-1/\alpha} = c(\alpha)_n, \ \frac{1}{\alpha} = \alpha - n. \quad (1)$$

To pomeni, da α zadošča kvadratni enačbi

$$\alpha^2 - n\alpha - 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2+4}\right), \ \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(n - \sqrt{n^2+4}\right).$$

Rešitvi sta nasprotno predznačeni iracionalni števili, in sicer velja $\alpha_1 > 0$ in $\alpha_2 < 0$. Njun produkt je po Vietovih pravilih enak -1, vsota pa n. Druga enačba v sistemu (1) ima za posledico relacijo $\alpha_1 - n > 0$.

Za vsak naraven n je $(\alpha_1)_n$ pozitivno število, $(\alpha_2)_n$ pa ne vedno. Vsi faktorji v definiciji $(\alpha_2)_n$ so namreč negativni. Zato je $(\alpha_2)_n$ za sode n pozitivno, za lihe n pa negativno število.

Sedaj lahko izrazimo še koeficient c. Iz prve enačbe v sistemu (1) dobimo

$$c^{1+1/\alpha} = c^{\alpha-n+1} = \frac{1}{(\alpha)_n}.$$

Rešitvi sta zato

$$c_1 = \frac{1}{((\alpha_1)_n)^{1/(\alpha_1-n+1)}}, \ c_2 = \frac{1}{((\alpha_2)_n)^{1/(\alpha_2-n+1)}}.$$

S tem smo našli iskani potenčni funkciji

$$f_1(x) = \frac{x^{\alpha_1}}{((\alpha_1)_n)^{1/(\alpha_1-n+1)}}, \ f_2(x) = \frac{x^{\alpha_2}}{((\alpha_2)_n)^{1/(\alpha_2-n+1)}}.$$

Ne pozabimo: c_2 in f_2 imata smisel za sode n.

V pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu Oxy je pri izbranem n graf dobljene potenčne funkcije simetričen z njenim n-tim odvodom glede na simetralo prvega kvadranta, to je glede na premico $y = x$ (Slike 1, 2, 3).

Z uporabo enačb (1) lahko izračunamo, kje se sekata grafa funkcij f in $f^{(n)}$. Ker sta si to inverzni funkciji, se sekata na premici $y = x$. Za $\alpha > 0$ se sekata v točki $(0, 0)$, za $\alpha < 0$ pa ne. Se pa sekata v točki (ξ, ξ), kjer je $\xi > 0$. Pogoj za presek je

$$f^{-1}(\xi) = c^{-1/\alpha}\xi^{1/\alpha} = \xi,$$

iz česar dobimo

$$\xi = c^{1/(1-\alpha)} = \sqrt[n]{(\alpha)_n}.$$

Za sode n sta rešitvi

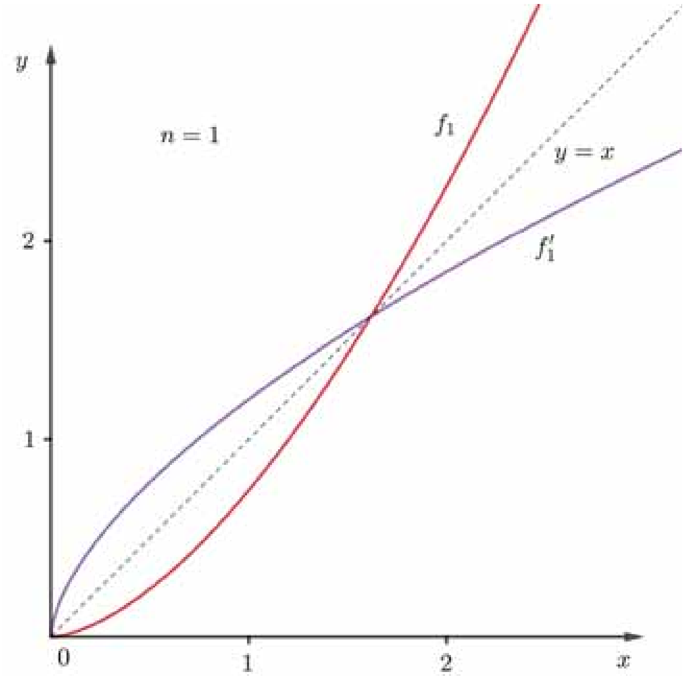
$$\xi_1 = \sqrt[n]{(\alpha_1)_n}, \ \xi_2 = \sqrt[n]{(\alpha_2)_n},$$

