

# Epidemije

Prof. dr. Matjaž Perc

Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko

---

## Izvleček

Nekatere lastnosti človeškega obnašanja v velikih skupinah so natančno opisljive in napovedljive. V tem smo ljudje, čeprav smo kot posamezniki vsak po svoje posebni in unikatni, precej podobni delcem v snovi. Statistična fizika se je v preteklih dveh desetletjih izkazala kot zelo učinkovita za opisovanje pojavov zunaj klasične fizike. Fizika družbenih sistemov tako proučuje kolektivne pojave, do katerih pride zaradi interakcij med posamezniki, ki se obnašajo kot elementarne enote v večjih socialnih strukturah. V tem članku bomo predstavili enostaven matematični model, ki opisuje širjenje epidemije. Raziskali bomo vpliv strukture omrežja na širjenje epidemije ter pomen samoizolacije za zajezitev širjenja. Članek spremlja tudi uporabniku prijazna simulacija, ki jo je mogoče brez programiranja uporabiti v šoli.

**Ključne besede:** epidemija, omrežje, mali svet, fizika družbe

## Epidemics

### Abstract

Certain characteristics of human behaviour in large groups are describable and predictable. In this regard people, though special and unique as individuals, quite resemble particles in matter. Over the past two decades, statistical physics has proved to be highly effective in describing phenomena outside of classical physics. The physics of social systems studies collective phenomena that occur due to interactions between individuals who act as elementary units in larger social structures. The article will present a simple mathematical model that describes the spread of an epidemic. It will research the impact of the network's structure on the spread of the epidemic and the importance of self-isolation for containing the spread. The article comes with a user-friendly simulation that can be used in school and does not require programming.

**Keywords:** epidemic, network, small world, social physics

---

## Uvod

Čeprav smo kot posamezniki unikatni in redko predvidljivi, raziskave kažejo, da se kolektivno pogosto ne obnašamo zelo drugače od delcev v snovi [1]. Številni vidiki kolektivnega obnašanja v človeških družbah so se namreč izkazali kot presenetljivo predvidljivi in dobro opisljivi z enostavnimi matematičnimi modeli, zato so bile metode statistične fizike prenesene na mnoge družbene pojave in izzive sodobnega časa. Med primeri so promet [2], kriminal [3], širjenje epidemij [4], odklanjanje cepljenja [5], spodbujanje sodelovanja [6], podnebne spremembe [7], prekomerna raba antibiotikov [8] pa tudi iskanje moralnosti [9], če naštejemo samo nekatere.

Zanimivo je, da se morebitne povezave med fiziko in družbo v literaturi pojavljajo že stoletja. Pred več kot 200 leti je francoski politik in ekonomist Henri de Saint-Simon tako med prvimi razmišljal, da bi bilo človeško družbo mogoče opisati z zakoni, ki bi bili sorodni tistim v fiziki [10]. Podobne zamisli je že v 17. stoletju imel angleški filozof Thomas Hobbes, ko je svojo teorijo države utemeljil tudi na zakonih gibanja, še posebej na principu inercije, ki ga je v tistih časih odkril Galileo Galilej [11]. Tako imenovano »nevidno roko«, ki jo je v drugi polovici 18. stoletja predlagal škotski ekonomist Adam Smith, danes lahko ponovno prepoznamo v teoriji družbene in ekonomske samoorganizacije pa tudi samoorganizacije v fizikalnih sistemih zu-

naj ravnovesja [12, 13]. Številni ekonomisti so »nevidno roko« takrat v ekonomiji imeli za tako zanesljivo kot gravitacija [14]. Nadalje, ko so v 19. stoletju razvijali fizikalne zakone materije kot ogromnega kolektiva atomov in molekul, je to navdihnilo tudi statistično obravnavo družbe in odstrlo pogled na predvidljiva povprečja v njej. Prav tako kot lahko naključno gibanje molekul plina v kolektivu opišemo z matematično enostavno plinsko enačbo, je obstajalo upanje, da bi tudi sodobne človeške družbe lahko bile predvidljive kot veliki kolektivi posameznikov. Kot je zapisal Philip Ball [10], je bilo zgodnje družboslovje morda zares ustvarjeno z neizrečenim prepričanjem in vero, da obstaja nekakšna »fizika družbe«.

