O PREUREDITVAH VRST S KOMPLEKSNIMI ČLENI

ALEKSANDER SIMONIČ

School of Science
The University of New South Wales (Canberra)

Math. Subj. Class. (2010): 40A05

Lévy–Steinitzov izrek za pogojno konvergentne vrste s kompleksnimi členi pravi, da je množica vsot, ki jih dobimo po vseh preureditvah, bodisi premica bodisi kompleksna ravnina. V članku predstavimo podroben dokaz tega izreka.

ON REARRANGEMENTS OF INFINITE SERIES WITH COMPLEX TERMS

The Lévy–Steinitz theorem for conditionally convergent series with complex terms says that the set of sums we obtain after all rearrangements is either a line or the complex plane. In the article we present a detailed proof of this theorem.

Uvod

Spomnimo se, da je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ s kompleksnimi členi pogojno konvergentna, če ni absolutno konvergentna, tj. vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ divergira. Absolutno konvergentne vrste so konvergentne, toda obratno ni vedno res. Priljubljeni primer je *alternirajoča harmonična vrsta*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2. \tag{1}$$

Preureditev členov absolutno konvergentne vrste ne spremeni njene vsote. Formalno definiramo preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ kot vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$, kjer je $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektivna preslikava, tj. π je permutacija množice $\mathbb{N}$. Preureditev pogojno konvergentne vrste pa lahko spremeni njeno vsoto. Ponazorimo to z alternirajočo harmonično vrsto. Vzemimo zaporedoma en pozitivni člen in dva negativna člena:

$$\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2n-1} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) = \log \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Pri izračunu smo člene razdelili na skupine s tremi členi in potem uporabili enakost (1). Očitno je vsota preurejene vrste različna od $\log 2$.

Osrednji rezultat o preureditvah pogojno konvergentnih vrst z *realnimi* členi je zajet v naslednjem izreku.

Izrek 1. *Vsako pogojno konvergentno vrsto z realnimi členi lahko preuredimo v konvergentno vrsto s poljubno vsoto.*

Bernhard Riemann (1826–1866) je v razpravi o razvoju funkcij v trigonometrijske vrste[1] zapisal skico dokaza izreka 1 ter omenil, da je to opazil že Dirichlet v članku iz leta 1829, glej [8, str. 226]. Kakorkoli, danes je rezultat poznan kot *Riemannov preureditveni izrek*. Ideja dokaza je izjemno preprosta. Najprej opazimo, da vrsti, ki ju sestavimo iz pozitivnih in negativnih členov prvotne vrste, divergirata. To omogoča, da z dodajanjem pozitivnih členov vedno presežemo poljubno število, medtem ko z dodajanjem negativnih členov vedno pridemo pod to število. Ker zaporedje členov v vrsti konvergira proti nič, lahko s takim postopkom dosežemo, da preurejena vrsta konvergira proti želeni vrednosti. Kasneje bomo podali dokaz posplošitve tega izreka (posledica 5), za običajni dokaz glej npr. [3, str. 318–320].

Izrek 1 obravnava izključno vrste z realnimi členi. Naj bo $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje kompleksnih števil in

$$\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} : \pi \text{ je permutacija } \mathbb{N} \text{ in } \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} \text{ konvergira} \right\} \subseteq \mathbb{C} \tag{2}$$

množica vsot vseh konvergentnih preurejenih vrst. Lahko je prazna, saj ne obstaja preureditev divergentne vrste s pozitivnimi členi v konvergentno vrsto. Absolutno konvergentne vrste pokažejo, da je ta množica lahko le točka, medtem ko je po izreku 1 lahko tudi premica. Naslednji primer pa pokaže, da je množica (2) lahko kar cela kompleksna ravnina.

Primer 2. Vzemimo pogojno konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(\frac{n\pi}{2}\mathrm{i}\right).$$

Označimo z z_n njene člene. Zaporedje $\{z_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ je sestavljeno iz povsem imaginarnih števil, medtem ko je zaporedje $\{z_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ realno. Vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n-1}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} z_{2n}$ sta pogojno konvergentni. Naj bosta a in b poljubni realni števili. Po izreku 1 obstajata permutacija π_1 množice lihih števil in permutacija π_2 množice sodih števil, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi_1(2n-1)} = \mathrm{i}b$ in $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi_2(2n)} = a$. Torej obstaja permutacija π množice $\mathbb{N}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = a + \mathrm{i}b$. S tem imamo $\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathbb{C}$.

[1] *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, vol. 13, 1854. To je bila Riemannova habilitacijska razprava.

Ali obstaja kakšno zaporedje kompleksnih števil, da je množica (2) še kaj drugega kot le prej našteti štirje primeri? Odgovor je ne!

Izrek 3. *Naj bo* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zaporedje kompleksnih števil. Množica* $\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ *je bodisi prazna bodisi točka bodisi premica bodisi kompleksna ravnina.*

Z drugimi besedami: *množica vsot, ki jih dobimo po vseh preureditvah pogojno konvergentne vrste s kompleksnimi členi, je bodisi premica v kompleksni ravnini bodisi cela kompleksna ravnina.*

Izrek 3 je prvi dokazal **Paul Lévy** (1886–1971) leta 1905 v članku [4], ko je bil še dodiplomski študent na politehniški šoli v Parizu. Lévy je v resnici obravnaval preureditve vrst s členi v končno razsežnem evklidskem prostoru, kjer se rezultat glasi, da je $\mathcal{P}$ bodisi prazna množica bodisi premik linearnega podprostora. **Ernst Steinitz** (1871–1928) je na pobudo E. Landaua podrobno naštudiral Lévyjev članek in v njem našel številne pomanjkljivosti, še posebej pri večrazsežnem primeru, ter v seriji člankov [10, 11, 12] med drugim objavil povsem neodvisen dokaz tega. Groß je iz člankov izluščil bistvene prijeme ter v [1] objavil poenostavljen dokaz. Steinitz–Großov pristop je predstavljen v [7]. Neß je v [5] podal drugačen dokaz izreka 3 z uporabo zanimive posplošitve Riemannovega preureditvenega izreka, glej izrek 4 in posledico 5 v naslednjem razdelku. Ta prispevek bo sledil tej poti.

