

Bojan Kuzma  
ZAPISKI IZ PREDAVANJ - POLJA IN KRIVULJNI INTEGRALI

(Zbirka Izbrana poglavja iz matematike, št. 7)

Urednica zbirke: Petruša Miholič

Izdala in založila:  
Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa,  
Univerza na Primorskem  
Primorski inštitut za naravosloven in tehnične vede Koper  
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije



UNIVERZA NA PRIMORSKEM  
UNIVERSITÀ DEL LITORALE  
UNIVERSITY OF PRIMORSKA

Titov trg 4, SI – 6000 Koper  
Tel.: + 386 5 611 75 00  
Fax.: + 386 5 611 75 30  
E-mail: info@upr.si  
http://www.upr.si

© TeMeNa, 2009  
Vse pravice pridržane

Koper, 2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512.62(075.8)(0.034.2)  
517.31(075.8)(0.034.2)

KUZMA, Bojan

Zapiski iz predavanj. Polja in krivuljni integrali [Elektronski vir] / Bojan Kuzma. - El. knjiga. - Koper : Knjižnica za tehniko, medicino in naravoslovje - TeMeNa, 2009. - (Zbirka Izbrana poglavja iz matematike ; št. 7)

Način dostopa (URL): [http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv\\_7\\_DS.pdf](http://temena.famnit.upr.si/files/files/zv_7_DS.pdf)

ISBN 978-961-92689-6-4

246644224

# Zapiski iz predavanj - Polja in krivuljni integrali

Bojan Kuzma

Koper, 2009

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Predgovor</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Skalarna in vektorska polja</b>	<b>4</b>
2.1	Uvod . . . . .	4
2.2	Operacije nad polji . . . . .	8
2.3	Mešane operacije nad polji . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Krivuljni integrali</b>	<b>18</b>
3.1	Krivuljni integral I. vrste . . . . .	18
3.2	Krivuljni integral II. vrste . . . . .	21
3.2.1	Orientacija krivulj . . . . .	22
3.2.2	Delo v polju sil . . . . .	24

# 1 Predgovor

Pričujoči zapiski so nastali kot študijski pripomoček študentom pri predmetih Analiza III in Analiza IV. V sklopu teh dveh predmetov je zajeta široka paleta snovi, ki obsega metrične prostore, funkcije več spremenljivk, mnogoterne integrale, Fourierovo analizo, krivulje, ploskve in polja s krivuljnimi ter ploskovnimi integrali.

Pričujoča zbirka je posvečena teoriji polja in krivuljnemu integralu. Kolikor mi je poznano se lahko matematike naučiš le tako, da matematiko delaš. Tak koncept podajanja snovi je npr. v učbeniku [10], kot tudi v [2]. Tudi sam sem se odločil slediti tej usmeritvi, a v nekoliko manjši meri kot v zbirki o Ploskvah. V njej boste sicer še vedno našli dokazane izreke, trditve in leme, ki pa jih spremlja tudi precej lažjih nalog teoretičnega značaja. Njihovih rešitev zaenkrat nisem dodal; vabim vas, da jih poskusite poiskati sami — s tem bo tudi zbirka dosegla svoj namen.

Naj dodam, da je pričujoča zbirka mišljena zgolj kot uvodna seznanitev z osnovnimi pojmi iz teorije polj. Za kaj več pa priporočam v branje npr. [10].

Bojan Kuzma

## 2 Skalarna in vektorska polja

### 2.1 Uvod

Opazujemo notranjost neke ogrevane sobe! V vsaki točki izmerimo temperaturo. Porazdelitev se spreminja po sobi; najvišja je v bližini grelcev, in čedalje bolj pada, čim bolj se od grelcev oddaljujemo. Prostor v sobi dobi neko novo lastnost, ki jo neogrevana soba nima: temperaturo. Tej dodatni lastnosti rečemo (temperaturno) *polje*. Kako ga merimo? V vsaki točki pač izmerimo njegovo vrednost, tj. izmerimo temperaturo v tej točki. Torej imamo opravka z funkcijo, ki za vsako točko prostora vrne temperaturo v njej.

Kot drugi zgled si lahko omislimo okroglo ploščo, na kateri je tanka plast viskozne tekočine. Skoznjo s konstantno hitrostjo vlečemo masni delček. Opazujemo pa spreminjanje sile, ki jo porabimo za vleko. Če je tekočina homogena, je sila konstantna. Zanimivo postane, če se viskoznost tekočine spreminja. Tedaj plošča dobi novo lastnost: (viskozno) polje.

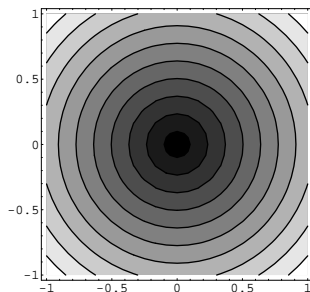
**Definicija 1.** Denimo, da je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ali  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  odprta množica. Funkciji  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  bomo rekli *skalarno polje* na  $\Omega$ .

Skalarno polje je *zvezno*, če je  $f$  zvezna funkcija. Skalarno polje je *zvezno odvedljivo*, če je  $f$  zvezno odvedljiva funkcija (torej, če so vsi njeni parcialni odvodi zvezni).

Naj takoj omenimo, da nas bodo zanimala zgolj zvezno odvedljiva polja. Najlažje si skalarno polje predstavljamo, če narišemo množico točk, kjer ima konstantno vrednost. V primeru ravninskega polja, (tj, v primeru  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ) ga predstavimo s funkcijo dveh spremenljivk  $f = f(x, y)$ ; zanimajo pa nas točke, kjer ta funkcija zavzame konstantno vrednost. Takoj uvidimo, da ima polje konstantno vrednost vzdolž krivulj; imenujemo jih tudi *nivojske krivulje*.

**Zgled 2.** Viskoznost tanke tekočine na okrogli plošči je premosorazmerna z oddaljenostjo od središča plošče. Kaj so nivojske krivulje tega (viskozno) polja?

Odgovor: Gostota v točki  $(x, y)$ , ki je za  $r$  oddaljena od središča je  $f(x, y) := \alpha r = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$ . Nivojske krivulje pa so točke, kjer  $f(x, y) = c = \text{const}$ , oziroma točke, kjer  $\sqrt{x^2 + y^2} = c/\alpha$ , torej koncentrične krožnice.

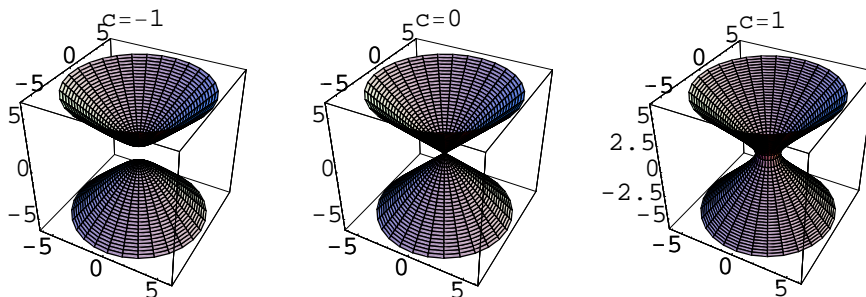


Slika 1: NIVOJSKE KRIVULJE SKALARNEGA POLJA  $f(x, y) := \alpha r = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$ .

V primeru prostorskega polja je množica točk, kjer ima konstantno vrednost ploskev; imenujemo jo tudi *nivojska ploskev*.

**Zgled 3.** V točki  $T = T(x, y, z)$  namerimo temperaturo  $x^2 + y^2 - z^2$ . Porazdelitev temperature v prostoru podaja torej funkcija  $f(T) = f(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$ . Kaj so nivojske ploskve?

Odgovor: Temperatura zavzame vrednost 0 na množici  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , kar je enačba dvodelnega stožca. Temperatura je negativna (npr. enaka  $-1$ ) na množici  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ , kar je enačba dvodelnega hiperboloida. Temperatura je pozitivna (npr. enaka 1) na enodelnem hiperboloidu z enačbo  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .



Slika 2: NIVOJSKE PLOSKVE TEMPERATURNEGA POLJA. KER OPAZUJEMO TEMPERATURO, JIM VČASIH REČEMO TUDI IZOTERME (TOČKE Z ISTO TEMPERATURO).

Sedaj pa opazujemo gibanje zraka. V vsaki točki namerimo hitrost, ter tudi smer, v katero se zrak v dani točki giblje. Oboje skupaj oblikujemo v vektor; njegova dolžina naj bo velikost hitrost, kaže pa naj v smeri gibanja zraka. Dobili smo *vektorsko polje*, ki v celoti opiše gibanje zraka v danem časovnem trenutku. Včasih temu polju rečemo tudi hitrostno polje. Kako ga podamo? Kot že rečeno, v vsaki točki  $T$  izmerimo nek vektor, tj. neko urejeno trojico  $(u, v, w)$ . Imamo torej preslikavo  $\mathbf{f}$ , ki točki  $T = T(x, y, z)$  priredi vektor  $\mathbf{f}(T) = (u, v, w)(T) = (f_1(T), f_2(T), f_3(T))$ . Se pravi, da  $\mathbf{f} : \mathcal{D}_{\mathbf{f}} \mapsto \mathbb{R}^3$ .

Če bi opazovali gibanje plitve reke, bi bili naši vektorji ravninski; hitrostno polje bi v tem primeru podali s preslikavo  $\mathbf{f}(T) := (u(T), v(T))$ .

**Definicija 4.** Denimo, da je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ali  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  odprta množica. Preslikavi  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ali  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  rečemo *vektorsko polje* na  $\Omega$ .

Vektorsko polje je *zvezno*, če je  $\mathbf{f}$  zvezna preslikava, tj., če so vse njene komponente zvezne. Vektorsko polje je *zvezno odvedljivo*, če je  $\mathbf{f}$  zvezno odvedljiva preslikava (torej, če so vsi parcialni odvodi vseh komponent zvezni).

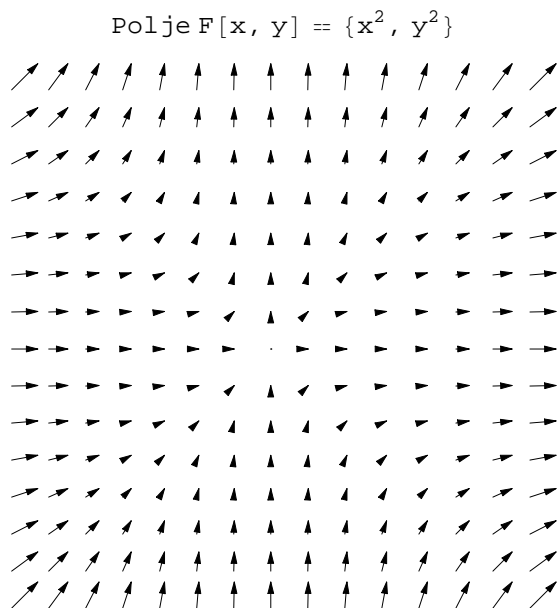
Zopet omenimo, da nas bodo tudi tukaj zanimala zgolj zvezno odvedljiva vektorska polja.

**Zgled 5.** V prazen prostor postavimo ogromno masno telo (npr. Zemljo). Prazen prostor s tem pridobi novo kvaliteto: Gravitacijsko polje. Zemlja je izvor tega polja. Njegovo velikost v masni točki  $T = T(x, y, z)$ , z maso  $m$ , ki je za  $r$  oddaljena od središča Zemlje podaja Newtonov zakon:

$$\mathbf{F} = -\frac{\kappa m M \mathbf{r}}{r^2},$$

tu je  $M$  masa Zemlje,  $\mathbf{r} := (x, y, z)$  pa je radij vektor, merjen od središča proti točki  $T$ . Predznak dodamo zato, ker gravitacijska sila vedno kaže v središče Zemlje.

Vektorsko polje  $\mathbf{F}$  si najlažje predstavljamo, če v nekaj točkah narišimo smer in velikost vektorja ki ga podaja polje.



Slika 3: VEKTORSKO POLJE  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y)$  SI NAJLAŽJE PREDSTAVLJAMO, ČE V NEKAJ TOČKAH  $T(x, y)$  NARIŠIMO SMER IN VELIKOST VEKTORJA  $\mathbf{F}(x, y)$ .

Druga možnost je predstavitev s *silnicami*. Po definiciji je to gladka krivulja, ki ima lastnost, da je tangenta v vsaki njeni točki ujema s smerjo polja.

