II 1259

O NEKIH FREKVENČNIH PORAZDELITVAH S POSEBNOSTMI V KONCENTRACIJI

dr. Marijan Blejec

RCEF

RAZISKOVALNI CENTER EKONOMSKE FAKULTETE
UNIVERZE V LJUBLJANI

O NEKIH FREKVENČNIH PORAZDELITVAH S POSEBNOSTMI V KONCENTRACIJI

dr.Marijan Blejec

INŠTITUT ZA STATISTIKO IN OPERACIJSKO RAZISKOVANJE
RCEF
Raziskovalni center Ekonomske fakultete
Univerze v Ljubljani
1969

GS II 745 960

ODPISANO
01 -09- 2008
II 1259

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

2022 15495

O NEKIH FREKVENČNIH PORAZDELITVAH S POSEBNOSTMI V KONCENTRACIJI

0. Uvod. Porazdelitev agregata X med N enot populacije more biti najrazličnejša. Glede na koncentracijo agregata X v N enotah je ena skrajnost popolna nekoncentracija, ki obstaja takrat, ko je agregat enakomerno porazdeljen na N enot populacije in odpade na vsako enoto populacije $x_i = X/N$ $(i = 1,2..N)$, torej enak del agregata. Druga skrajnost je popolna koncentracija, ko celoten agregat odpade na eno samo enoto. $x_i = o$ $(i = 1,2..(N-1)$; $x_N=X$. Porazdelitev agregata X ali koncentracija za stvarne populacije je med nakazanima ekstremoma in je tem večja, čim večji del agregata odpade na razmeroma majhno število enot.

Koncentracijo pojava nazorno prikažemo z Lorenzovim grafikonom. V njem v kvadratu, v katerem je abscisa linearna skala za kumulativo relativne frekvence $F(x) = \int_{-\infty}^{x} dF$, ordinata pa linearna skala za kumulativne relativne vsote $\varnothing(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{x}{M} dF$ v ranžirni vrsti urejenih vrednosti. Lok Lorenzove krivulje, ki poteka iz levega spodnjega oglišča kvadrata s koordinatama $(F=o, \varnothing=o)$ do zgornjega desnega oglišča kvadrata $(F =1, \varnothing=1)$ poteka med diagonalo in stranicama $\overline{AB}$ in $\overline{BC}$, bolj ali manj približan diagonali ali stranicama $\overline{AB}$ $\overline{BC}$, kar je odvisno od stopnje koncentracije.

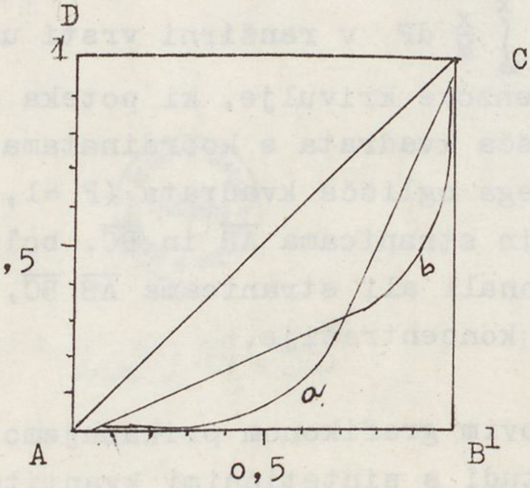
Razen z Lorenzovim grafikonom prikazujemo in analiziramo koncentracijo tudi s sintetičnimi kvantitativnimi pokazovalci. Eden izmed njih je Ginijev koeficient koncentracije, ki je definiran z

$$G = 1 - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset(x)dF \qquad (1)$$

razmerjem med površino, ki jo oklepa Lorenzova krivulja in diagonala $\overline{AC}$ in površino trikotnika $\triangle ABC$. Tako definiran koeficient ima vrednost 0, če ni koncentracije pojava in vrednost 1, če je pojav maksimalno koncentriran. V stvarnih primerih pa je vrednost za G $o \leqslant G \leqslant 1$.

Tako prvi kot drugi način prikazovanja koncentracije ima svoje prednosti in svoje hibe. Lorenzov grafikon daje podrobnejši in nazornejši vpogled v zakonitosti koncentracije, z njim pa ne izražamo stopnje koncentracije kvantitativno. Obratno pa Ginijev koeficient koncentracije in vsi drugi sintetični pokazovalci sicer kvantitativno nakažejo stopnjo koncentracije, v njih pa se izgube bistvene informacije o zakonitostih koncentracije.

Na shematičnem primeru dveh simetričnih Lorenzovih krivulj a in b spoznamo, da je zakonitost koncentracije v obeh primerih različna, Ginijeva koeficienta pa, kot je soditi po ustreznih površinah, sta za a in b enaka.



Shematičen prikaz Lorenzovega grafikona za pojave z enakim Ginijevim koeficientom

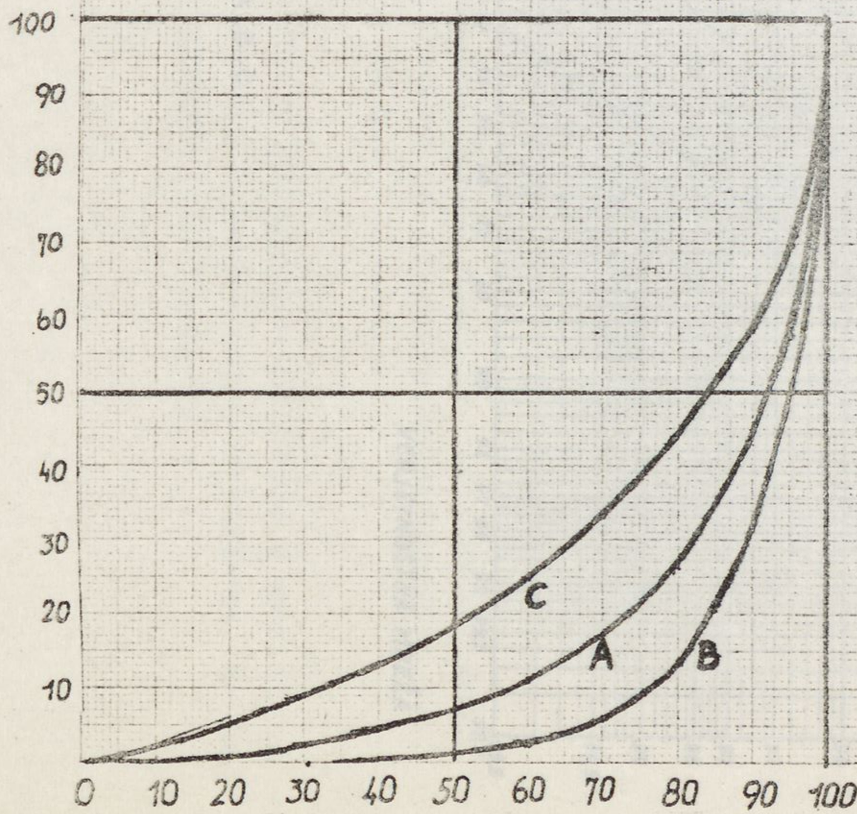
1. Verjetnostni Lorenzov grafikon - VELORG. Kumulativna S-krivulja relativnih frekvenc je za analizo normalnosti porazdelitev neprikladna, ker je prekomplicirana. Podobno je z Lorenzovo krivuljo. V običajnem Lorenzovem grafikonu so zakonitosti koncentracije pogosto zabrisane in iz njega neposredno ni jasno razvidna zakonitost koncentracije.

Za analizo normalnosti porazdelitev je rešitev v verjetnostnih grafikonih, v katerih linearno skalo za kumulativo relativnih frekvenc zamenjamo z verjetnostno skalo, zaradi česar se S krivulja za normalno porazdelitev izravna v premico.

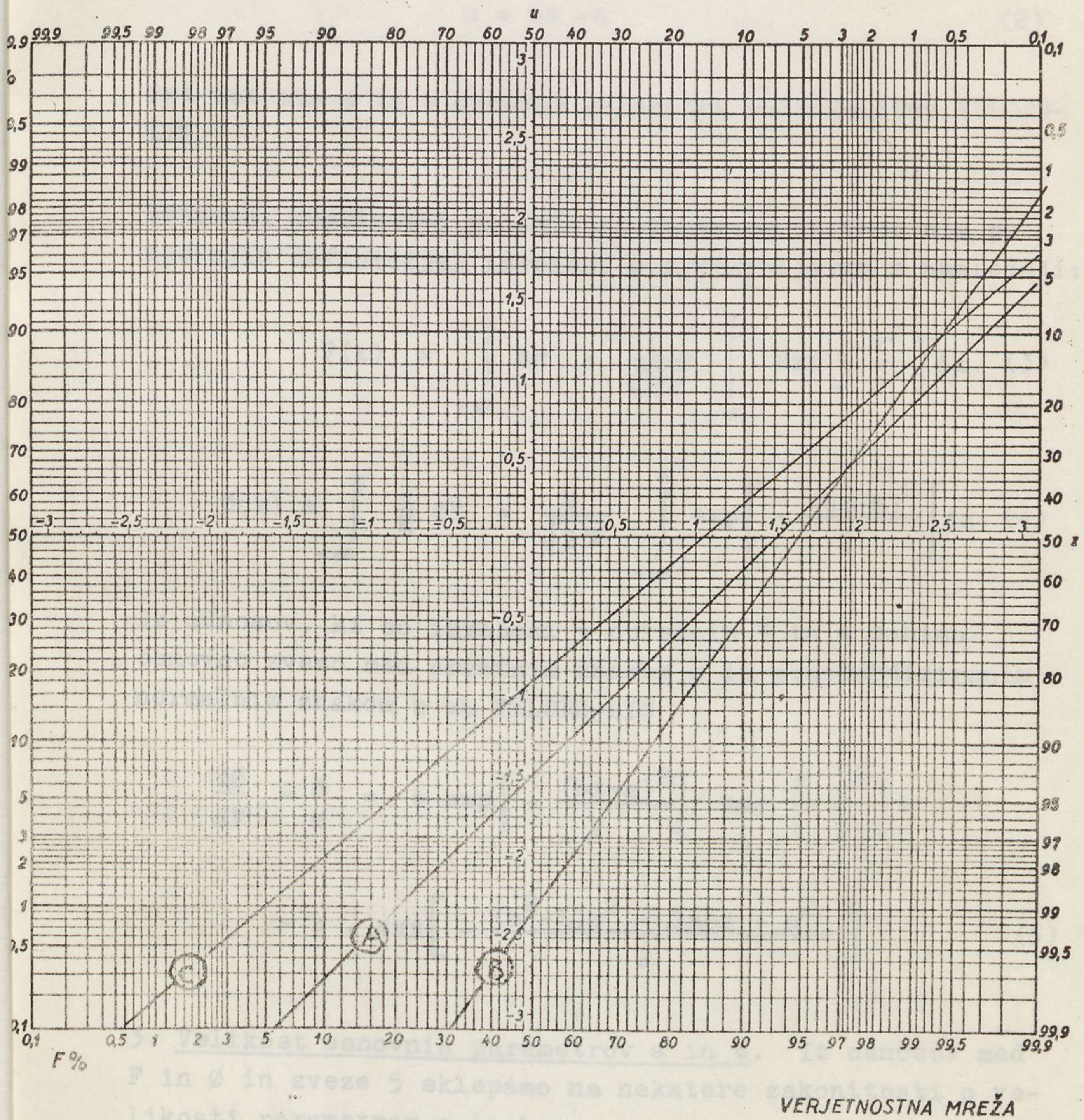
Uporabimo idejo verjetnostnih skal za kumulative relativnih frakvenc $F(x)$ in kumulative relativnih vsot $\emptyset(x)$ in zamenjajmo linearni kali za kumulativo relativnih frekvenc $F(x)$ in kumulativo relativnih vsot $\emptyset(x)$ z verjetnostnima skalama. Ta način prikazovanja Lorenzove krivulje imenujmo Verjetnostni Lorenzov grafikon, kratko pa označimo s kratico VELORG. V splošnem moremo pričakovati, da se v VELORGU Lorenzova krivulja izravna.

2. VELORG-LIN. Pod določenimi pogoji se Lorenzova krivulja na VELORGU izravna v premico. Cilj razprave je proučiti, za katere tipe porazdelitev je VELORG-LIN - verjetnostni Lorenzov grafikon premica, kakšni so parametri in lastnosti teh porazdelitev in analizirati, če in v koliko stvarne porazdelitve socialno-ekonomskih pojavov slede tem zakonitostim.

Kumulativi relativne frekvence $F(x)$ ustrezno normalno standardizirano spremenljivko zaznamujmo z $z(F(x)) = z$, kumulativi relativnih vsot $\emptyset(x)$ pa z $z(\emptyset(x)) = u$.



Slika 1. Lorenzov grafikon za A,B,C



ka 2 VELORG za porazdelitve A,B,C

Za proučevan tip porazdelitev VELORG-LIN velja po definiciji

$$u = bz - a \tag{2}$$

Pri tem sta a in b osnovna parametra porazdelitev VELORG-LIN.

Ustrezni kumulativi relativnih frekvenc in vsot sta po zgornjih definicijah izraženi s spremenljivko z naslednji:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \tag{3}$$

$$\emptyset(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{x}{M}\, dF = \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left[-\frac{(bz-a)^2}{2}\right] dz \tag{4}$$

Iz odnosov, ki so izraženi v obrazcih 3 in 4 dobimo osnovno zvezo med prvotnim znakom x in standardiziranim normalnim znakom z za VELORG-LIN

$$\frac{d\emptyset}{dF} = \frac{x}{M} = b \exp\left[-\frac{(bz-a)^2}{2}\right] / \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] =$$

$$= b \,.\, \exp\left[-\frac{(b^2-1)z^2 - 2abz + a^2}{2}\right] \tag{5}$$

3. Velikost osnovnih parametrov a in b. Iz odnosov med F in $\emptyset$ in zveze 5 sklepamo na nekatere zakonitosti o velikosti parametrov a in b.

Če predpostavljamo, da je proučevana količina x pozitivna vrednost, mora biti zaradi 5 parameter b pozitiven, če naj porazdelitev podaja naraščujočo funkcijo.

Če je x naraščujoč, je za vsak x oziroma z $F > \emptyset$

Iz zveze 3 in 4 spoznamo, da je to le, če je pri pozitivnem b v enačbi 2 a pozitiven.

Iz zveze $d\emptyset/dF = x/M$ sklepamo, da so odnosi smiselni le, če je $d\emptyset/dF$ monotono naraščujoč. To pa je, če je prvi odvod od $d\emptyset/dF$ pozitiven. Iz zveze 5 sklepamo, da je prvi odvod od $d\emptyset/dF$ pozitiven pri pozitivnem b, če je pozitiven odvod eksponenta iz 5

$$\frac{d}{dz}\left[-\frac{(b^2-1)z^2 - 2abz + a^2}{2}\right] = -z(b^2-1) + ab > 0 \qquad (6)$$

tj., če je

$$z < \frac{ab}{b^2-1} \qquad (7)$$

Če je $b=1$, je zaradi tega, ker je $a > o$, ta pogoj izpolnjen neodvisno od z, torej za vse vrednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

Za primere, da je $b \neq 1$, pa pogoj 7 ni izpolnjen za vse vrednosti intervala $-\infty$ do $+\infty$.

Če vpeljemo nov, iz parametrov a in b izveden parameter

$$c = \frac{ab}{b^2-1} \qquad (8)$$

je $c=c^+ > o$, če je $b > 1$ in $c = c^- < o$, če je $b < 1$.

Za primer, da je $b < 1$, je pogoju 6 zadoščeno za območje

$$z < c^+ \qquad (9)$$

Za primer, da je $b < 1$, z zadošča pogoju iz 6 v razmaku

$$c^{-} < z \tag{10}$$

Parameter c je absolutno tem večji, čim manj se b razlikuje od 1 in čim večji je a. Porazdelitve so torej definirane na tem širšem razmaku, čim manj se predvsem b razlikuje od 1.

Iz zakonitosti za normalno porazdelitev vemo, da je P = o,9999 pod z = 3,79. Iz tega sklepamo, da je praktično vsa populacija definirana na smiselnem razmaku, če je $/c/ > 3{,}79$. V primerih, da je $b \neq 1$ gre za okrnele porazdelitve, vendar je ta okrnelost neznatna, če je $/c/ > 3{,}79$.

4. <u>Transformacije osnovnega znaka x.</u> Z logaritmiranjem dobimo iz 5

$$\ln \frac{x}{bM} = -\frac{1}{2}\left[(b^2-1)z^2 - 2abz + a^2\right] \tag{11}$$

Če je b=1, sledi iz 11

$$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\ln\frac{x}{M} \tag{12}$$

Iz tega spoznamo, da VELORG-LIN ponazarja Lorenzovo krivuljo premica

$$u = z - a \tag{13}$$

če se x porazdeljuje logaritemsko normalno.

Če je $b > 1$, dobimo iz 11, da se porazdeljuje standardizirano normalno na naslednji način transformirani x

$$z = c^{+} - \sqrt{\frac{(c^{+})^{2}}{b^{2}} - \frac{2}{b^{2}-1} \ln \frac{x}{bM}} \tag{14}$$

Če je $b < 1$, pa je ustrezna transformacija za x

$$z = c^{-} + \sqrt{\frac{(c^{-})^{2}}{b^{2}} + \frac{2}{1-b^{2}} \ln \frac{x}{bM}} \tag{15}$$

V tabeli so za vse tri tipe nakazane ustrezne transformacije osnovnega znaka x, s katerimi prevedemo raziskovane porazdelitve v standardizirano normalne.