Kljub tej dolgi in zanimivi zgodovini pa se je ta veja fizike pričela zares razvijati šele tik pred koncem 20. stoletja in nam postregla z nekaterimi fascinantnimi odkritji na stičišču fizikalnih in družbenih ved. K temu razvoju je prispeval napredek v statistiki in teoretični fiziki pa tudi razvoj znanosti o omrežjih [15] in računskega družboslovja [16], ne nazadnje pa tudi neprestane inovacije v računalništvu in informacijski tehnologiji. Rezultat je današnja fizika družbe ali fizika družbenih sistemov [17], ki se v svetu vse bolj uveljavlja kot veda, ki nam lahko pomaga ustvarjati boljši jutri.

Eden od pomembnejših vidikov boljše prihodnosti je tudi boljše obvladovanje in napovedovanje epidemij [18], čemur je posvečen ta članek. V nadaljevanju bomo tako predstavili enostaven matematični model, ki opisuje širjenje epidemije. Še posebej bomo raziskali vpliv strukture omrežja na širjenje epidemije ter pomen samoizolacije za zaježitev širjenja. Članek spremlja tudi uporabniku prijazna simulacija, ki jo je mogoče brez programiranja uporabiti v šoli. Dostopna je na [matjazperc.com/epidemije](http://matjazperc.com/epidemije).

## Matematični model

Širjenje epidemije lahko matematično opišemo z modelom, v katerem je vsakemu posamezniku dodeljeno eno od treh stanj, in sicer dovzeten, okužen in ozdravljen. V angleščini temu modelu pravimo »susceptible-infectious-recovered« ali tako imenovani »SIR model« [4, 5]. Gre seveda za minimalni model, ki ne upošteva človeškega obnašanja in tudi ne mnogih drugih vidikov širjenja epidemije, kot so zaježitveni ukrepi ali samoizolacija.

Kot osnovo za naš model vzemimo kvadratno mrežo  $L \times L$ , kjer je vsak posameznik  $i$  povezan s svojimi štirimi najbližjimi sosedi na vzhodu, zahodu, severu in jugu. Ob času  $t = 0$  naj bo večina posameznikov v stanju dovzeten ( $S$ ), le majhen delež posameznikov na sredini kvadratne mreže pa naj bo v stanju okužen ( $I$ ). Takšno začetno stanje je prikazano na sliki 1 levo zgoraj. Model bomo simulirali z metodo Monte Carlo, ki s pomočjo generatorja naključnih števil izbira posameznike na mreži in njihove sosede ter s ponavljanjem velikega števila elementarnih korakov omogoča vpogled v rešitve tovrstnih modelov. Natančneje, za dokončanje vsakega koraka simulacije Monte Carlo moramo izvesti  $L^2$  naslednjih elementarnih korakov. Najprej z generatorjem naključnih števil naključno izberemo enega posameznika  $i$ . Potem imamo naslednje možnosti: (i) Če je ta posameznik  $i$  v stanju dovzeten, potem prav tako naključno izberemo še enega izmed njegovih štirih sosedov  $j$ . Če je sosed  $j$  v stanju okužen, potem tudi posameznik  $i$  postane okužen z verjetnostjo  $p$ . Kolikor večja je verjetnost  $p$ , toliko hitreje se epidemija širi. Za primer bomo v tem članku vzeli  $p = 0.8$ , čeprav podobne glavne zaključke dobimo tudi z drugimi vrednostmi  $0 \leq p \leq 1$ . Če pa je sosed  $j$  v stanju dovzeten ali ozdravljen, se s posameznikom  $i$  ne zgodi nič. (ii) Če je naključno izbrani posameznik  $i$  v stanju okužen, potem preverimo, ali je od začetka njegove okužbe minil vsaj čas  $T$ , pri čemer se ta čas meri v celotnih korakih simulacije. Če je čas  $T$  minil, postane posameznik  $i$  ozdravljen, sicer pa ostaja okužen. Času  $T$  v angleščini pravimo »recovery time«, torej čas, ki ga posamezniki v povprečju potrebujejo za ozdravitev. Čim daljši je čas  $T$ , tem večji delež populacije se okuži, in nasprotno, čim krajši je čas  $T$ , tem manjši je ta delež. (iii) Če je naključno izbrani posameznik  $i$  v stanju ozdravljen, se ne zgodi nič.