*Silnica* vektorskega polja  $\mathbf{F}$  je krivulja, ki vedno poteka v smeri polja. Torej se njena tangenta v vsaki točki ujema s smerjo polja. Parametrizirajmo jo z  $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  (**mimogrede:** v primeru  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  bi imeli prostorsko krivuljo, parametrizirano z  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ). Tedaj se njena tangenta v točki  $T(x(t), y(t))$  ujema s smerjo polja v tej točki. Ker je pomembna le smer, ne pa tudi velikost smeri, dobimo naslednji pogoj:

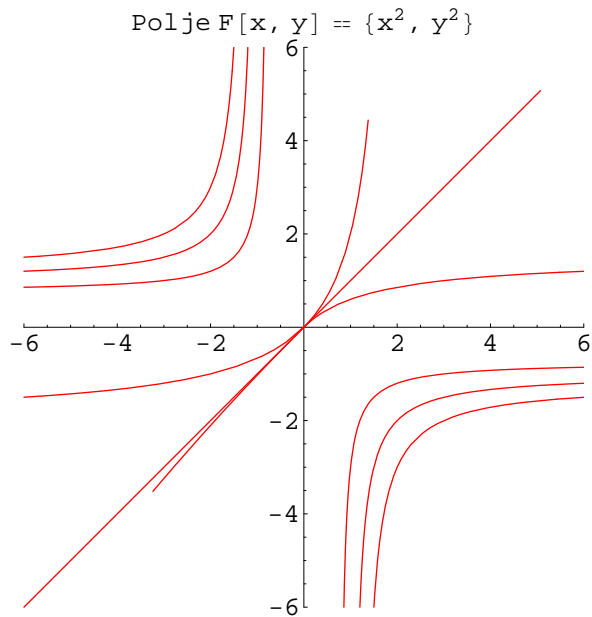
$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = \frac{\mathbf{F}(x(t), y(t))}{\|\mathbf{F}(x(t), y(t))\|}$$

Oziroma, malce drugače napisano:

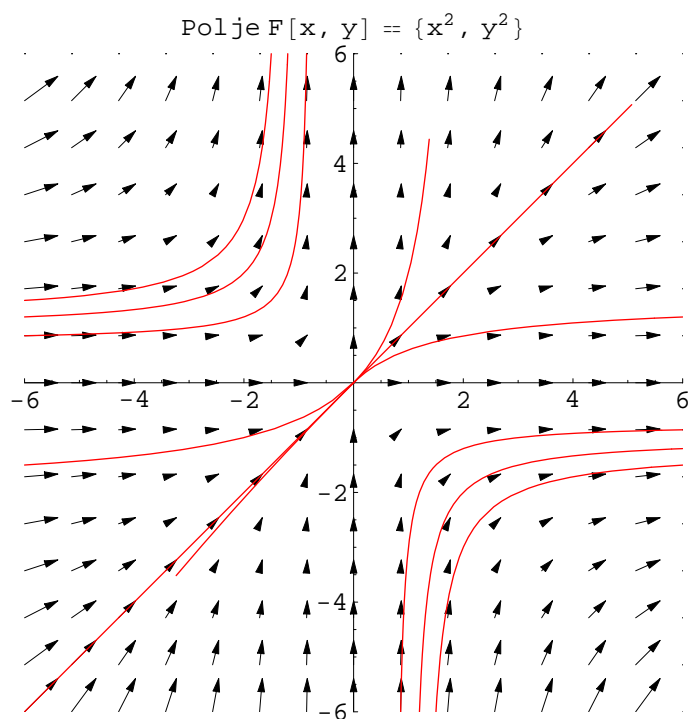
$$(\dot{x}, \dot{y}) = \frac{(F_1(x, y), F_2(x, y))}{\sqrt{F_1(x, y)^2 + F_2(x, y)^2}}$$

Najlažje si to predstavljamo v hitrostnem polju reke: V neko točko spustimo košček papirja, in opazujemo, kam ga bo odnesla reka! Gibal se bo po neki krivulji — po silnici!

**Zgled 6.** Na zgornji sliki smo imeli polje  $\mathbf{F}(x, y) = (F_2(x, y), F_2(x, y)) = (x^2, y^2)$ . Poiščimo njegove silnice!



Slika 4: ISTO POLJE LAHKO PREDSTAVIMO TUDI S SILNICAMI. SKOZI TOČKO, KJER  $\mathbf{F}(x, y) \neq \vec{0}$  POTEKA NATANKO ENA SILNICA. ČE JE  $\mathbf{F}(x, y) = \vec{0}$  JE LAHKO SILNIC SKOZI TISTO TOČKO VEČ.



Slika 5: KOMBINACIJA SILNIC IN VEKTORJEV ISTEGA POLJA  $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y^2)$ .

Torej, iščemo funkciji  $x = x(t), y = y(t)$ , za kateri

$$\dot{x} = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

$$\dot{y} = \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$



To je sistem diferencialni enačb, ki določa silnico. Izberimo si še začetno točko, skozi katero poteka silnica, npr.  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = -1$ . Tedaj ima sistem natanko eno rešitev. Dobimo jo lahko z numeričnimi metodami.

Skozi dano točko polja poteka natanko ena silnica, če je le polje neničelno. To si ni težko predstavljati: reka košček papirja ponese po natanko določeni krivulji. Za strogi dokaz bi potrebovali teorijo diferencialnih enačb, ki pravi, da obstaja natanko ena rešitev diferencialne enačbe pod temi pogoji.

Iz gornje slike pa vidimo, da to ne velja več za točke, kjer je polje ničelno. Skozi tako točko lahko poteka več različnih silnic (če papir položimo v točko, kjer reka obmiruje, ga lahko z malenkostnim sunkom pošljemo v več različnih smeri).

## 2.2 Operacije nad polji

Denimo, da imamo v prostoru podano neko skalarno polje  $u = u(x, y, z)$ . Točke, kjer zavzame konstantno vrednost smo že poimenovali nivojske ploskve. Sedaj pa nas zanima, v kateri smeri se to polje najhitreje spreminja. Poleg smeri, nas bo zanimalo tudi, kako hitro se polje spreminja, če se premikamo vzdolž dane smeri. Hitrost spreminjanja polja v smeri enotskega vektorja  $\mathbf{x}$  merimo s smernim odvodom  $\nabla_{\mathbf{x}}u$ , najhitreje pa se polje spreminja v smeri gradienta.

Tako lahko skalarnemu polju v vsaki točki priredimo vektor, ki kaže v smeri gradienta  $u$ , njegova dolžina pa naj bo velikost smernega odvoda v smeri gradienta — skalarnemu polju smo priredili vektorsko polje.

Kako to izračunati?

**Zgled 7.** V kartezičnih koordinatah se smerni odvod računa s pomočjo gradienta:

$$\nabla_{\mathbf{x}}u = \langle \mathbf{x}, \text{grad } u \rangle.$$

Smerni odvod bo največji v smeri gradienta, tj, ko je  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\max} := \text{grad } u / \|\text{grad } u\|$ , smerni odvod pa je tedaj enak

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_{\max}}u &= \left\langle \frac{\text{grad } u}{\|\text{grad } u\|}, \text{grad } u \right\rangle = \frac{1}{\|\text{grad } u\|} \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle = \frac{1}{\|\text{grad } u\|} \cdot \|\text{grad } u\|^2 \\ &= \|\text{grad } u\|. \end{aligned}$$

To bo torej velikost našega vektorja. Njegova smer je enaka  $\mathbf{x}_{\max}$ . Vektorsko polje v točki  $T(x, y, z)$  je torej enako  $\|\text{grad } u\| \cdot \mathbf{x}_{\max} = (\text{grad } u)(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$ .

**Definicija 8.** Bodi  $u$  skalarno polje, podano v kartezičnih koordinatah  $(x, y, z)$ . Njegov *gradient* je vektorsko polje, definirano z

$$\text{Grad } u = (u_x, u_y, u_z).$$

**Zgled 9.** Gradient skalarnega polja  $u(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$  je vektorsko polje

$$\text{Grad } u = (2x, 2y, -2z).$$

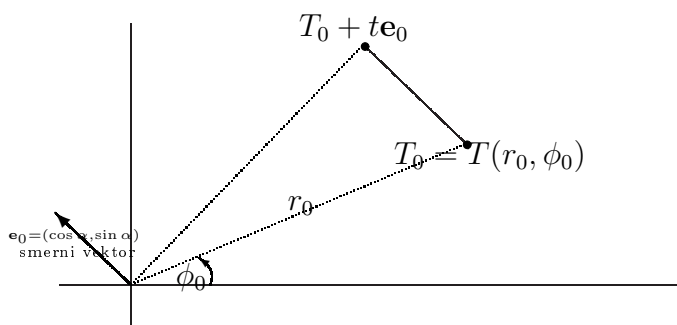
*Opomba 10.* Gradient polja pišemo z veliko začetnico, da ga ločimo od gradienta funkcije. Če je polje  $u$  podano v kartezičnih koordinatah je ta razlika nepomembna, saj tedaj vedno velja  $\text{Grad } u = \text{grad } u$ . Če pa je polje podano v nekartezičnih koordinatah, pa to ne velja več; prim. zgled 11 nižje.

Definicija je primerna tudi za ravninska polja  $p = p(x, y)$ . Mislimo si, da je  $u$  funkcija treh spremenljivk, kjer spremenljivka  $z$  „ne nastopa,“ torej,  $u(x, y, z) = p(x, y) + 0 \cdot z$ . Gradient ravninskega polja je torej  $\text{Grad } p = (p_x, p_y, 0)$ . To je ravninski vektor, zato običajno tretjo komponento niti ne pišemo:  $\text{Grad } p = (p_x, p_y)$ .

Pri tej definiciji moramo biti previdni, saj imamo lahko polja podana tudi v drugih, krivočrtnih koordinatah.

**Zgled 11.** Ravninsko skalarno polje  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je podano v polarnih koordinatah s predpisom  $f(r, \varphi) := r^2$ . Koliko je njegovo gradientno polje?

Poiskati moramo smer najhitrejšega spreminjanja polja v točki s koordinatami  $T_0 = (x_0, y_0) = r_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ . V smeri vektorja  $\mathbf{e} := (\cos \alpha, \sin \alpha)$  se polje spreminja s



hitrostjo

$$\nabla_{\mathbf{e}} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(T_0 + t\mathbf{e}_0) - f(T_0)}{t}.$$

Če pa hočemo to dejansko izračunati, moramo najprej dobiti polarne koordinate točke  $T_0 + t\mathbf{e}_0 = r_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0) + t(\cos \alpha, \sin \alpha)$ :

$$r^2 = x^2 + y^2 = (r_0 \cos \varphi_0 + t \cos \alpha)^2 + (r_0 \sin \varphi_0 + t \sin \alpha)^2 = t^2 + 2t \cos(\alpha - \varphi_0) + r_0^2$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x} = \frac{r_0 \sin \varphi_0 + t \sin \alpha}{r_0 \cos \varphi_0 + t \cos \alpha}.$$

Zaradi  $f(r, \varphi) = r^2$  dobimo končno smerni odvod polja vzdolž smeri  $\mathbf{e}$ :

$$\nabla_{\mathbf{e}} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 2t \cos(\alpha - \varphi_0) + r_0^2) - r_0^2}{t} = 2 \cos(\alpha - \varphi_0) r_0.$$

Smerni odvod bo največji, ko bo  $\cos$  zavzel največjo vrednost, tj, ko bo  $\alpha = \varphi_0$ . Tedaj se polje spreminja s hitrostjo  $2 \cos(\alpha - \varphi_0) r_0 = 2r_0$ . Torej je  $(\text{Grad } f)(\mathbf{x}_0) = 2r_0 \mathbf{e} = 2r_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$ . (V kartezičnih koordinatah bi se to glasilo kot  $(\text{Grad } f)(\mathbf{x}_0) = 2(x_0, y_0)$ .)

Seveda pa to še zdaleč ni enako gradientu funkcije, ki popiše polje v kartezičnih koordinatah, saj  $(\text{grad } f)(r_0, \varphi_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}(r_0, \varphi_0), \frac{\partial f}{\partial \varphi}(r_0, \varphi_0)\right) = (2r_0^2, 0)$ .

**Zgled 12.** Še ena, (v tem primeru) hitrejša pot bi bila, če bi polje najprej zapisali v kartezičnih koordinatah. V točki  $T(x_0, y_0)$  ima vrednost  $f(T) = r_0^2 = x_0^2 + y_0^2$ . Torej je  $\text{Grad } f = (2x_0, 2y_0)$ , kot prej.

Če hočemo izračunati gradient, je torej potrebno mukotržno računati smer najhitrejšega spreminjanja, ali pa polje najprej zapisati v kartezičnih koordinatah. Dostikrat nič od tega ni pripravno, saj lahko pri prehodu v kartezične koordinate dobimo precej komplicirano formulo za izračun polja. Ali obstaja še kakšna hitrejša pot? Da, preko Jacobijeve matrike transformacije, ki podaja prehod iz kartezičnih v krivočrtne koordinate.

Denimo, da imamo ravninsko polje podano v krivočrtnih koordinatah  $u = u(\xi, \zeta)$ ; prehod med krivočrtnimi in kartezičnimi pa podaja transformacija  $x = \Xi_1(\xi, \zeta)$  in  $y = \Xi_2(\xi, \zeta)$ . Na kratko:  $(x, y) = \Xi(\xi, \zeta)$ . Transformacija  $\Xi$  je povratno-enolična, če torej poznamo kartezične koordinate točke  $T$ , dobimo krivočrtne z inverzom  $\Xi$ , tj.  $(\xi, \zeta) = \Xi^{-1}(x, y)$ .