Tabela 1. Transformacije osnovnega znaka x v standardiziran znak z

$b > 1$	$c^{+} > 0$	$z = c^{+} - \sqrt{\frac{(c^{+})^{2}}{b^{2}} - \frac{2}{b^{2}-1} \ln \frac{x}{bM}}$
$b=1$	$c=\infty$	$z = \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \ln \frac{x}{M}$
$b < 1$	$c^{-} < 0$	$z = c^{-} + \sqrt{\frac{(c^{-})^{2}}{b^{2}} + \frac{2}{1-b^{2}} \ln \frac{x}{bM}}$

5. <u>Rodna funkcija momentov za (lnx - Elnx).</u> Rodna funkcija momentov M(t) za (lnx - Elnx) je osnova za izračun centralnih momentov $\mu_k$lnx za naravni logaritem osnovne spremenljivke x. Centralni momenti logaritmov osnov-

ne spremenljivke pa dajejo vpogled v porazdelitev relativnih odnosov med vrednostmi za osnovno spremenljivko. Rodno funkcijo momentov M(t) za (lnx - Elnx) dobimo za VELORG-LIN z naslednjo izpeljavo.

Po definiciji je

$$M_{g(x)}(t) = E \exp\left[g(x)t\right] \tag{16}$$

Za VELORG-LIN pa je v posebnem

$$M_{(\ln x - E\ln x)}(t) = E \exp\left[(\ln x - E\ln x)t\right] \tag{17}$$

Če upoštevamo, da je za standardiziran znak z $E(z)=o$, $E(z^2)=1$ iz 11 dobimo

$$E \ln \frac{x}{bM} = -\frac{1}{2}\left[(b^2-1) + a^2\right] \tag{18}$$

in dalje

$$(\ln x - E\ln x) = -\frac{1}{2}\left[(b^2-1)z^2 - 2abz - (b^2-1)\right] =$$

$$= ab\left[z + \frac{1-z^2}{2c}\right] \tag{19}$$

Iz definicije 17 sledi

$$M_{\ln x - E\ln x}(t) = E \exp\left[(\ln x - E\ln x)t\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[(b^2-1)z^2 - 2abz - (b^2-1)\right] t\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\left[(b^2-1)t+1\right] + abtz + \frac{(b^2-1)}{2}t\right] dz \quad (20$$

S transformacijo $zB=v$, pri čemer je $B = \sqrt{(b^2-1)t+1}$ dobimo iz 20

$$M_{\ln x-E\ln x}(t) = \frac{1}{B} \exp\left[\frac{a^2b^2t^2}{2B^2} + \frac{(b^2-1)t}{2}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp -$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left(v - \frac{abt}{B}\right)^2\right] dv = \left[1+(b^2-1)t\right]^{-1/2} \exp\left[\frac{a^2b^2t^2}{2B^2} + \frac{(b^2-1)t}{2}\right]$$

(21

Za poseben primer, da je parameter $b=1$ dobimo

$$M_{\ln x=E\ln x}(t) = \exp\left[\frac{a^2t^2}{2}\right] \quad (22$$

kar je rodna funkcija momentov za normalno porazdelitev. To potrjuje že ugotovljen rezultat, da se za primer, da je $b=1$, x porazdeljuje logaritemsko normalno.

6. Neposredno izračunanje centralnih momentov in parametrov VELORG-LIN. Izpeljana rodna funkcija za centralne momente za lnx je razen za poseben primer logaritemsko normalne porazdelitve razmeroma zapletena. Zato izračunajmo prve štiri centralne momente za

lnx neposredno.

Če upoštevamo znane obrazce, da je za strandardizirano normalno porazdelitev

$$\mu_{2k}(z) = \frac{(2k)!}{2^k\, k!} \;; \quad \mu_{2k+1}(z) = 0 \tag{23}$$

dobimo iz 19

$$\mu_2(\ln x) = E a^2 b^2 \left[z + \frac{1-z^2}{2c}\right]^2 = a^2 b^2 \left[1 + \frac{1}{2c^2}\right] \tag{24}$$

$$\mu_3(\ln x) = E\, a^3 b^3 \left[z + \frac{1-z^2}{2c}\right]^3 = -\frac{a^3 b^3}{c}\left[3 + \frac{1}{c^2}\right] \tag{25}$$

$$\mu_4(\ln x) = E\, a^4 b^4 \left[z + \frac{1-z^2}{2c}\right]^4 = 3\, a^4 b^4 \left[1 + \frac{5}{c} + \frac{5}{4c^4}\right] \tag{26}$$

Medtem ko je $\mu_2 \ln x = \mathrm{Var} \ln x$, dobimo iz centralnih momentov $\mu_2 \ln x$, $\mu_3 \ln x$, $\mu_4 \ln x$ meri asimetrije in sploščenosti

$$\gamma_1(\ln x) = \frac{\mu_3}{\left[\mu_2\right]^{3/2}} = \frac{-\frac{a^3 b^3}{c}\left[3 + \frac{1}{c^2}\right]}{a^3 b^3 \left[1 + \frac{1}{2c^2}\right]^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{c}\, \frac{3 + \frac{1}{c^2}}{\left(1 + \frac{1}{2c^2}\right)^{3/2}} \doteq -\frac{1}{c}\left(3 - \frac{1}{4c^2}\right) \tag{27}$$

$$\gamma_2(\ln x) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{3a^4 b^4 \left(1 + \frac{5}{c^2} + \frac{5}{4c^4}\right)}{a^4 b^4 \left[1 + \frac{1}{2c^2}\right]^2} - 3 =$$

$$= 12 \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2c^2}\right)^2} \right] \doteq \frac{12}{c^2} \tag{28}$$

Dobljene opisne parametre za lnx dopolnimo še z Elnx, ki sledi iz 18

$$\text{Elnx} = \text{lnbM} - \frac{1}{2}\left[(b^2 - 1) + a^2\right] \tag{29}$$

in koeficientom variacije za lnx

$$\text{KV} = \frac{\sqrt{\mu_2(\text{lnx})}}{\text{E ln x}} = \frac{ab\sqrt{1 + \frac{1}{2c^2}}}{\text{lnbM} - \frac{1}{2}\left[(b^2-1) + a^2\right]} \tag{30}$$

V posebnem primeru, da je b=l, velja iz 24, da je $\mu_2(\text{lnx}) = a^2$. Parameter a je v tem primeru standardni odklon za lnx za logaritemsko normalno porazdelitev. Iz istega obrazca spoznamo, da je pri velikem c standardni odklon SD(lnx) približno enak ab. Za b=l je $c=\infty$. Iz tega sledi, da je $\gamma_1 = o$. To je v skladu z lastnostjo logaritemsko normalne porazdelitve, za katero se lnx razpodeljuje simetrično. Za $b > 1$ je porazdelitev asimetričja v levo, ker je c^+ za ta primer pozitiven, γ_1 pa negativen. Za $b < 1$ je porazdelitev za lnx asimetrična v desno. C^- za ta primer je namreč negativen, γ_1 pa po obrazcu 27 pozitiven. Stopnja asimetrije je v splošnem tem večja čim manjši je c ; c pa je v splošnem tem manjši čimbolj je b različen od l. γ_2 je za vse primere razen za b=l, ko je nič, pozitiven. Glede na to so vse porazdelitve z izjemo za b=l, take, da se lnx porazdeljuje glede na sploščenost koničasto.

7. Parametri VEGLORG-LIN porazdelitev za x. Čeprav je za porazdelitve obravnavanega tipa naravneje proučevati lnx kot x, vseeno proučimo nekaj osnovnih parametrov tudi zanj.

Iz znane zveze, da je

$$E \ln x = \ln G_x \tag{31}$$

in obrazca 18 dobimo, da je geometrijska sredina G_x enaka

$$G_x = bM \exp\left[-\frac{1}{2}\left[a^2 + (b^2-1)\right]\right] \tag{32}$$

Iz 11 dobimo, da je na splošno za VELORG-LIN

$$x = bM \exp\left[-\frac{z^2}{2}(b^2-1) + abz - \frac{a^2}{2}\right] \tag{33}$$

Za ta izraz je rodna funkcija momentov prekomplicirana. Da pridemo do osnov za izračunanje momentov, poiščimo izraz za pomožen moment za splošno stopnjo k, $E(x^k)$ in iz njih proučimo posebne parametre.

Če upoštevamo 33, dobimo

$$E(x^k) = b^k M^k E \exp\left[k\left[-\frac{z^2}{2}(b^2-1) + abz - \frac{a^2}{2}\right]\right] =$$

$$= b^k M^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2}k(b^2-1) + abkz - \frac{a^2k}{2}\right] .$$

$$. \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \tag{34}$$

Vpeljimo pomožen parameter $A = \sqrt{Kb^2-(k-1)}$ in transformacijo $Az=v$. Dalje dobimo

$$E(x^k) = \frac{b^k M^k}{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(v - \frac{abk}{A}\right)^2 + \frac{a^2 b^2 k^2}{2A^2} - \frac{a^2 k}{2} \right]$$

$$= \frac{b^k M^k}{A} \exp\left[\frac{a^2 k(k-1)}{2A^2}\right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(v - \frac{abk}{A}\right)^2\right] dv$$

(35)

Ker je zadnji del v izpeljavi 35 enak 1, dobimo, da velja na splošno

$$E(x^k) = \frac{b^k M^k}{\sqrt{kb^2-(k-1)}} \exp\left[\frac{a^2 k(k-1)}{2\left[kb^2-(k-1)\right]}\right] \tag{36}$$

Če vstavimo v obrazec 36 po vrsti $k=1,2,3,4$, dobimo prve štiri pomožne momente

$$E(x) = M$$

$$E(x^2) = \frac{b^2 M^2}{\sqrt{2b^2-1}} \exp\left[\frac{a^2}{2b^2-1}\right]$$

$$E(x^3) = \frac{b^3 M^3}{\sqrt{3b^2-2}} \exp\left[\frac{3a^2}{3b^2-2}\right]$$

$$E(x^4) = \frac{b^4 M^4}{\sqrt{4b^2-3}} \exp\left[\frac{6a^2}{4b^2-3}\right] \tag{37}$$

$E(x) = M$ je v skladu z definicijo za matematično upanje in aritmetično sredino.

Iz $E(x^2)$ in $E(x)$ pa sledi, da je

$$\mu_2(x) = E(x^2) - \left[E(x)\right]^2 = M^2\left[\frac{b^2}{\sqrt{2b^2-1}}\exp\left[\frac{a^2}{2b^2-1}\right]-1\right] \tag{38}$$

Koeficient variacije je iz 38

$$KV(x) = \frac{\sqrt{\mu_2(x)}}{M} = \sqrt{\frac{b^2}{\sqrt{2b^2-1}}\exp\left[\frac{a^2}{2b^2-1}\right]-1} \tag{39}$$

Iz pomožnih momentov v 37 moremo dalje izračunati tudi tretji in četrti centralni moment oziroma γ_1 in γ_2. Vendar so obrazci neprikladni. Boljše je za poseben primer izračunati vrednostno pomožne momente, iz njih pa po znanih obrazcih centralne momente in mere asimetrije in sploščenosti.

Poseben primer: Logaritemsko normalna porazdelitev. Za logaritemsko normalno porazdelitev so pomožni momenti enostavnejši, ker je b=1. Če vstavimo b=1 v obrazce 37 dobimo

$$E(x^k) = M^k \exp\left[\frac{a^2k(k-1)}{2}\right]; \quad E(x) = M;$$

$$E(x^2) = M^2 \exp\left[a^2\right]; \quad E(x^3) = M^3 \exp\left[3a^2\right];$$

$$E(x^4) = M^4 \exp\left[6a^2\right] \tag{40}$$

Izračun centralnih momentov je za ta poseben primer enostaven

$$\mu_2 = E(x^2) - (Ex)^2 = M^2 \left(\exp\left[a^2\right] - 1\right)$$

$$\mu_3 = Ex^3 - 3\,Ex^2\,Ex + 2(Ex)^3 = M^3 \left(\exp\left[3\,a^2\right] - 3\exp\left[a^2\right] + 2\right)$$

$$= M^3 \left(\exp\left[a^2\right] - 1\right)^2 \left(\exp\left[a^2\right] + 2\right)$$

$$\mu_4 = Ex^4 - 4\,Ex^3\,Ex + 6\,Ex^2\,(Ex)^2 \qquad - 3(Ex)^4 =$$

$$= M^4 \left[\exp\left[6\,a^2\right] - 4\exp\left[3\,a^2\right] + 6\exp\left[a^2\right] - 3\right] =$$

$$= M^4 \left(\exp\left[a^2\right] - 1\right)^2 \left(\exp\left[4a^2\right] + 2\exp\left[3a^2\right] + 3\exp\left[2a^2\right]\right. \qquad (41)$$

Podobno se poenostavijo tudi obrazci za γ_1 in γ_2

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\mu_3^{3/2}} = \left(\exp\left[a^2\right] + 2\right)\sqrt{\exp\left[a^2\right] - 1} \qquad (42)$$

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \exp\left[4a^2\right] + 2\exp\left[3a^2\right] + 3\exp\left[2a^2\right] - 6 =$$

$$= \left(\exp\left[a^2\right] - 1\right)\left(\exp\left[3a^2\right] + 3\exp\left[2a^2\right] + 6\exp\left[a^2\right] + 6\right)$$

γ_1 in γ_2 sta enaka nič, če je a=0, v vseh drugih primerih pa sta γ_1 in γ_2 pozitivna. Logaritemsko normalne porazdelitve so vse asimetrične v desno in koničaste.

Koeficient variacije za logaritemsko normalno porazdelitev pa je

$$KV = \frac{\sqrt{\mu_2}}{M} = \sqrt{\exp\left[a^2\right] - 1} \qquad (43)$$

Harmonična sredina. Iz splošnega obrazca 36 zlahka dobimo obrazec za izračunanje harmonične sredine

$$\frac{1}{H} = E\frac{1}{x} = E\,x^{-1} = \frac{b^{-1}\,M^{-1}}{\sqrt{2 - b^2}} \exp\left[\frac{a^2}{2 - b^2}\right] ;$$

$$H = b.M \sqrt{2 - b^2} \exp\left[- \frac{a^2}{2 - b^2}\right] \qquad (44)$$

Za logaritemsko normalno porazdelitev (b=1) pa je harmonična sredina enaka

$$H = M \exp\left[- a^2\right] \qquad (45)$$

Iz obrazca 44 sklepamo, da je H realno število, če je $b < \sqrt{2}$.

8. Kvantili

Določenemu kvantilnemu rangu P je prirejen normalni porazdelitvi ustrezen standardiziran kvantil z_p, temu pa prek obrazca 33 P ustrezen kvantil x_p

$$x_p = b.M.\exp\left[- \frac{z_p^2}{2}(b^2 - 1) + abz_p - \frac{a^2}{2}\right] \qquad (46)$$

Z obrazcem 46 moremo prek P ustreznemu standardiziranemu odklonu za normalno porazdelitev dobiti katerekoli kvantile: mediano, kvartile, decile in centile.

Rešimo kot primer nekaj osnovnih zvez.

Za mediano z $P=0,50$, je $z_{P=0,5} = 0$. Iz tega dobimo, da je iz obrazca 46

$$Me = x_{P=0,50} = b.M.\ \exp\left[-\frac{a^2}{2}\right] \tag{47}$$

Če upoštevamo vrednost mediane iz 47 moremo pisati splošen obrazec za kvantil iz 46 v enostavnejši obliki

$$x_P = Me\ \exp\left[z_P\left[ab - \frac{z_P}{2}(b^2-1)\right]\right] \tag{48}$$

Ker je $z_P = -z_{1-P}$ dobimo iz 46, da je kvantilni razmak, ki vključuje (1-2P) vrednosti, enak

$$x_P - x_{1-P} = b.M\ \exp\left[-\frac{a^2}{2} - \frac{z_P^2}{2}(b^2-1)\right]\left[\exp\left[abz_P\right] - \exp -abz\right]$$

$$= x_P\ (1 - \exp\left[-2a\ bz_P\right]) \tag{49}$$

Enostavnejše je kvantilno razmerje, ki ga definirajmo kot kvocient $x_P/x_{1-P} = \exp\left[2\ abz_P\right]$ (50)

Tako je za kvartila Q_1 in Q_3

kvartilno razmerje

$$Q_3/Q_1 = \exp\left[1{,}3490\ ab\right] = 10^{0{,}58586\ ab} \qquad (51)$$

Podobno velja za decilno razmerje

$$D_9/D_1 = \exp\left[1{,}6832\ ab\right] = 10^{0{,}73100\ ab} \qquad (52)$$

ker je $z_{P=o,lo} = 0{,}8416$

Večina dosedaj izračunanih parametrov in zvez je dana v odnosu na aritmetično sredino, za katero predpostavljamo, da je znana. V resnici moremo to predpostavljati v večini primerov. Če je Lorenzov grafikon v katerikoli obliki zasnovan na kumulativi relativnih frekvenc in kumulativi relativnih vsot, je znana skupna frekvenca, to je obseg populacije N in skupna vsota X. Iz tega pa je aritmetična sredina

$$M = X/N \qquad (53)$$

9. Pokazovalci koncentracije. Premica v VELORG-LIN

$$u = bz - a \qquad (54)$$

je določena z dvema parametroma. Iz tega sklepamo, da je koncentracija za te tipe porazdelitev opisana z dvema parametroma. Formalno je s parametroma a in b koncentracija za VELORG-LIN popolnoma opisana, vendar moremo ta dva parametra zamenjati z drugima dvema, ki se dasta lažje tolmačiti.

Če v obrazec 54 postavimo $z_{P=o,5o} = o$, dobimo, da je ustrezen standardiziran odklon

$$u(z_{P=o,5o}) = -a \qquad (55)$$

Če prevedemo standardiziran odklon $u = -a$ v kvantilni rang

$$P_{(u=-a)} = A \qquad (56)$$

A pove, kolik del celotnega agregata odpade na polovico enot celotne populacije z najmanjšimi vrednostmi ali na enote pod mediano.

Če skušamo podobno raztolmačiti tudi odsek premice VELORG-LIN na abscisni osi $o = u_{P=o,5o}$, dobimo

$$z(u_{P=o,5o}) = \frac{a}{b} \qquad (57)$$

v 57 dobljeni z prevedemo v kvantilni rang P, iz njega dobljeni parameter

$$1 - P_{(z=a/b)} = B \qquad (58)$$

pa pove, kolik delež velikih enot obsega polovico agregata. Parametra A in B vsebinsko enostavno tolmačimo, z njima pa popolno opišemo zakonitosti koncentracije in z nasprotno transformacijo pridemo do osnovnih parametrov a in b.