Iz opisanega sledi, da ima znotraj enega celotnega koraka simulacije vsak posameznik v povprečju enkrat možnost, da ga generator naključnih števil izbere in da se ali okuži ali, če je že okužen, ozdravi. Simulacija se konča, ko delež okuženih pade na nič.

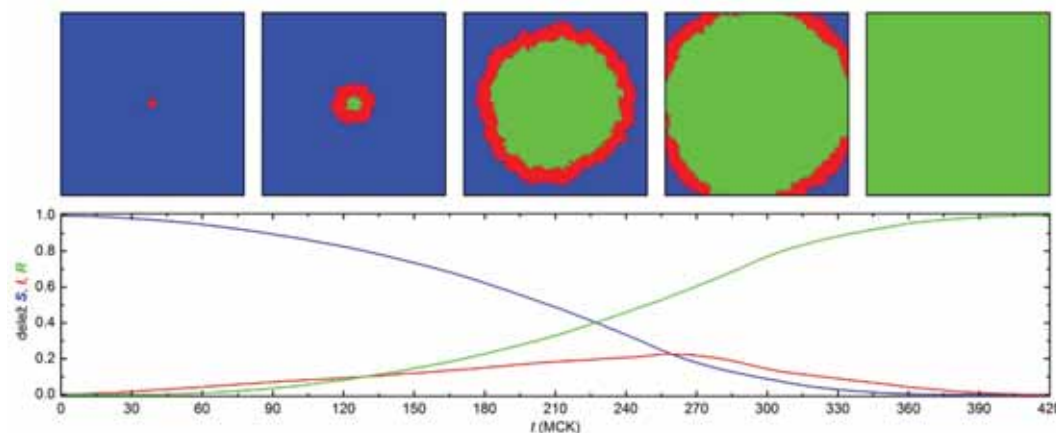
Širjenje epidemije lahko matematično opišemo z modelom, v katerem je vsakemu posamezniku dodeljeno eno od treh stanj, in sicer dovzeten, okužen in ozdravljen.

## Rezultati

Začeli bomo s predstavitvijo rezultatov, ki jih dobimo z verjetnostjo za okužbo  $p = 0.8$  ter časom za ozdravitev  $T = 40$  celotnih korakov simulacije Monte Carlo. Uporabili bomo kvadratno mrežo velikosti  $250 \times 250$  s periodičnimi robnimi pogoji, kjer so ob času  $t = 0$  vsi posamezniki v stanju dovzeten ( $S$ ) (modra), razen 97 posameznikov na sredini mreže, ki so v stanju okužen ( $I$ ) (rdeča), kot je prikazano na sliki 1 levo zgoraj. Spomnimo, da periodični robni pogoji preprosto povežejo vse posameznike na robovih kvadratne mreže z njihovimi sosedi na drugi strani. Tako se znebimo vpliva končne velikosti kvadratne mreže, ki s periodičnimi robnimi pogoji, ob predpostavki dovolj velikega  $L \times L$  (veliko večji od tipičnih vzorcev, ki jih opazimo med simulacijo), deluje kot neskončna. Če sledimo zaporedju prostorskih porazdelitev stanj na sliki 1 zgoraj od leve proti desni, vidimo, da se število okuženih veča. Toda ko čas simulacije  $t$  preseže čas za ozdravitev  $T$  se pojavijo tudi ozdravljeni ( $R$ ) (zeleni). Medtem ko fronta okuženih napreduje proti robovom mreže, se veča tudi delež ozdravljenih, delež dovzetnih pa stalno pada. Na koncu nam ostanejo samo ozdravljeni in simulacija je končana. Časovni potek tega razvoja je z deleži posameznih stanj prikazan na sliki 1 spodaj.