Sedaj pa polje najprej podajmo v kartezičnih koordinatah: Točka  $T = T(x, y)$  ima krivočrtne koordinate  $(\xi, \zeta) = \Xi^{-1}(x, y)$ , in polje v njej zavzame vrednost  $u(\xi, \zeta) = u(\Xi^{-1}(x, y)) = (u \circ \Xi^{-1})(x, y)$ . V kartezičnih pa znamo izračunati gradient polja:

$$\text{Grad } u = \text{grad}(u \circ \Xi^{-1}) = (\text{grad } u)J_{\Xi^{-1}},$$

pač z uporabo verižnega pravila za odvod kompozituma funkcij. Da ne bo nesporazuma: tukaj je  $(\text{grad } u) = (u_\xi, u_\zeta)$  gradient funkcije v krivočrtnih koordinatah, medtem ko je  $J_{\Xi^{-1}}$  Jacobijeva matrika transformacije  $\Xi^{-1}$ , in je enaka inverzu Jacobijeve matrike transformacije  $\Xi$ .

**Zgled 13.** Oglejmo si kar prejšnji zgled polja  $f(r, \varphi) := r^2$ . Transformacijo med kartezičnimi in polarnimi koordinatami podaja predpis

$$(x, y) = \Xi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Njena Jacobijeva matrika je

$$J_{\Xi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Xi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Xi_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \Xi_2}{\partial r} & \frac{\partial \Xi_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Takoj dobimo gradient funkcije  $f$  v točki  $(r_0, \varphi_0)$ :  $\text{grad } f = (f_r, f_\varphi) = (2r, 0)$ . Gradient polja pa je tedaj

$$\begin{aligned} \text{Grad } f &= (\text{grad } f)(J_{\Xi})^{-1} = (2r, 0) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}^{-1} = (2r, 0) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} \\ &= (2r_0 \cos \varphi_0, 2r_0 \sin \varphi_0), \end{aligned}$$

kar je natanko tisto, kot smo že dobili v zgledu 11.

Do sedaj smo skalarnemu polju priredili vektorsko. Če pa imamo vektorsko polje, lahko na njem naredimo dve operaciji:

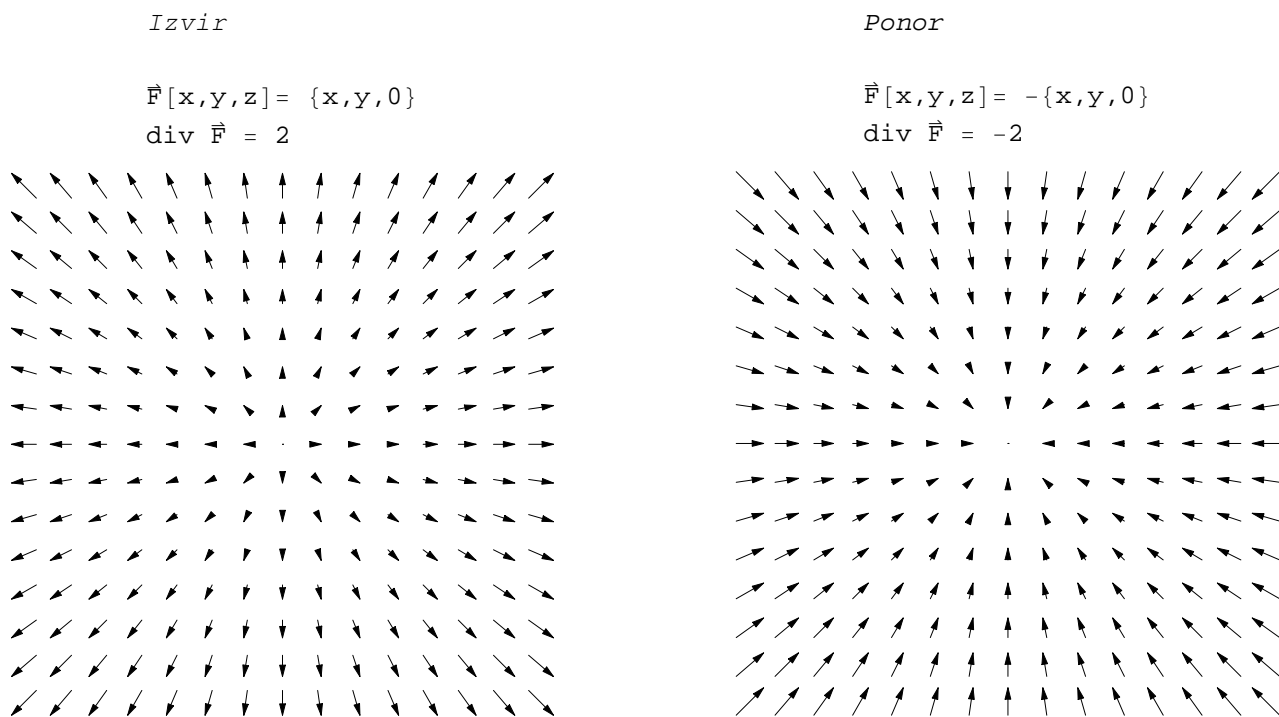
**Definicija 14.** Bodi  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$  vektorsko polje, podano v kartezičnih koordinatah. Njemu prirejeno skalarno polje

$$\text{Div } \mathbf{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

imenujemo *divergenca* polja  $\mathbf{F}$ .

**Zgled 15.** Kot zgled vzemimo polje  $\mathbf{F}(x, y, z) := (x^2, yxz, -z)$ . Tedaj je  $\text{Div } \mathbf{F} = 2x + xz - 1$ .

Iz vektorskega smo torej dobili skalarno polje. Če je v neki točki  $(\text{Div } \mathbf{F})(T) > 0$ , jo imenujemo *izvir polja*  $\mathbf{F}$ , če pa je  $(\text{Div } \mathbf{F})(T) < 0$ , jo imenujemo *ponor polja*  $\mathbf{F}$ .



Gradient skalarnega polja smo definirali kot gradient funkcije, ki to polje predstavlja v kartezičnih koordinatah. Pokazali pa smo, da lahko gradient skalarnega polja definiramo neodvisno od izbire koordinatnega sistema, in sicer v točki  $T$  kaže v smeri najhitrejšega naraščanja skalarnega polja. Podobno lahko tudi divergenco vektorskega polja definiramo, ne da bi polje podali v kartezičnih koordinatah. Spomniti se moramo edinole na dejstvo, da je totalni odvod  $\mathbf{F}'$  preslikave  $\mathbf{F}$  po definiciji enak neki linearni preslikavi, ki jo v standardni bazi predstavimo z Jacobijevo matriko.

**Naloga 16.** Pokži, da je  $\text{Div } \mathbf{F}$  enaka sledi Jacobijeve matrike preslikave  $\mathbf{F}$ , oz. je enaka sledi linearne preslikave  $\mathbf{F}'$ .

Še eno operacijo nad vektorskimi polji bomo imenovali *rotor*

**Definicija 17.** Naj bo vektorsko polje  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  podano v kartezičnih koordinatah. Njemu prirejeno vektorsko polje

$$\text{Rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} := \left( \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right), \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right)$$

imenujemo *rotor polja*  $\mathbf{F}$ .

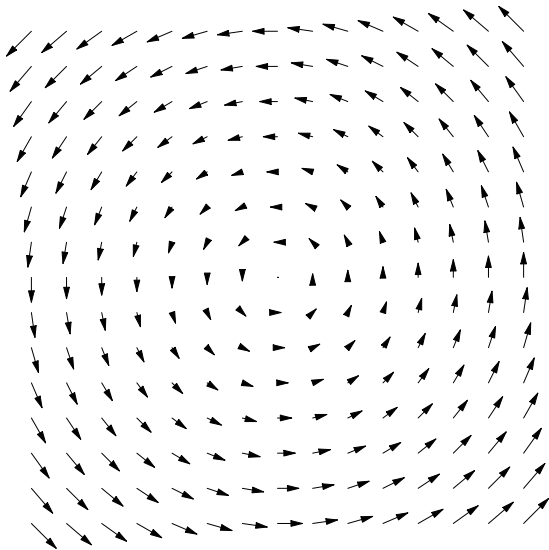
**Zgled 18.** Rotor polja  $\mathbf{F} := (x^2, yxz, -z)$  je  $(-xy, 0, yz)$ .

Točka, kjer je  $\text{Rot } \mathbf{F} \neq \vec{0}$  se imenuje *vrtilinec polja*  $\mathbf{F}$ . Kasneje bomo videli, da je ime pravšnje: Če bi v to točko postavili vetrnico, bi se vrtela. Rotorju polja  $\mathbf{F}$  bomo včasih rekli tudi polje vrtincev od  $\mathbf{F}$ .

*Vrtinec*

$$\vec{F}[x, y, z] = \{-y, x, 0\}$$

$$\text{rot } \vec{F} = \{0, 0, 2\}$$



**Zgled 19.** Denimo, da se togo telo vrti okoli osi  $z$ . Hitrost v točki  $T$  je potem enaka

$$\mathbf{v} := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

kjer je  $\boldsymbol{\omega} := (0, 0, \omega)$  vektor kotne hitrosti in je  $\mathbf{r} := (x, y, z)$  radij vektor do točke  $T$ . V telesu imamo torej podano hitrostno vektorsko polje. Kolikšen je njegov rotor?

Najprej zapišimo  $\mathbf{v}$  v kartezičnem sistemu:

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0),$$

odkoder je  $\text{Rot } \mathbf{v} = (0, 0, 2\omega) = 2\boldsymbol{\omega}$ .

Za operacije nad polji se je ustalil naslednji simbolni zapis s Hamiltonovim operatorjem *nabla*  $\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ :

$$\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}) = \text{Grad } u$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (F_1, F_2, F_3) := \text{Div } \mathbf{F}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \text{Rot } \mathbf{F}.$$

Opazimo, da se operator  $\nabla$  obnaša podobno kot vektorji pri skalarnem oz. vektorskem množenju. Ta podobnost gre še dlje, kot bomo videli kasneje.

**Naloga 20.** Preveri, da za Hamiltonov operator  $\nabla$  veljajo naslednje lastnosti:

- $\nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v.$
- $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}.$
- $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}.$
- $\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = (\nabla u) \cdot \mathbf{F} + u(\nabla \cdot \mathbf{F}).$
- $\nabla \times (u\mathbf{F}) = (\nabla u) \times \mathbf{F} + u(\nabla \times \mathbf{F}).$
- $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$
- $\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}).$

## 2.3 Mešane operacije nad polji

Včasih se zgodi, da lahko dano vektorsko polje  $\mathbf{F}$  napišemo kot gradient nekega skalarnega polja. Takemu vektorskemu polju bomo rekli *potencialno ali konzervativno polje*. Skalarno polje  $u$ , za katerega je  $\text{Grad } u = \mathbf{F}$  pa bomo imenovali (skalarni) *potencial* polja  $\mathbf{F}$ .

**Zgled 21.** Vzemimo gravitacijsko polje Zemlje:  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{-\kappa m M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$ , kjer je  $\mathbf{r} := (x, y, z)$  radij vektor, in  $r := \|\mathbf{r}\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  njegova dolžina. To polje je potencialno, njegov potencial je kar  $u(\mathbf{r}) := \frac{\kappa m M}{r} = \frac{\kappa m M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ . V to se hitro prepričamo, saj:

$$\text{Grad } u = \kappa m M \left( \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial x}, \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial y}, \frac{\partial(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}}{\partial z} \right) = -\frac{\kappa m M}{r^3} \mathbf{r}.$$

Potencialna polja so precej zanimiva: Nimajo vrtincev!

**Lema 22.** Če je  $\mathbf{F}$  potencialno polje, je njegov rotor enak nič.

*Dokaz.* Pa naj bo  $u$  njegov skalarni potencial. Tedaj  $\mathbf{F} = (u_x, u_y, u_z)$ , in s tem

$$\operatorname{Rot} \mathbf{F} = \operatorname{Rot}(\operatorname{Grad} u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = (0, 0, 0),$$

kot sledi iz enakosti mešanih odvodov za dvakrat parcialno zvezno odvedljivo funkcijo  $u$ .  $\square$

*Opomba 23.* To „lahko preverimo“ tudi z operatorjem nabra, za katerega smo že omenili, da se obnaša kot vektor:

$$\operatorname{Rot}(\operatorname{Grad} u) = \nabla \times (\nabla u) = \vec{0}$$

vektorski produkt dveh vzporednih vektorjev (v tem primeru bi za „vektor“ vzeli  $\nabla$ ) je nič.