Če je porazdelitev logaritemsko normalna, je b=1, A pa enak B. V tem primeru ima polovico majhnih enot enak del agregata kot je delež velikih enot, v katerem je polovica agregata.

10. Ginijev koeficient koncentracije za VELORG-LIN.

Ginijev koeficient koncentracije je definiran z

$$G = 1 - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \emptyset(x)\, d\, F(x) \qquad (59)$$

Zaradi odnosov med F(x) in $\emptyset(x)$ je za VELORG-LIN obrazec za Ginijev koeficient koncentracije

$$G = 1 - 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u=bz-a} \exp\left[- \frac{u^2}{2} \right] du \right) \exp\left[- \frac{z^2}{2} \right] dz \quad (6o)$$

Ker zaradi transcendentnosti funkcije $e^{-\frac{u^2}{2}}$ integrala 60 ne moremo izračunati direktno, dobimo približek po obrazcu

$$G = 1 - 2 \sum_k F(u_k = bz_k - a)\varphi(z_k)\Delta z \quad : \quad z_{k+1} = z_k + \Delta z \quad (61)$$

Tabela odnosov Ginijevega koeficienta G in parametrov a in b. Za pare vrednosti a = o(o,1)5,o in b = o,7o(o,o5) 1,3o so bile na računalniku IBM 113o izračunane vrednosti za G. Praktičen pomen te tabele je v tem, da moremo iz parametrov a in b, katere moremo v praktičnih primerih zlahka oceniti iz odsekov na koordinatnih oseh, oceniti, kakšna je vrednost Ginijevega koeficienta G.

Razen v tabeli so v nomogramu dani odnosi med G in a in b. Z nomogramom je lažje oceniti z vizuelno interpolacijo G tudi za vrednosti a in b, ki so med tabeliranimi.

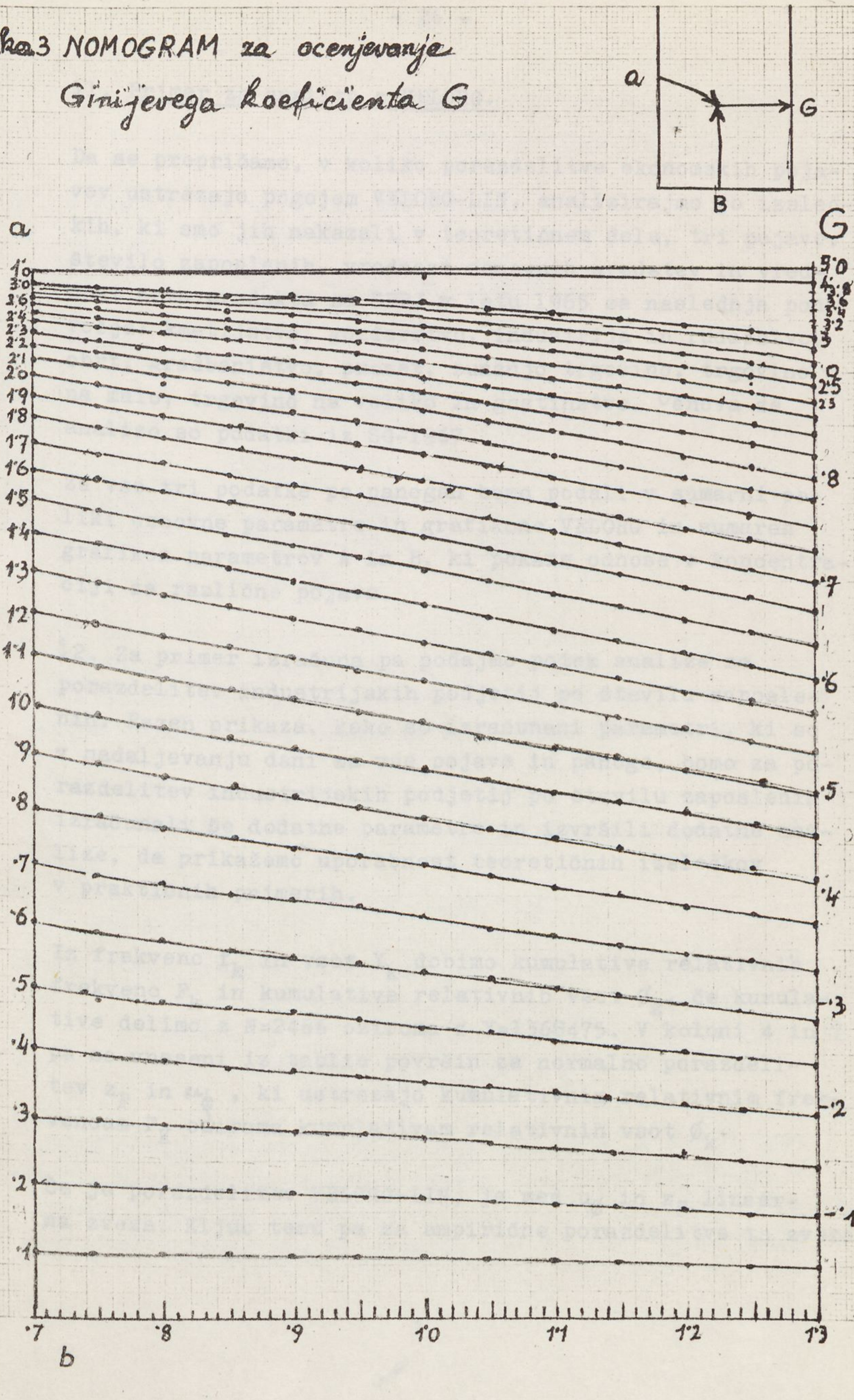
Tabela 1. Tabela za ocenjevanje Ginijevega koeficienta G, v odvisnosti od parametrov a in b

a \ b	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
0.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.1	.0653	.0638	.0622	.0607	.0593	.0578
0.2	.1301	.1271	.1241	.1211	.1182	.1153
0.3	.1941	.1897	.1852	.1808	.1765	.1722
0.4	.2569	.2510	.2452	.2395	.2338	.2282
0.5	.3179	.3108	.3038	.2968	.2898	.2830
0.6	.3770	.3688	.3606	.3524	.3444	.3364
0.7	.4337	.4245	.4154	.4062	.3971	.3882
0.8	.4878	.4778	.4678	.4578	.4479	.4381
0.9	.5391	.5285	.5178	.5071	.4965	.4859
1.0	.5873	.5763	.5651	.5539	.5427	.5315
1.1	.6325	.6211	.6096	.5980	.5864	.5748
1.2	.6744	.6629	.6513	.6395	.6276	.6157
1.3	.7131	.7017	.6900	.6781	.6661	.6541
1.4	.7486	.7373	.7257	.7139	.7019	.6899
1.5	.7809	.7699	.7585	.7469	.7351	.7232
1.6	.8101	.7995	.7885	.7772	.7657	.7540
1.7	.8363	.8262	.8156	.8048	.7936	.7822
1.8	.8597	.8501	.8401	.8298	.8191	.8081
1.9	.8804	.8715	.8621	.8523	.8421	.8316
2.0	.8987	.8904	.8817	.8725	.8629	.8529
2.1	.9146	.9070	.8990	.8904	.8815	.8721
2.2	.9285	.9216	.9142	.9063	.8980	.8893
2.3	.9405	.9342	.9275	.9203	.9127	.9046
2.4	.9507	.9451	.9391	.9325	.9256	.9181
2.5	.9594	.9545	.9491	.9432	.9369	.9301
2.6	.9668	.9625	.9577	.9524	.9467	.9406
2.7	.9730	.9692	.9650	.9603	.9552	.9497
2.8	.9782	.9749	.9712	.9671	.9626	.9576
2.9	.9825	.9797	.9765	.9729	.9682	.9645
3.0	.9860	.9836	.9809	.9777	.9742	.9704
3.1	.9889	.9869	.9845	.9818	.9788	.9754
3.2	.9912	.9895	.9875	.9852	.9826	.9797
3.3	.9931	.9917	.9900	.9881	.9858	.9833
3.4	.9947	.9935	.9921	.9904	.9885	.9863
3.5	.9959	.9949	.9937	.9923	.9907	.9888
3.6	.9968	.9960	.9951	.9939	.9925	.9909
3.7	.9976	.9969	.9961	.9952	.9940	.9927
3.8	.9981	.9976	.9970	.9962	.9953	.9941
3.9	.9986	.9982	.9977	.9970	.9963	.9953
4.0	.9990	.9986	.9982	.9977	.9971	.9963
4.1	.9992	.9990	.9986	.9982	.9977	.9970
4.2	.9994	.9992	.9990	.9986	.9982	.9917
4.3	.9996	.9994	.9992	.9989	.9986	.9982
4.4	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989	.9986
4.5	.9998	.9997	.9996	.9994	.9992	.9989
4.6	.9998	.9998	.9997	.9995	.9994	.9991
4.7	.9999	.9998	.9998	.9997	.9995	.9993
4.8	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996	.9995
4.9	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997	.9996
5.0	.0000	.9999	.9999	.9999	.9998	.9997

Tabela 1. Tabela za ocenjevanje Ginijevega koeficienta G, v odvisnosti od parametrov a in b - nadaljevanje

a \ b	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
0.0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
0.1	.0564	.0550	.0536	.0523	.0510	.0498	.0486
0.2	.1125	.1097	.1070	.1044	.1019	.0994	.0971
0.3	.1680	.1639	.1599	.1561	.1523	.1487	.1451
0.4	.2227	.2173	.2121	.2070	.2021	.1973	.1927
0.5	.2763	.2698	.2634	.2572	.2511	.2452	.2395
0.6	.3286	.3210	.3135	.3062	.2991	.2922	.2855
0.7	.3794	.3707	.3623	.3540	.3459	.3381	.3305
0.8	.4284	.4189	.4095	.4004	.3915	.3828	.3743
0.9	.4755	.4652	.4551	.4452	.4355	.4260	.4168
1.0	.5205	.5096	.4988	.4883	.4779	.4678	.4579
1.1	.5633	.5519	.5407	.5296	.5187	.5080	.4976
1.2	.6039	.5921	.5805	.5690	.5576	.5465	.5356
1.3	.6420	.6300	.6181	.6064	.5947	.5833	.5720
1.4	.6778	.6657	.6537	.6417	.6299	.6182	.6067
1.5	.7112	.6991	.6870	.6750	.6631	.6513	.6396
1.6	.7421	.7302	.7182	.7062	.6943	.6825	.6707
1.7	.7707	.7590	.7472	.7354	.7235	.7118	.7000
1.8	.7969	.7855	.7740	.7624	.7508	.7392	.7276
1.9	.8209	.8099	.7988	.7875	.7761	.7647	.7533
2.0	.8427	.8322	.8215	.8106	.7996	.7885	.7773
2.1	.8624	.8525	.8422	.8318	.8212	.8104	.7996
2.2	.8802	.8708	.8611	.8511	.8410	.8307	.8202
2.3	.8961	.8873	.8782	.8688	.8591	.8492	.8392
2.4	.9103	.9021	.8936	.8847	.8756	.8662	.8566
2.5	.9229	.9153	.9074	.8991	.8905	.8817	.8726
2.6	.9340	.9270	.9197	.9120	.9040	.8957	.8871
2.7	.9438	.9374	.9307	.9236	.9161	.9083	.9003
2.8	.9523	.9465	.9404	.9338	.9269	.9197	.9122
2.9	.9597	.9545	.9489	.9429	.9366	.9300	.9230
3.0	.9661	.9615	.9564	.9510	.9452	.9391	.9326
3.1	.9716	.9675	.9630	.9581	.9528	.9472	.9413
3.2	.9763	.9727	.9686	.9643	.9595	.9544	.9490
3.3.	.9804	.9771	.9736	.9696	.9654	.9607	.9558
3.4	.9838	.9810	.9778	.9743	.9705	.9663	.9618
3.5	.9867	.9842	.9814	.9784	.9750	.9712	.9672
3.6	.9891	.9870	.9845	.9818	.9788	.9755	.9718
3.7	.9911	.9893	.9872	.9848	.9821	.9792	.9759
3.8	.9928	.9912	.9894	.9874	.9850	.9824	.9795
3.9	.9942	.9928	.9913	.9895	.9875	.9852	.9826
4.0	.9953	.9942	.9929	.9913	.9896	.9875	.9853
4.1	.9963	.9953	.9942	.9929	.9913	.9896	.9876
4.2	.9970	.9962	.9953	.9941	.9928	.9913	.9896
4.3	.9976	.9970	.9962	.9952	.9941	.9928	.9913
4.4	.9981	.9976	.9969	.9961	.9951	.9940	.9927
4.5	.9985	.9981	.9975	.9969	.9960	.9951	.9939
4.6	.9989	.9985	.9980	.9975	.9968	.9959	.9950
4.7	.9991	.9988	.9984	.9980	.9974	.9967	.9958
4.8	.9993	.9991	.9988	.9984	.9979	.9973	.9966
4.9	.9995	.9993	.9990	.9987	.9983	.9978	.9972
5.0	.9996	.9994	.9992	.9990	.9986	.9982	.9977

slika 3 NOMOGRAM za ocenjevanje Ginijevega koeficienta G



11. Primer za analizo z VELORG.

Da se prepričamo, v koliko porazdelitve ekonomskih pojavov ustrezajo pogojem VELORG-LIN, analizirajmo po izsledkih, ki smo jih nakazali v teoretičnem delu, tri pojave: število zaposlenih, vrednost osnovnih sredstev in vrednost neto produkta za SFRJ v letu 1965 za naslednja področja: kmetijstvo, gozdarstvo, industrija in rudarstvo, obrt, gradbeništvo, promet, zunanjo trgovino, trgovino na malo, trgovino na veliko in gostinstvo. Osnova za analizo so podatki iz SG-1967.

Za vse tri podatke po panogah bomo podali v sumarni obliki osnovne parametre in grafikone VELORG in sumaren grafikon parametrov A in B, ki pokaže odnose v koncentraciji za različne pojave.

12. Za primer izračuna pa podajmo potek analize za porazdelitev industrijskih podjetij po številu zaposlenih. Razen prikaza, kako so izračunani parametri, ki so v nadaljevanju dani za vse pojave in panoge, bomo za porazdelitev industrijskih podjetij po številu zaposlenih izračunali še dodatne parametre in izvršili dodatne analize, da prikažemo uporabnost teoretičnih izsledkov v praktičnih primerih.

Iz frekvenc f_k in vsot Y_k dobimo kumulative relativnih frekvenc F_k in kumulative relativnih vsot $\emptyset_k$, če kumulative delimo z N=2466 oziroma z Y=1368475. V koloni 4 in 7 pa so vneseni iz tablic površin za normalno porazdelitev z_F in u_ϕ, ki ustrezajo kumulativnim relativnim frekvencam F_K oziroma kumulativam relativnih vsot $\emptyset_k$.

Če je porazdelitev VELORG-LIN, je med $u_\emptyset$ in z_F linearna zveza. Kljub temu pa za ampirične porazdelitve ta zveza

Tabela 2. Osnovna porazdelitev industrijskih podjetij po številu zaposlenih

x	f_k	F_k	z_F	Y_k	$\emptyset_k$	$u_\emptyset$
1	2	3	4	5	6	7
- 15	-55	0	.-	-516	o	-
16 - 29	56	.o223	-2,oo8	1214	.ooo4	-3.35o
3o - 6o	171	.o45o	-1,695	7979	.oo13	-3.o11
61 - 125	4o7	.1144	-1.2o3	37457	.oo71	-2.452
126 - 25o	547	.2794	- .585	99o62	.o345	-1.818
251 - 5oo	542	.5o12	.oo3	1927o1	.1o68	-1.244
5o1 -1ooo	349	.72o9	.586	246873	.2477	- .682
1oo1-2ooo	216	.8625	1.o92	3o3859	.428o	- .181
2oo1-	123	.95o1	1.646	478814	.65o1	.386
	2466	1.oooo		1368475	1.oooo	

ni funkcijska, tudi če je porazdelitev tipa VELORG-LIN. Stvarnim porazdelitvam ustrezna prilagojena VELORG-LIN porazdelitev je ona, ki se stvarnim točkam VELORG najbolje prilega.

To je regresijska premica

$$u'_\emptyset = bz_F - a \qquad (62)$$

ki jo dobimo po metodi najmanjših kvadratov. Pogoj, ki ga postavljamo na izračunane parametre, je

$$\sum w_k (u_{\emptyset_k} - u'_{\emptyset_k})^2 = \text{Min} \qquad (63)$$

Pri tem so w_k ponderi, w_k=c=1, če damo vsem vrednostim oziroma razredom enak pomen. Možna pa je varianta, da damo vrednostim, ki veljajo za razrede z večjimi frekvencami, večjo težo. V tem primeru je ena izmed možnih ponderacij $w_k = f_{k-1} + f_k$. V našem primeru smo se odločili za kriterij neponderiranih kvadratov odklonov.

S pomočjo z_F in $u_\emptyset$ dobimo, da je

$$u'_\emptyset = 1{,}0148\ z_F - 1{,}2695 \qquad (64)$$

ker je

$$b = \frac{c_{z_F u_\emptyset}}{\sigma^2_{z_F}} \quad , \ a = \bar{u}_\emptyset - b\bar{z}_F \qquad (65)$$

Za z_F=o je $A=u_\emptyset = -1{,}2695$. Ø, ki ustreza $u_\emptyset$ pa je o,lo2 ali lo,2 %. V 50 % majhnih podjetij je lo,2 % vseh zaposlenih v industriji.

Za $u_\emptyset$=o, je $B=z_F = a/b = \dfrac{1{,}2695}{1{,}0148} = 1{,}2509$. Temu B ustreza F= o,894, kar pomeni, da je v looF-89,4 = 10,6 % velikih industrijskih podjetij 50 % vseh zaposlenih.

V koliko stvarna porazdelitev ustreza teoretični VELORG-LIN porazdelitvi, presodimo s korelacijskim koeficientom $r_{z_F z_\emptyset}$.