Morda je zanimivo dejstvo, da kljub naravnosti in starosti izreka 3 dokaz ni vsebovan v Knoppovi monografiji [3, str. 398]. Prav tako rezultat še zdaleč ni tako prepoznaven kot izrek 1. Najverjetneje je glavni razlog relativno zapleten dokaz. Namen tega prispevka je predstaviti pregledni dokaz Lévy–Steinitzovega izreka za vrste s kompleksnimi členi ter ga morda s tem približati bralcu, ki se je pravkar seznanil z Riemannovim preureditvenim izrekom. Za druge rezultate na področju preureditev neskončnih vrst predlagamo še pregledni članek [2].

Posplošitev Riemannovega preureditvenega izreka

Znameniti poljski matematik **Wacław Sierpiński** (1882–1969) je v [9] posplošil izrek 1 na preureditve, ki pustijo pozitivne ali negativne člene vrste na svojem mestu, odvisno od tega, ali je želena vsota večja ali manjša od vsote dane vrste. Ključna metoda v dokazu je naslednji izrek, ki ga dokažemo podobno kot v [5].

Izrek 4. *Naj bo* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *tako zaporedje pozitivnih realnih števil z limito* 0, *da vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira. Vzemimo* $d > 0$. *Potem je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - a_{\pi(n)}\right) = d$$

za neko permutacijo π *množice* $\mathbb{N}$.

Dokaz. Naj bo $\{a_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ tako podzaporedje zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ konvergira. To lahko vedno dosežemo npr. s pogojem $a_{\lambda_n} \leq 2^{-n}$. Označimo z a_{μ_n} preostale člene v $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zapisane v enakem vrstnem redu. Tvorimo novo zaporedje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer je $b_{\lambda_n} = 0$ in $b_{\mu_n} = a_{\mu_n}$. Velja

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_k = \sum_{k=1}^{\lambda_n} b_k + \sum_{k=1}^{n} a_{\lambda_k}$$

za vse $n \in \mathbb{N}$. Ker je zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_k$ navzgor neomejeno, zaporedje delnih vsot $\sum_{k=1}^{n} a_{\lambda_k}$ pa konvergentno, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira. Za $N \in \mathbb{N}$ definirajmo $D_N := -d + \sum_{n=1}^{N} (b_n - c_n)$, kjer bomo določili člene zaporedja $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ z naslednjim algoritmom.

Postavimo $c_1 = 0$ in $\mathscr{N} = \varnothing$ ter za vsak $k \geq 1$ ponavljamo naslednje korake:

(1) Če je $D_k \leq 0$, potem je $c_{k+1} = 0$;

(2) Če je $D_k > 0$, potem:

(2.1) če je $b_{k+1} = a_{\mu_m}$, potem vzamemo $c_{k+1} = b_{k+1}$ in $\mathscr{N}$ nadomestimo z $\mathscr{N} \cup \{m\}$;

(2.2) če je $b_{k+1} = 0$, potem vzamemo $c_{k+1} = a_{\mu_l}$ za

$$l = \begin{cases} \min\left(\bigcup_{j=1}^{\max(\mathscr{N})} \{j\} \setminus \mathscr{N}\right), & \mathscr{N} \neq \varnothing, \\ 1, & \mathscr{N} = \varnothing \end{cases}$$

in $\mathscr{N}$ nadomestimo z $\mathscr{N} \cup \{l\}$.

Najprej se prepričajmo, da je vsak korak v algoritmu izvedljiv. Edini problem bi lahko nastal pri koraku (2.2), saj bi lahko bila množica v $\min\{\cdot\}$ prazna. Toda v tem primeru bi bili vsi neničelni členi zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^{k}$ že vsebovani v $\{c_n\}_{n=1}^{k}$, od koder bi sledilo $D_k < 0$, kar pa v tem koraku ni mogoče.

Naj bo $D_k \leq 0$. Potem je $D_{k+1} = D_k$ natanko tedaj, ko je $b_{k+1} = 0$, sicer imamo $D_{k+1} > D_k$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira, po končnem številu ponovitev koraka (1) vedno pridemo do koraka (2). Recimo, da je k_1 najmanjše tako število. Potem obstaja $l_1 \in \mathbb{N}$, da je

$$D_k \leq \cdots \leq D_{k+k_1-1} \leq 0 < D_{k+k_1} \leq a_{\mu_{l_1}}.$$

Naj bo $D_k > 0$. Opazimo, da ponavljanje koraka (2.1) ne spremeni vsote D_N, toda korak (2.2) jo zmanjša za a_{μ_l}. Ponovno nam divergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zagotavlja, da po končnem številu ponovitev koraka (2) vedno pridemo do koraka (1). Recimo, da je k_2 najmanjše tako število. Potem obstaja tak $l_2 \in \mathbb{N}$, da je

$$D_k \geq \cdots \geq D_{k+k_2-1} > 0 \geq D_{k+k_2} \geq -a_{\mu_{l_2}}.$$

Po prejšnjih dveh odstavkih obstajajo strogo naraščajoča in neomejena zaporedja $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{l_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$ in $\{l_{2,j}\}_{j=1}^{\infty}$ naravnih števil, da za vse $N \in [k_j, k_{j+1}] \cap \mathbb{N}$ in $j \in \mathbb{N}$ velja

$$-a_{\mu_{l_{2,j}}} \leq D_N \leq a_{\mu_{l_{1,j}}}.$$

Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to dokazuje $\lim_{N\to\infty} D_N = 0$ oz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = d. \tag{3}$$