*Opomba 24.* Pokazali bomo da velja tudi obrat, vsaj pod določenimi pogoji: Če je polje definirano na „množici brez lukenj,“ ima skalarni potencial natanko tedaj, ko je brez vrtincev.

Koliko različnih skalarnih potencialov pa lahko ima dano vektorsko polje?

**Naloga 25.** *Denimo, da je polje  $\mathbf{F}$  potencialno, in definirano na neki povezani množici. Če sta  $u_1 = u_1(x, y, z)$  in  $u_2 = u_2(x, y, z)$  njegova skalarna potenciala, pokaži, da velja  $u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z) = \text{const.}$*

Če polje  $\mathbf{F}$  nima izvirov niti ponorov, če je torej  $\operatorname{Div} \mathbf{F} = 0$  ga imenujemo tudi *solenoidalno* polje. Kot zgled si pogledjmo polje vrtincev, torej polje oblike  $\mathbf{S} := \operatorname{Rot} \mathbf{F}$ :

**Lema 26.** *Za poljubno polje  $\mathbf{F}$  velja  $\operatorname{Div} \operatorname{Rot} \mathbf{F} = 0$ .*

**Naloga 27.** *Dokaži zgornjo lemo, tj. pokaži, da je polje vrtincev solenoidalno.*

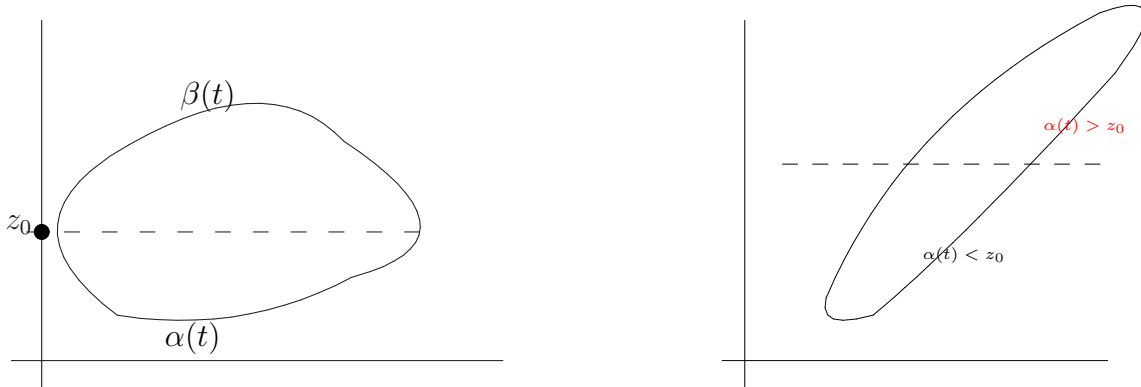
Zgodi se lahko, da ima polje  $\mathbf{F}$  skalarni potencial. Včasih pa lahko najdemo neko drugo vektorsko polje  $\mathbf{G}$ , da je  $\mathbf{F} = \operatorname{Rot} \mathbf{G}$ . Tako polje  $\mathbf{G}$  imenujemo *vektorski potencial polja  $\mathbf{F}$* .

Vsekakor vektorskega potenciala ni, če je  $\operatorname{Div} \mathbf{F} \neq 0$  (pač po Lemi 26). Kaj pa obratno, če  $\operatorname{Div} \mathbf{F} = 0$ , ali lahko najdemo vektorski potencial? Ne vedno! (bomo pokazali kasneje). Če pa je polje definirano na konveksni množici z *maksimalnim presekom*, pa je odgovor dejansko pritrdilen.

Konveksni množici  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  bomo rekli, da je z *maksimalnim presekom*, če obstajata taki funkciji  $\alpha = \alpha(x, y)$  in  $\beta = \beta(x, y)$ , definirani na neki konveksni množici  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  in tak  $z_0$ , da je

- (i)  $\alpha(x, y) \leq z_0 \leq \beta(x, y)$  za vsak  $(x, y) \in D$ , ter
- (ii)  $\Omega = \{(x, y, z); (x, y) \in D, \alpha(x, y) < z < \beta(x, y)\}$

**Izrek 28.** *Vektorsko polje  $\mathbf{F}$ , definirano na neki odprti konveksni množici  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  z maksimalnim presekom, ima vektorski potencial natanko tedaj, ko  $\operatorname{Div} \mathbf{F} = 0$ .*



Slika 6: DVE MNOŽICI V  $\mathbb{R}^2$ . LEVA IMA MAKSIMALNI PRESEK. DESNA GA NIMA: Z NOBENO VODORAVNO ČRTKANO ČRTO JE NE MOREMO RAZDELITI TAKO, DA BI NJEN ROB SESTAVLJALI DVE KRIVULJI, ENA NAD IN ENA POD ČRTO.

Pred dokazom si oglejmo konkreten zgled:

**Zgled 29.** Poiščimo vektorski potencial polja  $\mathbf{F} := (x^2 + 2xz, y^2 - 2xy, -z^2 - 2yz)$ .

Najprej preverimo, da je polje res solenoidalno:

$$\operatorname{Div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (2x + 2z) + (2y - 2x) + (-2z - 2y) = 0.$$

Njegov vektorski potencial bomo iskali v obliki polja  $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ ; veljati mora seveda  $\operatorname{Rot} \mathbf{V} = \mathbf{F}$ , torej:

$$\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} = x^2 + 2xz, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x} = y^2 - 2xy, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -z^2 - 2yz. \quad (1)$$

Ta sistem ima veliko rešitev. Izkaže se, da eno rešitev dobimo celo ob privzetku, da je zadnja komponenta,  $V_3 \equiv 0$ . Tedaj se prvi dve enačbi gornjega sistema polepšata v

$$\frac{\partial V_2}{\partial z} = -(x^2 + 2xz), \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = y^2 - 2xy.$$

Enačbi integrirajmo na spremenljivko  $z$ , od fiksne točke  $z_0$  do  $z$ .

$$V_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z (y^2 - 2xy) dz = z(y^2 - 2xy) + C_1 \quad (C_1 = C_1(x, y)).$$

$$V_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z (x^2 + 2xz) dz = -(x^2 z + xz^2) + C_2 \quad (C_2 = C_2(x, y)).$$

Aditivni integracijski konstanti  $C_1, C_2$  sta seveda neodvisni od  $z$ . Vendar pa pri vsakem izboru spremenljivk  $x, y$  dobimo v splošnem novi konstanti. Zatorej zavisita od  $x, y$ .

Zopet se izkaže, da lahko izberemo  $C_1(x, y) \equiv 0$ . Prva komponenta iskanega polja je s tem določena,  $V_1(x, y, z) = z(y^2 - 2xy)$ . V drugi komponenti pa moramo še poiskati neznano funkcijo  $C_2(x, y)$ , da bo izpolnjena zadnja enačba:

$$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = -z^2 - 2yz. \quad (2)$$



Vstavimo zgoraj dobljeno rešitev:  $-(2xz + z^2) + \frac{\partial C_1}{\partial x} - (2yz - 2xz) = -z^2 - 2yz$ , odkoder je

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Ena od rešitev te enačbe je kar  $C_1(x, y) = 0$ . dobimo torej naslednji vektorski potencial:

$$\mathbf{V} = (z(y^2 - 2xy), -(x^2z + xz^2), 0).$$

*Opomba 30.* Enačba (3) služi tudi kot kontrola izračunov: Če nismo naredili napake, mora njena desna stran biti neodvisna od spremenljivke  $z$ .

V gornjem zgledu je pravzaprav skrit postopek za iskanje vektorskega potenciala poljubnega solenoidalnega polja.

**Naloga 31.** *Dokaži izrek 28.*

(*Nasvet: Začneš lahko kot v prejšnjem zgledu. Pri enačbi (2) lahko parcialno odvajamo znotraj integrala, in upoštevamo, da je  $\text{Div } \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0$ :*

$$\begin{aligned} F_3(x, y, z) &= \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = - \int_{z_0}^z \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} dz + \frac{\partial C_1}{\partial x} = \int_{z_0}^z \frac{\partial F_3}{\partial z} dz + \frac{\partial C_1}{\partial x} \\ &= F_3(x, y, z) - F_3(x, y, z_0) + \frac{\partial C_1}{\partial x}. \end{aligned}$$

*Pokrajšaj, in opazi, da je funkcija  $C_1$  res neodvisna od  $z$ .)*

Vektorski potencial pa ni enoličen (zato smo pri iskanju rešitev tudi lahko privzeli, da je njegova zadnja komponenta ničelna). Koliko je vseh njegovih rešitev?

**Naloga 32.** *Denimo, da je  $\mathbf{V}$  vektorski potencial polja  $\mathbf{F}$ . Pokaži, da za vsako zvezno odvedljivo skalarno polje  $u$  velja  $\mathbf{U} := \mathbf{V} + \text{Grad } u$  je tudi vektorski potencial polja  $\mathbf{F}$ .*

Gornji izrek pa ne velja nujno, če je polje definirano na nekonveksni množici.

**Zgled 33.** Gravitacijsko polje Zemlje smo že srečali:  $\mathbf{F} = \frac{-\kappa m M}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{-\kappa m M(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ . Polje je definirano povsod, z izjemo točke  $(0, 0, 0)$ . Njegova divergenca je nič. Kljub temu pa bomo pokazali po Stokesovem izreku, da nima vektorskega potenciala.

Privzemimo za trenutek, da je polje  $\mathbf{F}$  definirano na dovolj pohlevni množici. Če je  $\text{Div } \mathbf{F} = 0$ , ima vektorski potencial, in nima niti izvirov niti ponorov. Če je  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$  (bomo pokazali, da) ima skalarni potencial; poleg tega pa je tako polje brezvrtinčno.

Posebno lepa so polja ki nimajo niti izvirov/ponorov, niti vrtincev; torej polja, za katera je  $\text{Div } \mathbf{F} = 0$  in  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$ . Imenujemo jih *harmonična ali Laplaceova* (tako polje opisuje npr. pretakanje nestisljive tekočine, brez vrtincev in izvirov/ponorov). Laplaceovo polje ima skalarni potencial, torej  $\mathbf{F} = \text{Grad } u$  za neko skalarno polje  $u$ . Poleg tega je njegova divergenca enaka nič. Sklepamo, da Laplaceovo polje ustreza naslednji, Laplaceovi parcialni diferencialni enačbi:

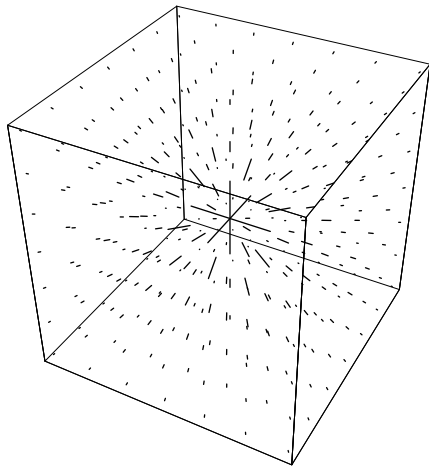
$$0 = \text{Div } \mathbf{F} = \text{Div Grad } u = \text{Div}(u_x, u_y, u_z) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz};$$

tu je  $u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  in podobno za  $u_{yy}$  ter  $u_{zz}$ .

*Divergenca=0, pa nima vektor. potenciala*

$$\vec{F}[x,y,z] = \frac{-\{x, y, z\}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

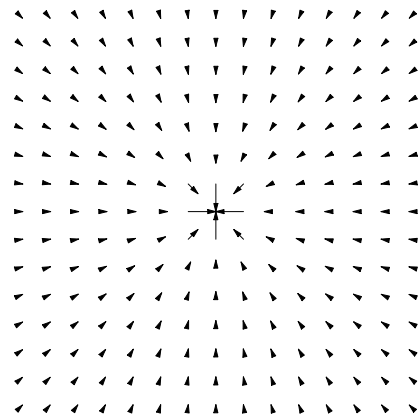
$$\text{div } \vec{F} = 0$$



*Divergenca=0, pa nima vektor. potenciala*

$$\vec{F}[x,y,z] = \frac{-\{x, y, z\}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}$$

$$\text{div } \vec{F} = 0$$

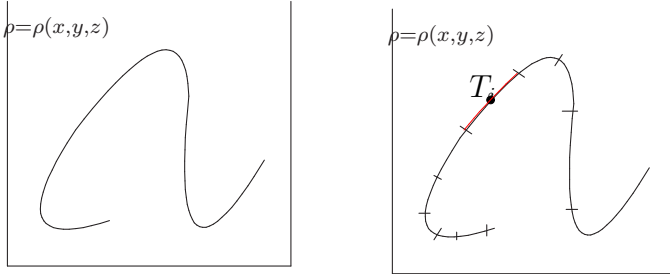


Slika 7: SOLENOIDALNO POLJE BREZ VEKTORSKEGA POTENCIALA. NA DESNI JE PRIKAZAN PREREZ POLJA Z RAVNINO  $z = 0$ .