Za naš primer je

$$r_{z_F u_\emptyset} = \frac{c_{z_F z_\emptyset}}{\sigma_{z_F}\sigma_{z_\emptyset}} = \frac{12{,}5369}{\sqrt{12{,}3543}\cdot\sqrt{12{,}7290}} = 0{,}9997 \qquad (66)$$

Linearna odvisnost med z_F in $u_\emptyset$ se je pokazala kot zelo visoka. Čeprav gre del te visoke odvisnosti na račun relativno majhnega števila stopinj prostosti (k-2 = 8-2 =6), je korelacijski koeficient tako velik, da moremo sklepati na to, da porazdelitev za število zaposlenih v industriji teži k VELORG-LIN zakonitosti.

Pomemben parameter VELORG-LIN porazdelitev je

$$c = a.b/(b^2-1) = \frac{1,2695.1,o148}{(1,o148^2 - 1)} = 43,2o4.$$ Parameter

$c^+ = z_F = 43,2o4$ glede na 7,8 in 9 nakazuje razmak, v katerem je porazdelitev VELORG-LIN definirana. Za naš primer je jasno, da je v razmaku $\infty < z \leqslant 43,2o4$ praktično celotna populacija.

Ker $M = Y/N = \frac{1368475}{2466} = 554,94$ znan, po obrazcu 14 dobimo zvezo med x in z za prilagojeno VELORG-LIN porazdelitev.

$$z = c^+ - \sqrt{\frac{(c^+)^2}{b^2} - \frac{2}{b^2-1} \ln \frac{x}{bM}} =$$

$$= c^+ - \sqrt{\left[\left(\frac{c^+}{b}\right)^2 + \frac{2}{(b^2-1)\mathrm{Mod}} \log bM\right] - \frac{2}{(b^2-1)\mathrm{Mod}} \log x} =$$

$$= 43,2o4 - \sqrt{\left[\left(\frac{43,2o4}{1,o148}\right)^2 + \frac{2 \log(1,o148.554,94)}{(1,o148^2-1)\ 0,43429448}\right] - \frac{2}{(1,o148^2-1)\ 0,43429448} \log x} =$$

$$= 43,2o4 - \sqrt{2237,352155 - 154.44o \log x} \tag{67}$$

Ta zveza med x in z_F omogoča reproducirati osnovni porazdelitvi prilagojeno teoretično VELORG-LIN porazdelitev. Razen tega moremo dobiti prek te zveze teoretično VELORG-LIN porazdelitev za katerokoli drugo grupacijo za vrednost osnovnega znaka x. Če stvarna porazdelitev sledi zakonitosti VELORG-LIN, kar je razvidno iz ustreznega korelacijskega koeficienta $r_{z_F u_\emptyset}$, dajo nakazane interpolacije boljše rezultate, ker je interpolacija izvršena na premici. Za primer najprej stvarni porazdelitvi za industrijska podjetja po številu zaposlenih prilagodimo VELORG-LIN.

Nakazan izračun in primerjava stvarnih kumulativ F (glej k=J-I) in kumulativnih vsot $\emptyset$ (glej O=N-M) s teoretičnimi v tabeli 3 pokaže zadosti veliko skladnost med obema.

Za primer pregrupiranja podatkov na druge razrede vzemimo meje razredov s kvocientom 2 in začetno mejo 25. Po enakem postopku kot za osnovno grupacijo dobimo kumulativo F in $\emptyset$ v tabeli 4.

V tabeli 4 je v koloni M frekvenčna porazdelitev števila podjetij po številu zaposlenih, izračunana iz prilagojene VELORG-LIN porazdelitve. Ker zaradi velikega korelacijskega koeficienta med z_F in $u_\emptyset$ (r = o,9997) sklepamo na precejšnjo skladnost med stvarno in prilagojeno porazdelitvijo, moremo dobljeno teoretično frekvenčno porazdelitev smatrati kot približek stvarne porazdelitve oziroma kot zadosti dobro oceno za pregrupirano porazdelitev. Podobno so tudi v stolpcu O izračunane vsote števila v posameznih razredih ocene števila zaposlenih v pregrupirani porazdelitvi.

Tabela 3. Prilagoditev VELORG-LIN za porazdelitev industrijskih podjetij v SFRJ v letu 1965 po številu zaposlenih

Število zaposlenih	x	log x		
A	B	C=logB	D=154,44oC	E=2237,3522-D
-15				
16 - 29	15,5	1,19o33	183,834565	2o53,51759o
30 - 60	29,5	1,46982	226,999ool	2olo,353154
61 - 125	6o,5	1,78176	275,175o14	1962,177141
126 - 25o	125,5	2,o9864	324,113962	1913,238193
251 - 5oo	25o,5	2,39881	37o,472216	1866,879939
5ol -looo	5oo,5	2,6994o	416,895336	182o,456819
lool -2ooo	looo,5	3,ooo22	463,353977	1773,998178
2ool -	2ooo,5	3,3o114	5o9,828o62	1727,524o93

	z_x	x	F'_z	F_z	ΔF_z
$F=\sqrt{E}$	G=43,2o4-F	H=B	$I=F'_z$	$I=F_2$	K=J-I
45,316	-2,112	15,5	1,73	2,23	0,50
44,837	-1,633	29,5	5,12	4,5o	-o,62
44,296	-1,o94	6o,5	13,7o	11,44	-2,26
43,746	-o,5o4	125,5	3o,71	27,94	-2,77
43,2o7	-o,oo3	25o,5	5o,12	5o,12	o,oo
42,667	o,537	5oo,5	7o,44	72,o9	1,65
42,118	1,o86	looo,5	86,13	86,25	o,12
41,564	1,64o	2ooo,5	94,95	95,ol	o,o6

$u_\emptyset=bz_F-a$	$\emptyset'_u$	$\emptyset_u$	$\Delta\emptyset_u$
L=bG-a	$M=\emptyset'_L$	$N=\emptyset$	O=N-M
-3,413	o,o3	o,o4	o,ol
-2,927	o,17	o,13	-o,o4
-2,38o	o,87	o,71	-o,16
-1,781	3,75	3,45	o,3o
-1,273	lo,15	lo,68	o,53
-o,725	23,42	24,77	1,35
-o,167	43,37	42,8o	-o,57
o,394	65,32	65,ol	-o,31

Tabela 4. VELORG-LIN porazdelitev za industrijska podjetja v SFRJ v letu 1965 po številu zaposlenih

Število zaposlenih A	B	C=logB	D=154,440C	E=2237,3522-D
- 25				
26 - 50	25,5	1,40654	217,226038	2020,126117
51 - 100	50,5	1,70329	263,056108	1974,296047
101 - 200	100,5	2,00217	309,215135	1928,137020
201 - 400	200,5	2,30211	355,537868	1881,814287
401 - 800	400,5	2,60260	401,945544	1835,406611
801 -1600	800,5	2,90336	448,394918	1788,957237
1601 -3200	1600,5	3,20426	494,865914	1742,486241
3201 -	3200,5	3,50522	541,346177	1696,006023

$F=\sqrt{E}$	z_F' $G=43,204-F$	F_z' H	$I=B$	$u_\emptyset=bz_F-a$ $J=bG-a$	$\emptyset_u$ K
44,946	-1,742	4,08	25,5	-3,037	0,12
44,433	-1,229	10,95	50,5	-2,517	0,69
43,911	-0,707	23,88	100,5	-1,987	2,35
43,380	-0,176	43,01	200,5	-1,448	7,38
42,842	+0,362	64,13	400,5	-0,902	18,35
42,296	+0,908	81,81	800,5	-0,348	36,39
41,743	+1,461	92,80	1600,5	+0,213	58,43
41,183	+2,021	97,84	3200,5	+0,781	78,26

f'% $L=\Delta H$	f' $M=2466L$	Y'% $N=\Delta K$	Y' $O=13687475N$
4,08	101	0,12	1600
6,87	169	0,57	7800
12,93	319	1,66	22700
19,13	472	5,03	68800
21,12	521	10,97	150100
17,68	436	18,04	246900
10,99	271	22,04	301600
5,04	124	19,83	271400
2,16	53	21,74	297500
100,00	2466	100,00	1368400

Za isto porazdelitev izračunajmo po obrazcih 32, 44, 47, 27 in 28 G_x, H_x, Me, γ_1, γ_2 in $\sqrt{u_2}(\ln x)$.

$$G_x = b.M.\exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+b^2-1)\right] = 1{,}o148.554{,}94\,.$$

$$.\exp\left[-\frac{1}{2}(1{,}2695^2+1{,}o148^2-1)\right] = 247{,}85$$

$$H_x = b.M.\sqrt{2-b^2}.\ \exp\left[-\frac{a^2}{2-b^2}\right] = 1{,}o148.554{,}94.\sqrt{2-1{,}1o48^2}$$

$$.\exp\left[-\frac{1{,}2695^2}{2-1{,}o148^2}\right]. = 1o5{,}35$$

$$Me = b.M.\exp\left[-\frac{a^2}{2}\right] =. 1{,}o148.554{,}94.\exp\left[-\frac{1}{2}1{,}2695^2\right] =$$

$$= 251{,}58$$

$$\gamma_1(\ln x) = -\frac{1}{c}\,\frac{3+\frac{1}{c^2}}{(1+\frac{1}{2c^2})^{3/2}} \doteq -\frac{1}{c}(3-\frac{1}{4c^2}) =$$

$$= \frac{-1}{43{,}2o4}(3-\frac{1}{4.43{,}2o3^2}) = -\,o{,}o694$$

$$\gamma_2(\ln x) = 12\left[1-\frac{1}{(1+\frac{1}{2c^2})^2}\right] \doteq \frac{12}{c^2} = \frac{12}{43{,}2o4^2} = o{,}oo64$$

$$\sigma_{\ln x} = \sqrt{\mu_2(\ln x)} = a.b\sqrt{1+\frac{1}{2c^2}} = 1{,}2695.1{,}o148\sqrt{1+\frac{1}{2.23{,}2o^{4}}}$$

$$= 1{,}28846$$

$\sigma_{\log x} = \sigma_{\ln x} . Mod = 1{,}28846 . o{,}434294 = o{,}55957$

Dobljeni rezultati kažejo več značilnosti proučevane porazdelitve. Zaradi velike asimetrije porazdelitve so razlike med posameznimi merami centralne tendence znatne. Ker sta tako mera asimetrije γ_1 kot mera splošnosti γ_2 za lnx razmeroma majhna, sklepamo, da je porazdelitev blizu logaritemsko-normalni porazdelitvi. Če $\sigma(\log x) =$ o,55857 antilogaritmiramo, dobimo K = 3,627. Intervalom $M \pm z\sigma$, za ta primer ustreza razmak,

$G_x . K^{-z} < x < G_x . K^{+z}$ pri čemer za logaritemsko normalno porazdelitev točno, za njej podobne porazdelitve pa približno veljajo zakonitosti med relativnimi frekvencami v teh razmakih in standardiziranim z odklonom za normalno porazdelitev.

Iz prilagojene VELORG-LIN porazdelitev dobljene parametre moremo uporabiti kot približke za parametre stvarnih porazdelitev. V tem primeru jasno rezultate zaokrožimo. Za število zaposlenih v industriji je tako: G_x = 248, H_x = 1o5, Me = 252.

Kot primer izračunajmo za prilagojeno VELORG-LIN porazdelitev še kvantilne parametre.

Če iščemo 9. decil D_9, dobimo po obrazcu 48

$$x_p = Me.\exp\left[z_p\left[ab - \frac{z_p}{2}(b^2-1)\right]\right] =$$

$$= 251{,}58 . 10^{o{,}43429448 . 1{,}281155\left[1{,}28155 . 1{,}o148 - \frac{1{,}281155}{2}(1{,}o148^2-1)\right.}$$

$$\left.(1{,}o148^2-1)\right] = 1299$$

Iz zgornjega rezultata dobimo po obrazcu 49, da je decilni razmak

$$x_{o,9} - x_{o,1} = x_{o,9}\,(1-\exp[-2abz_p]) =$$

$$= 1299{,}11\,(1-\exp[-2{,}128155.1{,}o148.1281155]) = 1253$$

Iz obrazca 51 dobimo enostavno kvartilno razmerje Q_3/Q_1

$$Q_3/Q_1 = 10^{o,58586ab} = 1o^{o,58586.1,28155.1,o148} = 5{,}780$$

po obrazcu 52 pa decilno razmerje D_9/D_1

$$D_9/D_1 = 1o^{o,731ooab} = 1o^{o,731oo.1,28155.1,o148} = 8{,}926$$

Zadnji kvartil Q_3 je torej 5,78 krat večji od prvega Q_1, zadnji decil D_9 pa 8,926 krat večji kot prvi decil D_1.

Če ocenimo s pomočjo tabele 1 še Ginijev koeficient koncentracije G, dobimo z linearno interpolacijo:

Izsek iz tabele 1

a \ b		$b_o=1{,}oo$	$b_1=1{,}o5$
a_o	1,2	$G_{oo}=0{,}6o39$	$G_{o1}\doteq 5921$
a_1	1,3	$G_{1o}=o{,}642o$	$G_{11}\doteq 63oo$

$$G = G_{oo} + \frac{a-a_o}{a_1-a_o}(G_{1o}-G_{oo}) + \frac{b-b_o}{b_1-b_o}(G_{o1}-G_{oo}) = 0{,}6039 +$$

$$+ \frac{1{,}2695-1{,}2}{1{,}3-1{,}2}(o{,}642o-o{,}6o39) + \frac{1{,}o148-1{,}oo}{1{,}o5-1{,}oo}(o{,}5921-o{,}6o39) = 0$$

13. Po prikazu izračuna parametrov za porazdelitev industrijskih podjetij v SFRJ po številu zaposlenih, v katerem je nakazan način za izračunavanje posameznih parametrov za prilagojen VELORG-LIN, podajamo v nadaljevanju tabelo osnovnih parametrov za prilagojene VELORG-LIN za gospodarske organizacije po področjih dejavnosti za osnovne tri porazdelitve: po številu zaposlenih, po osnovnih sredstvih in neto produktu. VELORG-LIN je definiran s parametroma a in b oziroma z in B=a/b. A=(-a) je namreč odsek premice VELORG-LIN na ordinatni osi, B=a/b pa na abscisni osi.

Iz navedenega primera kompleksnejšega prikaza za več področij dejavnosti in različne podatke spoznamo, da večina pojavov bolj ali manj sledi zakonitostim VELORG-LIN. Razen osnovnih parametrov so v nadaljevanju še VELORG za posamezna področja dejavnosti. Že bežna primerjava števila organizacijskih enot v vsakem področju dejavnosti z ustreznimi VELORG ali korelacijskimi koeficienti r nakazuje, da so odkloni empiričnih porazdelitev za posamezna področja dejavnosti pogojeni s slučajnostnimi faktorji, katerih učinek se po zakonu o velikih številih za večje populacije omiljuje.

INSTITUT ZA GOZDNO IN LESNO GOSP. KNJIŽNICA

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnostih

Kmetijstvo - število zaposlenih

x_k	f_k	$F_k\%$	Y_k	$Ø_k\%$
- 15	775	0	6152	0
16 - 29	512	27.7o	1125o	1,89
30 - 6o	6o9	46.4o	25857	5,34
61 - 125	446	67,76	38977	13,27
126 - 25o	233	83,7o	411oo	25,22
251 - 5oo	117	92,o3	42682	37,83
5o1 -1ooo	57	96,21	4o272	5o,92
1ooo -2ooo	3o	98,25	42859	63,27
2oo1 -	19	99,32	76895	76,41
	2798	1oo,oo	326o44	1oo,oo

Kmetijstvo - Osnovna sredstva

x_k	f_k	$F_k\%$	Y_k	$Ø_k\%$
- 15	1o9	0	o,8	o
15 - 5o	127	3,9o	4,1	o,o1
5o - 15o	334	8,43	32,6	o,o5
15o - 5oo	7o1	2o,37	211,o	o,39
5oo -15oo	724	45,43	648,1	2,61
15oo -5ooo	486	71,3o	13o9,6	9,42
5ooo -15ooo	2o3	88,67	1696,4	23,19
15ooo -5oooo	82	95,93	2117,8	41,o2
5oooo -	32	98,86	3494,2	63,27
	2798	1oo,oo	9514,3	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Kmetijstvo - Neto produkt

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\Phi_k\%$
- 15	21	o	-o.5	o
15 - 5o	122	o,75	4,3	-o,ol
5o - 15o	4ol	5,11	38,8	o,o7
15o - 5oo	862	19,44	262,4	o,82
5oo - 15oo	818	5o,25	711,o	5,85
15oo - 5ooo	382	79,49	995,3	19,49
5ooo -15ooo	14o	93,14	1136,7	38,58
15ooo -5oooo	39	98,14	963,o	6o,38
5oooo -	13	99,54	11o3,8	78,85
	2798	loo,oo	5214,9	loo,oo

Gozdarstvo: Zaposleni

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\Phi_k\%$
- 6	3	o	12	o
7 - 15	6	1,97	48	o,o2
16 - 29	15	5,92	356	o,o8
3o - 6o	18	15,79	8ol	o,53
61 - 125	15	27,63	1286	1,56
126 - 25o	19	37,5o	3141	3,21
251 - 5oo	19	5o,oo	735o	7,24
5ol -1ooo	3o	62,5o	2191o	16,67
1ool -2ooo	24	82,24	34148	44,78
2ool -	3	98,o3	8877	88,59
	152	loo,oo	77929	loo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Gozdarstvo - Osnovna sredstva

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 15	1	o	o,o	o
15 - 5o	3	o.66	o,1	o,oo
5o - 15o	9	2,63	o,8	o,o1
15o - 5oo	28	8,55	8,2	o,o7
5oo - 15oo	25	26,97	22,3	o,75
15oo - 5ooo	2o	43,42	59,1	2,6o
5ooo -15ooo	41	56,58	415,5	7,48
15ooo -5oooo	23	83,55	581,1	41,84
5oooo -	2	98,69	122,3	89,89
	152	1oo,oo	12o9,4	1oo,oo

Gozdarstvo: Neto produkt

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 5o	3	o	o,1	o
50 - 15o	5	1,97	o,5	o,o1
15o - 5oo	25	5,26	8,3	o,o6
5oo - 15oo	25	21,71	23,1	o,84
15oo -5oooo	3o	38,16	91,5	3,o1
5ooo -15ooo	39	57,9o	377,8	11,6o
15ooo -5oooo	24	83,55	494,2	47,o9
5oooo -	1	99,34	69,2	93,51
	152	1oo,oo	1o64,6	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Industrija - Rudarstvo: Zaposleni