Določiti moramo še ustrezno preureditev vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Vsak neničelni člen zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ se pojavi natanko enkrat v $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ter obratno. Pokazali bomo, kako nadomestiti ničelne člene prejšnjih zaporedij s členi iz $\{a_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Vemo, da je j element množice $\mathscr{L} := \{\lambda_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ natanko tedaj, ko je $b_j = 0$. Recimo, da je za tak $j = \lambda_n$ tudi $c_j = 0$. Potem nadomestimo b_j in c_j z a_{λ_n}. Če pa $c_j \neq 0$, imamo $c_j = a_{\mu_l}$, kjer je μ_l kot v koraku (2.2). Tedaj velja $c_{\mu_l} = 0$. Zato nadomestimo b_j in c_{μ_l} z a_{λ_n}. S takimi nadomestitvami iz zaporedja $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dobimo prvotno zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, zaporedje $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ pa postane $\left\{a_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ za neko permutacijo π množice $\mathbb{N}$. Naj bo $\mathbb{N}_{\leq m} := \{n \in \mathbb{N} \colon n \leq m\}$. Tedaj imamo

$$\sum_{n=1}^{m} \left(a_n - a_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{m} (b_n - c_n) + \sum_{n\in\mathscr{L}_m} a_n - \sum_{n\in\mathscr{L}'_m} a_n,$$

kjer je $\mathscr{L}_m := \mathscr{L} \cap \mathbb{N}_{\leq m}$ in $\mathscr{L}'_m := \mathscr{L} \cap \{\pi(n) \colon n \in \mathbb{N}_{\leq m}\}$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\lambda_n}$ absolutno konvergentna, sta v limiti, ko pošljemo m v neskončno, vsoti zadnjih vrst v zgornji enakosti enaki. Enačba (3) s tem zaključuje dokaz. ∎

Posledica 5. *Imejmo pogojno konvergentno vrsto z realnimi členi in vsoto s ter s_1 in s_2 taki realni števili, da velja $s_1 \leq s \leq s_2$. Potem obstaja preureditev, ki pusti vse negativne člene na svojem mestu in je s_1 vsota preurejene vrste. Obstaja tudi preureditev, ki pusti vse pozitivne člene na svojem mestu in je s_2 vsota preurejene vrste.*

Dokaz. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ pogojno konvergentna vrsta z realnimi členi. Lahko privzamemo $s_1 < s$. Dokazujemo prvi del posledice. Definirajmo množici $\mathscr{N}_1 := \{n \in \mathbb{N}\colon a_n > 0\}$ in $\mathscr{N}_2 := \{n \in \mathbb{N}\colon a_n \leq 0\}$. Imamo

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n \in \mathscr{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} a_n - \sum_{n \in \mathscr{N}_2 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} |a_n| \,.$$

Zaradi pogojne konvergence od tod sledi

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n \in \mathscr{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} a_n = +\infty.$$

Po izreku 4 obstaja permutacija π_1 množice $\mathscr{N}_1$, da velja

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{n \in \mathscr{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} \left(a_n - a_{\pi_1(n)}\right) = s - s_1. \tag{4}$$

Naj bo $\pi(n) := \pi_1(n)$ za $n \in \mathscr{N}_1$ ter $\pi(n) := n$ za $n \in \mathscr{N}_2$. S tem je π permutacija množice $\mathbb{N}$ in

$$\sum_{n=1}^{m} \left(a_n - a_{\pi(n)}\right) = \sum_{n \in \mathscr{N}_1 \cap \mathbb{N}_{\leq m}} \left(a_n - a_{\pi_1(n)}\right).$$

Z upoštevanjem enakosti (4) dobimo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{\pi(n)} - a_n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (s_1 - s) + s = s_1.$$

Drugi del posledice dokažemo podobno. ∎

Natančnejša oblika Lévy–Steinitzovega izreka za vrste s kompleksnimi členi

Izrek 3 pove, kakšne oblike je lahko množica $\mathcal{P}$ iz (2). Naslednji izrek pa je njegova podrobnejša različica, kjer s tremi paroma disjunktnimi pogoji na člene vrste določimo vse možne oblike množice $\mathcal{P}$.

Izrek 6. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konvergentna vrsta s kompleksnimi členi in vsoto s.*

(1) Če obstaja natanko en $\varphi_0 \in [0, \pi)$, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{i\varphi_0}\right\}$ absolutno konvergira, potem velja

$$\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \left\{z \in \mathbb{C}\colon \Re\left\{(z - s)\, e^{i\varphi_0}\right\} = 0\right\}.$$

(2) Če obstajata različna $\varphi_1 \in [0,\pi)$ *in* $\varphi_2 \in [0,\pi)$, *da vrsti* $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_1}\right\}$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right\}$ *absolutno konvergirata, potem velja*

$$\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \{s\}.$$

(3) Če za vsak $\varphi \in [0,\pi)$ *vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ *divergira, potem velja*

$$\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathbb{C}.$$

Ker primeri pokrijejo vse možnosti, je izrek 3 vsebovan v tem izreku. Ker je $\Re\left\{(z-s)e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\} = 0$ natanko tedaj, ko je $z = s + ae^{-\mathrm{i}\varphi_0}$, $a \in \mathrm{i}\cdot\mathbb{R}$, je množica $\mathcal{P}$ iz primera (1) premica. Podobna klasifikacija s skalarnim produktom obstaja tudi v večrazsežnem primeru, glej [7, str. 350].

