



## Dva parametra? Mala mal'ca!

**Tine Golež**  
Škofijska klasična  
gimnazija Ljubljana

*Two parameters? No problem!*

### Σ Povzetek

Članek nagovarja učitelja, naj izkoristi tako GeoGebro kot tudi digitalno fotografijo, da posodobi pouk matematike z realističnimi primeri. Pokaže primer uporabe drsnikov v GeoGebri (kot določevalcev parametrov) pri obravnavi vodoravnega meta, ki ga analiziramo s slikami vržene frnikole. Na kratko pa nakaže tudi uporabo parametrov pri iskanju ustrezne deformirane elipse, ki ustreza obrisu jajca.

**Ključne besede:** parabola, realistična matematika, geogebra, modeliranje

### Σ Abstract

*This paper advises teachers to use the GeoGebra, as well as digital photography, to update the teaching of mathematics with realistic examples. The paper presents an example of the usage of sliders in GeoGebra (as an identifier of parameters) in the treatment of the horizontal throw, which we analyse with the help of photographs of thrown marble. The paper also briefly reveals the usage of parameters in searching for the appropriate deformed ellipse which corresponds to the contour of the egg.*

**Key words:** parable, realistic mathematics, geogebra, modelling

## $\alpha$ Uvod

V drugem letniku srednje šole dijaki kar podrobno spoznajo parabolo. Narišejo veliko parabol in jih morda še pri fiziki (vodoravni met) povežejo z dogajanjem v naravi. A roko na srce; veliko primerov iz naših učbenikov je pravzaprav takih, kot jih najdemo v stoletja starih učbenikih. Gre za naloge v stilu: Določi parameter  $a$  v paraboli  $y = 2x^2 - ax + 6$  tako, da bo potekala skozi točko  $(3, -5)$ . So pač tako osnovne in poučne, da bodo še dolgo podane kot primeri za parabole.

Smiselno se je vprašati, kako dogajanje iz vsakdanjega sveta povezati z matematiko. Eden izmed takih primerov realistične matematike je odboj žoge od tal [1]. Pokažimo, kako nam pri »matematizaciji« pomaga GeoGebra. Dokler namreč parabole le ročno rišemo, je govorjenje o dveh parametrih prehud zalogaj. Prav GeoGebra pa nudi preprosto seznanitev z vlogo kar dveh parametrov pri modelizaciji opazovanega pojava. Če ravnokar zapisani stavki zvenijo nekoliko abstraktno, jih bo nadaljevanje tako prizemljilo, da bodo razumljivi tudi za vaše dijake.

## $\beta$ Slike

Denimo, da nam je nekdo podaril pet fotografij. Uporabil je hitroslikovni aparat, ki posname 30 slik na sekundo. Ob tem nam je zastavil vprašanje: določi točko, s katere je v vodoravni smeri poletela frnikola, ki je na fotografijah (slike 1 do 5).

Ker nam je darovalec fotografij zaupal, da gre za frnikolo, smemo upor zrak zanemariti. Očitno je tudi, da je bil fotoaparatus stoji, hkrati pa goriščna razdalja ni bila prav majhna. Če bi bila, bi bila



[Slika 1] Frnikola, ki je bila vržena nekje z leve, že leti nad metrom.



[Slika 2] Minila je 1/30 sekunde in frnikola se je pomaknila naprej in navzdol.



[Slika 3] Frnikola nadaljuje svoj let.



[Slika 4] *Let se nadaljuje.*



[Slika 5] *Je že blizu tal.*

zgornji in spodnji rob knjige, ki je na tleh, znatno različno dolga. Prav to zagotavlja, da popačenja niso velika in da se bo dalo kar nekaj pomembnih podatkov izmeriti s slik. Da je naloga sploh izvedljiva, nam je na tla postavil še merilni trak. Skoraj točno nad trakom je letela kroglica in tako je za bistro glave dovolj vidnih in skritih podatkov, da odgovorijo na zastavljeno vprašanje.