za lihe n pa le

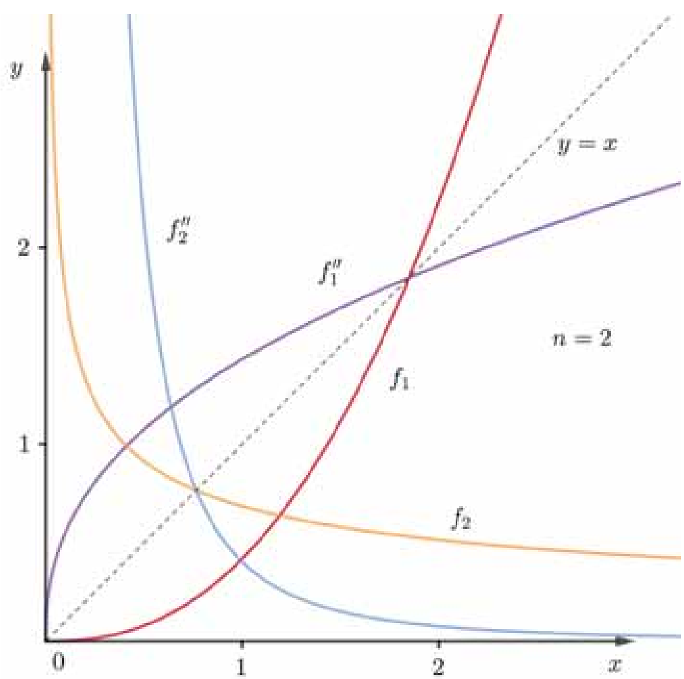
$$\xi_1 = \sqrt[n]{(\alpha_1)_n}.$$

Kovinska razmerja in kovinski pravokotniki

Števili α_1 in α_2, ki nastopata v dobljenih potenčnih funkcijah, srečamo na primer tudi v geometriji in diskretni matematiki. Izražata se kot funkciji naravnega števila n, česar zaradi enostavnih zapisov nismo posebej označevali.



Slika 1: Primer n = 1. Grafa funkcije f_1 in odvoda f_1'.



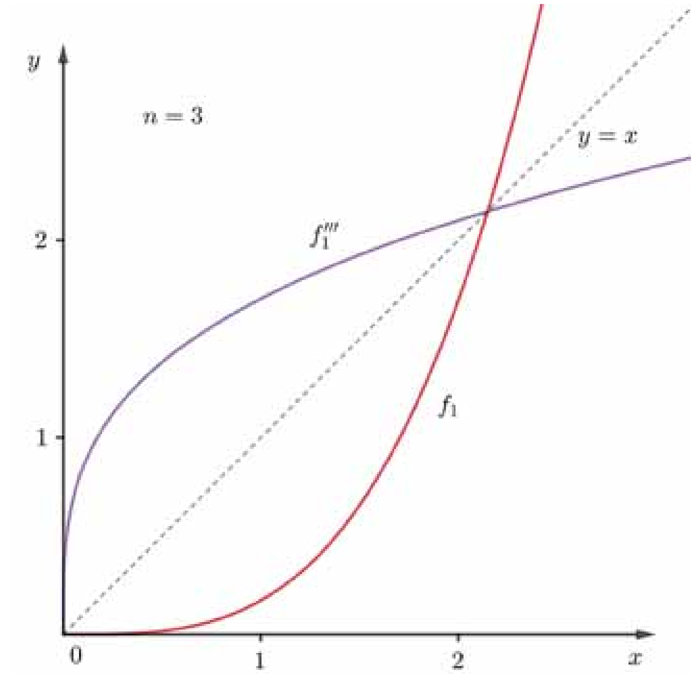
Slika 2: Primer n = 2. Grafi funkcij $f_{1,2}$ in drugih odvodov $f''_{1,2}$.

Sedaj številu α_1 dajmo samostojen pomen. Število α_2 ni posebno zanimivo, ker se tako in tako izraža z α_1 zaradi zveze $\alpha_1 + \alpha_2 = n$.