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 15	55	o	516	o
16 - 29	56	2,23	1214	o,o4
3o - 6o	171	4,5o	7979	o,13
61 - 125	4o7	11,44	37457	o,71
126 - 25o	547	27,94	99o62	3,45
251 - 5oo	542	5o,12	1927o1	1o,68
5o1 - 1ooo	349	72,o9	246873	24,77
1oo1 - 2ooo	216	86,25	3o3859	42,8o
2oo1 -	123	95,o1	478814	65,o1
	2466	1oo,oo	1368475	1oo,oo

Industrija - Rudarstvo: Osnovna sredstva

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 15	16	o	o,1	o
15 - 5o	18	o,65	o,6	o,oo
5o - 15o	39	1,38	3,7	o,oo
15o - 5oo	181	2,96	62,4	o,o1
5oo - 15oo	453	1o,3o	446,5	o,14
15oo - 5ooo	717	28,67	2o96,5	1,o5
5ooo - 15ooo	53o	57,74	4596,1	5,35
15ooo - 5oooo	312	79,23	8384,3	14,78
5oooo -	2oo	91,89	3317o,3	31,98
	2466	1oo,oo	4876o,6	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Industrija - Rudarstvo: Neto produkt

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\phi_k\%$
- 15	9	o	-2,7	o
15 - 5o	7	o,36	o,3	-o,ol
5o - 15o	14	o,65	1,5	-o,ol
15o - 5oo	112	1,22	36,8	o,oo
5oo - 15oo	4o6	5,76	411,3	o,13
15oo - 5ooo	81o	22,22	2419,o	1,6o
5ooo -15ooo	646	55,o7	5633,4	1o,28
15ooo -5oooo	366	81,27	9323,8	3o,5o
5oooo -	96	96,1o	1oo44,5	63,95
	2466	1oo,oo	27868,1	1oo,oo

Obrt - Zaposleni

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\phi_k\%$
- 6	341	o	1372	o
7 - 15	483	1o77	5143	o,68
16 - 29	5o2	26o1	11o21	3,23
3o - 6o	727	4186	31257	8,7o
61 - 125	673	6481	58369	24,21
126 - 25o	35o	86o8	58935	53,17
251 - 5oo	75	9711	24973	82,42
5ol - 1ooo	17	9948	1o452	94,81
	3168	1oo,oo	2o1522	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Gradbeništvo - Zaposleni

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 29	22	o	227	o
3o - 6o	15	5,9o	619	o,o8
61 - 125	31	9,92	286o	o,31
126 - 25o	66	18,23	11841	1,35
251 - 5oo	98	35,93	34666	5,67
5o1 - 1ooo	59	62,2o	41679	18,3o
1oo1 - 2ooo	46	78,o2	65311	33,49
2oo1 -	36	9o,35	117215	57,28
	373	1oo,oo	274418	1oo,oo

Gradbeništvo - Osnovna sredstva

x	f_k	F_k	Y_k	$\emptyset$%
- 15	2o	o	o,o	o
15 - 5o	3	5,36	o,1	o,oo
5o - 15o	6	6,17	o,7	o,oo
15o - 5oo	4o	7,77	12,2	o,o3
5oo - 15oo	1o4	18,5o	99,7	o,52
15oo - 5ooo	97	46,38	26o,8	4,47
5ooo - 15ooo	6o	72,39	5o8,6	14,81
15ooo - 5oooo	3o	88,47	866,1	34,98
5oooo -	13	96,52	773,2	69,33
	373	1oo,oo	2521,4	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Gradbeništvo - Neto produkt

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\phi_k\%$
- 15o	2o	o	1,2	o
15o - 5oo	16	5,36	5,2	o,o3
5oo - 15oo	46	9,65	46,4	o,18
15oo - 5ooo	144	21,98	441,4	1,47
5ooo - 15ooo	74	6o,59	637,o	13,75
15ooo - 5oooo	6o	8o,43	156o,1	31,47
5oooo -	13	96,52	9o2,9	74,87
	373	1oo,oo	3594,1	1oo,oo

Promet - Zaposleni

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\phi_k\%$
- 6	3	o	14	o
7 - 15	13	o,71	114	o,oo
16 - 29	14	3,76	3oo	o,o4
3o - 6o	46	7,o6	2164	o,15
61 - 125	79	17,88	72o2	o,9o
126 - 25o	71	36,47	12817	3,39
251 - 5oo	91	53,18	31632	7,82
5o1 - 1ooo	57	74,59	3965o	18,77
1oo1 - 2ooo	24	88,oo	29835	32,49
2oo1 -	27	93,65	165561	42,81
	425	1oo,oo	289289	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Promet - Osnovna sredstva

x	f_x	F_k%	Y_k	$\emptyset_k$%
- 5	9	o	o,o	o
5 - 15	3	2,12	o,o	o,oo
15 - 5o	5	2,82	o,2	o,oo
5o - 15o	5	4,oo	o,5	o,oo
15o - 5oo	13	5,18	4,2	o,oo
5oo - 15oo	35	8,24	35,o	o,o2
15oo - 5ooo	1o6	16,47	344,5	o,16
5ooo -15ooo	138	41,41	138o,o	1,57
15ooo -5oooo	62	73,88	2o15,o	7,21
5oooo -	49	88,47	2o674,6	15,45
	425	1oo,oo	24454,o	1oo,oo

Promet - Neto produkt

x	f_k	F_k%	Y_k	$\emptyset$%
- 5o	1	o	o,o	o
5o - 15o	15	o,24	1,2	o,oo
15o - 5oo	21	3,76	7,7	o,o2
5oo - 15oo	71	8,71	73,3	o,18
15oo - 5ooo	139	25,41	415,6	1,65
5ooo -15ooo	117	58,12	1oo1,2	1o,o2
15ooo -5oooo	37	85,65	98o,2	3o,17
5oooo -	24	94,36	2487,2	49,91
	425	1oo,oo	4966,8	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Zunanja trgovina - Zaposleni

x	f_k	F_k%	Y_k	$Ø_k$%
- 15	1	o	14	o
16 - 29	3	o,72	74	o,o5
3o - 6o	27	2,85	1269	o,33
61 - 125	33	21,99	31oo	5,o2
126 - 25o	42	45,39	7525	16,47
251 - 5oo	25	75,18	8684	44,29
5o1 -1ooo	1o	92,91	6392	76,38
	141	1oo,oo	27o58	1oo,oo

Zunanja trgovina - Osnovna sredstva

x	f_k	F_k%	Y_k	Ø%
- 5o	1	o	-	o
5o - 15o	3	o,72	o,3	o,oo
15o - 5oo	2o	2,85	6,6	o,o6
5oo - 15oo	42	17,o3	41,4	1,46
15oo - 5ooo	41	46,82	114,4	1o,27
5ooo -15ooo	3o	75,89	225,9	34,62
15ooo -	4	97,17	83,5	82,46
	141	1oo,oo	472,1	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Trgovina na malo - Zaposleni

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\emptyset_k\%$
- 6	61	o	15o	o
7 - 15	44	6,7o	481	o,16
16 - 29	88	11,53	1983	o,65
3o - 6o	215	21,19	9598	2,71
61 - 125	264	44,8o	2393o	12,64
126 - 25o	16o	73,79	27743	37,41
251 - 5oo	66	91,35	22763	66,12
5o1 -1ooo	11	98,6o	7289	89,68
1oo1 -	2	99,81	2727	97,22
	911	1oo,oo	96664	1oo,oo

Trgovina na malo - Neto produkt

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\emptyset_k\%$
- 5	8	o	o,o	o
5 - 15	17	o,88	o,1	o,oo
15 - 25	15	2,75	o,4	o,oo
25 - 5o	19	4,39	2,2	o,o2
5o - 15o	69	6,48	21,8	o,o8
15o - 5oo	242	14,o5	237,3	o,77
5oo - 15oo	375	4o,63	1o69,9	8,23
15oo - 5ooo	145	81,8o	1o93,5	41,87
5ooo -15ooo	17	97,72	43o,1	76,25
15ooo -	4	99,59	325,2	89,77
	911	1oo,oo	318o,9	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Trgovina na veliko - Zaposleni

x	f_k	F_k%	Y_k	$Ø_k$%
- 6	1o	o	46	o
7 - 15	35	1,61	4o5	o,o4
16 - 29	37	7,22	844	o,41
3o - 6o	112	13,16	4955	1,18
61 - 125	143	31,14	12949	5,71
126 - 25o	151	54,o9	27135	17,55
251 - 5oo	92	78,32	319o3	42,35
5o1 - 1ooo	38	93,o9	24582	71,51
1oo1 -	5	99,19	6623	93,98
	623	1oo,oo	1o9442	1oo,oo

Trgovina na veliko - Neto produkt

x	f_k	F_k%	Y_k	Ø%
25 - 5o	1o	o	1,1	o
5o - 15o	42	1,61	13,6	o,o3
15o - 5oo	118	8,35	114,3	o,43
5oo - 15oo	227	27,29	697,5	3,75
15oo - 5ooo	175	63,72	15o6,3	24,oo
5ooo -15ooo	51	91,81	1111,1	67,74
	623	1oo,oo	3444,1	1oo,oo

Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Gostinstvo - Zaposleni

x	f_k	F_k%	Y_k	$Ø_k$%
- 6	291	o	714	o
7 - 15	131	24,25	1388	o,89
16 - 29	153	35,17	3455	2,61
3o - 6o	248	47,91	1o671	6,91
61 - 125	199	68,58	17635	2o,17
126 - 25o	1o7	85,16	195oo	42,o9
251 - 5oo	62	94,o8	2o299	66,33
5o1 - 1ooo	7	99,25	4175	91,56
1oo1 -	2	99,83	2616	96,75
	12oo	1oo,oo	8o453	1oo,oo

Gostinstvo - Osnovna sredstva

x	f_k	F_k%	Y_k	$Ø_k$%
- 5	175	o	o,1	o
5 - 15	49	14,58	o,4	o,oo
15 - 50	85	18,67	2,4	o,o2
5o - 15o	134	25,75	12,5	o,14
15o - 5oo	243	36,92	73,2	o,76
5oo - 15oo	242	57,16	221,2	4,35
15oo - 5ooo	176	77,33	489,9	15,21
5ooo -1oooo	75	92,oo	684,o	39,27
15ooo -5oooo	2o	98,25	479,8	72,85
5oooo -	1	99,91	73,4	96,41
	12oo	1oo,oo	2o36,8	1oo,oo

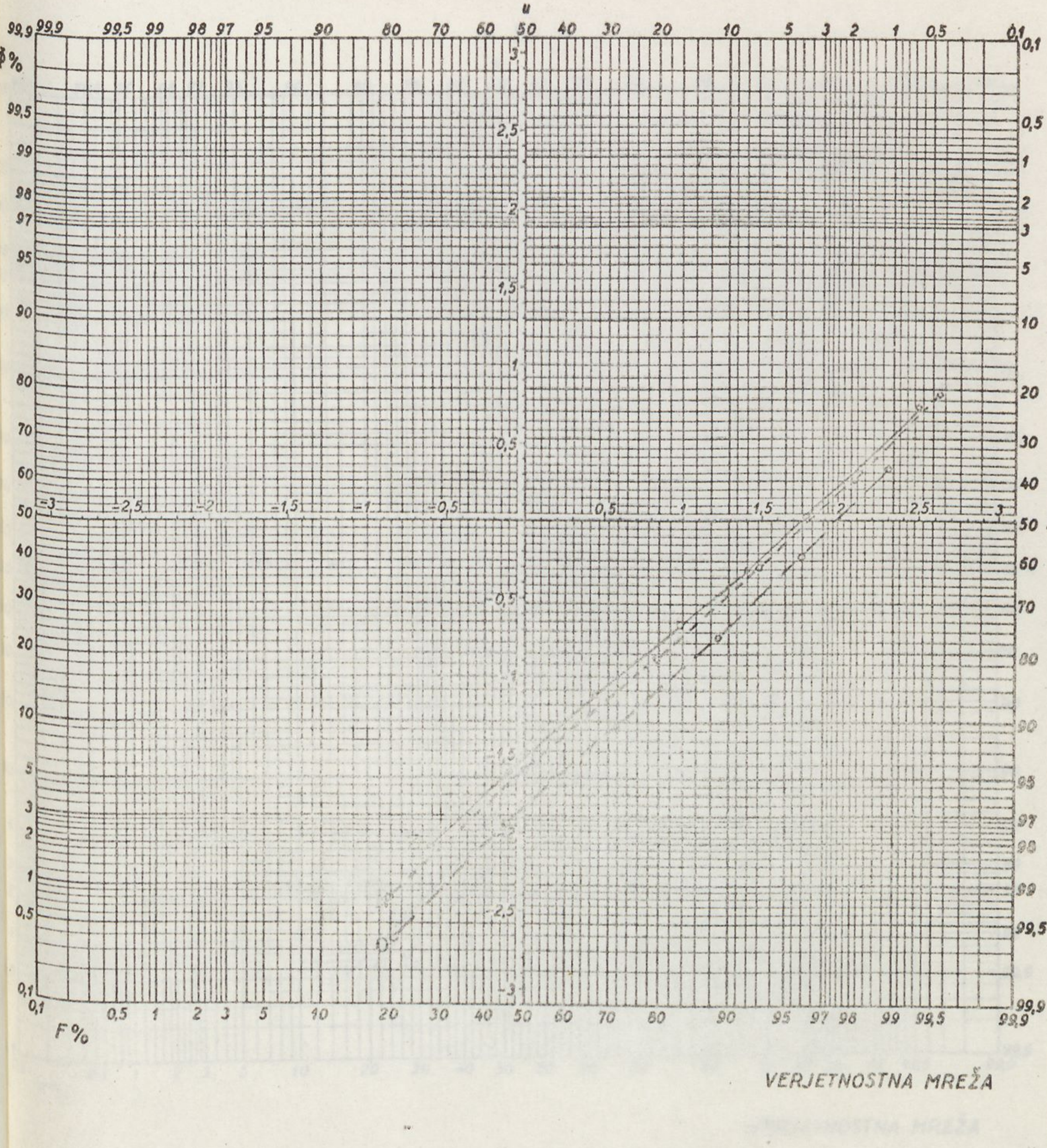
Tabela 5. Frekvenčne porazdelitve in porazdelitve vsot v letu 1965 po področjih dejavnosti (nadaljevanje)

Gostinstvo - neto produkt

x	f_k	$F_k\%$	Y_k	$\emptyset_k\%$
- 5	23	o	-o,2	o
5 - 15	67	1,92	o,7	-o,o2
15 - 5o	137	7,5o	4,3	o,o4
5o - 15o	146	18,92	14,2	o,4o
15o - 5oo	268	31,o8	82,4	1,58
5oo - 15oo	332	53,41	288,5	8,44
15oo - 5ooo	19o	81,o8	521,9	32,45
5ooo -15ooo	34	96,91	226,7	75,88
15ooo -5oooo	3	99,75	63,1	94,75
	12oo	1oo,oo	12o1,6	1oo,oo

število zaposlenih: x = število Y = število
osnovna sredstva: x = tisoč N din Y_k = mlj N din
neto produkt: x = tisoč N din Y_k = mlj N din

v
je)



