PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **10** (1982/1983)
Številka 3
Strani 108–114

Andrej Likar:

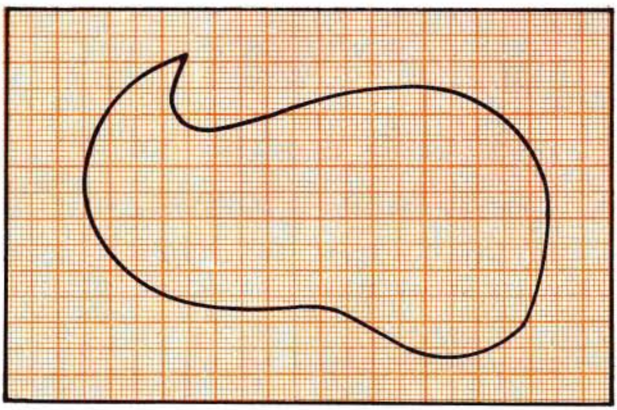
NAREDIMO SI PLANIMETER

Ključne besede: matematika, fizika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/10/617-Likar.pdf

NAREDIMO SI PLANIMETER

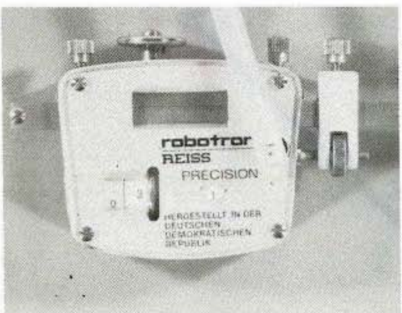
Prav gotovo znate izračunati ploščino kvadrata, trikotnika, kroga... Za take "lepe" like imamo na voljo računske izraze, ki povezujejo ploščino z dolžinami stranic, višin, s polmerom ..., ki jih prav enostavno izmerimo. Pa znate izmeriti tudi ploščino? Šlo bi z milimetrsko mrežo, na primer (glej sliko 1). Na lik položimo prozornico z milimetrsko mrežo in preštejemo kvadratke, ki ležijo znotraj lika. Nekaj sitnosti je s kvadratki na robu lika, a tam ocenjujemo. Če lik le ni preveč "čuden", dobimo kar natančen rezultat. Ploščino lahko izmerimo tudi tako, da lik prerišemo na papir in ga s škarjami izrežemo ter stehtamo. Nato stehtamo še lik, ki mu ploščino poznamo. Če je papir homogen, je razmerje mas obeh likov enako razmerju ploščin. Iz razmerja izračunamo neznano ploščino. Če imate bujno domišljijo, si lahko izmislite še kakšen način, s katerim bi merili ploščine ravninskih likov.



Slika 1. Ploščino lahko izmerimo tako, da na lik položimo prozornico z milimetrsko mrežo in seštejemo kvadratke, ki so znotraj lika. V našem primeru je ploščina lika 3520 mm^2.

Geometri imajo napravo, s katero igraje izmerijo ploščino poljubnemu ravninskemu liku. Tej napravi pravijo *planimeter*. Natančna izvedba takega instrumenta je na naslovnici. Planimeter spominja na škarje, ker ima gibljiva kraka. Konec enega kraka je v točki P vrtljivo vpet. Tej točki rečemo *pol*, kraku pa *polarni krak*. Na koncu drugega kraka - pravimo mu *obhodni krak* - je povečevalno steklo z označeno *obhodno točko 0*. S tem krakom drsimo po krivulji, ki obdaja lik tako, da je obhodna točka ves čas na krivulji. Ko prevozimo lik in pridemo spet v izhodiščno točko, preberemo ploščino na kolescu K. To kolesce med obhodom delno drsi, delno pa se kotali, saj je os, okrog katere je kolesce gibljivo, vzporedna z obhodnim krakom.

Skala na kolescu je umerjena, da lahko preberemo ploščino objetega lika kar v kvadratnih milimetrih. Pred odhodom moramo postaviti kolesce na 0 in tudi šteti polne obrate kolesca, ko merimo like z večjo ploščino. Števnik obratov je pri boljših instrumentih vgrajen. Navadno se ne trudimo, da bi postavili kolesce na 0, temveč ga odčitamo pred obhodom in po njem, razlika pa pove ploščino lika (glej sliko 2).