Ponazorimo uporabo izreka na primeru realne konvergentne vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Naj bo $\varphi \in [0,\pi)$. Potem imamo $\left|\Re\left\{a_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| = |a_n| \cdot |\cos\varphi|$. Če je vrsta pogojno konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{a_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ konvergira natanko tedaj, ko je $\varphi = \pi/2$. Torej imamo $\mathcal{P}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathbb{R}$, kar je ravno vsebina Riemannovega preureditvenega izreka. Če pa je vrsta absolutno konvergentna, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{a_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ konvergira za vsak φ ter s tem $\mathcal{P}\left(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \{s\}$.

Primer 7. Vzemimo pogojno konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{i}\frac{1}{n}\right).$$

Označimo z z_n njene člene in naj bo $\varphi \in [0,\pi)$. Ker je

$$z_n = (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{n}\exp\left(\mathrm{i}\arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

je

$$\left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{n}\left|\cos\left(\varphi + \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right|.$$

Ločimo tri primere: $\varphi \in [0,\pi/2)$, $\varphi \in (\pi/2,\pi)$ in $\varphi = \pi/2$. Naj bo najprej $\varphi \in [0,\pi/2)$. Potem obstajata $N \in \mathbb{N}$ in $\varepsilon > 0$, da je $\varphi + \arctan(1/\sqrt{n}) \leq \varphi + \varepsilon < \pi/2$ za vse $n \geq N$. Torej je $\left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\varphi+\varepsilon)$ za $n \geq N$. Ker je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentna, je po primerjalnem kriteriju tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergentna. Naj bo sedaj $\varphi \in (\pi/2,\pi)$. Potem obstaja $N \in \mathbb{N}$, da za $n \geq N$ velja $\pi/2 < \varphi < \varphi + \arctan(1/\sqrt{n}) < \pi$ in s tem $\left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}|\cos\varphi|$. Odtod spet po primerjalnem kriteriju zaključimo, da $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira. V primeru $\varphi = \pi/2$ imamo $\left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| = 1/n$, kar so členi divergentne harmonične vrste. Sklepamo, da za vsak $\varphi \in [0,\pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira. Izrek 6 zagotavlja $\mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathbb{C}$.

Izkaže se, da je dokaz izreka 6 v primeru (3) najtežji. Pri tem bo koristno vpeljati in študirati pojem poltraka absolutne divergence.

Poltrak absolutne divergence

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta > 0$ definirajmo množico

$$\mathcal{J}(\alpha,\beta) := \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \colon r \in (0,\infty), |\varphi - \alpha| < \beta\right\}.$$

Za $\beta \in (0,\pi)$ ta množica predstavlja odprt kot v kompleksni ravnini z vrhom v 0, kotom 2β in simetralo $\mathcal{L}(\alpha) := \left\{re^{\mathrm{i}\alpha} \colon r \in (0,\infty)\right\}$. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta. Če obstaja $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, da vrsta

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha_0,\varepsilon)} |z_n|$$

divergira za vsak $\varepsilon > 0$, potem pravimo množici $\mathcal{L}(\alpha_0)$ *poltrak absolutne divergence*.[2] Seveda je potem za vsak $k \in \mathbb{Z}$ tudi $\mathcal{L}(\alpha_0 + 2k\pi)$ poltrak absolutne divergence.

Za vrsto iz primera 2 so $\mathcal{L}(0)$, $\mathcal{L}(\pi/2)$, $\mathcal{L}(\pi)$ in $\mathcal{L}(3\pi/2)$ vsi poltraki absolutne divergence. Vsaka pogojno konvergentna vrsta z realnimi členi ima natanko dva poltraka absolutne divergence, $\mathcal{L}(0)$ in $\mathcal{L}(\pi)$, kar je res tudi za vrsto iz primera 7, saj za njene člene velja

$$\arg z_n = \begin{cases} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, & 2 \nmid n, \\ -\pi + \arctan \frac{1}{\sqrt{n}}, & 2 \mid n. \end{cases}$$

Naslednja lema zagotavlja obstoj poltraka absolutne divergence za vsako pogojno konvergentno vrsto.

Lema 8. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta. Recimo, da obstajata $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta > 0$, da vrsta*

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha,\beta)} |z_n|$$

divergira. Potem obstaja $\alpha_0 \in [\alpha - \beta, \alpha + \beta]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_0)$ poltrak absolutne divergence.

[2] Različni avtorji uporabljajo različna imena, npr. »principal direction« v [2], »direction of accumulation« v [6] in »stark Strahl« v [5].

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Naj bo $\Lambda := [\alpha - \beta, \alpha + \beta]$. Recimo, da za vsak $\lambda \in \Lambda$ obstaja $\varepsilon_\lambda > 0$, da vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\lambda, \varepsilon_\lambda)} z_n$ absolutno konvergira. Potem imamo

$$[\alpha - \beta, \alpha + \beta] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\lambda - \varepsilon_\lambda, \lambda + \varepsilon_\lambda)\,. \tag{5}$$

Ker je leva množica v (5) kompaktna, obstaja končna podmnožica $\Lambda_0 \subset \Lambda$, da (5) velja tudi v primeru, ko Λ nadomestimo z Λ_0. S tem imamo

$$\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \beta)} |z_n| \leq \sum_{\lambda \in \Lambda_0} \sum_{z_n \in \mathcal{J}(\lambda, \varepsilon_\lambda)} |z_n| < \infty,$$

kar pa je v nasprotju s predpostavko leme. ∎

V nadaljevanju predpostavimo, da je izpolnjen pogoj (3) iz izreka 6, in z uporabo prejšnje leme pokažemo obstoj poltraka absolutne divergence.