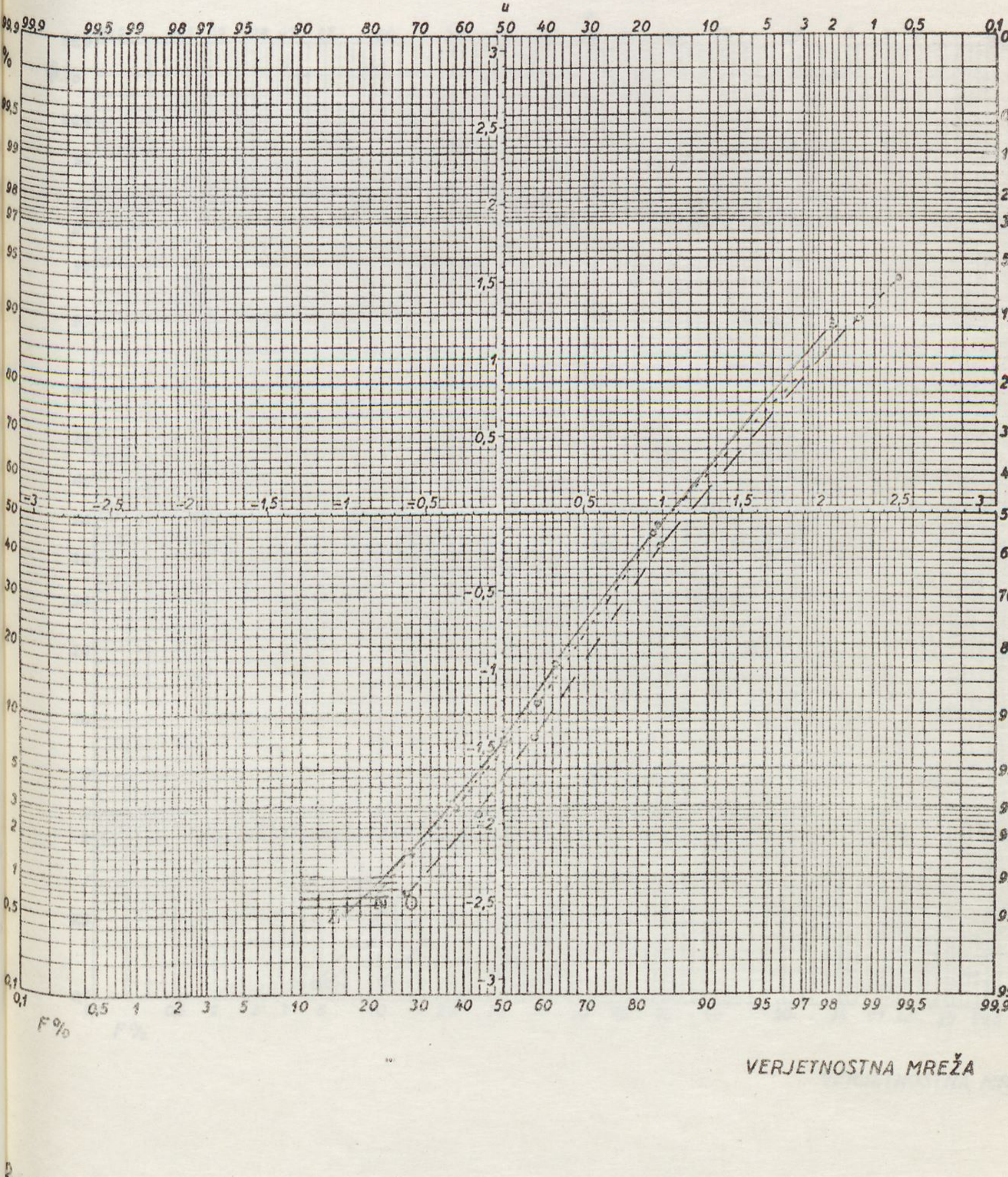
VELORG za kmetijstv

4.1. VELORG za KMETIJSTVO 1965

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

N - neto produkt

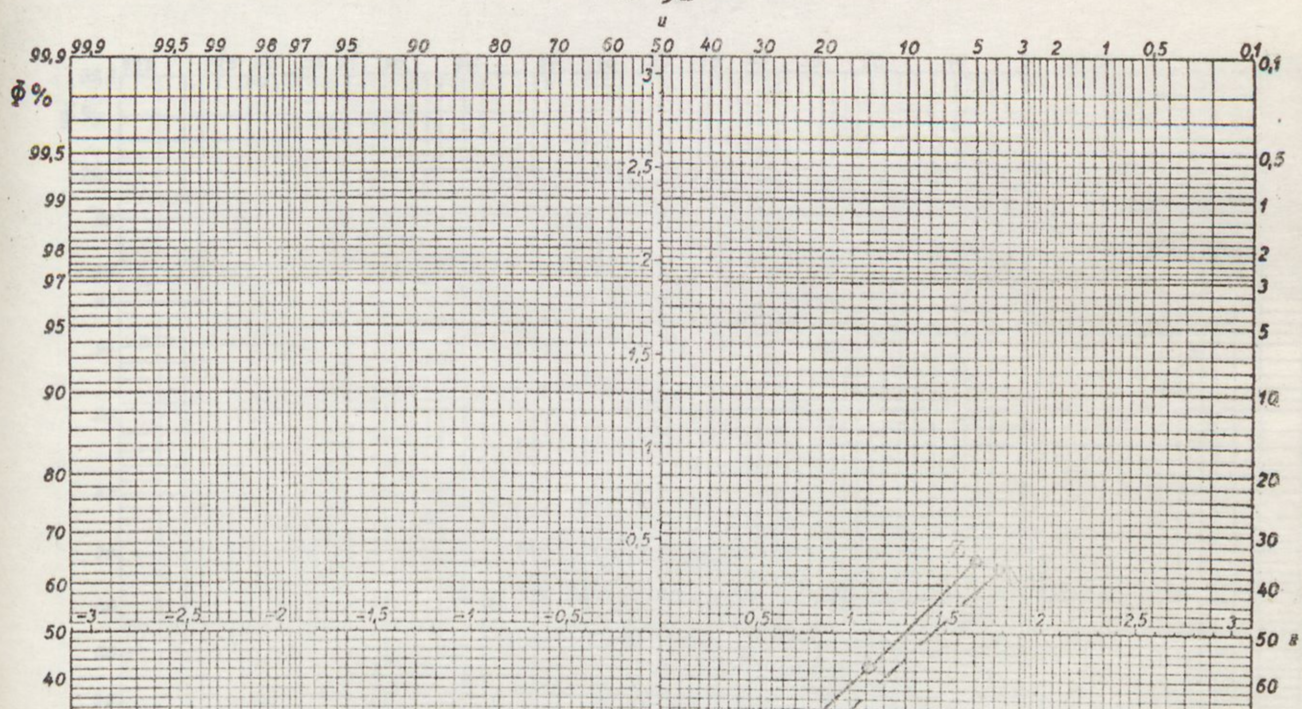


2. VELORG za GOZDARSTVO 1965

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

N - Neto produkt

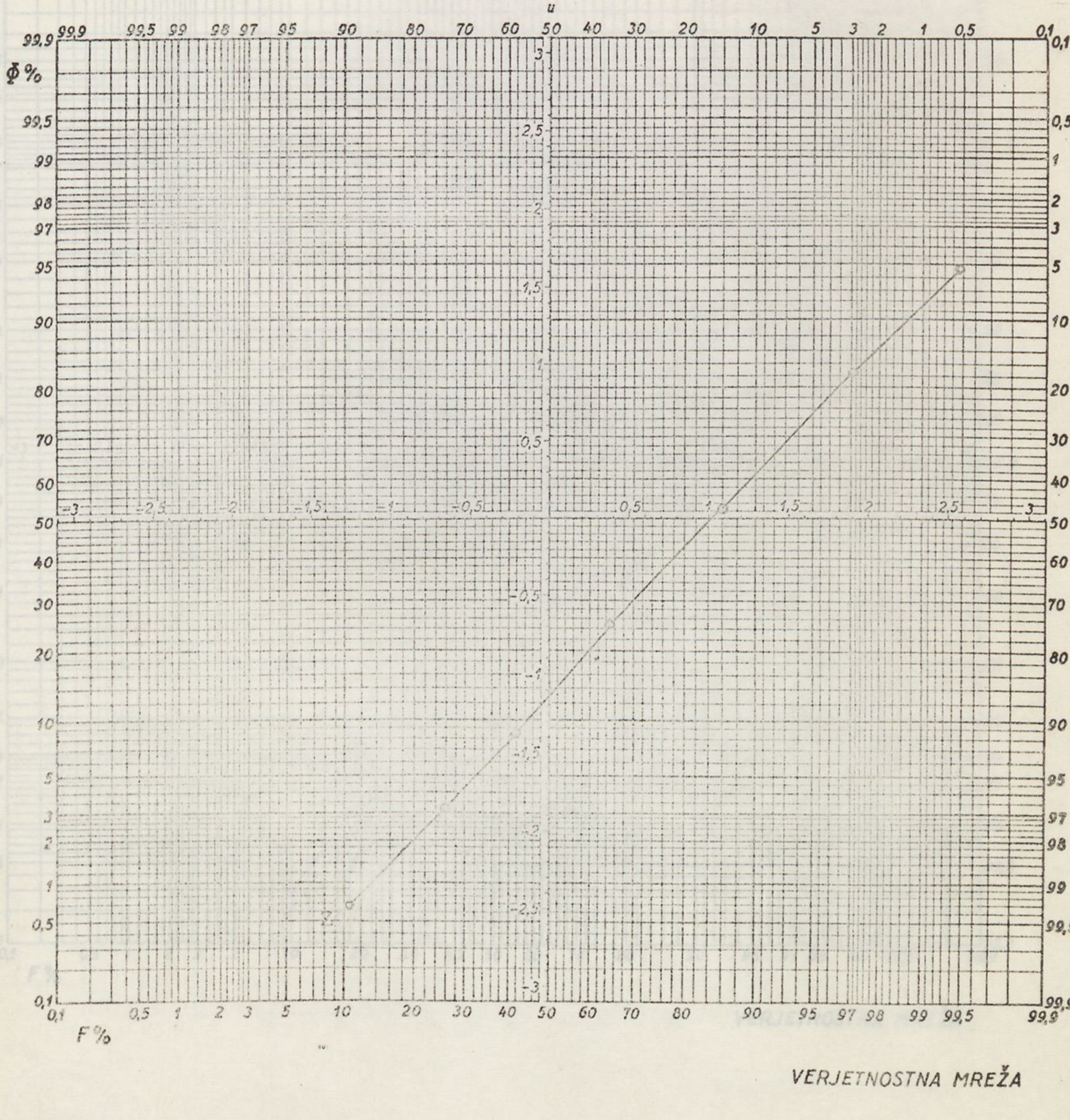


Slika 4.3. VELOG^R za INDUSTRIJO IN RUDARSTVO 1965

Z - zaposleni

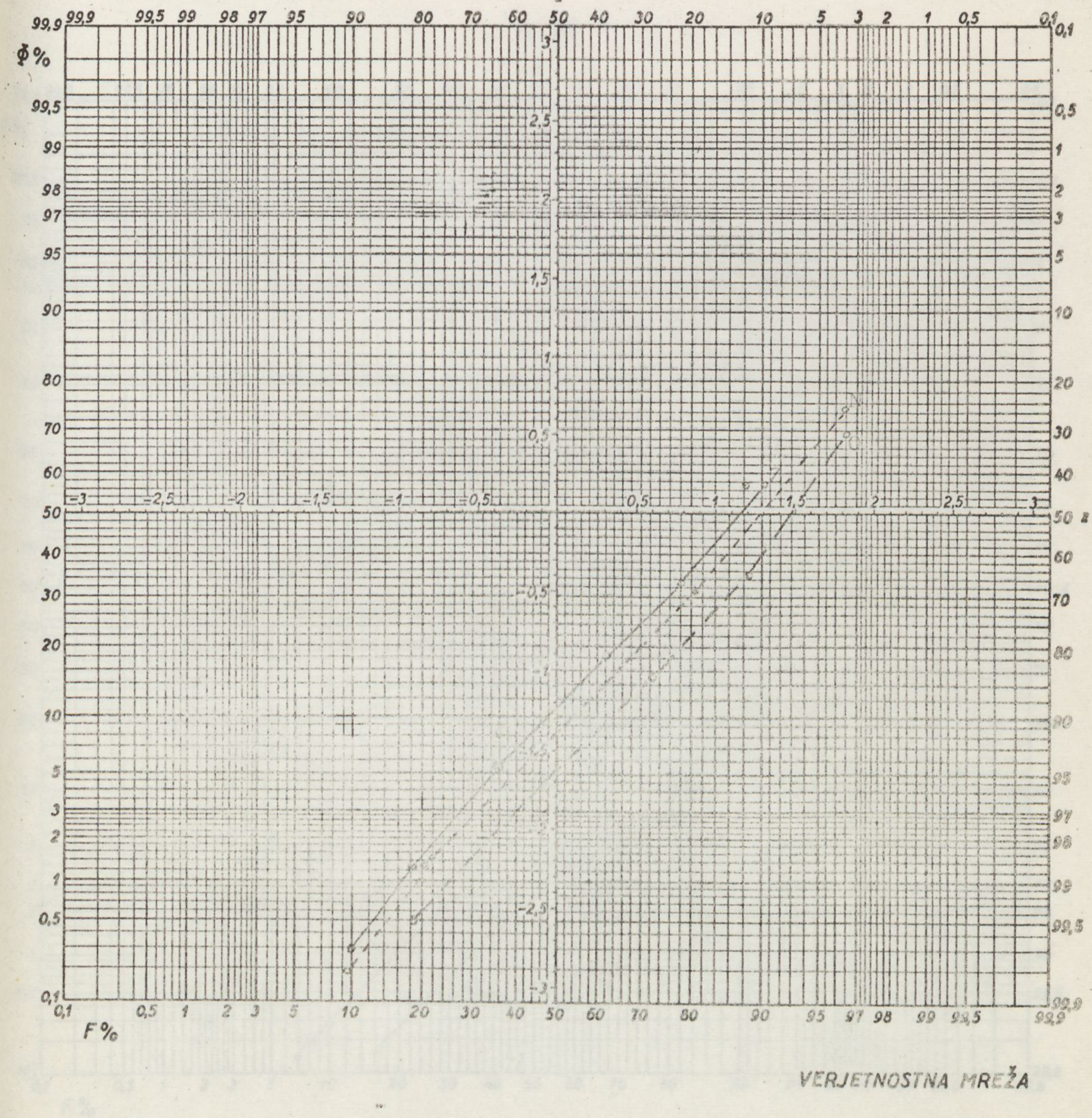
O - osnovna sredstva

N - neto produkt



Slika 4.4. VELOG za OBRT 1965

Z - zaposleni

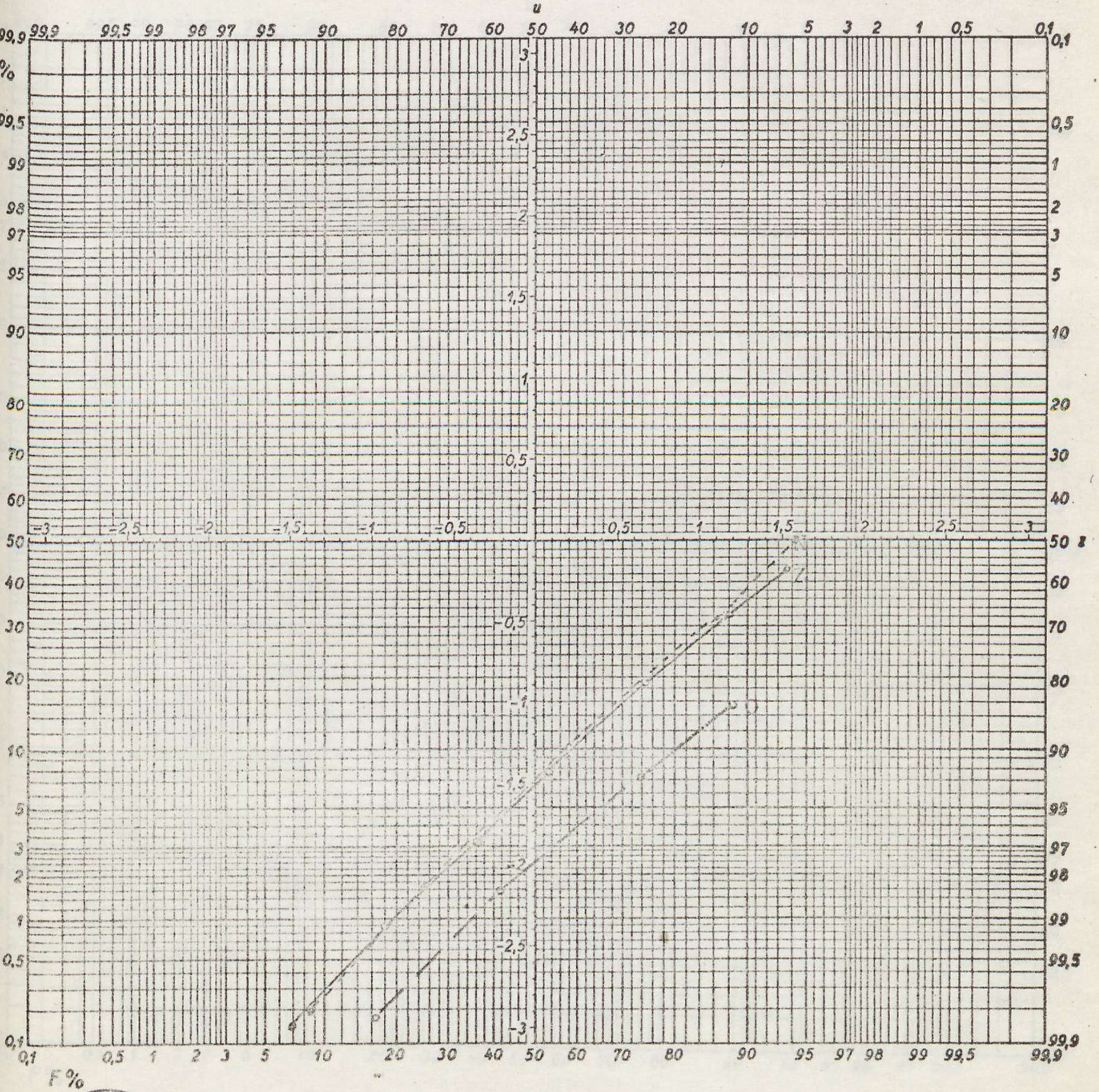


Slika 4.5. VELORG za GRADBENIŠTVO 1965

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

N - neto produkt



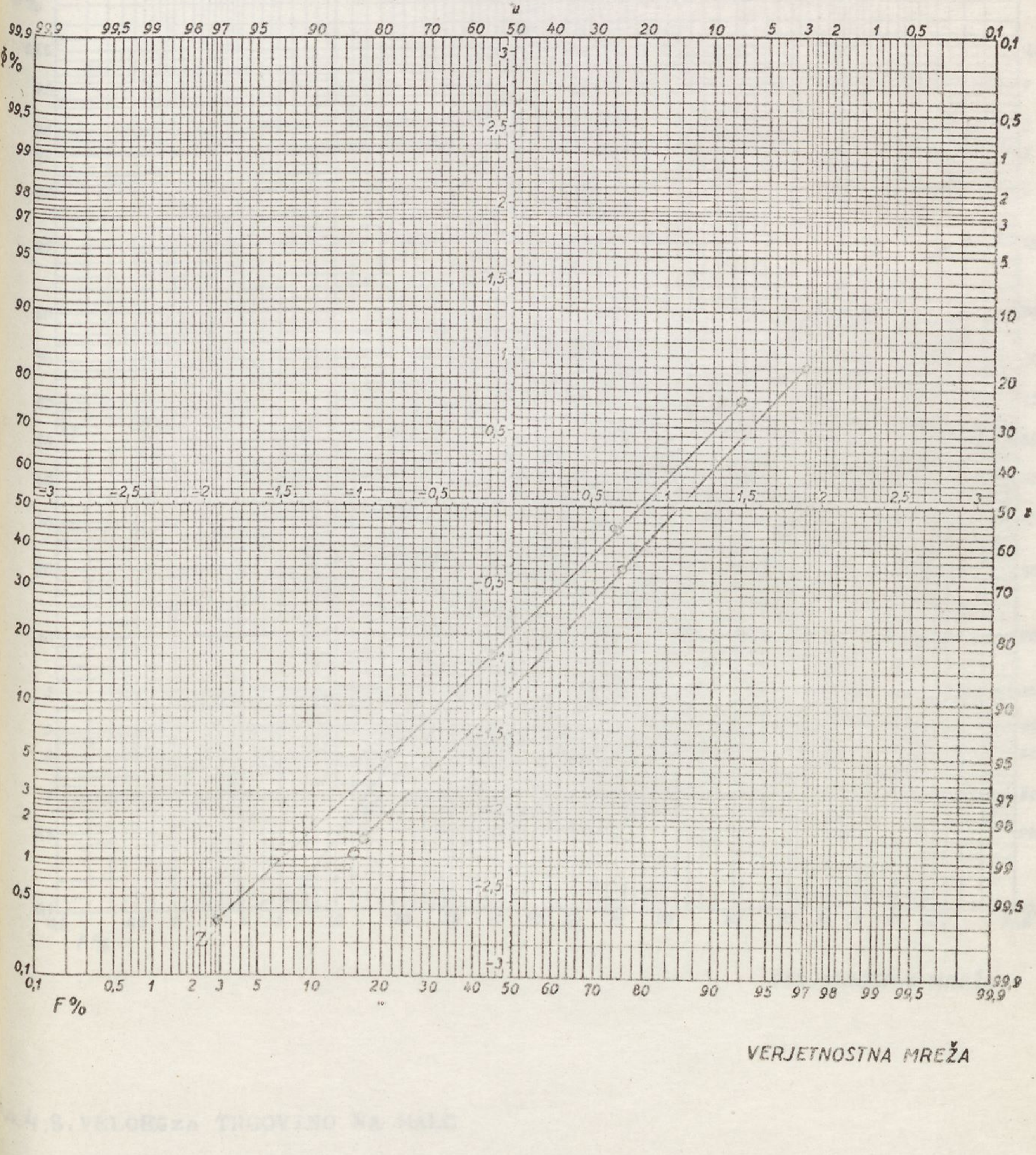
Narodna in univerzitetna knjižnica * Ljubljana