Število

$$\sigma_n = \frac{1}{2}\left(n + \sqrt{n^2+4}\right)$$

imenujemo *kovinsko razmerje* reda n (več o tem na primer v [2]). Zanj velja zveza $\sigma_n^2 = n\sigma_n + 1$, iz katere sledi $\sigma_n = n + 1/\sigma_n$. Če drugo zvezo uporabimo



Slika 3: Primer n = 3. Grafa funkcije f_1 in tretjega odvoda f_1'''.

kar v njej sami, dobimo:

$$\sigma_n = n + \frac{1}{\sigma_n} = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\sigma_n}} = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{\sigma_n}}}.$$

Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. To pomeni, da smo σ_n uspeli razviti v neskončni verižni ulomek:

$$\sigma_n = n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \ddots}}}.$$

Po navadi ga zapišemo v krajši obliki:

$$\sigma_n = [n; n, n, \ldots].$$

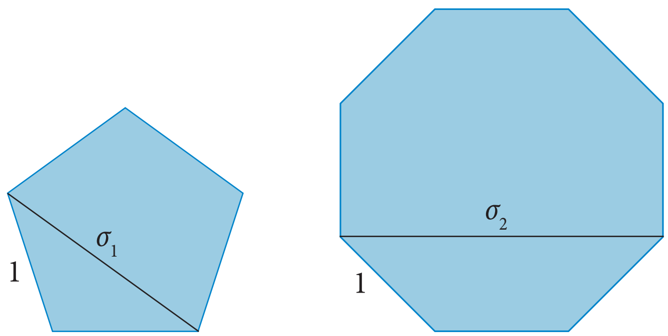
Pred podpičjem je njegov celi del. Za n = 1, 2, 3 imamo

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = [1; 1, 1, \ldots], \\
\sigma_2 &= 1 + \sqrt{2} = [2; 2, 2, \ldots], \\
\sigma_3 &= \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right) = [3; 3, 3, \ldots].
\end{aligned}$$

Po vrsti jih imenujemo zlato, srebrno in *bronasto razmerje,* kar je v skladu z leskom medalje, ki se na športnih tekmovanjih podeljujejo za osvojeno prvo, drugo in tretje mesto.

Pogosto označujejo zlato razmerje s φ ali τ, za katero velja osnovna relacija $\varphi^2 = \varphi + 1$. Zlato razmerje je bilo znano že v antičnih časih, le da so ga imenovali *skrajno in srednje razmerje.* V obdobju renesanse so mu rekli *božansko razmerje.* Zlati pravokotnik je bil za renesančne umetnike najbolj estetski med vsemi pravokotniki. Izraz *zlato razmerje* se je uveljavil šele v 19. stoletju. Več o tem na primer v [1] .

Zlato razmerje $\varphi = \sigma_1$ najdemo v pravilnem petkotniku, kjer sta diagonala in stranica v zlatem razmerju. Prav tako v pravilnem ikozaedru in dodekaedru. Srebrno razmerje σ_2 je v pravilnem osemkotniku. V njem sta srednje dolga diagonala in stranica v srebrnem razmerju (Slika 4). To lahko hitro preverimo.



Slika 4: Pravilni petkotnik in pravilni osemkotnik.

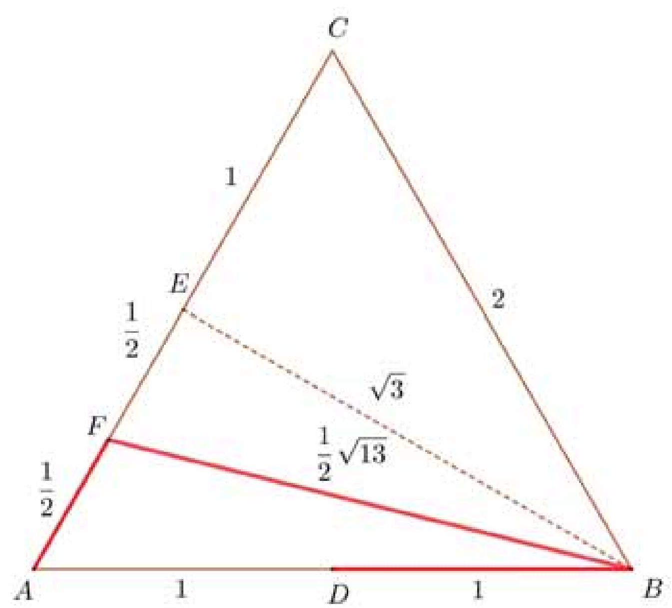
Dokazali so, da bronasto razmerje σ_3 ni v nobenem pravilnem večkotniku razmerje med diagonalo in stranico.