Lema 9. *Recimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta in za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira. Potem za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstaja $\alpha_0 \in \left[\alpha - \frac{\pi}{2}, \alpha + \frac{\pi}{2}\right]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_0)$ poltrak absolutne divergence.*

Dokaz. Lahko opazimo, da po predpostavki v lemi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$, saj imamo $\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\} = -\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}(\varphi - \pi)}\right\}$. Vzemimo $\alpha \in \mathbb{R}$. Opazimo tudi, da je $z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)$ natanko tedaj, ko je $z_n e^{-\mathrm{i}\alpha} \in \mathcal{J}(0, \pi/2)$ oz. $\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\} > 0$. Od tod sledi $\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\} = -\left|\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\}\right|$ natanko tedaj, ko je $z_n \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)$. Če bi bila vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} \left|\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\}\right|$ konvergentna, bi veljalo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\}\right| = -\Re\left\{s e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\} + 2 \sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} \left|\Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}\right\}\right|,$$

kjer je $s := \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. To pa ni mogoče, saj bi bila s tem vrsta na levi strani zgornje enakosti konvergentna. Sklepamo, da vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha, \pi/2)} |z_n|$ divergira. Trditev sedaj sledi iz leme 8. ∎

Trditev 10. *Recimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta in za vsak $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira. Potem za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ obstajata taka $\alpha_1 \in [\alpha - \pi, \alpha]$ in $\alpha_2 \in [\alpha, \alpha + \pi]$, $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$, da sta $\mathcal{L}(\alpha_1)$ in $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltraka absolutne divergence.*

Dokaz. Najprej bomo pokazali, da je množica

$$\mathcal{A} := \{\alpha \colon \mathcal{L}(\alpha) \text{ je poltrak absolutne divergence}\}$$

zaprta. Vzemimo $\varepsilon > 0$ in $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ naj bo konvergentno zaporedje z limito $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Potem obstaja $j \in \mathbb{N}$, da je $|\alpha_j - \alpha| < \varepsilon/2$ in vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha_j, \varepsilon/2)} |z_n|$ divergira. Ker pa je $\mathcal{J}(\alpha_j, \varepsilon/2) \subset \mathcal{J}(\alpha, \varepsilon)$, od tod sledi divergenca vrste $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(\alpha,\varepsilon)} |z_n|$ in s tem $\alpha \in \mathcal{A}$.

Če je $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja $\alpha' \in (\alpha, \alpha+\pi]$, da je tudi $\mathcal{L}(\alpha')$ poltrak absolutne divergence. Recimo, da tak α' ne obstaja in definirajmo

$$\mathcal{B} := \{\alpha_0 \in [\alpha + \pi/2, \alpha + 3\pi/2] \colon \mathcal{L}(\alpha_0) \text{ je poltrak absolutne divergence}\}.$$

Po lemi 9 množica $\mathcal{B}$ ni prazna. Ker je navzdol omejena in zaprta, ima minimum $\widehat{\alpha} > \alpha + \pi$. Po lemi 9 obstaja $\alpha'' \in [(\widehat{\alpha} + \alpha - \pi)/2, (\widehat{\alpha} + \alpha + \pi)/2]$, da je $\mathcal{L}(\alpha'')$ poltrak absolutne divergence. Imamo $\alpha < \alpha'' < \widehat{\alpha} \le \alpha + 3\pi/2$. Sledi $\alpha'' \in \mathcal{B}$ in s tem $\alpha'' \ge \widehat{\alpha}$. Ker pa to ni mogoče, predpostavka o neobstoju α' ni pravilna.

Vzemimo $\alpha \in \mathbb{R}$ in definirajmo

$$\mathcal{C} := \left\{\alpha' \in [\alpha - \pi, \alpha] \colon \mathcal{L}\left(\alpha'\right) \text{ je poltrak absolutne divergence}\right\}.$$

Po lemi 9 množica $\mathcal{C}$ ni prazna. Ker je navzgor omejena in zaprta, ima maksimum α_1. Če je $\alpha_1 = \alpha$, potem $\alpha_2 = \alpha_1$ zadošča trditvi. V nasprotnem primeru po prejšnjem odstavku obstaja $\alpha_2 \in (\alpha_1, \alpha_1 + \pi]$, da je $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltrak absolutne divergence. To nam zagotavlja $\alpha_2 - \alpha_1 \le \pi$. Ker po izbiri α_1 velja še $\alpha_2 \in (\alpha, \alpha + \pi]$, je trditev s tem dokazana. ∎

Trditev 11. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ pogojno konvergentna vrsta.*

(1) Če je $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja tako podzaporedje $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$, da velja $\Re\{z_{\lambda_n}\} > 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\{z_{\lambda_n}\}$ divergira in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_{\lambda_n}\}$ absolutno konvergira.

(2) Če je $\mathcal{L}(\pi)$ poltrak absolutne divergence, potem obstaja tako podzaporedje $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$, da velja $\Re\{z_{\mu_n}\} < 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\{z_{\mu_n}\}$ divergira in vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_{\mu_n}\}$ absolutno konvergira.

Podzaporedji $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ sta disjunktni.

