PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **15** (1987/1988)
Številka 1
Strani 28–33

Marjan Jerman:

REŠEVANJE ENAČB Z METODO ZAPOREDNIH PRIBLIŽKOV

Ključne besede: računalništvo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/15/869-Jerman.pdf

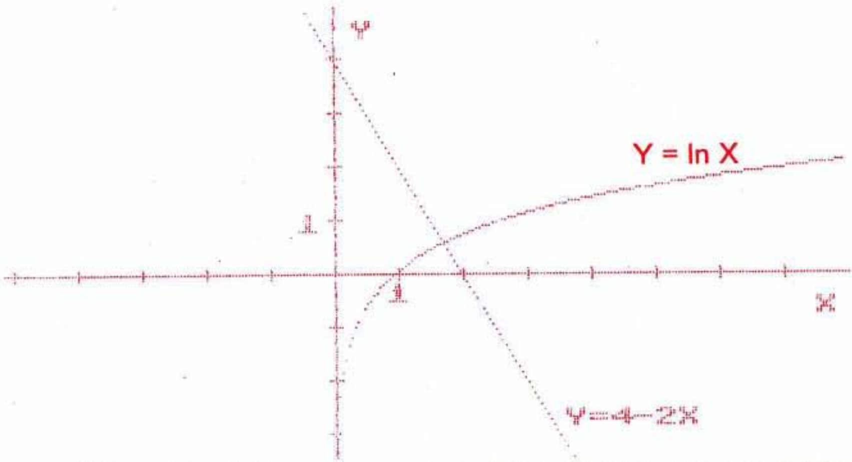
REŠEVANJE ENAČB
Z METODO ZAPOREDNIH PRIBLIŽKOV

Nekaterih enačb (npr. $2x - 4 + \ln x = 0$) ne moremo rešiti po običajni poti. Pomagamo si z iteracijskimi metodami. To so metode, ki s ponavljajočim se procesom dajejo vedno boljše približke korenov enačb.

Pri reševanju nam bo koristil kalkulator ali računalnik.

Pa si poglejmo, kako poteka iteracijska metoda. Za zgled vzemimo kar zgoraj omenjeno enačbo $2x - 4 + \ln x = 0$. Malce jo preoblikujmo in že imamo $\ln x = 4 - 2x$.

Pa naj bo $f(x) = \ln x$ in $g(x) = 4 - 2x$. Narišimo grafa teh dveh funkcij; sekata se v točki, katere abscisa je rešitev naše enačbe.



Približno rešitev lahko preberemo iz grafa ($x = 2$), vendar nas tako dobljena rešitev s svojo natančnostjo ponavadi ne zadovolji.

Zato uberemo drugo pot:

1. Enačbo $2x - 4 + \ln x = 0$ zapišimo v obliki $x = h(x)$, npr. $x = 2 - (\ln x)/2$.
2. Iz grafa preberemo približno rešitev ($x = 2$). To je naš prvi približek. Recimo mu x_0.
3. Izračunajmo vrednost $h(x_0)$:
   $h(x_0) = h(2) = 2 - (\ln 2)/2 = 1{,}65342641$
   To je naš novi približek. Recimo mu x_1.

4. Vzemimo novi približek in ravnajmo z njim kot s prvotnim:

$x_0 = 2$
$x_1 = 1{,}65342641$
$x_2 = 1{,}74857513$
$x_3 = 1{,}72059938$
....
$x_{15} = 1{,}72685041$
$x_{16} = 1{,}72685041$

Približki so čedalje natančnejši. Ko bodo natančni že na osem decimalnih mest, si z navadnim kalkulatorjem ne bomo mogli več pomagati. Trdil bo, da je $x_n = x_{n+1}$. Pa nič zato, tudi mi bomo čisto zadovoljni s takim približkom.

Ko je torej x_n na želeno število decimalk enak x_{n+1}, lahko postopek končamo.

(Pri fiziki bi bili zadovoljni že z x_3.)

Postavi pa se nam vprašanje, ali je ta metoda vedno uspešna.

Žal ni. Uspešna je le v primeru, ko je graf funkcije $h(x)$ manj strm kot premica $y = x + n$ $(y = -x + n)$.