## 3 Krivuljni integrali

### 3.1 Krivuljni integral I. vrste

Denimo, da imamo kos bakrene žice. Radi bi ga izolirali, zato ga potopimo v tekočino z gostotnim poljem  $\rho = \rho(x, y, z)$ .



Slika 8: KRIVULJNI INTEGRAL I. VRSTE. ŽICA V NEHOMOGENI TEKOČINI; NA DESNI SLIKI JE NJEN RAZREZ. PRI RAČUNANJU MASE OVOJA POSAMEZNEGA KOŠČKA MORAMO POZNATI GOSTOTO. VZAMEMO JO KAR V NEKI TOČKI  $T_i$  NA TEM KOŠČKU.

Tekočina se okoli žice strdi in oblikuje zaščitni ovoj enakomerne debeline. Toda njegova masa se spreminja, saj tekočina ni homogena. Kako bi izračunali maso ovoja?

Ideja je naslednja: Žico razrežemo na drobne koščke dolžine  $\Delta s_i$ . Na vsakem koščku se nabere približno  $(P\rho(T_i)) \cdot \Delta s_i$ , kjer je  $T_i$  poljubno izbrana točka na našem koščku (in je  $P$  površina preseka ovoja). Seštejmo posamezne prispevke, in dobili bomo približek za maso ovoja. Ta približek bo tem boljši, čim bolj na drobno smo žico razrezali. V limiti, ko režemo na tako drobne koščke, da gre njihova maksimalna dolžina proti nič, bomo dobili točni rezultat.

Kako pa bi to limito dejansko izračunali? In kdaj sploh obstaja? In še bolj pomembno: Ali je res neodvisna od oblike razreza in izbire točk  $T_i$ ?

Pomagamo si tako, da žico, imenujmo jo  $\Gamma$ , parametriziramo z regularno parametrizacijo  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma$ . (Na hitro ponovimo, da mora biti (i)  $\mathbf{r}$  surjektivna, (ii)  $\mathbf{r}|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \Gamma$  injektivna, in (iii)  $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \vec{0}$ .)

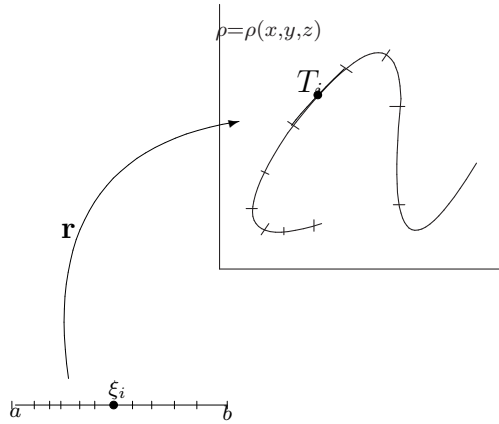
Razrez žice ustreza razrezu intervala  $[a, b]$  z delilnimi točkami  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b$ . Dolžino loka  $\Delta s_i$  že poznamo. Pridenimo še izrek o povprečni vrednosti integrala:

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \|\dot{\mathbf{r}}(\xi_i)\| \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = \|\dot{\mathbf{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i \quad (\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]).$$

Torej je masa ovoja približno enaka  $\sum_{i=1}^n (P\rho(T_i)) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n (P\rho(T_i)) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i$ . Točko  $T_i$  na žici, kjer računamo gostoto tekočine, si izberemo tako, da bo račun čimlažji. Torej bodi  $T_i := \mathbf{r}(\xi_i)$ . Sedaj pa dobimo iskano maso kot:

$$\text{Masa} = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P\rho(\mathbf{r}(\xi_i))) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i.$$

Na desni strani ugledamo Riemannovo vsoto zvezna funkcije  $(P\rho(\mathbf{r}(t))) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ , definirane na intervalu  $[a, b]$ . Limita je torej enaka  $\int_a^b (P\rho(\mathbf{r}(t))) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$ , in je neodvisna od oblike delitve



Slika 9: KRIVULJNI INTEGRAL I. VRSTE. DELITVI ŽICE USTREZA DELITEV INTERVALA, NA KATEREM JE DEFINIRANA REGULARNA PARAMETRIZACIJA  $\mathbf{r}$ .

intervala  $[a, b]$  (se pravi tudi od oblike razreza krivulje  $\Gamma$ ), niti ni odvisna od izbire evaluacijskih točk  $\xi_i$ .

**Naloga 34.** Pokaži, da bi v limiti še vedno dobili isti rezultat, četudi bi gostoto računali nekje drugje na koščku krivulje, in ne v točki  $\mathbf{r}(\xi_i)$ .

(Nasvet: Gostoto torej računamo na točki  $T_i = \mathbf{r}(\tau_i)$ , kjer  $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ; približek za maso je tedaj  $\sum(P\rho(\mathbf{r}(\tau_i))) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(\xi_i)\| \Delta t_i$ .)

**Definicija 35.** Naj bo  $\Gamma$  enostavna (ali enostavno sklenjena) gladka krivulja, in  $\rho$  zvezno skalarno polje, definirano na neki okolici  $\Gamma$ . Krivuljni integral I. vrste je število

$$\int_{\Gamma} \rho ds := \int_a^b \rho(\mathbf{r}(t)) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt,$$

kjer je  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma$  regularna parametrizacija krivulje  $\Gamma$ .

Na eno „malenkost“ pa smo le pozabili: Kaj če bi vzeli drugačno regularno parametrizacijo, ali bi dobili isto maso ali ne?

**Naloga 36.** Pokaži, da je krivuljni integral I. vrste dobro definiran, torej da je neodvisen od izbire regularne parametrizacije  $\mathbf{r}$ .

(Nasvet: Če je  $\mathbf{r}^* : [c, d] \rightarrow \Gamma$  neka druga regularna parametrizacija iste krivulje  $\Gamma$ , obstaja zvezno odvedljiva, strogo monotona bijekcija  $h := [c, d] \rightarrow [a, b]$ , da je  $\mathbf{r}^* = \mathbf{r} \circ h$ .)

**Zgled 37.** Izračunaj krivuljni integral I. vrste po enotski krožnici v ravninskem polju  $\rho(x, y) := \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$ .

Izberimo njeno poljubno regularno parametrizacijo, npr  $\mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t)$ . Tedaj je  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = 1$ , in stem

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \rho ds &= \int_0^{2\pi} \rho(\cos t, \sin t) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 8. \end{aligned}$$

Običajni integral ni nič drugega kot krivuljni integral I. vrste po daljici  $[a, b]$ :

**Zgled 38.** Izračunaj krivuljni integral polja  $u(x, y) := f(x) + 0y = f(x)$  po daljici  $[a, b]$ .

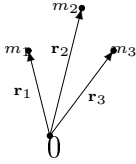
Izberimo poljubno regularno parametrizacijo, npr. tole  $\mathbf{r}(t) := (t, 0)$ . Tedaj  $\dot{\mathbf{r}}(t) = (1, 0)$ , in  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = 1$ , in torej

$$\int_{[a,b]} u \, ds = \int_a^b u(t, 0) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Motivacija za vpeljavo krivuljnega integrala I. vrste je računanje mas krivulj. Z njim pa lahko računamo tudi težišča:

Težišče masnih točk  $m_1, \dots, m_n$  leži v

$$\mathbf{r}^* := \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \sum m_i (x_i, y_i, z_i).$$



Težišče krivulje pa izpeljemo podobno kot njeno maso: Razdelimo jo na majhne koščke dolžine  $\Delta s_i$ , z maso  $\Delta m_i := \rho(T_i) \Delta s_i$ . Približek za težišče je torej

$$\frac{1}{m} \sum \mathbf{r}_i \Delta m_i = \frac{1}{m} \sum \mathbf{r}_i \rho(T_i) \Delta s_i = \frac{1}{m} \sum (x_i, y_i, z_i) \rho(T_i) \Delta s_i.$$

V limiti, ko gre  $\max \Delta s_i \rightarrow 0$  bomo dobili točno vrednost težišča. To je torej točka  $T^* = (x^*, y^*, z^*)$ , kjer

$$x^* = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x \rho(x, y, z) \, ds,$$

$$y^* = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y \rho(x, y, z) \, ds,$$

$$z^* = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} z \rho(x, y, z) \, ds,$$

in  $m := \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) \, ds$ .

**Zgled 39.** Poiščimo težišče zgornje enotske polkrožnice, gostote  $\rho(x, y) = 1$ .

Njena masa je  $m = 1/2(2\pi) = \pi$ . Izberimo regularno parametrizacijo, npr.  $\mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t)$ ;  $t \in [0, \pi]$ , in dobimo ordinato težišča:

$$y^* = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y \cdot 1 \, ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t \, dt = \frac{2}{\pi}.$$

Podobno bi dobili, da  $x^* = 0$ . Težišče je v točki  $T^* = (0, 2/\pi)$ .

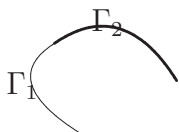
## Kakšne lastnosti ima krivuljni integral I. vrste?

**Naloga 40.** Če sta  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  konstantni, in sta  $\rho_1, \rho_2$  zvezni funkciji, definirani na okolici gladke krivulje  $\Gamma$ , pokaži, da velja

$$\int_{\Gamma} \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 ds = \lambda_1 \int_{\Gamma} \rho_1 ds + \lambda_2 \int_{\Gamma} \rho_2 ds.$$

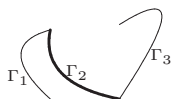
**Naloga 41.** Če je gladka krivulja  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$  sestavljena iz dveh kosov, pokaži, da je

$$\int_{\Gamma} \rho ds = \int_{\Gamma_1} \rho ds + \int_{\Gamma_2} \rho ds.$$



Slika 10: KRIVULJA, SESTAVLJENA IZ DVEH KOSOV.

Do sedaj smo zahtevali, da je krivulja gladka. Gornja naloga sugerira naslednjo razširitev krivuljnega integrala tudi za *odsekoma gladke krivulje*: Če je  $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_n$  razcep odsekoma gladke krivulje na gladke dele, definiramo  $\int_{\Gamma} \rho ds := \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \rho ds$ .



Slika 11: ODSEKOMA GLADKA KRIVULJA JE SESTAVLJENA IZ GLADKIH KOMPONENT.

Izrek o povprečni vrednosti za zvezne funkcije  $f$  pravi, da je  $\int_a^b f(t) dt = f(\xi) \cdot (b-a)$  za neko točko  $\xi \in [a, b]$ . Toda  $\int_a^b f(t) dt$  je krivuljni integral po daljici  $[a, b]$ , in  $(b-a)$  je njena dolžina! Ali velja kaj podobnega tudi za krivuljne integrale?

**Naloga 42.** Pokaži, da za gladko krivuljo  $\Gamma$  velja

$$\int_{\Gamma} \rho ds = \rho(T^*) \cdot \text{Dolž}(\Gamma)$$

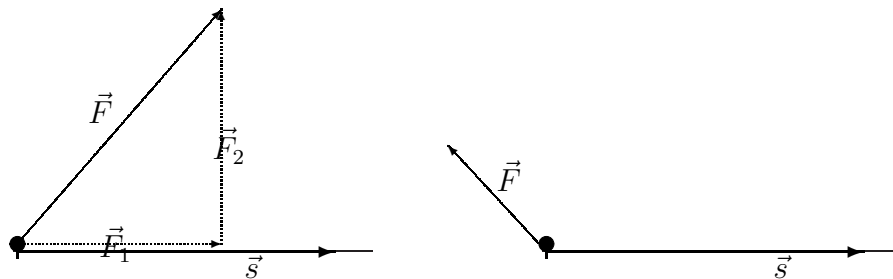
za neko točko  $T^* \in \Gamma$ .

(Nasvet: Izberi parametrizacijo  $\Gamma$  z naravnim parametrom, tj.  $\|\dot{\mathbf{r}}(s)\| \equiv 1$ , in uporabi izrek o povprečni vrednosti na integralu  $\int_{\Gamma} \rho ds = \int_0^{\text{Dolž}(\Gamma)} \rho(\mathbf{r}(s)) \cdot \|\dot{\mathbf{r}}(s)\| ds$ .)

## 3.2 Krivuljni integral II. vrste

Sedaj nas zanima drugačen problem: Masno točko vlečemo po ravni podlagi s konstantno silo  $\vec{F}$ . Kolikšno delo opravimo, da ga premaknemo do razdalje  $s$ ?

Odgovor zvemo iz fizike:  $A = F_1 s$ , kjer je  $s$  dolžina poti in  $F_1$  velikost sile v smeri gibanja. Denimo, da smo ga premaknili za vektor  $\vec{s}$  dolžine  $s := \|\vec{s}\|$ , kot med vektorjem premika  $\vec{s}$  in



Slika 12: MASNO TELO VLEČE KONSTANTNA SILA  $\vec{F}$ . DELO, KI GA PRI TEM OPRAVI JE PRODUKT DOLŽINE POTI  $s = \|\vec{s}\|$  IN VELIKOSTI KOMPONENTE SILE  $\vec{F}_1$  V SMERI GIBANJA. NA DRUGI SLIKI SILA NASPROTUJE GIBANJU; TEDAJ JE DELO NEGATIVNO.

vektorjem sile  $\vec{F}$  pa bodi  $\varphi$ . Tedaj je  $A = (\|\vec{F}\| \cos \varphi) \cdot \|\vec{s}\| = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . delo ki ga opravi konstanta sila, da masno točko premakne vzdolž vektorja  $\vec{s}$  računamo torej s skalarni produktom! Mimogrede še omenimo, da je delo negativno, če sila ovira gibanje.

