Zbornik gozdarstva in lesarstva, Ljubljana, 37, 1991, s. 117-123

GDK 561 - - 015 . 5
Math.Subj.Class. (1991) 41A15, 90C25

APROKSIMACIJA RASTNIH FUNKCIJ S KUBIČNIMI ZLEPKI

Anton CEDILNIK*

Izvleček

V članku so izpeljane formule za določanje kubičnega zlepka prvega reda z minimalnim drugim odvodom, ki naj ima vozle v danih točkah in mora biti naraščajoč. Zahteva po monotonosti privede do nelinearnega konveksnega programa, ki ga rešimo numerično.

Ključne besede: rastna funkcija, aproksimacija, kubični zlepek, monoton zlepek, nelinearen program

APPROXIMATION OF GROWTH FUNCTIONS WITH CUBIC SPLINES

Anton CEDILNIK*

Abstract

In the article we deduce the formulae for determination of the cubic spline of the first order, with minimal second derivative. The knots are in given points and the spline has to increase. This demand leads us to a nonlinear convex program, which is solved numerically.

Key words: growth function, approximation, cubic spline, increasing spline, nonlinear programming

* dr., docent, Gozdarski oddelek Biotehniške fakultete, 61000 Ljubljana, Večna pot 83

Začetni in osnovni problem, s katerim se srečamo potem, ko premerimo drevesne letnice, je, kako dobljene podatke aproksimirati s funkcijo, na kateri se da uporabiti analitične metode. V navadi je, da aproksimacijo izvedemo s kako analitično (večinoma elementarno) funkcijo, ki seveda podatke le približno uboga, pogoste so pa tudi hude anomalije v prilagajanju. Tale zapis naj bi bil konstruktivna kritika tega posla.

V (Cedilnik 1986) je izpeljana metoda, kako iz podatkov dobimo najboljšo točkovno aproksimacijo. Prepričani smo, da bolj grobe aproksimacije niso smiselne iz dveh razlogov:

(1) obstajajo numerične metode, ki nam z določeno natančnostjo poiščejo vse zahtevane zaključke;

(2) če že želimo imeti povsod definirano aproksimacijo, moremo uporabiti interpolacijo z zlepki.

Tu se bomo ukvarjali z zlepki, saj numerične metode, ki jih omenjamo, nimajo prav za rastne funkcije nekih specifičnih mehanizmov.

Zlepek, ki ga bomo uporabili, mora imeti po potrebi prevoje, obenem pa naj bo čim nižje stopnje. S tem je že odločeno, da gre za kubični zlepek.

Nadalje bomo zahtevali, da je zvezno odvedljiv. Ta zahteva je morda pretirana, saj prirastna funkcija ni vselej zvezna (občasne hude motnje v priraščanju doživi praktično vsako drevo), je pa skoraj povsod zvezna. Nasprotno bi zlepek brez zahteve po zvezni odvedljivosti ne imel skoraj v nobenem vozlu zveznega odvoda.

Naslednja zahteva je "pohlevnost" zlepka. To zahtevo izpolnimo z minimalnostjo drugega odvoda v L^2-normi, kar razumemo tako, da rastni pospešek ne more biti zelo velik, če pa je že, je le malo časa.

Zlepek, kakršnega smo zahtevali, bi bil torej povsem običajen kubični zlepek prvega reda, če ne bi bilo sicer samoumevne, matematično pa zelo neprijetne zahteve, da naj bo monoton, torej naraščajoč.

x	$x_0\ x_1\ \ldots\ x_n$
y	$y_0\ y_1\ \ldots\ y_n$

Tabela 1

Dana je tabela 1. Zanjo naj velja:

$n \geq 1$,
$x_0 < x_1 < \ldots < x_n$,
$y_0 \leq y_1 \leq \ldots \leq y_n$.

Iščemo kubični zlepek $\mathbf{S} = \{y = A_i x^3 + B_i x^2 + C_i x + D_i \mid i = 1,\ldots,n\}$, ki
(P1) bo šel skozi vozle (x_i, y_i) $(i = 1,\ldots,n)$,
(P2) bo zvezno odvedljiv,

(P3) bo monotona funkcija in
(P4) bo pri izplnjenih prejšnjih pogojih imel drugi odvod minimalen v $L^2[x_0, x_n]$- normi.