Slika 4,6. VELORG za PROMET

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

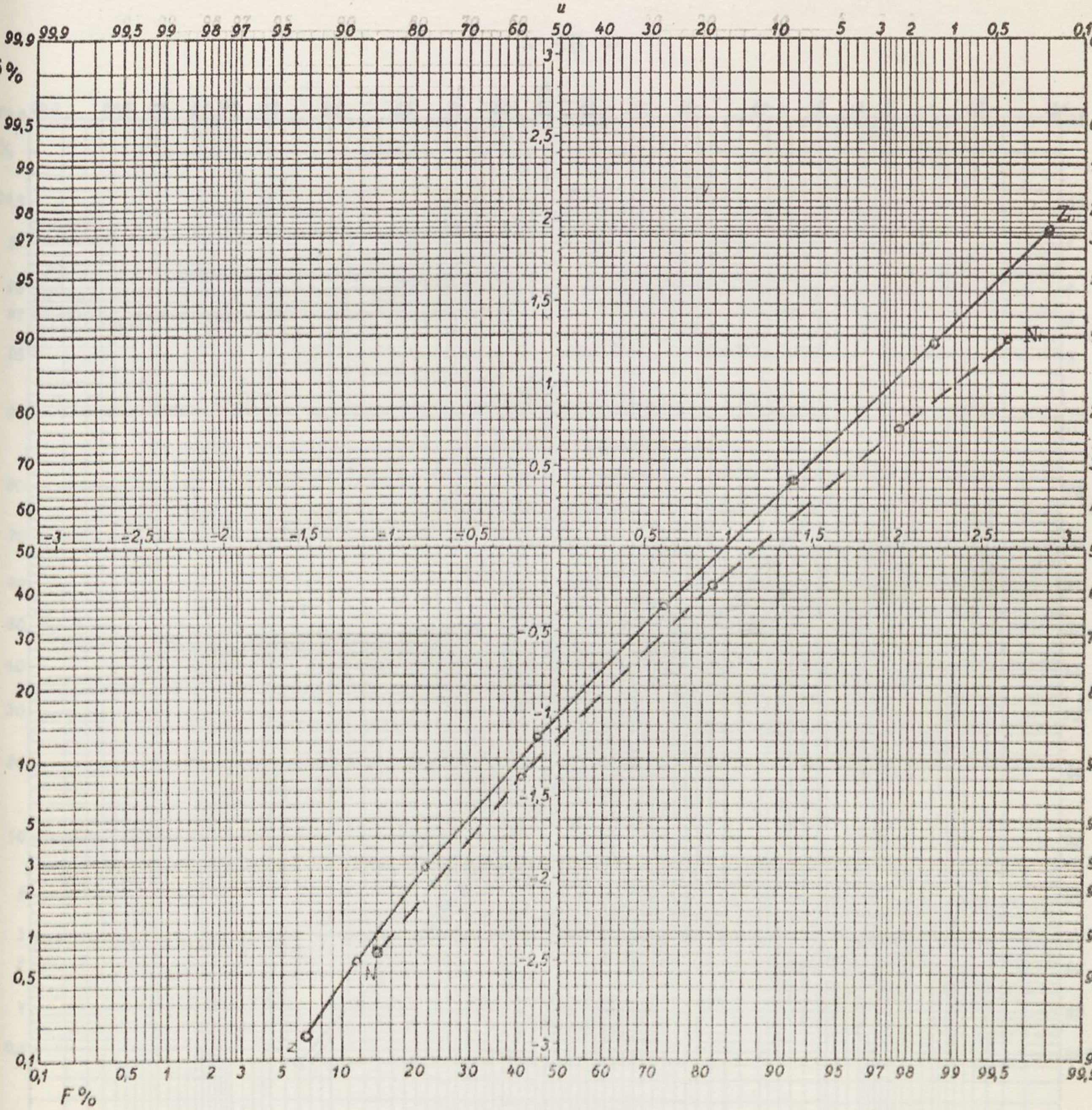
N - neto produkt



4.7. VELORG za ZUNANJO TRGOVINO 1965

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

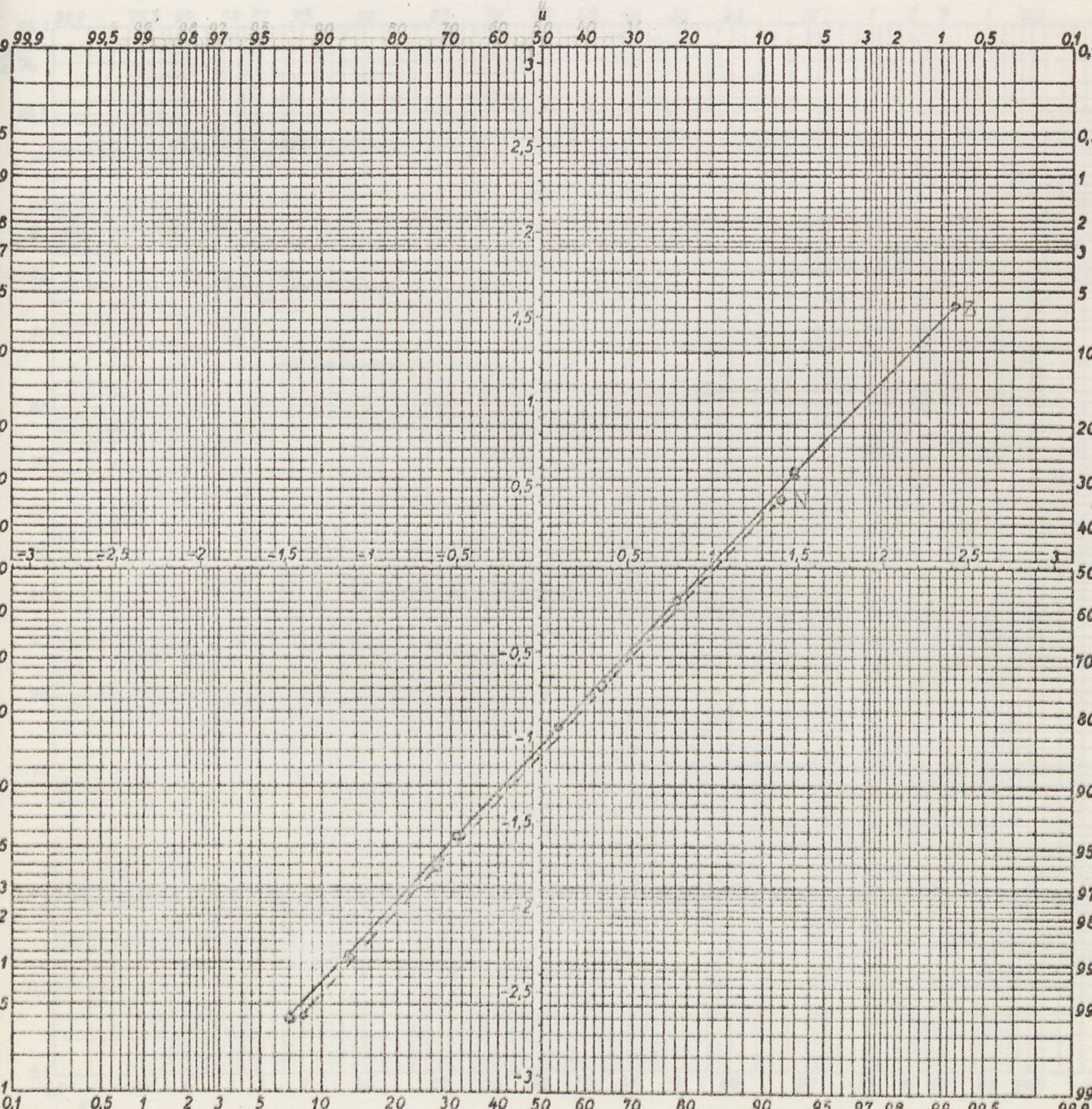


4.8. VELORG za TRGOVINO NA MALO

Z - zaposleni

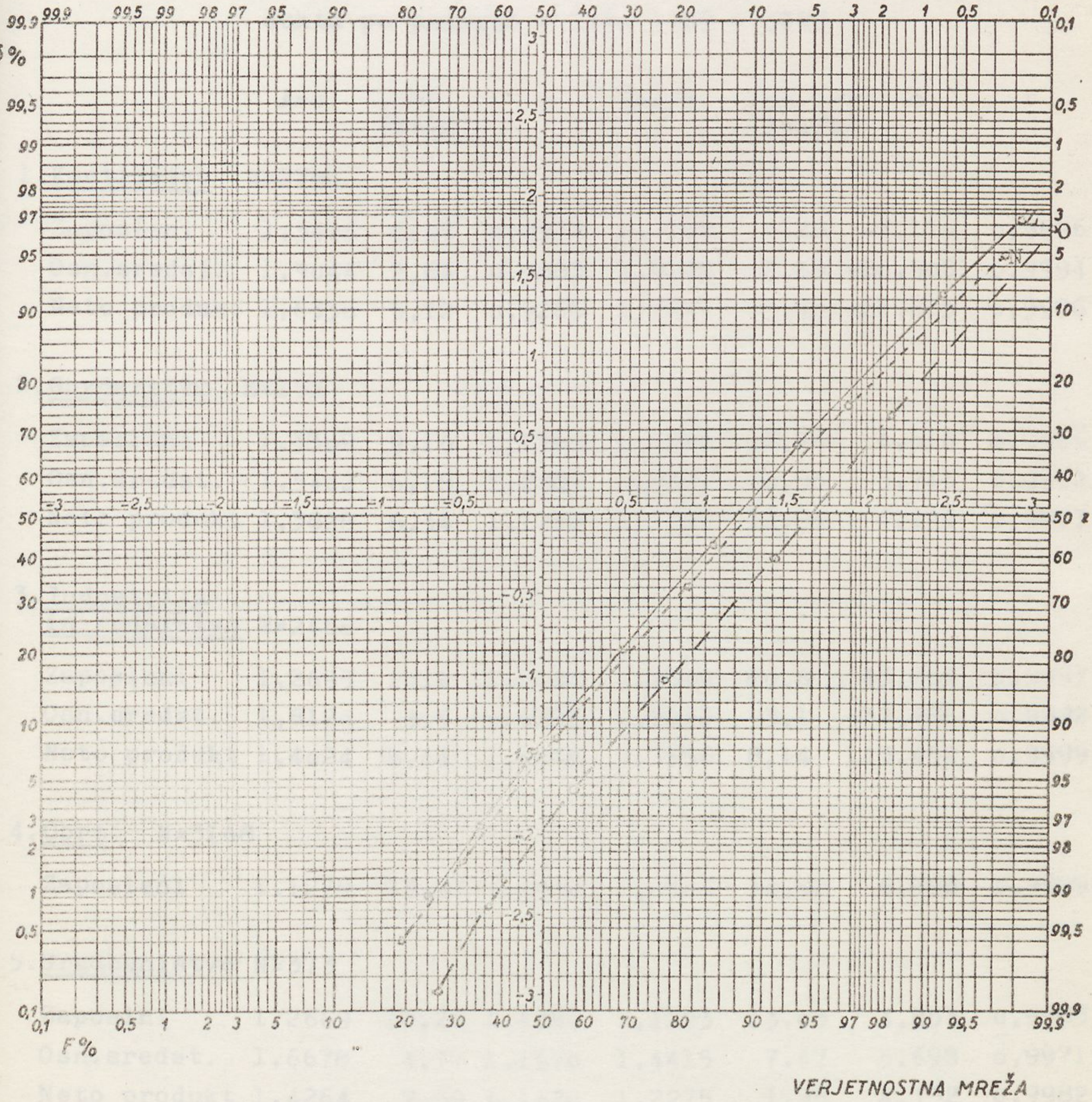
O - osnovna sredstva

N - neto produkt



4.9. VELORG za TRGOVINO NA VELIKO 1965

Z - zaposleni
N - neto produkt



lika 4 10. VELORG za GOSTINSTVO 1965

Z - zaposleni

O - osnovna sredstva

N - neto produkt

Tabela 5. Osnovni parametri prilagojenih VELORG-LIN, za porazdelitve o številu zaposlenih, vrednosti osnovnih sredstev in vrednosti neto produkta po panogah v letu 1965 v SFRJ

	A=a	100P (W=-a)	b	B=a/b	100 1-P (z=a/b)	c	r
1. Kmetijstvo N=2798							
Zaposleni	1,5425	6,15	o,8974	1,7188	4,28	-7,11o	o,9996
Osn.sredst.	1,9o44	2,84	o,9883	1,9269	2,69	-8o,9o6	o,9994
Neto produkt	1,633o	5,12	o,9265	1,7625	3,9o	-1o,685	o,9996
2. Gozdarstvo N=152							
Zaposleni	1,33o9	9,16	1,1796	1,1283	12,96	4,o1o	o,9965
Osn.sredst.	1,54o2	6,18	1,2285	1,2537	1o,5o	3,716	o,9962
Neto produkt	1,3828	8,34	1,1738	1,1781	12,94	4,296	o,9983
3. Industrija in rudarstvo N=2466							
Zaposleni	1,2695	1o,2	1,o148	1,25o9	1o,6	43,2o4	o,9997
Osn.sredst.	1,812o	3,5	o,9725	1,8632	3,1	-32,486	o,9992
Neto produkt	1,4o24	8,o4	1,oo49	1,3956	8,14	143,452	o,9999
4. Obrt N=3168							
Zaposleni	1,1279	13,97	1,o842	1,o4o3	14,92	6,968	o,9999
5. Gradbeništvo N=373							
Zaposlni	1,2669	1o,26	1,139o	1,1123	13,o3	4,853	o,9983
Osn.sredst.	1,6678	4,77	1,157o	1,4415	7,47	5,698	o,9971
Neto produkt	1,4264	7,69	1,162o	1,2275	1,98	4,732	o,9982

	A=a	P(u=a)	b	B=a/b	P(z=a/b)	c	r
6. <u>Promet</u> N=425							
Zaposleni	1,5532	6,o2	o,953o	1,6298	5,16	-16,124	o,998^{4}
Osn.sred.	2,1437	1,6o	o,92o9	2,3278	1,oo	-12,993	o,995^{1}
Neto prod.	1,5697	5,82	1,o243	1,5325	6,27	32,686	o,997^{4}
7. <u>Zunanja trgovina</u> N=141							
Zaposlni	o,8189	2o,64	1,o148	o,8o7o	21,88	27,871	o,999^{7}
Osn.sred.	1,1583	12,33	1,o927	1,o6oo	14,46	6,524	o,9999^{6}
8. <u>Trgovina na malo</u> N=911							
Zaposleni	1,1269	13,oo	1,o939	1,o3o2	15,15	6,27o	o,998^{0}
Neto prod.	1,4o49	8,oo	1,o851	1,2949	9,77	8,591	o,993^{6}
9. <u>Trgovina na veliko</u> N=623							
Zaposleni	1,9940	13,57	1,o832	1,o149	15,51	6,871	o,9999^{8}
Neto prod.	1,5642	5,89	1,1o33	1,4177	7,81	7,943	o,9999^{1}
1o. <u>Gostinstvo</u> N=12oo							
Zaposleni	1,5311	6,29	1,1785	1,2992	9,69	4,64o	o,989^{0}
Osn.sred.	2,1142	1,72	1,293o	1,6351	5,1o	4,o69	o,996^{9}
Neto prod.	1,5711	5,81	1,181o	1,33o3	9,17	4,7oo	o,998^{9}

$$P(c > 3{,}5) = 0{,}9^{3}76737$$
$$P(c > 4) = 0{,}9^{4}68329$$
$$P(c > 4{,}5) = 0{,}9^{5}66023$$
$$P(c > 5) = 0{,}9^{6}71335$$