Bronasto razmerje dobimo v enakostraničnem trikotniku *ABC* s stranico 2 kot vsoto dolžin treh daljic (Slika 5). Najprej poiščemo sredini stranic *AB* in *AC*. To sta točki *D* in *E*. Nato poiščemo še sredino *F* daljice *AE*. Za dolžine dobimo:

$$|AB| = 2,\ |BD| = 1,\ |AF| = |FE| = \frac{1}{2},\ |EB| = \sqrt{3},\ |FB| = \frac{1}{2}\sqrt{13}.$$

S tem imamo:

$$|AF| + |FB| + |BD| = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right) = \sigma_3.$$



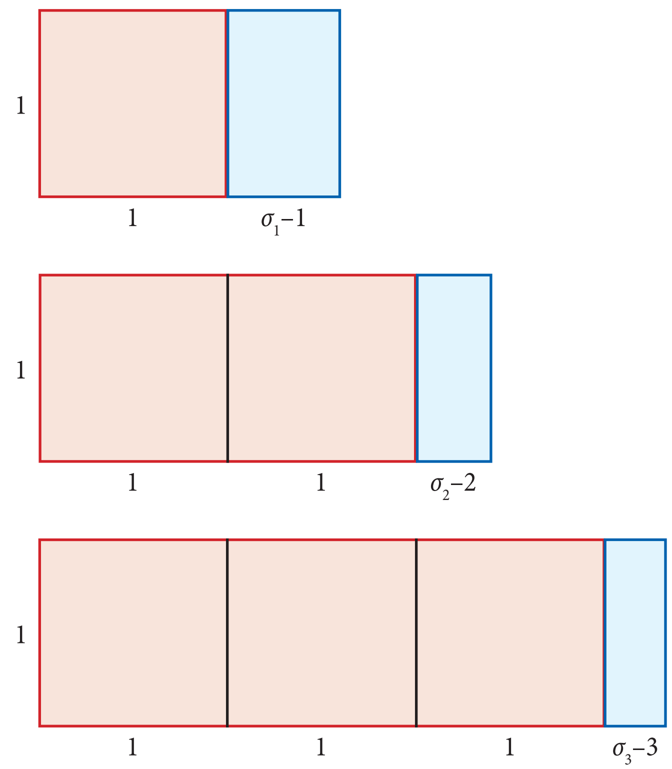
Slika 5: Bronasto razmerje v enakostraničnem trikotniku.

Pokažimo, kako lahko geometrijsko razložimo razmerje σ_n. Ker je $\sigma_n > n \geq 1$, lahko pravokotnik s stranicama σ_n in 1 razrežemo na n enotskih kvadratov ter manjši pravokotnik s stranicama $\sigma_n - n$ in 1. Večji in manjši pravokotnik sta si podobna, ker velja zveza

$$\frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_n - n}{1}.$$

Vsak pravokotnik, ki je podoben *tema* dvema, je *kovinski pravokotnik* reda n.

Na sliki 6 so predstavljeni zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.



Slika 6: Zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.

Ko od kovinskega pravokotnika reda n odstranimo n kvadratov, ostane manjši kovinski pravokotnik reda n. Od tega spet lahko odstranimo n kvadratov in dobimo se manjši kovinski pravokotnik reda n. Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled. S tem dobimo neko samopodobno strukturo, ki spominja na fraktale.

Uporaba GeoGebre

Pri izdelavi slik v prispevku je bila uporabljena GeoGebra. Za računanje padajoče faktoriele $(\alpha)_n$, ki je GeoGebra ne pozna, je bila uporabljena funkcija Γ (za nenegativne cele n je $\Gamma(n + 1) = n!$), s katero izrazimo

$$(\alpha)_n = \frac{\mathbf{\Gamma}(\alpha + 1)}{\mathbf{\Gamma}(\alpha - n + 1)}.$$

Funkcijo Γ v GeoGebri prikličemo z ukazom **gamma**, na primer **gamma**(5), kar nam da 24. Potenco s pozitivno osnovo in realnim eksponentom GeoGebra izračuna brez težav.

Zaključek

Spoznali smo, da obstajajo realne funkcije f, katerih inverz je enak n-temu odvodu funkcije f. Take funkcije so preproste potenčne funkcije. Spoznali smo, da so eksponenti v njihovih izrazih v tesni povezavi s kovinskimi razmerji. Teže pa je najti nepotenčno funkcijo f, katere inverz je enak njenemu n-temu odvodu.

Literatura

[1] Merzbach, U. C., Boyer, C. B. (2011). *A Histor of Mathematics.* New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.

[2] V. M. W. de Spinadel. (1998). *From the Golden Mean to Chaos*, Buenos Aires: Editorial Nueva Libreria.

[3] Vidav, I. (1968). *Višja matematika I.* Ljubljana: DZS.