Najprej bomo pokazali, da obstaja kubični zlepek, ki ustreza pogojem (P1) - (P3). Vnaprej naj izraz *kubični polinom* pomeni polinom stopnje ≤ 3.

LEMA 1. Za točki (x_0, y_0) in (x_1, y_1) $(x_0 < x_1,\ y_0 \leq y_1)$ obstaja kubični polinom, za katerega sta to stacionarni točki, na intervalu med točkama pa narašča.

Dokaz. Naj bo $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Za ta polinom torej velja:

$$\begin{array}{lllll} x_0^3A & +x_0^2B & +x_0C & +D & =y_0 \\ x_1^3A & +x_1^2B & +x_1C & +D & =y_1 \\ 3x_0^2A & +2x_0B & +C & & =0 \\ 3x_1^2A & +2x_1B & +C & & =0 \end{array}$$

Izračunajmo glavno determinanto sistema:

$$\begin{vmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ 3x_0^2 & 2x_0 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 2x_1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)^4 \neq 0.$$

Parametri A, B, C, D so torej enolično določeni. Iz sistema se tudi vidi, da je y ali konstanta ali pa polinom natančno tretje stopnje, iz česar pa potem sledi tudi monotonost na $[x_0, x_1]$. QED

TRDITEV 2. Vedno obstaja za tabelo 1 kubični zlepek, ki ustreza pogojem (P1) - (P3).

Dokaz. Trditev sledi iz leme 1, če na vsakem intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,...,n)$ naredimo v lemi opisano kubično interpolacijo. QED

Najprej rešimo nalogo za primer $n = 1$.

$$Ax_0^3 + Bx_0^2 + Cx_0 + D = y_0$$
$$Ax_1^3 + Bx_1^2 + Cx_1 + D = y_1$$
$$\forall x \in [x_0, x_1]:\ 3Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$$

Pri teh pogojih naj bo $s = \int_{x_0}^{x_1} \left(6Ax + 2B\right)^2 dx$ minimalen.

Reševanje je preprosto, saj že vnaprej vemo, da je rešitev linearna:

$$\boxed{A = B = 0, \quad C = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad D = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0}}$$

Odslej naj bo $n > 1$. Natančno formulirajmo nalogo!
Iščemo zlepek

$$\boxed{S = \left\{ a_i t^3 + b_i t^2 + c_i t + d_i \;\middle|\; t = \frac{x - x_{i-1}}{e_i} \in [\,0,1\,]\,;\, i = 1,...,n \right\},}$$

kjer smo označili

$$\boxed{e_i = x_i - x_{i-1} > 0 \;\; (i = 1,...,n),}$$

da bodo veljali pogoji (P1):

$$\boxed{d_i = y_{i-1} \;\; (i = 1,...,n)} \qquad (1)$$

$$a_i + b_i + c_i + d_i = y_i \quad (i = 1,...,n), \qquad (2)$$

pogoj (P2):

$$\boxed{\frac{1}{e_i}(3a_i + 2b_i + c_i) = \frac{c_{i+1}}{e_{i+1}} \;\; (i = 0,...,n-1)} \qquad (3)$$

in pogoj (P3):

$$\forall\, t \in [0,1]\colon 3a_i t^2 + 2b_i t + c_i \geq 0 \;\; (i = 1,...,n), \qquad (4)$$

da bo izpolnjen še pogoj (P4), torej da bo minimalen izraz

$$s = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e_i^{-4}\,(6a_i t + 2b_i)^2 dx \;.$$

Uvedimo še eno oznako:

$$\boxed{f_i = y_i - y_{i-1} \geq 0 \; (i = 1,...,n)}$$

Z enačbami (1) so eliminirane neznanke d_i, z enačbami (2) pa še neznanke b_i:

$$\boxed{b_i = f_i - a_i - c_i \;\; (i = 1,...,n)} \qquad (5)$$

Uvedimo posebne oznake za odvode zlepka S v točkah tabele 1.
Odvod v točki (x_j, y_j) naj bo z_j ($j = 0,...,n$). Potem je mogoče pogoje (P2) oziroma enačbe (3) zapisati še drugače:

$$\frac{c_1}{e_1} = z_0. \qquad (6)$$

$$\frac{1}{e_i}(3a_i + 2b_i + c_i) = \frac{c_{i+1}}{e_{i+1}} = z_i \; (i = 1,...,n-1)\,, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{e_n}(3a_n + 2b_n + c_n) = z_n \;. \qquad (8)$$