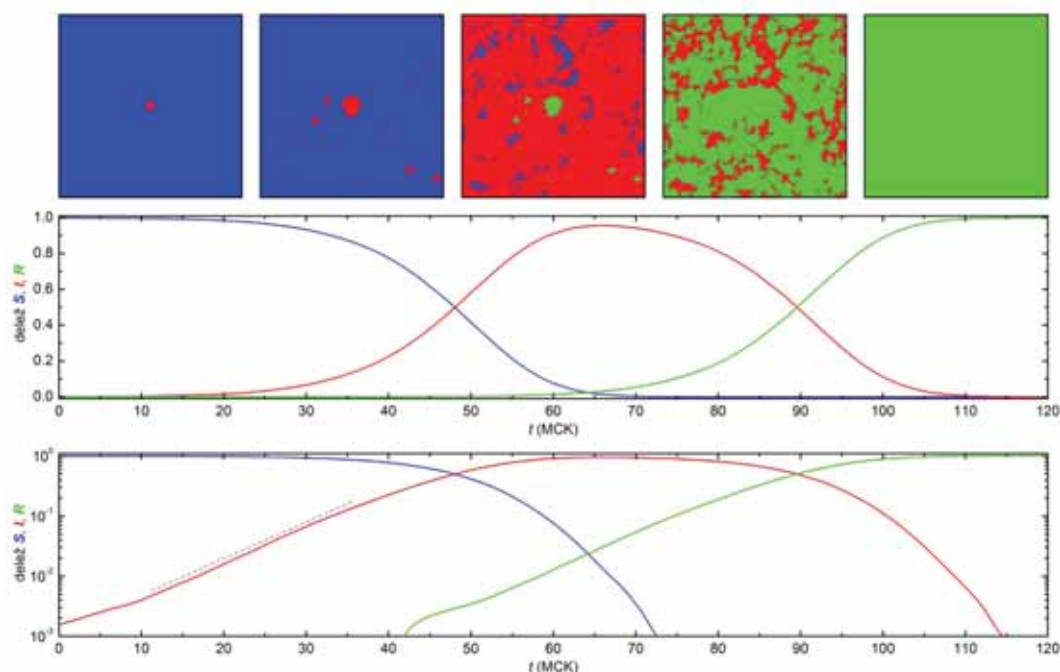
Če zgornjo simulacijo ponovimo tako, da pri enakem času za ozdravitev  $T = 40$  uporabimo manjšo verjetnost za okužbo  $p$ , ugotovimo, da je fronta okuženih nekoliko tanjša, da epidemija napreduje počasneje ter da je vrh deleža okuženih nižji kot pri višjih vrednostih  $p$ . Če pa simulacijo ponovimo tako, da pri enaki verjetnosti za okužbo  $p = 0.8$  uporabimo daljši čas  $T$ , ugotovimo, da se epidemija širi enako hitro, da je fronta okuženih debelejša (približno za enak faktor, kot je daljši čas  $T$ ), in posledično, da je tudi vrh deleža okuženih višji kot pri nižjih vrednostih  $T$ . Bralcu na tem mestu priporočamo, da si naloži uporabniku prijazno simulacijo, dostopno na [matjazperc.com/epidemije](http://matjazperc.com/epidemije), ter sam preizkusi različne možnosti.

Bralcu na tem mestu priporočamo, da si naloži uporabniku prijazno simulacijo, dostopno na [matjazperc.com/epidemije](http://matjazperc.com/epidemije), ter sam preizkusi različne možnosti.