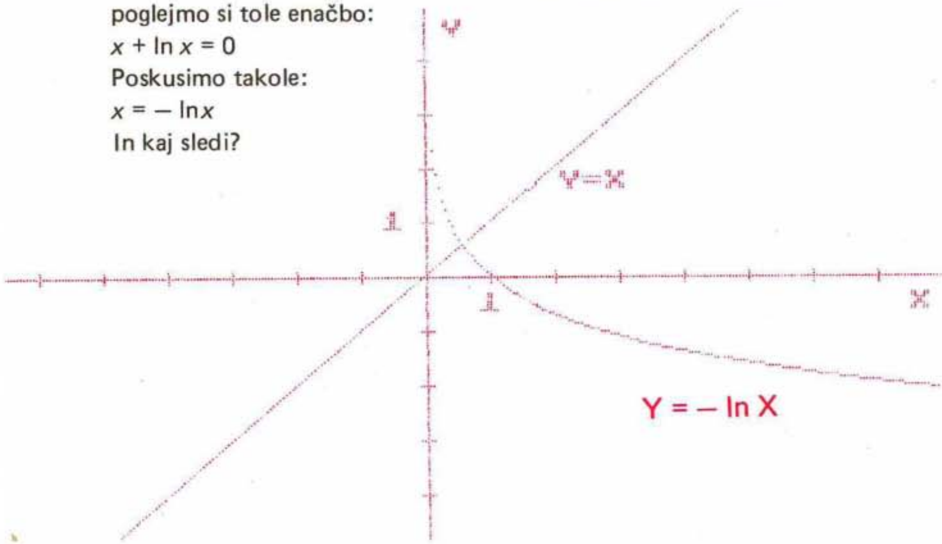
Zato nas iteracijska metoda ne privede vedno k želenemu cilju. Kar poglejmo si tole enačbo:

$x + \ln x = 0$

Poskusimo takole:

$x = -\ln x$

In kaj sledi?



$x_0 = 0{,}5$
$x_1 = 0{,}69314718$
$x_2 = 0{,}36651292$
$x_3 = 1{,}00372151$
$x_4 = -0{,}0037146$
x_5 nedefiniran

Z nadaljevanjem postopka dobivamo vedno slabše približke.

Vendar je za vsako bolezen zdravilo.

Preoblikujmo enačbo $x = -\ln x$ takole:

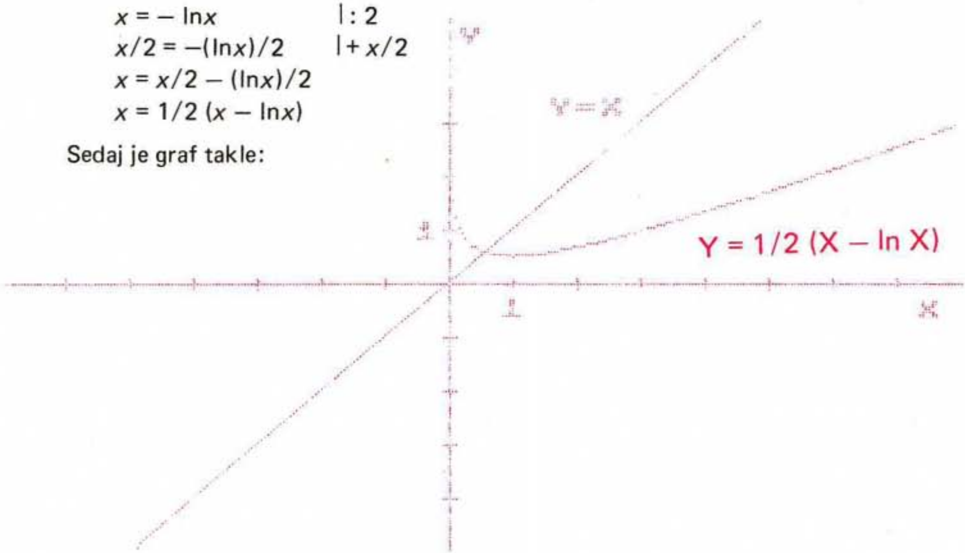
$x = -\ln x \quad |:2$

$x/2 = -(\ln x)/2 \quad | + x/2$

$x = x/2 - (\ln x)/2$

$x = 1/2\,(x - \ln x)$

Sedaj je graf takle:



Površno povedano: krivuljo smo pri njenem padanju umirili tako da je zdaj položnejša kot premica $y = x$.

Pa poskusimo sedaj z metodo iteracije:

$x_0 = 0{,}5$
$x_1 = 0{,}596573590$
$x_2 = 0{,}556563133$
$x_3 = 0{,}571268901$
$x_4 = 0{,}565582076$
$x_5 = 0{,}567740966$
....
$x_{19} = 0{,}567143291$
$x_{20} = 0{,}567143290$
$x_{21} = 0{,}567143290$

Ko malce razočarani od prej poskusimo z iteracijsko metodo,

....

se nam obraz zjasni pri $x_{20} = 0{,}567143290$.

Kljub temu, da nas kalkulator reši računanja, pa je vseeno mučno priti tja do 15. ali 20. približka. Tu nam priskoči na pomoč računalnik. Zaradi specifičnosti ukaza DEF FN v različnih dialektih basica, sem program priredil za dva računalnika, za C64 in ZX Spectrum.

SPECTRUM

```
  5 REM ITERACIJA
 10 PRINT "Zapisite enacbo v obliki x = h(x)!"
 20 INPUT "x ="; a$
 30 PRINT "x ="; a$
 40 DEF FN h(x) = VAL a$
 50 PRINT
 60 PRINT "Izberite zacetno vrednost!"
 70 INPUT "x0 ="; x0: PRINT "x0 ="; x0
 80 PRINT
 90 PRINT "Približki so:"
100 LET x1 = FN h(x0)
110 PRINT x1
120 STOP
130 LET x0 = x1 : GO TO 100
```

Opomba: Računalnik vas vpraša po funkciji in začetni vrednosti. Nato vam izpisuje približke po vsakem pritisku na tipko CONTINUE.