Kaj pa, če imamo neko polje sile (npr. gravitacijsko) in se točka giblje po neki krivulji (npr. fiksirana je na neko zvito žico)? Koliko dela tedaj opravimo, da premagujemo polje sil? Odgovor je odvisen tudi od smeri gibanja—v eni smeri bomo nasprotovali polju sil; delo bo negativno. V obratni smeri nam bo polje sil „pomagalo;“ delo bo sicer po absolutni vrednosti enako veliko kot prej, vendar bo pozitivno.



Slika 13: PO ISTI KRIVULJI SE LAHKO PREMIKAMO V DVEH SMEREH. OPRAVLJENO DELO PRI SPREMEMI GIBANJA ZGOLJ SPREMEMI PREDZNAK.

Čakata nas torej dve nalogi: (a) Kako orientirati krivuljo? (b) Kako izračunati delo, ko masna točka premaguje polje sil po neki krivulji?

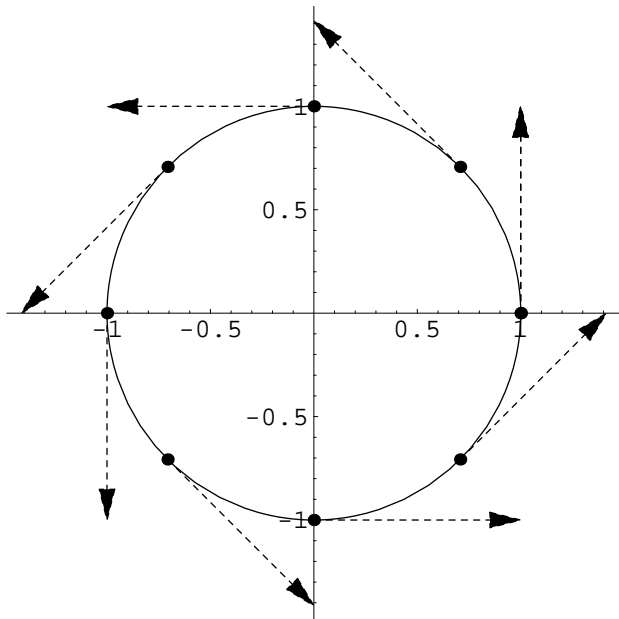
### 3.2.1 Orientacija krivulj

Zadeva je preprosta. Izberemo si pač smer, po kateri se bomo gibali po krivulji. Mislimo si, da je krivulja cesta, po njej pa se giblje avto. Njegovi žarometi vedno kažejo v smeri tangente na krivuljo. Ko se avto premika, se tangenta (=smer žarometov) zvezno spreminja. To pa že narekuje naslednjo definicijo:

**Definicija 43.** Orientacija gladke krivulje  $\Gamma$  je podana z zvezno preslikavo  $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ki točki  $\mathbf{p} \in \Gamma$  priredi enotski tangentni vektor  $\mathbf{T}(\mathbf{p})$  na krivuljo.

*Opomba 44.* Če je krivulja ravninska, tudi tangentni vektor  $\mathbf{X}(\mathbf{p})$  leži v ravnini, torej  $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ . Običajno tedaj „pozabimo“ na tretjo komponento, in pišemo kar  $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Zgled 45.** Kot zgled si oglejmo enotsko krožnico  $\Gamma := \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ . Parametrizirajmo jo z naravnim parametrom  $\mathbf{r}(s) := (\cos s, \sin s)$ . V točki  $T(x, y) = \mathbf{r}(s)$  je tangenti vektor enak  $\mathbf{r}'(s) = (-\sin s, \cos s)$ . Toda mi vemo, da  $(x, y) = \mathbf{r}(s)$ , se pravi, da je  $x = \cos s$  in  $y = \sin s$ . Se pravi, da je tangenti vektor v  $T(x, y)$  enak  $(-\sin s, \cos s) = (-y, x)$ . Njegova dolžina je 1, saj  $(x, y) \in \Gamma$ . Orientacijo torej podaja preslikava  $\xi : (x, y) \mapsto (-y, x)$ , in je očitno zvezna.



Slika 14: ORIENTACIJA KRIVULJE. NA VSAKO NJENO TOČKO PRIPNEMO ENOTSKI TANGENTNI VEKTOR. ZAHTEVAMO ŠE, DA SE TANGENTNI VEKTORJI ZVEZNO SPREMINJAJO VZDOLŽ KRIVULJE

V vsaki točki krivulje si lahko izberemo natanko dva enotska tangenti vektorja:  $\mathbf{T}$  in  $-\mathbf{T}$ . Na koliko načinov pa lahko izbiramo enotske tangenti vektorje, ki se zvezno spreminjajo po gladki krivulji?

**Naloga 46.** Pokaži, da za gladko krivuljo  $\Gamma$  lahko najdemo le dve zvezni preslikavi, ki točki  $\mathbf{p} \in \Gamma$  priredi enotski tangenti vektor na  $\Gamma$  (v točki  $\mathbf{p}$ ).

(Nasvet: Parametriziraj jo z naravnim parametrom  $\mathbf{r}(s)$ . V točki  $\mathbf{p} = (x, y, z) = \mathbf{r}(s)$ , je  $\mathbf{r}'(s)$  enotski tangenti vektor na krivuljo. Torej je  $\xi(x, y, z) := \mathbf{r}'(\mathbf{r}^{-1}(x, y, z)) = \mathbf{r}'(s)$  ena od iskanih zveznih preslikav vzdolž  $\Gamma$  (zakaj že je  $\mathbf{r}^{-1}$  zvezna?). kompaktno je zaprta preslikava—torej homeomorfizem Drugo podaja njej nasprotna:  $-\xi$ . Več jih ni zaradi zveznosti—če je namreč  $\xi_1$  še ena zvezna preslikava, je  $\mathbf{p} \mapsto \|(\xi - \xi_1)(\mathbf{p})\|$  tudi zvezna, ki pa lahko zavzame natanko dve vrednosti:  $\{0, 2\}$ .)

Vsaka gladka krivulja  $\Gamma$  torej dopušča natanko dve orientaciji. Denimo, da smo jo že orientirali—v vsaki točki  $\mathbf{p}$  torej imamo določen enotski tangenti vektor  $\xi(\mathbf{p})$ , ki se zvezno spreminja vzdolž krivulje. To bomo označevali kot  $\hat{\Gamma}$  ali pa tudi kot  $\hat{\Gamma}$ . Sedaj pa vzemimo neko regularno parametrizacijo  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \hat{\Gamma}$  orientirane krivulje  $\hat{\Gamma}$ . Pravimo, da  $\mathbf{r}$  ohranja orientacijo, če je

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \xi(\mathbf{r}(t)),$$

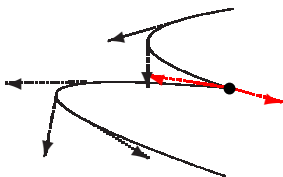
če se torej tangenti vektor parametrizacija ujema z izbrano tangento, kot jo določa orientacija. V nasprotnem primeru, ko

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = -\xi(\mathbf{r}(t))$$



rečemo, da  $\mathbf{r}$  obrne orientacijo.

Malce več problema imamo pri orientaciji odsekoma gladkih krivuljah. Najljžje jih orientiramo tako, da si izberemo neko odsekoma gladko parametrizacijo  $\gamma = \gamma(t)$ . V vsaki točki lahko izračunamo levi ali desni odvod (oba sta enaka, z izjemo točk, kjer krivulja nima tangente). Če vedno računamo npr. levi odvod, dobimo enolično določen predpis, ki vsaki točki na krivulji priredi nek neničeln vektor. Normirajmo ga! Na tak način smo orientirali tudi odsekoma gladko krivuljo.



Slika 15: ODSEKOMA GLADKA KRIVULJA. V TOČKI NEGLADKOSTI ENOTSKI TANGETNI VEKTOR SUNKOVITO SPREMENI SMER

Povzemimo. Odsekoma gladko krivuljo orientiramo tako, da izberemo neko njeno odsekoma gladko parametrizacijo, in v vsaki točki izračunamo levi odvod, ki ga nato normiramo.

### 3.2.2 Delo v polju sil

Krivuljo smo torej orientirali. Postavimo jo v polje sil. Kako izračunati delo, ko masna točka prepotuje krivuljo v izbrani smeri?

Vzemimo poljubno orientacijo ohranjajočo regularno parametrizacijo  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$ . Razrezu  $T_0, \dots, T_i, \dots, T_n$  krivulje ustreza delitev intervala  $a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$ . Vektor  $\overrightarrow{T_{i-1}T_i}$  je enak  $\mathbf{r}(t_i) - \mathbf{r}(t_{i-1})$ , oziroma, če napišemo po komponentah, in uporabimo Lagrangeov izrek:

$$\overrightarrow{T_{i-1}T_i} = (x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1}), z(t_i) - z(t_{i-1})) = (\dot{x}(\xi_i), \dot{y}(\tau_i), \dot{z}(\zeta_i))(t_i - t_{i-1})$$

za neke točke  $\xi_i, \tau_i, \zeta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Kot običajno pišimo  $\Delta t_i := (t_i - t_{i-1})$ . Poleg tega: Ker je  $\mathbf{r}$  zvezno odvedljiva, ne bomo dosti pogrešili, če računamo  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  v isti točki  $\xi_i$ . Torej je

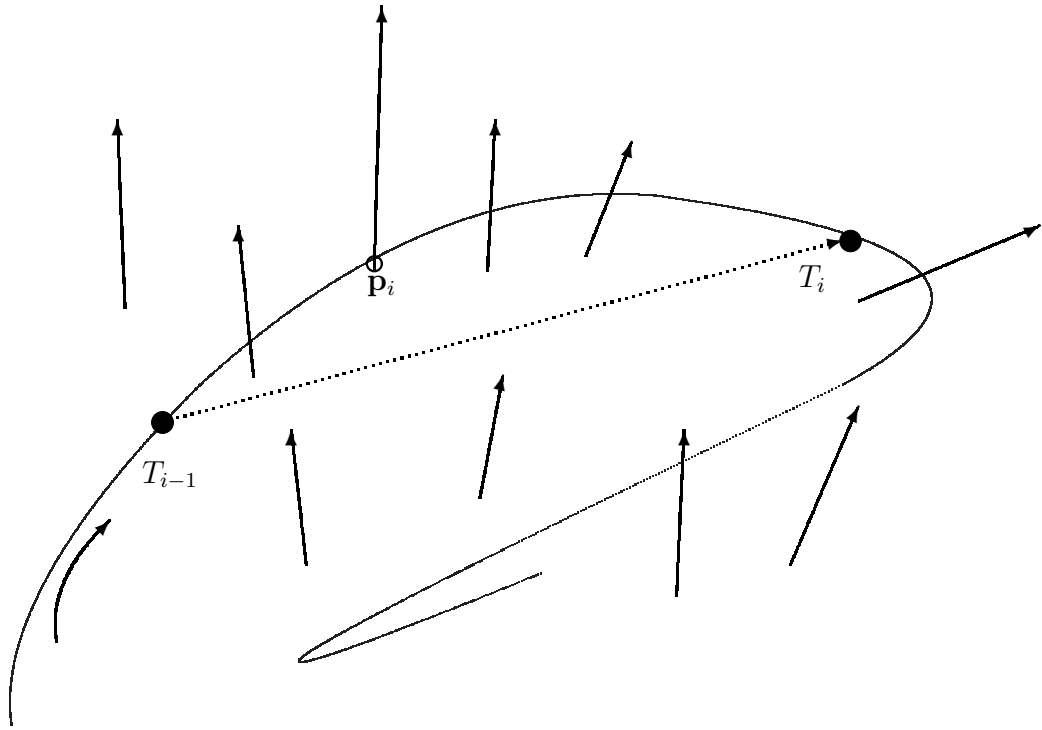
$$\overrightarrow{T_{i-1}T_i} = (\dot{x}(\xi_i), \dot{y}(\xi_i), \dot{z}(\xi_i)) \Delta t_i + \mathbf{ost}_i \Delta t_i = \dot{\mathbf{r}}(\xi_i) \Delta t_i + \mathbf{ost}_i \Delta t_i,$$

kjer je  $\mathbf{ost}_i = (0, \dot{y}(\tau_i) - \dot{y}(\xi_i), \dot{z}(\zeta_i) - \dot{z}(\xi_i))$ . Izbiro točke  $\mathbf{p}_i$  na loku krivulje  $\cap T_{i-1}T_i$ , kjer bomo računali prijemališče polja sil, opravimo tako, da bo račun čimpreprostejši. Kar sama se ponuja izbira  $\mathbf{p}_i := \mathbf{r}(\xi_i)$ . Torej polje  $\mathbf{F}$  sil opravi približno takšno delo:

$$A \doteq \sum_{i=1}^n \Delta A_i \doteq \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\xi_i) \Delta t_i.$$

Točno vrednost bomo dobili v limitnem procesu, ko krivuljo tako na drobno delimo, da gre  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ . Na desni strani uzremo Riemannovo vsoto funkcije  $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$  na intervalu  $[a, b]$ , ki v limiti konvergira proti številu

$$A = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$



Slika 16: DELO V POLJU SIL  $\mathbf{F}$ . KRIVULJO  $\widehat{\Gamma}$  RAZREŽIMO NA DROBNE KOŠČKE S TOČKAMI  $T_0, \dots, T_{i-1}, T_i, \dots, T_n$ . ČE JE RAZREZ DOVOLJ DROBAN, SE OD  $T_{i-1}$  DO  $T_i$  GIBLJEMO SKORAJ PO DALJICI, IN POLJE SIL JE NA TEM KOŠČKU SKORAJ KONSTANTNO. KER SE VREDNOST POLJA SKORAJ NE SPREMINJA, GA LAHKO IZRAČUNAMO V POLJUBNO IZBRANI TOČKI  $\mathbf{p}_i$  NA ODSEKU KRIVULJE MED  $T_{i-1}$  IN  $T_i$ . PRISPEVEK DELA NA TEM KOŠČKU JE TOREJ Približno  $\Delta A \doteq \mathbf{F}(\mathbf{p}_i) \cdot \overrightarrow{T_{i-1}T_i}$ .