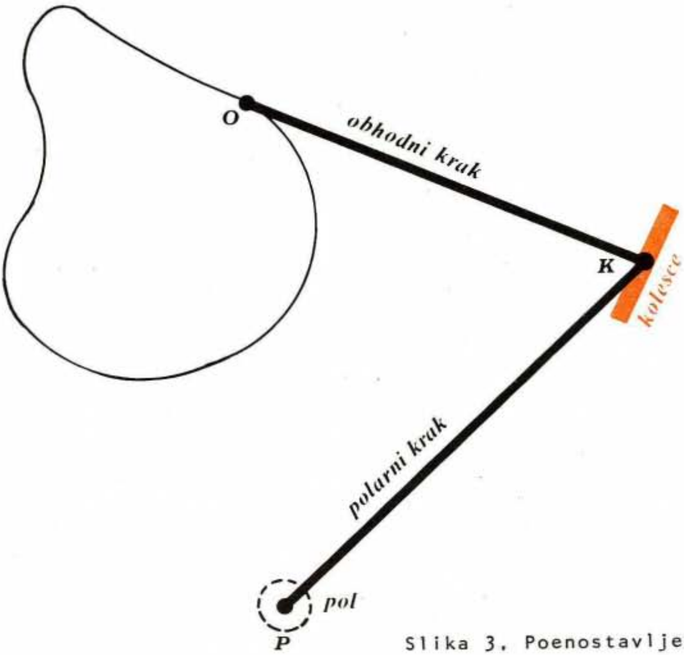


a)

b)

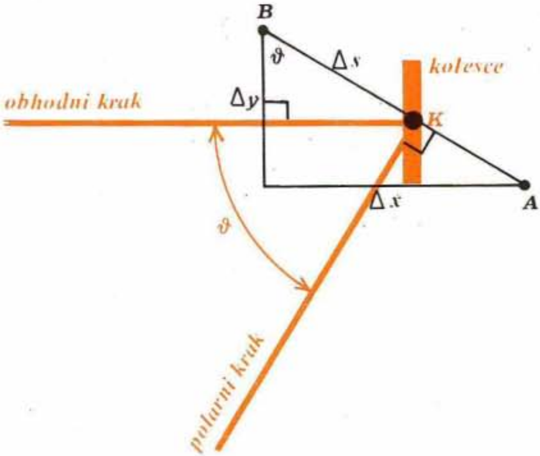
Slika 2. Lega kolesca pred obhodom (a) in po njem (b). Številka v desnem okencu se poveča za 1, ko kolesce naredi cel obrat okrog svoje osi. Pred obhodom (a) je odčitek 1255 delcev, po obhodu (b) pa 3647 delcev. Razlika je torej 2392 delcev. V zgornjem okencu vidimo, da je dolžina obhodnega kraka postavljena na dolžino 10,0. Planimeter je v tem primeru tako nastavljen, da pomeni 1 delec 10 mm^2. Ploščina merjenega lika je torej 23920 mm^2

Zakaj je zasuk kolesca kar sorazmeren s ploščino objetega lika? Oglejmo si načelo, po katerem ta zanimiva naprava deluje. Planimeter si nekoliko poenostavimo (glej sliko 3). Polarni in obhodni krak sta gibljivo speta v točki K, polarni pa je vrtljivo vpet v polu P. Kolesce bomo namestili tako, da se vrti okrog obhodnega kraka, papirja pa naj se dotika ravno pod točko K. Na ta način se izognemo vrtenju kolesca, kadar premikamo le obhodni krak. V resnici ta omejitev ni pomembna, le razlago nam olajša.