Verjetnosti P(c>C) nakazujejo, kakšen delež populacije izpolnjuje pogoje, ki pogojujejo smiselnost za vrednosti proučevane populacije. Če proučimo vrednosti za c, dobimo za naš primer naslednjo porazdelitev:

c		4	8	16	32	64	Σ
f	1	13	3	3	3	2	25

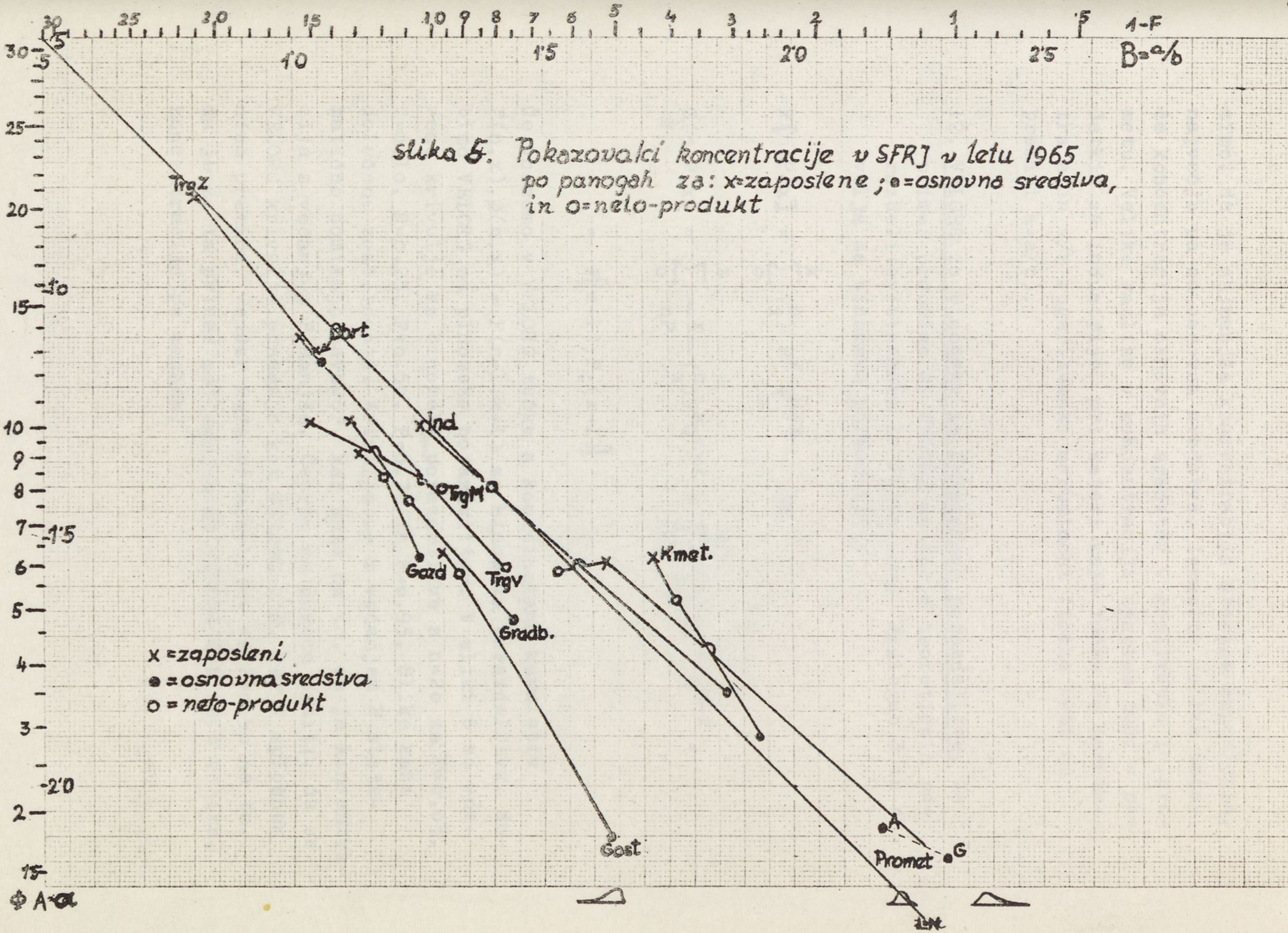
Samo en c je manjši kot 4(c=3,716 za osnovna sredstva v gozdarstvu), za večino je med 4 in 8, za 11 pa celo nad 8.

Če analogno analiziramo korelacijske koeficiente z $r_{u\emptyset zF}$ za kumulative frekvenc in kumulative vsot dobimo:

r	– 993	.994	.995	.996	.997	.998	.999	.9999	-	Σ
f	1	1		1	3	2	6	6	5	25

Iz dobljene frekvenčne porazdelitve za korelacijske koeficiente vidimo posredno, da se veliko pojavov porazdeljuje v porazdelitvah, ki se zelo približujejo VELORG-LIN. Za 23 od skupno 25 porazdelitev je korelacijski koeficient večji kot r=o.995, za 11 pa večji od r=o,999.

Na sliki 5 so s točkami vrisani parametri a/b, a za posamezne izmed proučevanih podatkov po področjih dejavnosti. Za logaritemsko normalne porazdelitve so točke na premici LN. Zanje je namreč b=1 oziroma a/b=a. Odmik od te premice pomeni odstopanje porazdelitev od logaritemsko normalne in sicer kot je nakazano na sliki za točke nad LN asimetričnost v desno, za točke pod LN pa asimetričnost v levo. Z velikostjo a in a/b pa je nakazana koncentracija pojava. Čim večje so absolutne vrednosti za a in a/b tem večja je koncentracija pojava. Iz slike 5, v kateri so kompleksno nakazani parametri za vsa proučevana področja dejavnosti, za posamezna področja na splošno opa-



slika 5. Pokazovalci koncentracije v SFRJ v letu 1965 po panogah za: x=zaposlene; •=osnovna sredstva, in o=neto-produkt

zimo, da je najmanjša koncentracija števila zaposlenih, največja pa za osnovna sredstva. Izrazito velika izpade koncentracija osnovnih sredstev v gostinstvu in prometu. Velike razlike v koncentraciji opazimo tudi v podatkih za industrijo, pri kateri kaže točka za parametra a in a/b logaritemsko normalnost (točka leži na premici a=a/b).

12. VELORG za binomske in Poissonove porazdelitve. Za primer proučimo še VELORG za dvoje teoretičnih porazdelitev: binomske in Poissonove. Analogno 3 in 4 velja za binomsko porazdelitev

$$F[n;P;x] = \sum_{o}^{x} \binom{n}{x} P^{x} Q^{n-x} \quad \text{in}$$

$$\varnothing(n,P,x) = \sum_{o}^{x} \frac{x}{nP} \binom{n}{x} P^{x} Q^{n-x} = \sum_{x=o}^{x} \binom{n-1}{x-1} P^{x-1} Q^{n-x} =$$

$$= F[(n-1);P;(x-1)]$$

Če vnesemo v VELORG točke s koordinatama kumulativ $F(n,x)$, $\varnothing(n,x) = F(n-1,x-1)$ za binomske porazdelitve, dobimo VELORG za binomsko porazdelitev. V sliki 6 so vnesene krivulje za binomske porazdelitve z n=2o za P=o,o5, P=o,1o, P=o,25, P=o,5o, P=o,75 in P=o,95. Slika kaže določene značilnosti. Krivulje se z večanjem P sistematično pomikajo navzgor, kar kaže na to, da je koncentracija z večanjem P manjša. Čeprav ne moremo trditi, da se VELORG krivulje ponašajo kot VELORG-LIN, ker v splošnem niso premice, vendar kaže porazdelitev za P=o,5o na to, da je za ta primer prilagojenost VELORG-LIN zelo velika, koncentracija pa majhna.

Če podobno poiščemo analogno 3 in 4 še za Poissonovo porazdelitev

$$F[m,x] = \sum_{x=o}^{x} \frac{m^x}{x!} \exp\left[-m\right]$$

$$\emptyset[m,x] = \sum_{x=o}^{x} \frac{x}{m} \frac{m^x}{x!} \exp\left[-m\right] = \sum_{x=o}^{x} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!} \exp\left[-m\right] = F[m,x-1]$$

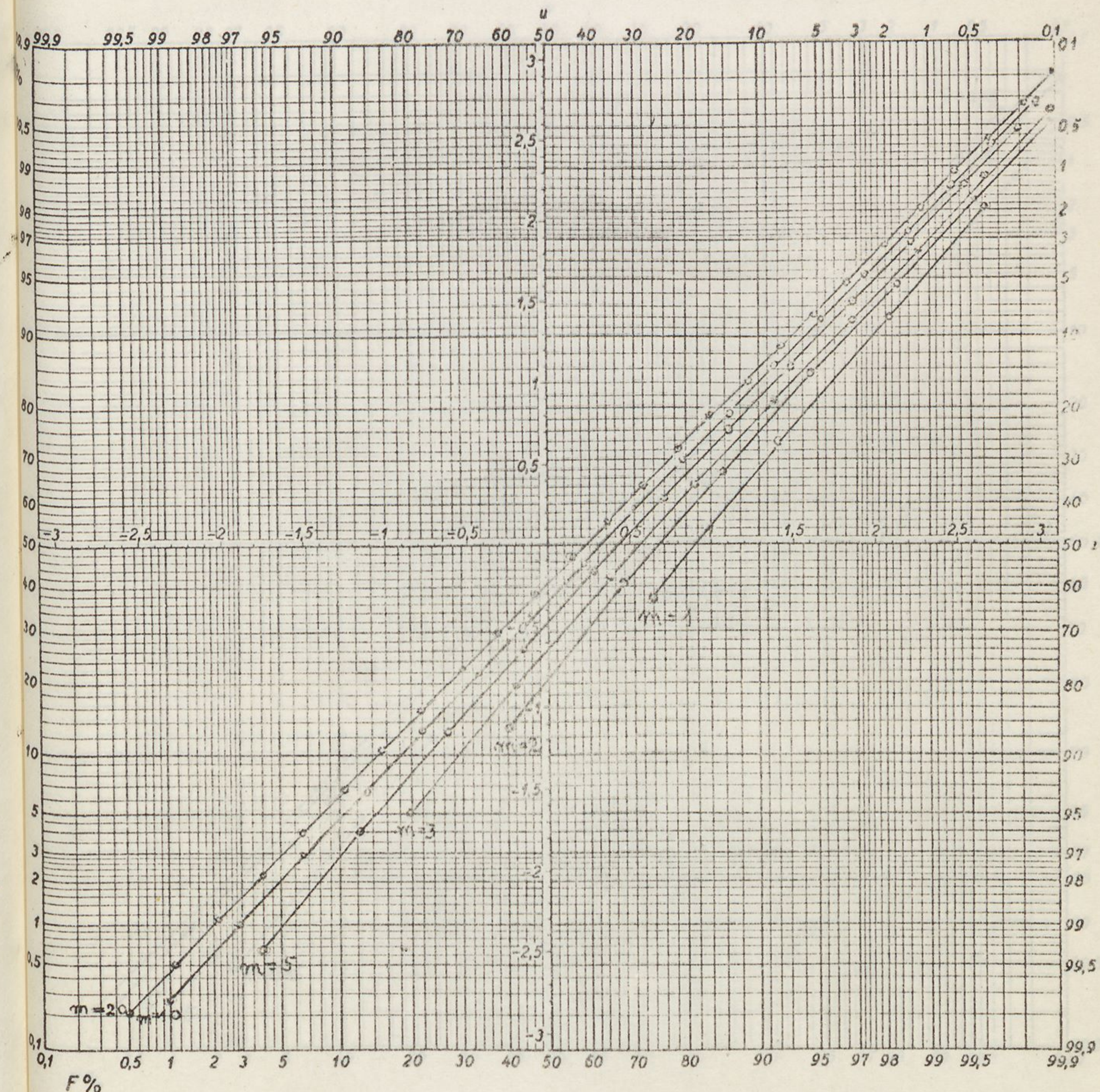
spoznamo, da so koordinate točk na VELORG za Poissonovo porazdelitev

$$F[m,x] \quad ; \quad \emptyset[m,x] = F[m,x-1]$$

Tudi VELORG za Poissonove porazdelitve za m=1,2,3,5,1o,2o kaže določene zakonitosti in asimptotičnost VELORG krivulj z večanjem parametra m. Enako opazimo manjšanje koncentracije če se m veča.

13. Sklep.

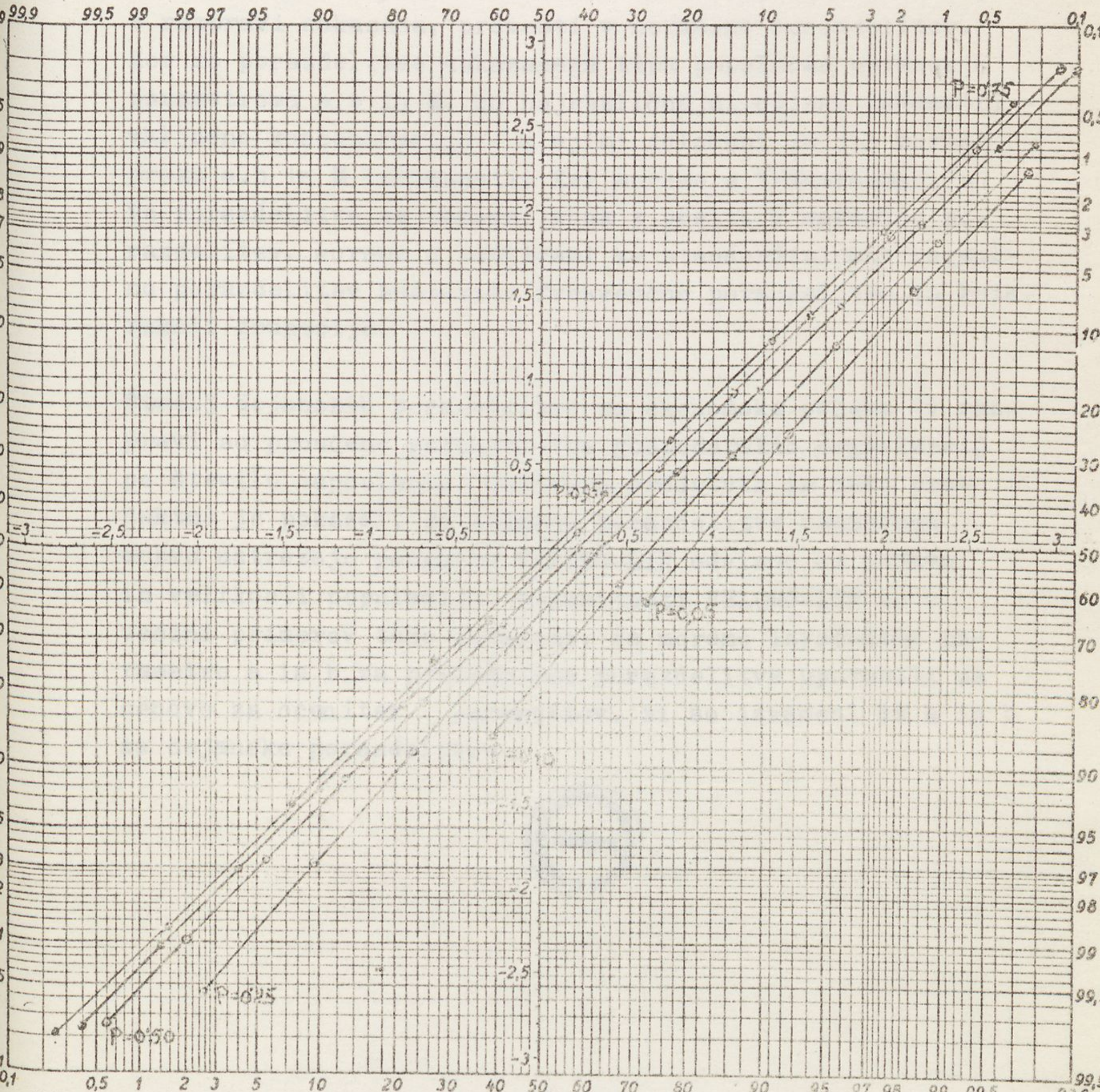
Koncentracijo pojava nazorno prikazujemo z Lorenzovim grafikonom, sintetično pa med drugim z Ginijevim koeficientom koncentracije. Vendar je primerljivost Lorenzovih krivulj zaradi specifične oblike težka in moremo iz njega razbrati le splošne črte o koncentraciji. Enako je Ginijev koeficient koncentracije za različne tipe koncentracije enak. Če namesto linearnih skal za porazdelitveno funkcijo $F(x) = \int_{-\infty}^{x} (x)dx$ in nepopoln prvi moment $\emptyset(x) = -\frac{1}{M} \int_{-\infty}^{x} (x)dx$ uvedemo normalno verjetnostne skale z in u, se Lorenzove krivulje v splošnem izravnajo za določene porazdelitve celo v premico. Študij družine porazdelitev, za katere je v dvojno verjetnostni mreži Lorenzova krivulja premica (u ≐ bz-a) pokaže določene zna-



VERJETNOSTNA MREŽA

5 VELORG za Poissonove porazdelitve

za m =1, m=2, m=3, m=5, m=1o, m=2o



VERJETNOSTNA MREŽA

6 VELORG za binomske porazdelitve za n = 2o

za P=o,o5, P=o,1o, P=o,25, P=o,5o, P=o,75, P=o,95 čilnosti porazdelitev. Za b=1 je v posebnem porazdelitev logaritemsko normalna, parameter a pa je direktno proporcionalen s stopnjo koncentracije. Porazdelitve, za katere je b≠1, moremo z določeno transformacijo, ki je v razpravi nakazana, prevesti v normalno porazdelitev. Ker so porazdelitve nakazanega tipa popolnoma opisane s parametroma a,b in M, so najrazličnejši opisni parametri - vključno koncentracijo - z njimi določeni in jih moremo preko a,b in M izračunati. Ker moremo s transformacijo iz porazdelitve za osnovni znak x preiti v normalno porazdelitev, moremo s tablicami za standardizirano normalno porazdelitev sestaviti frekvenčne porazdelitve za katerokoli grupacijo.

Študij dejanskih porazdelitev za ekonomske pojave (v razpravi so proučene porazdelitve gospodarskih organizacij po številu zaposlenih, osnovnih sredstvih in neto produktu) je pokazal, da stvarne porazdelitve razmeroma dobro ustrezajo poogojem VELORG-LIN odvisno od pojava in velikosti populacije. Zakonitosti VELORG-LIN so v večini primerov tako izrazite, da moremo izračunane parametre a in b za prilagojene porazdelitve uporabiti za osnovo za ocenitev parametrov, ki so izvedeni iz a in b za dejanske porazdelitve.

Narodna in univerzitetna knjižnica Ljubljana

NARODNA IN UNIVERZITETNA KNJIŽNICA
GS
II 745 960
202215495
COBISS