Mogoče bi kdo ugovarjal, da bi morali računati malce bolj natančno:

$$\sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i)) \cdot \overrightarrow{T_{i-1}T_i} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(\xi_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\mathbf{r}(\xi_i)) \cdot \mathbf{ost}_i \Delta t_i.$$

**Naloga 47.** Pokaži, da  $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{\mathbf{F}}(\mathbf{r}(\xi_i)) \cdot \mathbf{ost}_i \Delta t_i$  limitira proti nič, ko tako na drobno delimo  $\widehat{\Gamma}$ , da gre  $\max \Delta t_i \rightarrow 0$ .

Problem smo tako pravzaprav (skoraj) rešili. Dobljeno število  $A$  imenujemo tudi krivuljni integral II. vrste. Formalno definiramo takole:

**Definicija 48.** Bodi  $\widehat{\Gamma}$  gladka, orientirana krivulja in  $\mathbf{F}$  zvezno vektorsko polje, definirano na neki okolici  $\widehat{\Gamma}$ . Krivuljni integral II. vrste vzdolž krivulje  $\widehat{\Gamma}$  v polju  $\mathbf{F}$  je število

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} := \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt,$$

kjer je  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  orientacijo ohranjajoča regularna reprezentacija krivulje  $\widehat{\Gamma}$ .

Zakaj smo zgoraj omenili, da je problem skoraj rešen? Zato, ker še nismo preverili, če dobimo isti rezultat tudi ob drugačni parametrizaciji krivulje  $\widehat{\Gamma}$ !

**Naloga 49.** Naj bosta  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  in  $\mathbf{r}^* : [c, d] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  dve orientacijo ohranjajoči regularni reprezentacije iste (orientirane) krivulje  $\widehat{\Gamma}$ . Pokaži, da tedaj obstaja strogo monoton naraščajoča zvezno odvedljiva bijekcija  $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , za katero je

$$\mathbf{r}^*(s) = \mathbf{r}(h(s)).$$

S pomočjo gornje naloge ni težko preveriti, da je definicija krivuljnega integrala II. reda dobra, torej da je neodvisna od izbire orientacijo ohranjajoče regularne reprezentacije. V to se prepričamo skoraj natanko tako, kot smo pokazali dobro definirano pri krivuljnem integralu I. reda.

**Naloga 50.** Naj bosta  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  in  $\mathbf{r}^* : [c, d] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  dve orientacijo ohranjajoči regularni reprezentacije iste (orientirane) krivulje  $\widehat{\Gamma}$ . Pokaži, da je

$$\int_c^d \mathbf{F}(\mathbf{r}^*(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}^*(t) dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$

**Zgled 51.** Izračunajmo krivuljni integral polja  $\mathbf{F}(x, y) := (xy^2, -x^2y)$  vzdolž zgornje polovice polkrožnice polmera  $a$ , orientirane v smeri urinega kazalca.

Ena od orientacijo ohranjajočih regularnih parametrizacij je  $\mathbf{r} : t \mapsto a(\cos(-t), \sin(-t))$ . Ker hočemo zgornjo polovico polkrožnice, jo gledamo le za  $t \in [\pi, 2\pi]$ . Njen odvod je enak  $\dot{\mathbf{r}}(t) = -a(-\sin(-t), \cos(-t)) = a(-\sin t, \cos t)$ . Torej je

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} &= \int_{\pi}^{2\pi} a^3 (\cos(-t) \sin^2(-t), \cos^2(-t) \sin(-t)) \cdot a(-\sin t, \cos t) dt \\ &= a^4 \int_{\pi}^{2\pi} \cos t \sin^3 t + \cos^3 t \sin t dt = 0 \end{aligned}$$

**Zgled 52.** V polju sil  $\mathbf{F} := (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz^2)$  bi radi masno točko premaknili od  $A = (0, 0, 0)$  do  $B = (1, 1, 1)$ . Izračunaj potrebno delo, če (i) se gibljemo po premici (ii) se gibljemo po krivulji, parametrizirani z  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t^2$ ,  $z(t) = t^3$ .

(i). Najprej poiščimo orientacijo–ohranjajočo parametrizacijo. Ena od možnosti je npr.  $\mathbf{r}(t) := (t, t, t)$ , ko  $t \in [0, 1]$ . Torej je delo enako

$$A = \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^2, 2t + 3t^2, 1 - 4t^4) \cdot (1, 1, 1) dt = \int_0^1 (3t^2 - 6t^2 + 2t + 3t^2 + 1 - 4t^4) dt = 6/5.$$

(ii). Orientacijo–ohranjajočo parametrizacijo sedaj že imamo:  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ . V tem primeru pa je delo enako

$$A = \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^5, 3t^4 + 2t^2, 1 - 4t^9) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt = \int_0^1 2t^2 (-6t^9 + 2t + 3) dt = 2.$$

### Kakšne lastnosti ima krivuljni integral II. vrste?

- Krivuljni integral II. vrste lahko pretvorimo v I. vrste! Zapišimo malce spremenjeno definicijo

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt,$$

in opazimo, da je  $\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}$  enotski tangentni vektor na  $\Gamma$ . Ker pa parametrizacija  $\mathbf{r}$  ohranja orientacijo (določeno z zvezno preslikavo  $\xi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ ), je torej  $\frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|} = \xi(\mathbf{r}(t))$ . Poleg tega je  $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = ds$  diferencial ločne dolžine. Vstavimo v gornjo enačbo, pa imamo povezavo med obema krivuljnima integraloma:

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \xi(\mathbf{r}(t)) ds = \int_{\Gamma} (\mathbf{F} \cdot \xi) ds.$$

Na levi je krivuljni integral II. reda po orientirani krivulji  $\widehat{\Gamma}$ . Na desni je krivuljni integral I. reda po isti, toda neorientirani, krivulji  $\Gamma$ .

- Vsako orientirano krivuljo lahko razdelimo na dva dela.

**Naloga 53.** Če je orientirana, gladka krivulja  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2$  sestavljena iz dveh kosov, pokaži, da je

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\widehat{\Gamma}_1} \mathbf{F} d\mathbf{r} + \int_{\widehat{\Gamma}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

Do sedaj smo zahtevali, da je krivulja gladka. Gornja naloga sugerira naslednjo razširitev krivuljnega integrala tudi za *odsekoma gladke orientirane krivulje*: Če je  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_1 + \dots + \widehat{\Gamma}_n$  razcep odsekoma gladke, orientirane krivulje na gladke orientirane dele, definiramo

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} d\mathbf{r} := \sum_{i=1}^n \int_{\widehat{\Gamma}_i} \mathbf{F} d\mathbf{r}.$$

- Če spremenimo orientacijo krivulje smo že omenili, da tudi opravljeno delo spremeni predznak.

**Naloga 54.** Pokaži, da je

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = - \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \, d\mathbf{r},$$

kjer je  $\widehat{\Gamma}$  ista krivulja kot  $\widehat{\Gamma}$ , a s spremenjeno orientacijo.

(Nasvet: Če  $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  ohranja orientacijo, jo  $\mathbf{r}_1 : t \mapsto \mathbf{r}(-t)$  obrne.)

- Razbijmo polje na komponente:  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Isto naredimo s parametrizacijo  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Tedaj je

$$d\mathbf{r}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \, dt = (\dot{x}(t) \, dt, \dot{y}(t) \, dt, \dot{z}(t) \, dt) = (dx, dy, dz)$$

Tedaj pa tudi krivuljni integral razpade na vsoto treh integralov po projekcijah na absciso, ordinato, oz. aplikato:

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{\Gamma}} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

*Opomba 55.* Če je orientirana krivulja sklenjena (če torej njena začetna in končna točka sovpadata), to dejstvo običajno označimo kot

$$\oint_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} := \int_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}.$$

Če je sklenjena *ravninska* krivulja  $\Gamma$  orientirana v pozitivni smeri, torej v obratni smeri urinega kazalca, bomo to poudarili z oznako

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}.$$

Vrednost krivuljnega integrala II. vrste po *sklenjeni* orientirani krivulji imenujemo tudi *cirkulacija polja  $\mathbf{F}$* .

**Zgled 56.** V reki imamo fiksirano mrežasto cev, v njej pa prosto lebdi veriga, ki ima pritrjene lopatice. Ali se bo veriga v cevi zaradi gibanja vode vrtela? Oglejmo si tri namišljena telesa, prosto gibajoča po tej cevi.

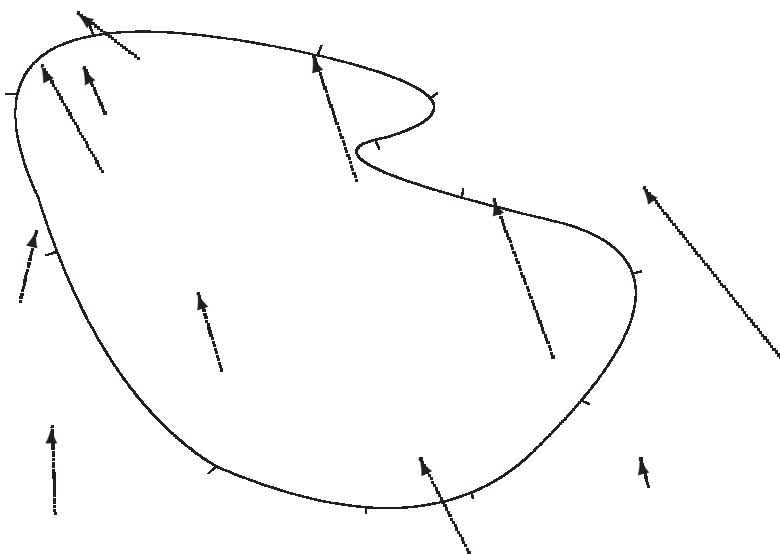
Kar se opazovanih treh masnih teles tiče, se gibljejo po premici. Njihova skupna gibalna količina je torej  $G_1 + G_2 + G_3 = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i$ .

Ta tri masna telesa so bila seveda koščki verige, ki lebdi v mrežasti cevi. Njihova masa je zato odvisna od gostote verige (ki je iz homogenega materiala), ter od dolžine, ki jo zasedajo na verigi:  $m_i = \rho \Delta s_i$ . Torej je njihova gibalna količina enaka

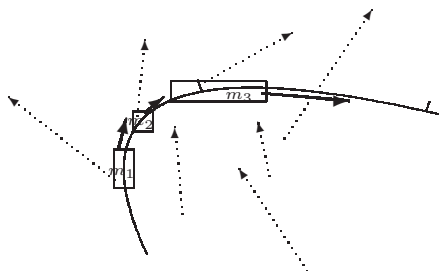
$$G = \sum_i \rho \mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i \Delta s_i$$

Sedaj pa nas zanima skupna gibalna količina celotne verige. Dobimo jo z limitnim procesom: Najprej jo razdelimo na masne delčke, in seštejemo prispevke vsakega od njih. Nato delitev čedalje bolj drobimo, tako, da gre maksimalna dolžina masnega delčka proti nič. V limiti bomo dobili točno gibalno količino, ki je enaka

$$G = \rho \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_i (\mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i) \Delta s_i = \rho \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\xi}) \, ds = \rho \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$



Slika 17: SKLENJENA KRIVULJA S PRITRŽENIMI LOPATICAMI V POLJU (REKI)  $\mathbf{v}$ . MOŽNO JE, DA SE BO KRIVULJA ZARADI GIBANJA REKE VRTELA. HITROST VRTENJA DOBIMO S CIRKULACIJO POLJA  $\mathbf{v}$ .