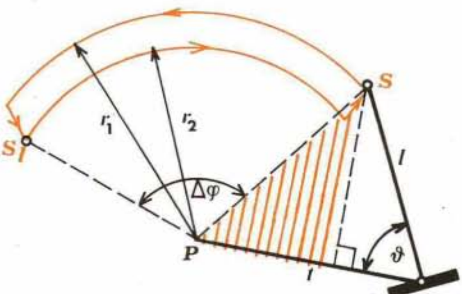


Slika 3. Poenostavljen planimeter.

Najprej si oglejmo, kolikšno razdaljo prekotali kolesce, ko se točka K premakne za kratko razdaljo Δs. S slike 4 vidimo, da bo kolesce prekotalilo le pot $\Delta y = \Delta s \cos \vartheta$, vmes pa bo ves čas še drselo. Pokažimo, da s tem instrumentom lahko izmerimo ploščino zelo ozkemu liku, ki ga o-



Slika 4. Kolesce prekotali pot Δy, predrsa pa pot Δx, ko se točka K premakne za Δs iz točke A v točko B.



Slika 5. S planimetrom lahko izmerimo ploščino zelo ozkemu liku, ki ga omejujeta krožnici s središčem v polu.

mejujeta krožnici s središčem v polu (glej sliko 5). S točko O obhodimo lik od točke S do S_1 in nato po spodnji krožnici nazaj v S. Ko potujemo po zgornji krožnici od S do S_1 , prepotuje točka K razdaljo $p\ \Delta\phi\pi/180$. Kot ϑ je namreč skoraj ves čas enak, kot ϕ pa se spremeni od začetnega ϕ_z do končnega ϕ_k, torej za $\Delta\phi$. Točka K opiše del krožnice s polmerom, ki je enak dolžini polarnega kraka. V bližini točke S_1 se sicer kot ϑ prav malo spremeni, kar pa zanemarimo, ker je obravnavani lik zelo ozek. Kolesce zabeleži razdaljo $t\Delta\phi\Pi/180.\cos\vartheta$, ker deloma drsi. Iz Pitagorovega izreka za počrtan trikotnik na sliki 5 dobimo:

$$r_1^2 = (l\sin\vartheta)^2 + (t-l\cos\vartheta)^2 = t^2+l^2-2tl\cos\vartheta$$

(Nekateri morda poznate to enačbo kot kosinusov izrek.) Vidimo, da velja

$$\frac{(t^2+l^2)-r_1^2}{2l} = t\cos\vartheta$$

Kolesce torej prekotali pot

$$\Delta y_1 = \Delta\phi\frac{\Pi}{180}\left[\frac{t^2+l^2-r_1^2}{2l}\right] = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(l^2+t^2)\Delta\phi}{360} - \frac{\Pi r_1^2}{360}\Delta\phi\right]$$

Ko gremo od S_1 nazaj k S, se kolesce spet kotali, a to pot v obratno smer. Podobno kot zgoraj je njegov zasuk

$$\Delta y_2 = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(l^2+t^2)}{360}\Delta\phi - \frac{\Pi r_2^2}{360}\Delta\phi\right]$$

le da sedaj namesto r_1 pišemo r_2, torej manjši radij, ker drsimo po spodnji krožnici. Kot $\Delta\phi$ je seveda enak, saj pridemo spet v začetno točko, kjer se obhod konča. Kolesce pokaže razliko poti

$$\Delta y = \Delta y_2-\Delta y_1 = \frac{1}{l}\left[\frac{\Pi(r_1^2-r_2^2)}{360}\Delta\phi\right]$$

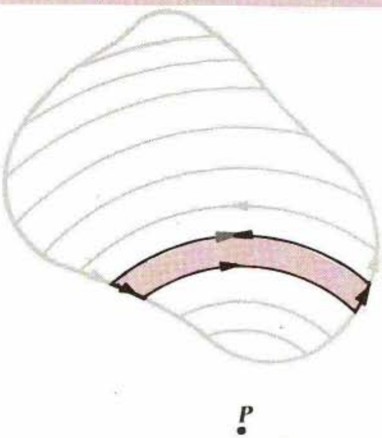
V oklepaju hitro spoznamo ploščino našega lika, saj je le-ta razlika med ploščinama krožnih izsekov s kotom $\Delta\phi$. Kolesce torej prekotali pot, ki je sorazmerna s ploščino obkroženega lika. Iz zadnje enačbe sledi