## δ Teorija

Če bi bilo v levem zgornjem oglišču slike izhodišče desnega kartezičnega koordinata-

tnega sistema in bi od tam poletela frnikola v vodoravni smeri, bi se koordinati frnikole spreminjali tako:

$$x = v_0 t$$

in

$$y = -\frac{gt^2}{2}$$

Pri tem je  $v_0$  začetna hitrost frnikole in  $g$  gravitacijski pospešek. A obstaja resen dvom, da je frnikola začela svoj polet prav tam. Pa prestavimo izhodišče koordinatnega sistema v začetno točko metrskega traku. Tako bo vsaj os  $x$  že imela ustrezno merilo (fotografija 6). Fotografijo odpremo v »Slikarju« in jo močno povečamo. Zlahka preberemo, da koordinatno izhodišče ustreza pikslu z oznakama (478, 1852), oznaka na metru (40 cm) pa pikslu (1270, 1582). Od tod izračunamo, da en piksel pomeni 0,505 milimetra.

Sedaj moramo dopolniti enačbi za lego frnikole v odvisnosti od časa. S slik ni težko ugotoviti, da je bila frnikola v trenutku  $t = 0$  levo od izhodišča. Ta razdalja v smeri  $x$  bo parameter  $p$ , ki ga moramo odšteti od koordinate  $x$ .

$$x = v_0 t - p$$



[Slika 6] *Izbrali smo koordinatni sistem z izhodiščem v začetni točki metra.*

Koordinata  $y$  pa je bila v začetnem trenutku (in v vseh ostalih, saj se frnikola ni zarila v tla) pozitivna. Ker višino pogosto označujemo s črko  $h$ , to črko uporabimo tudi tokrat:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}$$

Iz enačbe za koordinato  $x$  izrazimo čas in ga vstavimo v enačbo za koordinato  $y$ . Dobimo:

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} (x + p)^2 \quad (1)$$

Vse je pripravljeno, sedaj se lotimo fotografij.

## ε Analiza fotografij in izračun

Velika povečava fotografij omogoča, da zares natančno določimo lego frnikole na vsaki sliki. Piksle preračunamo v milimetre oziroma metre. Koordinate frnikole na (prvih) petih zaporednih slikah so se spreminjale tako, kot kaže tabela. Gre za koordinatni sistem, ki je narisana na sliki 1. Upoštevali smo, da je časovni razmik med zaporednima fotografijama 1/30 sekunde, saj je aparat posnel 30 fotografij na sekundo.

| $t$ [s] | $x$ [m] | $y$ [m] |
|---------|---------|---------|
| 0       | 0,057   | 0,394   |
| 0,033   | 0,195   | 0,350   |
| 0,066   | 0,331   | 0,295   |
| 0,100   | 0,461   | 0,228   |
| 0,133   | 0,600   | 0,151   |

[Preglednica 1] Tako so se spreminjale koordinate središča frnikole. Trenutek 0 je za nas kar slika 1.

Ker gre v vodoravni smeri (smer osi  $x$ ) za gibanje s konstantno hitrostjo, ki je ob zane-

marljivem uporabi zraka kar enaka začetni hitrosti, lahko začetno hitrost izračunamo kot:

$$v_0 = \frac{0,600m - 0,057m}{0,133s} = 4,07 \frac{m}{s}$$

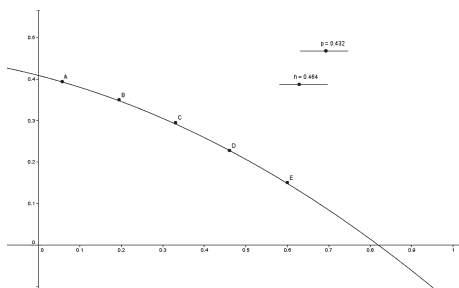
Upoštevamo, da je gravitacijski pospešek  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$  in enačbo (1) zapišemo kot:

$$y = h - 0,296(x + p)^2 \quad (2)$$

Enot nismo pisali. Za vse smo uporabljali osnovne enote, tako da bosta obe koordinati v metrih.