Dokaz. Dokazujemo trditev (1). Izberimo $\varepsilon \in (0, \pi/3)$. Ker zaporedje $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira proti 0 in vrsta $\sum_{z_n \in \mathcal{J}(0,\varepsilon)} |z_n|$ divergira, obstaja končno mnogo členov $z_{\lambda_1}, \ldots, z_{\lambda_{N_1}}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{N_1}$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{N_1} \subset \mathcal{J}(0, \varepsilon)$ in $1 \le \sum_{n=1}^{N_1} |z_{\lambda_n}| \le 2$. Na podoben način lahko vidimo, da obstaja končno mnogo členov $z_{\lambda_{N_1+1}}, \ldots, z_{\lambda_{N_2}}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\lambda_{N_1} < \lambda_{N_1+1} < \cdots < \lambda_{N_2}$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=N_1+1}^{N_2} \subset \mathcal{J}(0, \varepsilon/2)$ in $1 \le \sum_{n=N_1+1}^{N_2} |z_{\lambda_n}| \le 2$. Na ta način konstruiramo strogo naraščajoči zaporedji $\{N_j\}_{j=0}^{\infty} \subset$

$\mathbb{N}_0$ in $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$, da je $N_0 = 0$, $\{z_{\lambda_n}\}_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} \subset \mathcal{J}\left(0, \varepsilon 2^{-j}\right)$ in $1 \leq \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \leq 2$. Iz prvega pogoja dobimo $\Re\{z_{\lambda_n}\} \geq |z_{\lambda_n}| \cos\left(\varepsilon 2^{-j}\right)$ in $|\Im\{z_{\lambda_n}\}| \leq |z_{\lambda_n}| \sin\left(\varepsilon 2^{-j}\right)$ za $n \in \{N_j + 1, \ldots, N_{j+1}\}$. Za $m \in \mathbb{N}_0$ sledi

$$\sum_{n=1}^{N_{m+1}} \Re\{z_{\lambda_n}\} \geq \sum_{j=0}^{m} \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \cos\frac{\varepsilon}{2^j} \geq \sum_{j=0}^{m} \cos\frac{\varepsilon}{2^j} > \frac{m}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Im\{z_{\lambda_n}\}| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=N_j+1}^{N_{j+1}} |z_{\lambda_n}| \sin\frac{\varepsilon}{2^j} \leq 2\sum_{j=0}^{\infty} \sin\frac{\varepsilon}{2^j} < \frac{4\pi}{3},$$

od koder dobimo trditev (1). Dokaz trditve (2) poteka podobno, le da člene z_{μ_n} izbiramo iz $\mathcal{J}\left(\pi, \varepsilon 2^{-j}\right)$. Pri tem sta tako dobljeni podzaporedji disjunktni. ∎

Prejšnji trditvi sta ključni v dokazu primera (3) izreka 6. Najprej opazimo: če je za neko pogojno konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^\infty z_n$ množica $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence, je potem $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence za $\sum_{n=1}^\infty z_n e^{-\mathrm{i}\alpha}$. Trditev 10 bo zagotovila obstoj dveh takšnih poltrakov, medtem ko bo trditev 11 po ustreznih rotacijah priskrbela podzaporedja, na katerih bomo lahko z uporabo izreka 4 izvajali ustrezne preureditve.

Na tem mestu dodajmo še: če je za pogojno konvergentno vrsto množica $\mathcal{L}(\alpha)$ poltrak absolutne divergence za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$, je pogoj (3) izreka 6 izpolnjen. To sledi iz prejšnje opombe in trditve 11. Primer take vrste je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp\left(2\pi \mathrm{i} x n\right),$$

za $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dokaz ni kratek in ga bomo zato izpustili, glej [5, str. 41–42].

Dokaz izreka 6

V tem zadnjem razdelku bomo dokazali izrek 6 in s tem tudi Lévy–Steinitzov izrek za vrste s kompleksnimi členi. Dokaz bomo razdelili na tri dele, v skladu s primeri (1)–(3) v izreku 6.

Dokaz za prvi primer

Po predpostavki izreka obstaja natanko en $\varphi_0 \in [0, \pi)$, da vrsta $\sum_{n=1}^\infty \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}$ absolutno konvergira. Vrsta $\sum_{n=1}^\infty z_n = s$ je v tem primeru pogojno konvergenta, saj bi drugače veljalo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$$

za vsa realna števila φ. S tem je tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0} = s e^{\mathrm{i}\varphi_0}$ pogojno konvergentna. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}$ absolutno konvergira, sledi, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}$ pogojno konvergentna vrsta. Vzemimo

$$s' \in \mathcal{S} := \left\{z \in \mathbb{C}\colon \Re\left\{(z-s)\, e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\} = 0\right\}.$$

Po izreku 1 obstaja permutacija π množice $\mathbb{N}$, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im\left\{z_{\pi(n)} e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\} = \Im\left\{s' e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}.$$

Ker je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}$ absolutno konvergentna, je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_{\pi(n)} e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\} = \Re\left\{s' e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\} = \Re\left\{s e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}. \tag{6}$$

Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = s'$, kar dokazuje $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$. Če je $s' \in \mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, potem obstaja permutacija π množice $\mathbb{N}$, da velja $s' = \sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)}$. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_0}\right\}$ absolutno konvergira, ponovno velja (6) in odtod $s' \in \mathcal{S}$. S tem imamo $\mathcal{S} = \mathcal{P}\left(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$.

Dokaz za drugi primer

Po predpostavki izreka obstajata različna $\varphi_1 \in [0,\pi)$ in $\varphi_2 \in [0,\pi)$, da vrsti $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ absolutno konvergirata, kjer smo definirali

$$\begin{aligned} u_n &:= \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_1}\right\} = \Re\{z_n\}\cos\varphi_1 - \Im\{z_n\}\sin\varphi_1, \\ w_n &:= \Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi_2}\right\} = \Re\{z_n\}\cos\varphi_2 - \Im\{z_n\}\sin\varphi_2. \end{aligned}$$

Če je $\varphi_2 = 0$, je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\{z_n\}$ absolutno konvergentna vrsta. Recimo, da velja $\varphi_2 \neq 0$. Potem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} w_n - u_n\right) = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin\varphi_2} \sum_{n=1}^{\infty} \Re\{z_n\}.$$

Ker je leva stran enakosti absolutno konvergentna, sledi, da je tudi v tem primeru vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\{z_n\}$ absolutno konvergentna.