$$\Delta p = l\Delta y$$

Poljuben lik sedaj razrežemo na ozke pasove, za katere smo pokazali, da jim s planimetrom lahko izmerimo ploščino (glej sliko 6). Sedaj merimo ploščino vsakemu liku posebej, kolesce pa sešteva delne ploščine. Obkrožati moramo vedno v istem smislu, recimo v smeri, nasprotni smeri urinega kazalca, pri prehodu na drug lik pa moramo kolesce dvigniti, da se ne zasuče dodatno.

To je seveda hudo nerodno. S slike 6 pa hitro uvidimo, da se ni treba voziti po krožnicah. Ko obkrožamo spodnji pas, gremo po zgornji krožnici od desne na levo, ko obkrožamo sosednjega zgoraj, pa ravno v nasprotni smeri. Oba obhoda skupaj seveda ne premakneta kolesca, zato ju ni treba delati. Vse mučno delo odpade, ostane le rob danega lika, ki pa ga lahko obkrožimo brez prestavljanja in dviganja kolesca. Ploščina merjenega lika je potemtakem taka kot prej:

$$\Delta p = l\Delta y$$



Slika 6. Poljuben lik razdelimo na pasove, ki so omejeni s koncentričnimi krogi. Takim pasovom lahko izmerimo ploščino s planimetrom.

Hitro se da pokazati, da deluje planimeter tako, kot smo opisali, četudi je kolesce kjerkoli - vendar s pogojem, da je njegova os vzporedna z obhodnim krakom. Planimeter na ovitku ima kolesce kar daleč od točke K.

Planimeter si po vzorcu na ovitku lahko izdelate sami. Namesto lupe uporabite kar konico, s katero boste obkrožali like. Z malo spretnosti boste uspeli tudi z montažo kolesca, kjer morate paziti le na to, da je njegova os vzporedna z obhodnim krakom. Za pol spet uporabite konico, polarni krak pa na polu obtežite, da bo pol res trdno pripet, a vrtljiv. Kraka se morata mehko premikati. Pišite nam, če vam je uspelo in nam opišite svoj planimeter. Napišite tudi, kakšno natančnost ste dosegli z njim. To najlaže preverite na likih, ki jim ploščino že poznate. Na koncu vidite preglednico, kjer so kolegi merili število π tako, da so s planimetrom, ki ga vidite na ovitku, izmerili ploščino kroga s polmerom 10 cm.

PREGLEDNICA - MERJENJE ŠTEVILA π S PLANIMETROM

Merilec	lega kolesca (en delec = 10 mm²) pred obhodom	po obhodu	P_i [cm²]	r_i [cm]	$\frac{P_i}{r_i^2} = \pi_i$	$\Delta\pi_i = \pi_i - \bar{\pi}$
Matjaž	7255	10412	315,7	10,005	3,154	- 0,001
Danilo	423	3592	316,9	10,00	3,169	0,014
Darko	6757	9917	316,0	10,00	3,160	0,005
Bogdan	4236	7392	315,6	10,015	3,147	- 0,008
Rafael	3593	6756	316,3	10,02	3,150	- 0,005
Matej	4584	7745	316,1	10,00	3,161	0,006
Franc	2809	5964	315,5	10,01	3,149	- 0,006
Andrej	8069	11228	315,9	10,015	3,150	- 0,005
					$\bar{\pi} \approx 3,155$	$\overline{\lvert\Delta\pi\rvert} \approx 0,006$

Vsi merilci so merili ploščino in polmer istega kroga. Poprečna vrednost za število π iz teh meritev je 3,155, odmik od poprečja pa 6.10^{-3}. Na natančnost meritve sklepamo iz $\frac{\overline{|\Delta\pi|}}{\pi} \approx 2.10^{-3}$ ali 0,2 %.

Ker so vse meritve nekoliko nad pravo vrednostjo za število π, je verjetno, da imamo opravka s sistematsko napako (napako merilnega pribora).

Andrej Likar