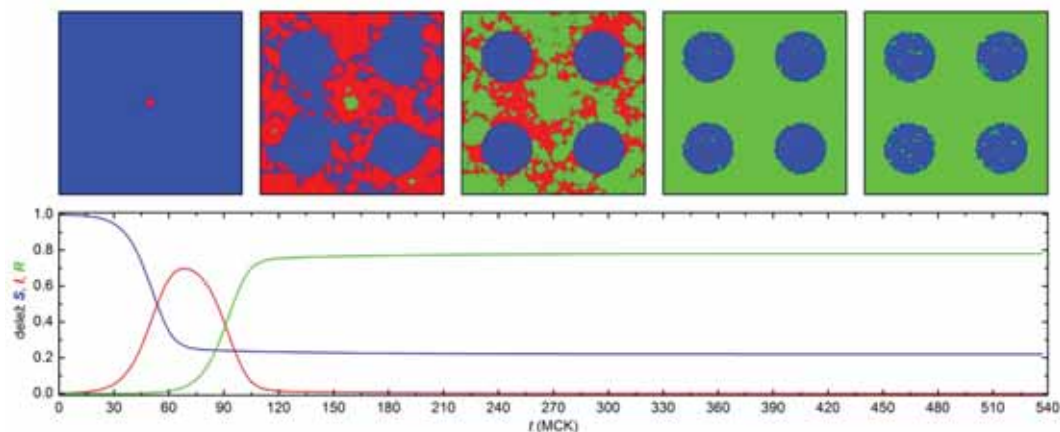
**Slika 1:** Potek epidemije na kvadratni mreži velikosti  $250 \times 250$  s periodičnimi robnimi pogoji, kot ga dobimo z verjetnostjo za okužbo  $p = 0.8$  in časom za ozdravitev  $T = 40$ . Prostorske porazdelitve stanj so prikazane v zgornji vrstici, od leve proti desni ob času  $t = 0, 54, 223, 305$  in  $420$  korakov simulacije Monte Carlo (MCK). Spodaj je prikazan časovni potek tega razvoja z deleži posameznih stanj. Spodaj in zgoraj so naslednje barve in oznake: dovzeten ( $S$ ) (modra), okužen ( $I$ ) (rdeča), ozdravljen ( $R$ ) (zeleni).

Kot vemo, pa kvadratna mreža, ki smo jo uporabljali do zdaj, družbenih omrežij ne opiše prav dobro. Da bi se vsaj malo približali stvarnosti, lahko nek delež povezav  $q$  v kvadratni mreži naključno prevežemo. Tako dobimo bližnjice oziroma neposredne povezave med sicer na mreži oddaljenimi posamezniki. To močno zmanjša povprečno pot, ki jo moramo prehoditi, da med sabo povežemo vse možne pare. S tem dobimo mrežo »malega sveta«, kot sta jo prva teoretično opisala Duncan J. Watts in Steven H. Strogatz leta 1998 [19]. Dejstvo, da lahko v družbenih omrežjih, ki imajo več milijonov posameznikov, med sabo povežemo katerikoli par v povprečju z največ približno šestimi povezavami (tako imenovani »six degrees of separation«), je ena izmed njihovih najpomembnejših lastnosti. Izkaže se, da če naključno prevežemo le en odstotek povezav v kvadratni mreži, že dobimo mali svet [19].



**Slika 2:** Potek epidemije na mreži malega sveta (naključno prevezan en odstotek povezav) velikosti  $250 \times 250$  s periodičnimi robnimi pogoji, kot ga dobimo z verjetnostjo za okužbo  $p = 0.8$  in časom za ozdravitev  $T = 40$ . Prostorske porazdelitve stanj so prikazane v zgornji vrsti, od leve proti desni ob času  $t = 0, 20, 60, 95$  in  $120$  korakov simulacije Monte Carlo (MCK). Na spodnjih dveh slikah je prikazan časovni potek tega razvoja z deleži posameznih stanj na linearni (sredina) in logaritemski skali (spodaj). Črtna siva črta spodaj prikazuje premico s strmino  $0.062 \pm 0.001$ , kar natančno opisuje eksponentno rast s prirastkom  $\approx 0.15$  na en korak simulacije. Barve in oznake so enake kot na sliki 1.

Slika 2 prikazuje širjenje epidemije pod natančno enakimi pogoji kot slika 1, le da smo namesto kvadratne mreže uporabili mrežo malega sveta, ki smo jo dobili tako, da smo naši kvadratni mreži naključno prevezali en odstotek povezav. Kot lahko vidimo, se počasno difuzno širjenje fronte okuženih s slike 1 zamenja z zelo hitrim izbruhom okuženih po celotni mreži. Vrh deleža okuženih nastopi veliko prej in je tudi veliko višji kot na kvadratni mreži. Neko-



**Slika 3:** Potek epidemije na mreži malega sveta (naključno prevezan en odstotek povezav) velikosti  $250 \times 250$  s periodičnimi robnimi pogoji, kot ga dobimo z verjetnostjo za okužbo  $p = 0.8$  in časom za ozdravitev  $T = 40$ . Vpeljana je samoizolacija v štirih krogih s po 3908 posamezniki, kjer je le petodstotna verjetnost, da bo posameznik  $i$  znotraj kroga obiskal svojega naključno izbranega sosedo  $j$ . Prostorske porazdelitve stanj so prikazane v zgornji vrsti, od leve proti desni ob času  $t = 0, 54, 94, 183$  in  $537$  korakov simulacije Monte Carlo (MCK). Spodaj je prikazan časovni potek tega razvoja z deleži posameznih stanj. Barve in oznake so enake kot na sliki 1.