Če je $\varphi_2 = \pi/2$, je $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_n\}$ absolutno konvergentna vrsta. Recimo, da velja $\varphi_2 \neq \pi/2$. Potem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} w_n - u_n\right) = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\varphi_2} \sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_n\},$$

od koder sledi absolutna konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \Im\{z_n\}$.

Dokazali smo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolutno konvergentna vrsta, torej se po poljubni preureditvi njenih členov vsota ne spremeni.

Dokaz za tretji primer

Po predpostavki izreka za vse $\varphi \in [0, \pi)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira in $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$. Vzemimo $s' \neq s$. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, da velja $s - s' = |s - s'|\, e^{\mathrm{i}\alpha}$. Po trditvi 10 obstajata $\alpha_1 \in [\alpha - \pi, \alpha]$ in $\alpha_2 \in [\alpha, \alpha + \pi]$, da je $\alpha_2 - \alpha_1 \leq \pi$ ter sta $\mathcal{L}(\alpha_1)$ in $\mathcal{L}(\alpha_2)$ poltraka absolutne divergence. Ločimo primere:

(1) $\alpha_2 - \alpha_1 < \pi$;

  (1.1) $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$;

  (1.2) $\alpha_1 = \alpha \leq \alpha_2$;

  (1.3) $\alpha_1 \leq \alpha = \alpha_2$;

(2) $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$.

Vrsta v primeru 7 pokaže, da se (2) lahko zgodi.

Najprej obravnavajmo primer (1). Če velja (1.1), obstajata pozitivni števili d_1 in d_2, da je $s - s' = d_1 e^{\mathrm{i}\alpha_1} + d_2 e^{\mathrm{i}\alpha_2}$. V primeru (1.2) obstaja $d_1' > 0$, da je $s - s' = d_1' e^{\mathrm{i}\alpha_1}$ ter v primeru (1.3) obstaja $d_2' > 0$, da je $s - s' = d_2' e^{\mathrm{i}\alpha_2}$. Podali bomo dokaz samo za primer (1.1), saj sta dokaza v primerih (1.2) in (1.3) podobna. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{-\mathrm{i}\alpha_1}$ je množica $\mathcal{L}(0)$ poltrak absolutne divergence. Po trditvi 11 obstaja podzaporedje $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{z_{\lambda_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = +\infty$ in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\Im\left\{z_{\lambda_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}\right| < \infty \tag{7}$$

Izrek 4 zagotavlja obstoj permutacije π_1 množice $\mathscr{L} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Re\left\{\left(z_{\lambda_n} - z_{\pi_1(\lambda_n)}\right) e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = d_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Im\left\{\left(z_{\lambda_n} - z_{\pi_1(\lambda_n)}\right) e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = 0,$$

kjer ničelnost vsote druge vrste sledi iz (7). Če definiramo $\tilde{\pi}_1(n) := \pi_1(n)$ za $n \in \mathscr{L}$ in $\tilde{\pi}_1(n) := n$ za $n \notin \mathscr{L}$, je $\tilde{\pi}_1$ permutacija množice $\mathbb{N}$, za katero velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n - z_{\tilde{\pi}_1(n)}\right) = d_1 e^{\mathrm{i}\alpha_1}.$$

S podobnim postopkom, le za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\tilde{\pi}_1(n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_2}$ in d_2, lahko pokažemo obstoj permutacije $\tilde{\pi}_2$ množice $\mathbb{N}$, da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(z_{\tilde{\pi}_1(n)} - z_{\tilde{\pi}_2(\tilde{\pi}_1(n))}\right) = d_2 e^{\mathrm{i}\alpha_2}.$$

S tem imamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n - z_{\pi(n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(z_n - z_{\tilde{\pi}_1(n)}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(z_{\tilde{\pi}_1(n)} - z_{\pi(n)}\right) = s - s'$$

za $\pi := \tilde{\pi}_2 \circ \tilde{\pi}_1$. Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\pi(n)} = s'$.

Izrek moramo dokazati še za primer (2), torej naj velja $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$. Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} z_n e^{-\mathrm{i}\alpha_1}$ sta množici $\mathcal{L}(0)$ in $\mathcal{L}(\pi)$ poltraka absolutne divergence. Po trditvi 11 obstajata disjunktni podzaporedji $\{z_{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{z_{\mu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{+} = +\infty$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{+}| < \infty$ ter $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-} = -\infty$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{-}| < \infty$, kjer smo definirali $a_n^{+} := \Re\left\{z_{\lambda_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ in $b_n^{+} := \Im\left\{z_{\lambda_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ ter $a_n^{-} := \Re\left\{z_{\mu_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ in $b_n^{-} := \Im\left\{z_{\mu_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Naj bo $\{z_{\nu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ podzaporedje preostalih členov zaporedja $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, zapisanih v enakem vrstnem redu. Ker je $\Im\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = -\Re\left\{z_n e^{(\pi/2-\alpha_1)\mathrm{i}}\right\}$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Re\left\{z_n e^{\mathrm{i}\varphi}\right\}\right|$ divergira za vsak $\varphi \in \mathbb{R}$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{\pm}| < \infty$, sledi divergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Im\left\{z_{\nu_n} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}\right|$. Po izreku 1 zato obstaja permutacija π_1 množice $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$, da velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Im\left\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = \Im\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n^{+} + b_n^{-}\right). \tag{8}$$