Iz (6) in (7) sledi:

$$\boxed{c_i = e_i z_{i-1} \;\; (i = 1,...,n)} \qquad (9)$$

Iz (5), (7), (8) in (9) pa potem še dobimo:

$$\boxed{a_i = e_i\,(z_i + z_{i-1}) - 2f_i \;\; (i = 1,...,n)} \tag{10}$$

Ostale so nam samo še neznanke z_i. Poskusimo z njimi izraziti pogoje (4). Če v (4) vstavimo $t = 0$ ali $t = 1$, dobimo:

$$\boxed{z_j \geq 0 \;\; (j = 0,...,n)} \tag{11}$$

Nato naj bo $0 < t < 1$ in obravnavajmo i-ti pogoj iz (4). Vanj vstavimo (5), (9) in (10) in ga takole preoblikujmo:

$$3e_i\,(z_i + z_{i-1}) - 6f_i \leq \frac{e_i z_i}{1-t} + \frac{e_i z_{i-1}}{t} \tag{12}$$

Ocena (12) velja za vsak $t \in (0,1)$, torej predvsem za tisti t_0, za katerega je izraz na desni strani ocene minimalen:

$$t_0 = \frac{\sqrt{z_{i-1}}}{\sqrt{z_i} + \sqrt{z_{i-1}}},$$

pri čemer smo predpostavili, da sta z_i in z_{i-1} različna od 0. Toda prav v vseh primerih potem velja:

$$3e_i\,(z_i + z_{i-1}) - 6f_i \leq e_i\,(\sqrt{z_i} + \sqrt{z_{i-1}}\,)^2,$$

oziroma, če uvedemo še eno oznako:

$$\boxed{g_i = 3f_i/e_i \;\; (i = 1,...,n)\,,}$$

velja v končni obliki:

$$\boxed{z_i + z_{i-1} - \sqrt{z_i z_{i-1}} \leq g_i \;\; (i = 1,...,n)\,.} \tag{13}$$

Dodelajmo še izraz za s!

$$s = 4\sum_{i=1}^{n} e_i^{-3} \int_0^1 (3a_i t + b_i)^2\,dt =$$

$$= 4\sum e_i^{-3}\,(3a_i^2 + 3a_i b_i + b_i^2) =$$

$$= 4s^* + \frac{4}{3}\sum g_i^2/e_i\,,$$

kjer je

$$\boxed{s^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{e_i}\,(z_i^2 + z_i z_{i-1} + z_{i-1}^2 - g_i z_i - g_i z_{i-1}\,).} \tag{14}$$

Seveda je s minimalen natanko tedaj, ko je minimalen s^*.

Iskanje minimuma funkcije s^* v (14) ob pogojih (11) in (13) je nelinearen program. Za vsak i je območje, določeno z oceno (13), zaprta konveksna množica. Množica možnih rešitev je tedaj zaprta konveksna množica, omejena zaradi tega, ker je $z_i \leq 4g_i/3$ za $i=1,...,n$ (za dokaz vstavimo v (13): $z_i = 4g_i/3 + w$, $w > 0$) in $z_i \leq 4g_{i+1}/3$ za $i=0,...,n$-1 (za dokaz vstavimo v (13): $z_i = 4g_{i+1}/3 + w$, $w > 0$), ter neprazna, ker je $z_0 = ... = z_n = 0$ tudi možna rešitev. Skratka, množica možnih rešitev je neprazna konveksna kompaktna množica v $\mathbf{R}^{n+1}$. Povrhu vsega pa je s^* zvezna in celo konveksna funkcija. Zato problem ni zahteven teoretično, pač pa le računsko. Če neznanke z_i nadomestimo z novimi: $z_i = u_i^2$ (da se v (13) znebimo korenov, ki niso povsod odvedljive funkcije), lahko napišemo Kuhn-Tuckerjev sistem, ki pa, kot kaže, nima preproste eksaktne rešitve. Zato poiščimo rešitev numerično, z iteriranjem.