**Kot zanimivost:** povprečna rast novih potrjenih primerov med pandemijo covid-19 je bila v številnih evropskih državah zelo podobna.

liko natančneje: če časovni potek narišemo z logaritemsko skalo deležev posameznih stanj, vidimo, da se delež okuženih veča eksponentno s prirastkom  $\approx 0.15$  na en korak simulacije. Kot zanimivost: povprečna rast novih potrjenih primerov med pandemijo covid-19 je bila v številnih evropskih državah zelo podobna [18]. Tudi na tem mestu bralcu priporočamo, da s simulacijo, dostopno na [matjazperc.com/epidemije](http://matjazperc.com/epidemije), preizkusi različne vrednosti deleža naključno prevezanih povezav v kvadratni mreži in preveri, kako večji in manjši deleži vplivajo na širjenje epidemije.

Kot zadnji primer si pogledjmo še vpliv samoizolacije na širjenje epidemije. Za to na mreži malega sveta s slike 2 definirajmo štiri kroge s po 3908 posamezniki, kjer vpeljemo enako lepetodstotno verjetnost, da bo posameznik  $i$  znotraj kroga obiskal svojega naključno izbranega sosedo  $j$ . V izvorni različici koraka simulacije, in za vse preostale posameznike zunaj omenjenih krogov, je ta verjetnost vselej 100 %, zato je do sedaj sploh nismo omenjali. Slika 3 prikazuje širjenje epidemije pod natančno enakimi pogoji kot slika 2, z razliko od prej omenjenih štirih krogov. Kot lahko vidimo, se približno 22 % vseh posameznikov nikoli ne okuži. Na mreži velikosti  $250 \times 250$  to ustreza 13.750 posameznikom, kar deljeno s štiri pomeni približno 3438. Seveda so vsi ti posamezniki znotraj prej definiranih krogov s po 3908 posamezniki, od koder sledi, da je stroga samoizolacija skoraj 90-odstotno učinkovita pri preprečevanju okužb. Poudariti velja, da to drži tudi za mreže malega sveta, čeprav se učinkovitost samoizolacije manjša z večanjem deleža naključno prevezanih povezav (bližnjic) v kvadratni mreži.

## Zaključek

V članku smo na kratko predstavili zgodovino fizike družbenih sistemov ter izpostavili njen pomen pri trenutnih raziskavah prometa [2], kriminala [3], širjenja epidemij [4], odklanjanja cepljenja [5], spodbujanja sodelovanja [6], podnebnih sprememb [7], prekomerne rabe antibiotikov [8] pa tudi iskanja moralnosti [9]. Fizika družbenih sistemov, ali kar fizika družbe, je danes uveljavljena veja fizike [1], ki ji namenjajo velik del mednarodne periodike pa tudi posebne izdaje v priznanih fizikalnih in interdisciplinarnih revijah [17].

V članku smo kot primer raziskav v fiziki družbe predstavili enostaven matematični model, ki opisuje širjenje epidemije. Glede na to, da je trenutno čas širjenja pandemije covid-19, ki hudo pustoši še posebej v Italiji in Španiji, pa tudi v Veliki Britaniji in Združenih državah Amerike, je to vsekakor zanimiva in aktualna tema [18]. Širjenje epidemije smo matematično opisali z modelom, v katerem je vsakemu posamezniku dodeljeno eno od treh stanj, in sicer dovzeten, okužen in ozdravljen (SIR model) [4, 5]. Pokazali smo, kako se širjenje epidemije pohitri, če samo majhen delež povezav v kvadratni mreži naključno prevezemo tako, da dobimo omrežje malega sveta. Še posebej smo izpostavili eksponentno rast okuženih, ki nastopi v tem primeru, podobno kot lahko danes v stvarnem času ugotovimo za širjenje pandemije covid-19. Prav tako smo pokazali, da je stroga samoizolacija lahko tudi do 90-odstotno učinkovita, čeprav njena učinkovitost pada z deležem bližnjic med daljnimi sosedi na omrežju. Za konec naj še poudarimo, da so ti zaključki v veliki meri neodvisni od smiselnih začetnih pogojev, na primer od začetnega števila okuženih ali od števila posameznikov, ki so samoizolirani, in veljajo tudi za druge vrste regularnih mrež ter družbenih omrežij.