Pred nami je torej kvadratna funkcija z dvema parametroma. Prvi parameter ( $h$ ) pomeni višino izstrelišča, drugi ( $p$ ) pa odmik izstrelišča v levo glede na izbrano koordinatno izhodišče. Matematično gledano je to izhodišče teme parabole, katere odsek sovпада s tirom gibanja frnikole. Obliko parabole določata gravitacijski pospešek in začetna hitrost. Seveda pa je na ravnini neskončno takih parabol. Z določitvijo parametrov  $p$  in  $h$  pa bomo iz te družine izbrali tisto parabolo, ki bo – v okviru natančnosti ocenjevanja – potekala skozi koordinate, ki označujejo lege frnikole na petih slikah.

Točke vnesemo v GeoGebro, kamor tudi prepišemo funkcijo  $y(x)$  in definiramo oba parametra kot drsnika. Pri tem ni treba pretiravati s širino intervala, saj za začetno višino povsem upravičeno izberemo vrednosti med 0,4 m in enim metrom, za premik v levo pa med 0 in enim metrom ali kaj takega. Z drsnikom spreminjamo parametra toliko časa, da se parabola lepo prilega izmerjenim koordinatam, ki jih predstavljajo točke od A do E. Izkaže se, da je primeren korak za drsnik 0,002, kar predstavlja dva milimetra v stvarnem svetu.



[Slika 7] S spreminjanjem parametrov smo našli tisto parabolo, ki »ustreza« danim točkam.

Z nastavitvijo parametrov smo ugotovili, da je bilo izhodišče poleta frnikole okoli 43 cm levo od koordinatnega izhodišča in okoli 46 cm nad koordinatnim izhodiščem; koordinati začetne lege poleta frnikole sta torej bili:  $x = -0,43$  m in  $y = 0,46$  m. To sta koordinati temena parabole, saj je tir gibanja pri vodoravnem metu del parabole, ki se začne v temenu.

Spodobi se, da rezultat preverimo po neodvisni poti. Darovalec slik je mislil tudi na to. V resnici nam je do sedaj podaril pet na levi strani odrezanih slik, da nismo mogli videti, kje je frnikola začela svoj polet. Sedaj nam podarja še eno celotno sliko.

Fotograf vseh teh slik je na otroški stol dal dve knjigi in tako s hrbitiščema knjig ustvaril kanal, po katerem je s prstom potisnil frnikolo-



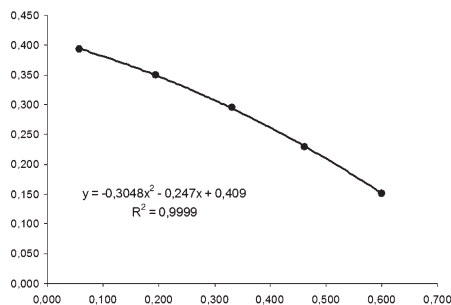
[Slika 8] Ker smo dobili tudi neodrezano sliko, lahko še neposredno s slike (piksli!) ugotovimo začetno točko vodoravnega poleta frnikole.

lo. Prav zato je frnikola letela dokaj točno nad merilnim trakom. Ker imamo na slikah tudi merilni trak, lahko z merjenjem po sliki potrdimo, da je s parametroma določeno izhodišče poleta res (v okviru razumne natančnosti) enako dejanskemu. Na sliki je ta točka označena s križcem, gre za rob sedala otroškega stola.