Definirajmo $a_n := \Re\left\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ in $b_n := \Im\left\{z_{\pi_1(\nu_n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Za naravni števili n in m, $n \leq m$, definirajmo $A^{+}(n,m) := \sum_{j=n}^{m} a_j^{+}$ in $A^{-}(n,m) := \sum_{j=n}^{m} a_j^{-}$. Ločimo primera, ko je $a_1 \leq \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ ali $a_1 > \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Recimo, da velja $a_1 \leq \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Potem izberemo naravna števila $m_1 < m_2 < \ldots$ in $k_1 < k_2 < \ldots$ v

$$\begin{aligned}
& a_1 + A^{+}(1, m_1) + a_2 + A^{-}(1, k_1) + a_3 \\
& \quad + A^{+}(m_1+1, m_2) + a_4 + A^{-}(k_1+1, k_2) + a_5 \\
& \quad + \cdots \\
& \quad + A^{+}(m_n+1, m_{n+1}) + a_{2n+2} + A^{-}(k_n+1, k_{n+1}) + a_{2n+3} \\
& \quad + \cdots
\end{aligned} \tag{9}$$

na naslednji način:

(1) $m_1 \geq 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_1^{+} := a_1 + A^{+}(1, m_1) + a_2 > \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\};$$

(2) $k_1 \geq 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_1^{-} := S_1^{+} + A^{-}(1, k_1) + a_3 < \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\};$$

(3) $m_2 \geq m_1 + 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_2^+ := S_1^- + A^+(m_1+1, m_2) + a_4 > \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\};$$

(4) $k_2 \geq k_1 + 1$ je tako najmanjše naravno število, da velja

$$S_2^- := S_2^+ + A^-(k_1+1, k_2) + a_5 < \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\};$$

(5) in tako dalje z $m_{n+1} \geq m_n + 1$, $k_{n+1} \geq k_n + 1$ in

$$\begin{aligned} S_{n+1}^+ &:= S_n^- + A^+(m_n+1, m_{n+1}) + a_{2n+2} > \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}, \\ S_{n+1}^- &:= S_{n+1}^+ + A^-(k_n+1, k_{n+1}) + a_{2n+3} < \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}. \end{aligned}$$

Zgornji koraki so vedno izvedljivi, saj za poljubno naravno število n velja

$$\lim_{m\to\infty} A^+(n,m) = +\infty, \quad \lim_{m\to\infty} A^-(n,m) = -\infty.$$

Pri tem je (9) preureditev vrste $\sum_{n=1}^\infty \Re\left\{z_n e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Konstruirali smo tako permutacijo π množice $\mathbb{N}$, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\limsup_{N\to\infty} \sum_{j=1}^N \Re\left\{z_{\pi(j)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} \leq S_n^+, \quad \liminf_{N\to\infty} \sum_{j=1}^N \Re\left\{z_{\pi(j)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} \geq S_n^-.$$

Velja še

$$\begin{gathered} 0 < S_{n+1}^+ - \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} \leq \max\left\{a_{m_n+1}^+ + a_{2n+2}, a_{m_{n+1}}^+\right\}, \\ \min\left\{a_{k_n+1}^- + a_{2n+3}, a_{k_{n+1}}^-\right\} \leq S_{n+1}^- - \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} < 0, \end{gathered}$$

kar zagotavlja $\lim_{n\to\infty} S_n^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^- = \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$. Torej je

$$\sum_{n=1}^\infty \Re\left\{z_{\pi(n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}.$$

Opazimo, da velja

$$\sum_{n=1}^\infty \Im\left\{z_{\pi(n)} e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\} = \sum_{n=1}^\infty b_n + \sum_{n=1}^\infty b_n^+ + \sum_{n=1}^\infty b_n^- = \Im\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}.$$

Prva enakost velja, ker smo po predpisu (9) v pogojno konvergentno vrsto $\sum_{n=1}^\infty b_n$ dodali člene absolutno konvergentnih vrst $\sum_{n=1}^\infty b_n^+$ in $\sum_{n=1}^\infty b_n^-$, medtem ko druga enakost velja zaradi (8). Od tod sklepamo $\sum_{n=1}^\infty z_{\pi(n)} = s'$. V primeru $a_1 > \Re\left\{s' e^{-\mathrm{i}\alpha_1}\right\}$ dokazujemo podobno, zato podrobnosti prepuščamo bralcu. Dokaz izreka 6 je s tem končan.

Zahvala

Avtor se zahvaljuje Živi Kadunc za prvi komentar in recenzentu za konstruktivne pripombe.

LITERATURA

[1] W. Groß, *Bedingt konvergente Reihen*, Monatsh. Math. Phys. **28** (1917), 221–237.

[2] B. Jasek, *Transformations of complex series*, Colloq. Math. **9** (1962), 265–275.

[3] K. Knopp, *Infinite sequences and series*, Dover Publications, Inc., New York, 1956.

[4] P. Lévy, *Sur les séries semi-convergentes*, Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale **4e série, 5** (1905), 506–511.

[5] W. Neß, *Über die Umordnung von bedingt konvergenten Reihen*, Math. Z. **42** (1937), 31–50.

[6] G. Pólya in G. Szegő, *Problems and theorems in analysis. I*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[7] P. Rosenthal, *The remarkable theorem of Lévy and Steinitz*, Amer. Math. Monthly **94** (1987), 342–351.

[8] B. Riemann, H. Weber, R. Baker, C. Christenson in H. Orde, *Collected papers*, Heber City, UT: Kendrick Press, 2004.

[9] W. Sierpiński, *Sur une propriété des séries qui ne sont pas absolument convergentes*, Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, Série A (1911), 149–158.

[10] E. Steinitz, *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme*, J. Reine Angew. Math. **143** (1913), 128–175.

[11] *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Fortsetzung)*, J. Reine Angew. Math. **144** (1914), 1–40.

[12] *Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. (Schluß.)*, J. Reine Angew. Math. **146** (1916), 1–52.