Med podajanjem rezultatov smo bralcu nakazali tudi zanimive poskuse, ki jih lahko izvede sam s pomočjo uporabniku prijazne simulacije, dostopne na [matjazperc.com/epidemije](http://matjazperc.com/epidemije). V zadovoljstvo in veselje nam bo, če bo ta članek bralca navdušil za fiziko družbenih sistemov in če bo ta veja fizike sčasoma našla pot tudi v osnovnošolske in srednješolske učilnice.

Kot lahko vidimo, se približno 22 % vseh posameznikov nikoli ne okuži.

Stroga samoizolacija skoraj 90-odstotno učinkovita pri preprečevanju okužb.



## Viri in literatura

- [1] Castellano, C., Fortunato, S., in Loreto, V. (2009). *Statistical physics of social dynamics*. Rev. Mod. Phys. 81, 591.
- [2] Helbing, D. (2001). *Traffic and related self-driven many-particle systems*. Rev. Mod. Phys. 73, 1067.
- [3] D'Orsogna, M. R. in Perc, M. (2015). *Statistical physics of crime: A review*. Phys. Life Rev. 12, 1.
- [4] Pastor-Satorras, R., Castellano, C., Van Mieghem, P., in Vespignani, A. (2015). *Epidemic processes in complex networks*. Rev. Mod. Phys. 87, 925.
- [5] Wang, Z., Bauch, C. T., Bhattacharyya, S., d'Onofrio, A., Manfredi, P., Perc, M., Perra, N., Salathe, M., in Zhao, D. (2016). *Statistical physics of vaccination*. Phys. Rep. 664, 1.
- [6] Perc, M., Jordan, J. J., Rand, D. G., Wang, Z., Boccaletti, S., in Szolnoki, A. (2017). *Statistical physics of human cooperation*. Phys. Rep. 687, 1.
- [7] Pacheco, J. M., Vasconcelos, V. V., in Santos, F. C. (2014). *Climate change governance, cooperation and self-organization*. Phys. Life Rev. 11, 573.
- [8] Chen, X. in Fu, F. (2018). *Social learning of prescribing behavior can promote population optimum of antibiotic use*. Front. Phys. 6, 193.
- [9] Capraro, V. in Perc, M. (2018). *Grand challenges in social physics: In pursuit of moral behavior*. Front. Phys. 6, 107.
- [10] Ball, P. *Why Society is a Complex Matter* (Springer, Berlin, 2012).
- [11] Windolph, F. L. *Leviathan and Natural Law* (Princeton University Press, Princeton NJ, 1951).
- [12] Mantegna, R. N. in Stanley, H. E. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1999).
- [13] Helbing, D. *Social Self-organization* (Springer, Berlin, 2012).
- [14] Smith, A. *The Theory of Moral Sentiments* (Strand & Edinburgh, U.K., 1759).
- [15] Barabasi, A.-L. (2012). *The network takeover*. Nat. Phys. 8, 14.
- [16] Lazer, D., Pentland, A., Adamic, L., Aral, S., Barabasi, A.-L., Brewer, D., Christakis, N., Contractor, N., Fowler, J., Gutmann, M., et al. (2009). *Computational social science*. Science 323, 721.
- [17] Perc, M. (2019). *The social physics collective*, Sci. Rep. 9, 16549.
- [18] Perc, M., Gorišek Miksić, N., Slavinec, M., in Stožer, A. (2020). *Forecasting COVID-19*. Front. Phys. 8, 127.
- [19] Watts, D. J. in Strogatz, S. H. (1998). *Collective dynamics of 'small world' networks*. Nature 393, 440.