## γ In še po dveh drugih poteh

Priznati moramo, da se lahko enačbe (2) oziroma iskanja vrednosti parametrov lotimo še po drugih poteh. Najprej v enačbo vstavimo koordinati prve točke, potem še druge. Tako dobimo dve enačbi z dvema neznankama. Enačbi med sabo odštejemo in s tem se znebimo parametra  $h$ , tako da lahko izračunamo parameter  $p$ ; nato še izračunamo parameter  $h$ . Tak pristop je povsem v redu, če bi imeli popolnoma natančne podatke. Tiste matematične naloge, ki niso iz realnega sveta pač pa iz sveta idej, bi nas po tej poti pripeljale do pravega rezultata. Naše koordinate pa so obremenjene z neko naključno napako odčitavanja. Zato bo parameter  $p$  lahko le 0,40 ali celo 0,47, odvisno od tega, kateri dve točki (katera dva para koordinat lege) izberemo. S spreminjanjem parametrov, s katerima smo izbrali najbolj lepo prilagajajočo se parabolo, smo na oko poiskali povprečje vseh teh vrednosti.

In še druga pot. Tokrat delo prepustimo enemu izmed programov, ki išče prilagoditveno funkcijo. V Excelu zahtevamo, da program skozi točke izračuna in nariše »trendno črto« (tako pač Excel poimenuje prilagoditveno krivuljo) v obliki polinoma druge stopnje. Seveda ne smemo zahtevati, da gre polinom skozi koordinatno izhodišče; vsekakor pa želimo, da program izpiše enačbo, saj bomo iz koeficientov tega polinoma izračunali naša parametra.



[Slika 9] Excel je izpisal enačbo polinoma druge stopnje, ki ustreza danim koordinatam.

Ko enačbo (1) preuredimo, dobimo izraz:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 - 2 \cdot \frac{g}{2v_0^2} px + \left( h - \frac{g}{2v_0^2} p^2 \right)$$

Sedaj se vidi, da na obliko parabole vplivata le gravitacijski pospešek in začetna hitrost, medtem ko parametra določata premik te parabole iz koordinatnega izhodišča.

Vstavimo začetno hitrost in gravitacijski pospešek ter dobimo:

$$y = -0,296x^2 - 0,592px + (h - 0,296p^2)$$

Upoštevamo enačbo prilagoditvene krivulje, ki jo je izračunal Excel, kar da:

$$-0,247 = -0,592p$$

Od tod sledi, da je  $p = 0,417$ . Izračunamo, da je  $h = 0,460$ . Enota obeh zapisov je meter. Vrednosti se le malo razlikujeta od tistih, ki smo ju dobili z ročnim prilagajanjem parametrov.

## η Dodatna namiga

Nalogo lahko zastavimo še drugače. Zamolčimo časovni interval med slikami, hkrati pa damo poleg slik 1–5 še sliko 8. V tem primeru iščemo en sam parameter, začetno hitrost. Pri tako zastavljeni nalogi bi izho-

dišče koordinatnega sistema postavili v začetno lego frnikole. Teme parabole bi bilo v koordinatnem izhodišču, iskali bi parabolo, ki poteka skozi dane koordinate. V igri bi bil en parameter, začetna hitrost (gravitacijski pospešek poznamo):

$$y = -\frac{9,81}{2v_0^2} x^2$$

V GeoGebri bi imeli en sam drsnik, drsnik  $v_0$ . Prilagajali bi ga, dokler ne bi točke ležale na paraboli.

Zanimiva je tudi naloga, ko fotografijo jajca prilepimo v GeoGebro. To storimo tako, da sta skrajni točki jajca na vodoravni osi ravno nasprotni vrednosti. S tem je določena velika polos, ki je v danem primeru 2,88. Potem iščemo parametra B (gre za malo polos elipse na kvadrat) in C. Parameter B »niža« in »viša« elipso, medtem ko parameter C določa nesimetričnost te parabole (slika 10). Snov je primerna za tretji letnik, saj zabavno nadgradi obravnavo elipse. Nalogo pa lahko nadgradimo še z integralom in tako isti primer obravnavamo še v četrtem letniku, ko z vrteninami računamo prostornine teles [2]. Zgornji obris jajca ustreza funkciji:

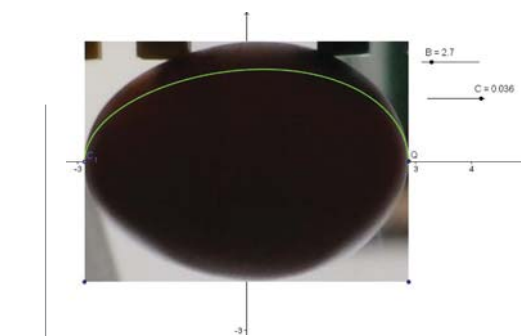
$$y = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{8,2944}\right)} B \left( \frac{1 + Cx}{1 - Cx} \right)$$

Ko z drsnikoma izberemo ustrezni vrednosti za parametra, se »deformirana elipsa« lepo ujema z zgornjim obrisom jajca (slika 11).

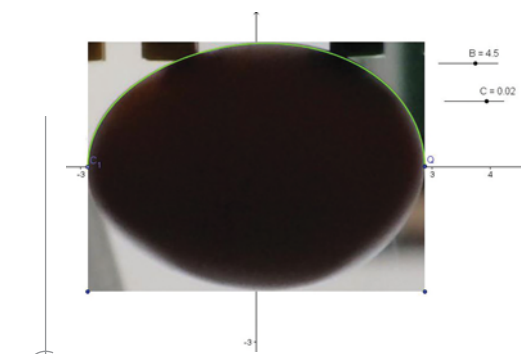
## λ Sklep

Po vsej verjetnosti kar veliko učiteljev uporablja GeoGebro pri pouku. Morda mnogi tudi pokažejo, kako parametri/koefficienti v kvadratni funkciji vplivajo na sliko funkcije, na obliko in lego parabole.





[Slika 10] Dva parametra, ki ju spreminjamo z dvema drsnikoma v GeoGebri, deformirata elipso v jajčni obris. Parameter  $B$  bo treba še nekoliko povečati, medtem ko bo treba parameter  $C$  zmanjšati.



[Slika 11] Z ročno nastavitvijo parametrov (lahko še povečamo število decimalnih mest) smo dobro »ujeli« zgornji obris jajca. Zlahka mu dodamo še spodnjega.

Pristop, ki je nakazan v tem članku, pa ponuja nekaj bolj svežega. Res je, da se da z različnimi matematičnimi programi skozi izmerke »nafitati« (skoraj) poljubno krivuljo, ki ustreza funkciji, v kateri je več parametrov; hkrati nam tudi izračuna te parametre. Ker pa se je smiselno najprej snovi lotiti na kvalitativni ravni, pa je prilagajanje parametrov z drsniki dejavnost, ki naj najde svoj prostor v srednjih šolah. Vsekakor velja, da moramo najprej poznati zakonitost, izraženo z enačbo (kvadratna funkcija v našem primeru), potem pa z določitvijo parametrov izvemo še kaj zanimivega o pojavu – v našem primeru o štartni legi frnikole. Prava zakonitost je uspešna tako pri interpolaciji kot ekstrapolaciji, pa še z dodatnimi informacijami nam postreže [3]. V navedenem viru tako najdete enačbo, ki opisuje zaustavljanje izstrelka zračne puške v vodi. V igri sta dva parametra, ki ju lahko določimo z dvema drsnikoma v GeoGebri.

Opisani primer je vzorec, ki naj služi kot »pripravljena jed« in tudi kot navdih tako za različice tega primera kot tudi kot zgled za mnoge druge primere, ki še čakajo na vašo domišljijo v neskončnem svetu idej inovativnega pouka.

### δ Viri in literatura:

1. M. Rugelj in T. Golež, *Matematizacija odboja žoge za drugošolce in maturante*, Fizika v šoli, 15 (2009), str. 84–91
2. T. Golež, *Prizemljitev infinitezimalnega računa*, Zavod sv. Stanislava, 2012
3. G. Bregar in T. Golež, *Strel v vodo*, Fizika v šoli, 15 (2009), str. 41–46