COMMODORE

```
 10 PRINT "VPISITE ENACBO V OBLIKI X = H(X)!"
 20 PRINT
 30 PRINT "70 DEF FN Y(X)="
 40 PRINT "GO TO 70"
 50 FOR A = 1 TO 4: PRINT CHR$(145); : NEXT A
 60 END
 70 DEF FN Y(X)=1/2*(X – LOG(X))
 80 INPUT "VPISITE ZAČETNO VREDNOST!"; X0
 90 X1 = FN Y(X0)
100 PRINT X1
110 GET A$ : IF A$ = " " THEN 110
120 IF A$ = "S" THEN END
130 X0 = X1 : GO TO 90
READY.
```

Opomba: Računalnik vas postavi v vrstico 70. S kazalcem (kurzorjem) se zapeljite do konca definicije funkcije in jo vpišite. Pritisnite dvakrat RETURN. Računalnik vas vpraša po začetni vrednosti. Nove približke vam izpisuje, vse dokler ne pritisnete S.

In še opozorilo:

Pri iteracijski metodi moramo poznati prvi približek x_0. Najlaže ga dobimo grafično. Če pa se grafa funkcij sekata predaleč od izhodišča in ju zato 'ne spravimo' na papir, funkcijo enostavno delimo z od 0 različnim realnim številom.

Primer:

$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow f(x) = 2x, g(x) = x^2 + 2$

$x^2/2 - x + 1 = 0 \Rightarrow f(x) = x, g(x) = x^2/2 + 1$

Za konec rešimo še enačbo $4x = 3^x$.

1. rešitev:

$4x = 3^x \Rightarrow x = 3^x/4$

Prvi približek: $x_0 = 0{,}5$

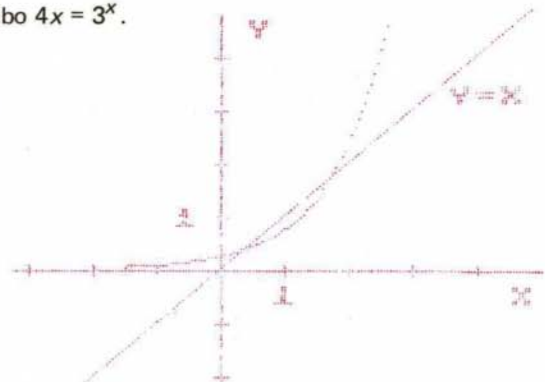
Nadaljujmo:

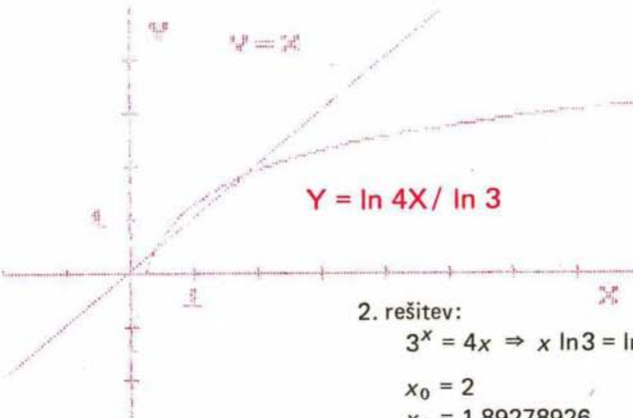
$x_1 = 0{,}433012702$

....

$x_{23} = 0{,}379194103$

$x_{24} = 0{,}379194103$





2. rešitev:

$3^x = 4x \Rightarrow x \ln 3 = \ln 4x \Rightarrow x = \frac{\ln 4x}{\ln 3}$

$x_0 = 2$

$x_1 = 1{,}89278926$

....

$x_{25} = 1{,}79468896$

$x_{26} = 1{,}79468896$

Dobili smo dve rešitvi, vsako po drugi poti.

Naloge

1. Določi oba pozitivna korena enačbe $2^{-x} = 8x - x^3$.
2. Množica P naj bo potenčna množica množice M. Moč množice P je za 27 večja od moči množice M. Določi moč množice M.
3. Približno reši enačbe:
   a) $x^2 = 2 + \ln x$
   b) $\log_3 x = (x - 2)^2$
   c) $x . \ln x = 1$
   d) $2^x = x + 2$
4. Kje se sečeta krivulji $y = 3^x$ in $y = x - 5$?

Marjan Jerman

Po gradivu *D. Grešaka*

Pripomba uredništva: če je bralcu gornji članek vzbudil zanimanje za numerično reševanje matematičnih problemov, potem mu priporočamo knjigo Zvonimir Bohte: Numerično reševanje enačb, ki je izšla v zbirki Sigma. Za razumevanje knjige bo seveda potrebno nekoliko več matematičnega znanja, kot ga zahteva pričujoči članek.

Sandi Klavžar