Za začetne vrednosti neznank izberimo: $z_0 = ... = z_n = 0$, potem pa zaporedoma popravljajmo neznanke od 0 do n, pa spet od 0 do n ... tako, da so pogoji (13) še veljavni, da pa se s^* čim bolj zmanjša. Izpeljava ustreznih formul ni težka, ima pa zelo veliko parcialnega sklepanja, zato napišimo le rezultate. Simbol z_i naj pomeni prvotni približek, simbol z_i' pa novi približek.

Računanje z_0':

$$z_1 \leq g_1 \Rightarrow z_0' = (g_1 - z_1)/2$$

$$z_1 \geq g_1 \Rightarrow z_0' = \frac{1}{2}\left[2g_1 - z_1 - \sqrt{z_1(4g_1 - 3z_1)}\right]$$

Računanje z_i' $(0 < i < n)$:

$$p = \frac{e_{i+1}(g_i - z_{i-1}) + e_i(g_{i+1} - z_{i+1})}{2(e_{i+1} + e_i)}$$

$$q = \frac{1}{4}\left[\max\left\{\sqrt{z_{i-1}} - \sqrt{4g_i - 3z_{i-1}},\ \sqrt{z_{i+1}} - \sqrt{4g_{i+1} - 3z_{i+1}},\ 0\right\}\right]^2$$

$$r = \frac{1}{2}\min\left\{2g_i - z_{i-1} + \sqrt{z_{i-1}(4g_i - 3z_{i-1})},\ 2g_{i+1} - z_{i+1} + \sqrt{z_{i+1}(4g_{i+1} - 3z_{i+1})},\ 2p\right\}$$

$$p \leq q \Rightarrow z_i' = q$$

$$p \geq q \Rightarrow z_i' = r$$

Računanje z_n':

$$z_{n-1} \leq g_n \Rightarrow z_n' = (g_n - z_{n-1})/2$$

$$z_{n-1} \geq g_n \Rightarrow z_n' = \frac{1}{2}\left[2g_n - z_{n-1} - \sqrt{z_{n-1}(4g_n - 3z_{n-1})}\right]$$

SUMMARY

APPROXIMATION OF GROWTH FUNCTIONS WITH CUBIC SPLINES

We have the following problem: through the given knots (whose coordinates are both increasing) we want to send a cubic spline, which is continuously differentiable, is everywhere increasing and has L^2- minimal second derivative. We firstly show that such a spline exists and we express its coefficients with the values of the first derivative in the knots. For these values we get (because of the demand for incresing) a nonlinear convex program, for which we deduce an iterative numerical method of solving.

Such a spline could be used for the interpolation of data of a growth function, if the errors of measurings are small. We claim that this interpolation provides a better result than an approximation with a questionable analitic function.

REFERENCE

ANSELONE,P.M., LAURENT,P.J. 1968. *A general method for construction of interpolating or smoothing spline-functions.* Numer. Math. 12 (1).

BEREZIN,I.S., ŽITKOV, N.P. 1963. Numerična analiza. Naučna knjiga, Beograd.

CANNON,M.D., CULLUM,C.D., POLAK, E. 1970. Theory of optimal control and mathematical programming. McGraw-Hill, Inc. , New York.

CEDILNIK,A. 1986. *Optimalna aproksimacija rastnih funkcij.* Zb. gozd. les. Lj. 28, 5-16.

ISAACSON,E., KELLER,N.B. 1966. Analysis of numerical methods. John Willey & Sons, London.

KRčEVINAC,S., ČUPIć,M., PETRIć,J., NIKOLIć,I., 1983. Algoritmi i programi iz operacionih istraživanja. Naučna knjiga, Beograd.

PETRIć,J.J. 1979. Operaciona istraživanja I. Savremena administracija, Beograd.

PIERRE,D.A., LOWE,M.J. 1975. Mathematical Programming Via Augmented Lagrangians. An Introduction with Computer programs. Addison-Wesley Publ.C., Inc., Reading MA.