Slika 18: MASNA TELESKA, GIBAJOČA SE PO CEVI. POLJE  $\mathbf{v}$  JIH HOČE PREMAKNITI V SMER Vektorja  $\mathbf{v}(x, y)$ , TODA PREMKAJO SE LAHKO ZGOLJ V SMER TANGENTE NA KRIVULJO, TJ. V SMER Vektorja  $\boldsymbol{\xi}(x, y)$  (ALI PA V SMER  $-\boldsymbol{\xi}(x, y)$ ); TU JE  $\boldsymbol{\xi}(x, y)$  ENOTSKI VEKTOR, KOT GA PODAJA IZBRANA ORIENTACIJA. GIBALNA KOLIČINA  $i$ -TEGA JE  $G_i := m_i \mathbf{v}_i \cdot \boldsymbol{\xi}_i$ . TU JE  $\mathbf{v}_i := \mathbf{v}(x_i, y_i)$  HITROST POLJA V TOČKI KJER SE NAHAJA SREDIŠČE  $i$ -TEGA TELESKA,  $\boldsymbol{\xi}_i$  PA JE ENOTSKI TANGENTNI VEKTOR V TEJ TOČKI, KOT GA PODAJA IZBRANA ORIENTACIJA.

Na levi je krivuljni integral I. vrste od funkcije  $(x, y) \mapsto \mathbf{v}(x, y) \cdot \boldsymbol{\xi}(x, y)$  ki pove porazdelitev gibalna količina po krivulji. Na desni smo ga že pretvorili v krivuljni integral II. vrste. Povprečno hitrost vrtenja verige pa dobimo, če skupno gibalno količino  $G$  delimo z maso verige:

$$v = \frac{G}{m} = \frac{1}{m} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r};$$

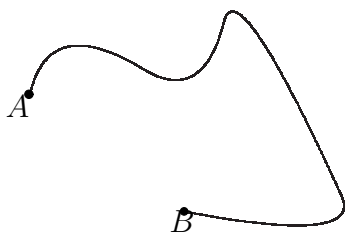
izračunamo jo torej ravno s cirkulacijo polja. Mimogrede: Če je rezultat negativen, se veriga vrti v obratni smeri kot jo podaja izbrana orientacija.

V zgledu 52 smo videli, da opravimo različno veliko delo, če se gibljemo po različnih poteh, ki povezujejo isti točki  $A$  in  $B$ . Včasih pa delo le ni odvisno od oblike poti:

**Zgled 57.** Izračunaj delo, ki ga moramo opraviti pri premagovanju gravitacijskega polja  $\mathbf{F} = -\frac{\kappa m M}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ , da masno točko z maso  $m$  premaknemo po krivulji, ki povezuje točki  $A = (0, 0, 0)$  in  $B = (1, 1, 1)$ .

Iz srednješolske fizike sklepamo, da je opravljeno delo enako razliki med potencialnima energijama, torej je preprosto razliki višin. Pričakujemo torej, da bo odgovor enak za katerokoli krivuljo, ki povezuje  $A$  in  $B$ . Res: za gravitacijsko polje smo že pokazali, da ima skalarni potencial! Zgolj spomnimo: Za funkcijo  $V(x, y, z) := \kappa m M / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \kappa m M / r$  velja da  $\text{Grad } V = -\frac{\kappa m M}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$ .

Vzemimo sedaj poljubno orientirano gladko krivuljo  $\hat{\Gamma}$ , ki  $A$  poveže z  $B$ , in bodi  $\mathbf{r} := [a, b] \rightarrow \hat{\Gamma}$  njena orientacija ohranjajoča regularna parametrizacija.



Slika 19: TOČKI  $A$  IN  $B$  POVEŽIMO S POLJUBNO KRIVULJO. DELO, KI GA OPRAVIMO, DA TELO PREMAKNEMO IZ  $A$  DO  $B$  JE V GRAVITACIJSKEM POLJU NEODVISNO OD NJENE OBLIKE!

Izračunajmo delo po tej krivulji:

$$A = \int_{\hat{\Gamma}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt.$$

Toda mi znamo izračunati nedoločeni integral  $\int \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$ ! Enak je kar funkciji  $V(\mathbf{r}(t)) = V(x(t), y(t), z(t))$ ! V dokaz jo odvajajmo s pomočjo verižnega pravila:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(\mathbf{r}(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \dot{z} = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\text{Grad } V) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= (\text{Grad } V)(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned}$$

Se pravi, da je delo enako

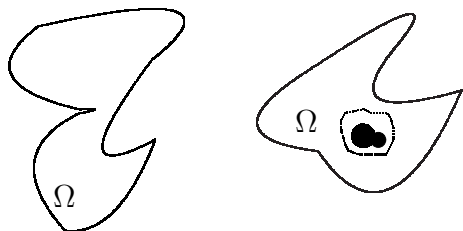
$$A = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = V(\mathbf{r}(t)) \Big|_{t=a}^b = V(\mathbf{r}(b)) - V(\mathbf{r}(a)) = V(B) - V(A),$$

kot smo tudi pričakovali.

Kaj pa če bi bila krivulja sklenjena? Tedaj bi bilo  $A = B$  in delo bi bilo enako  $V(B) - V(B) = 0$ . Cirkulacija gravitacijskega polja je torej nič. Seveda velja natanko isti premislek za poljubno polje, ki ima skalarni potencial.

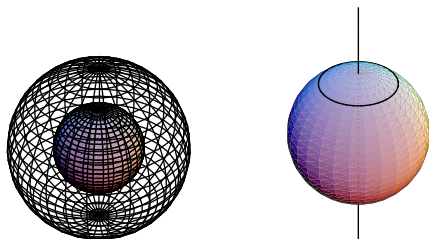
Spomnimo: Če ima neko polje  $\mathbf{F}$  skalarni potencial potem je  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$ . Sedaj imamo dovolj sredstev, da pokažemo obratno trditev: Če je polje  $\mathbf{F}$  definirano na dovolj lepem območju („brez lukenj“) in je  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$  lahko najdemo skalarni potencial polja  $\mathbf{F}$ . Povedati moramo le še, kdaj je območje „brez lukenj.“ Običajno za taka območja raje uporabljamo izraz, da je enostavno povezano.

Odrpno množico  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  (lahko tudi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ) bomo imenovali *enostavno povezano*, če lahko vsako sklenjeno krivuljo  $\Gamma \subset \Omega$  stisnemo v točko, **ne da bi pri tem zapustili množice  $\Omega$** . V ravnini so enostavno povezane tiste množice, ki nimajo lukenj. V prostoru imamo malce več



Slika 20: DVE MNOŽICI V  $\mathbb{R}^2$ . LEVA JE ENOSTAVNO POVEZANA. DESNA NI — ČRTKANO KRIVULJO, KI OBKROŽA LUKNJO NE MOREMO NIKAKOR STISNITI V TOČKO, NE DA BI PRI TEM ZAPUSTILI MNOŽICE  $\Omega$ .

svobode: Npr. kroglja, ki ji odvzamemo koncentrično kroglo polovico manjšega polmera, je še vedno enostavno povezana. Pač pa krogla, ki jo prebodemo s premico, ni enostavno povezana.



Slika 21: DVE ODPRTI MNOŽICI V  $\mathbb{R}^3$ . LEVI MANJKA CELOTNO SREDIŠČE, VENDAR JE VSEENO ENOSTAVNO POVEZANA. DESNI MANJKA ZGOLJ PREMICA, A NI ENOSTAVNO POVEZANA: KRIVULJO, KI OBKROŽI SEVERNI POL NE MOREMO STISNITI V TOČKO, NE DA BI ZAPUSTILI  $\Omega$ .

Sedaj pa končno formulirajmo izrek o skalarnem potencialu.

**Izrek 58** (O skalarnem potencialu). Naj bo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  enostavno povezana odprta množica in na njej definirano gladko polje  $\mathbf{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tedaj so naslednje štiri trditve ekvivalentne:

- (i) Cirkulacija polja je nič, tj.  $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = 0$  za vsako enostavno sklenjeno odsekoma gladko orientirano krivuljo  $\widehat{\Gamma}$ .
- (ii) Krivuljni integral  $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}$  ni odvisen od oblike krivulje  $\widehat{\Gamma}$ , ki povezuje dve izbrani točki  $A, B \in \Omega$ .
- (iii) Polje  $\mathbf{F}$  je potencialno: Obstaja skalarno polje  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , da  $\mathbf{F} = \text{Grad } u$
- (iv)  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$ .

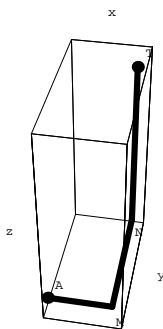
**Zgled 59.** Določi skalarni potencial polja  $\mathbf{F} = (2xy, x^2 + z^2, 2yz)$ .



(Naloga: Najprej preveri, da je  $\text{Rot } \mathbf{F} = \vec{0}$ ). Skalarni potencial bomo iskali v obliki krivuljnega integrala. Poljubno izberemo začetno točko, npr.  $A = (0, 0, 0)$ . Nato pa definiramo skalarno funkcijo

$$u(x, y, z) := \int_A^{T(x,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r},$$

kjer integriramo po poljubni orientirani krivulji  $\widehat{\Gamma}$ , ki povezuje točki  $A$  in  $T(x, y, z)$ . Izrek o skalarnem potencialu (iv)  $\implies$  (ii) zagotavlja, da bomo vsakič dobili isti rezultat. Ker je rezultat neodvisen od oblike krivulje si pač izberimo takšno, da ba račun čimlažji: Torej je



Slika 22: ISKANJE SKALARNEGA POLJA. INTEGRIRAMO PO ODSEKOMA GLADKI KRIVULJI, KI PO KOORDINATNIH OSEH POVEZUJE  $A = (0, 0, 0)$  PREKO  $M = (x, 0, 0)$  IN  $N = (x, y, 0)$  S KONČNO TOČKO  $T = T(x, y, z)$ .

$$u(x, y, z) = \int_A^{M(x,0,0)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} + \int_{M(x,0,0)}^{N(x,y,0)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} + \int_{N(x,y,0)}^{T(x,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}.$$

Krivulja, ki povezuje  $A(0, 0, 0)$  in  $M(x, 0, 0)$  ima parametrizacijo  $\gamma_1(t) := (t, 0, 0)$ ;  $t \in [0, x]$ , krivulja ki povezuje  $M(x, 0, 0)$  in  $N(x, y, 0)$  ima parametrizacijo  $\gamma_2(s) := (x, s, 0)$ ;  $s \in [0, y]$ , tretja krivulja pa je parametrizirana z  $\gamma_3(t) := (x, y, t)$ ;  $t \in [0, z]$ . Dobimo torej, da

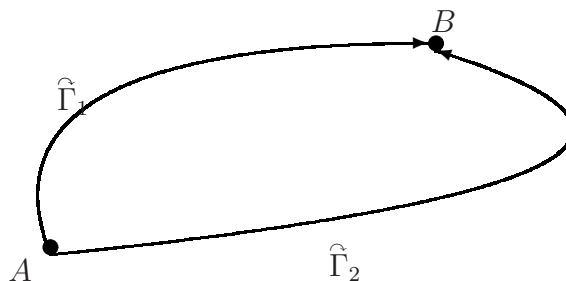
$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x (2t \cdot 0, t^2 + 0^2, 0) \cdot (1, 0, 0) \, dt + \int_0^y (2xs, x^2 + 0^2, 2s \cdot 0) \cdot (0, 1, 0) \, ds + \\ &\quad + \int_0^z (2xy, x^2 + t^2, 2yt) \cdot (0, 0, 1) \, dt \\ &= 0 + \int_0^y x^2 \, ds + \int_0^z 2yt \, dt = x^2 y + yz^2 \end{aligned}$$

Naloga. Preveri, da je  $\text{Grad}(x^2 y + yz^2) = \mathbf{F}$ .

*Dokaz izreka o skalarnem potencialu.*

(i)  $\implies$  (ii): Vzemimo dve orientirani krivulji  $\widehat{\Gamma}_1$  in  $\widehat{\Gamma}_2$ , ki povezujeta isti točki  $A$  in  $B$ . Tedaj je  $\widehat{\Gamma} := \widehat{\Gamma}_1 - \widehat{\Gamma}_2$  orientirana sklenjena krivulja. Po (i) je

$$0 = \oint_{\widehat{\Gamma}} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \int_{\widehat{\Gamma}_1} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} - \int_{\widehat{\Gamma}_2} \mathbf{F} \, d\mathbf{r}.$$



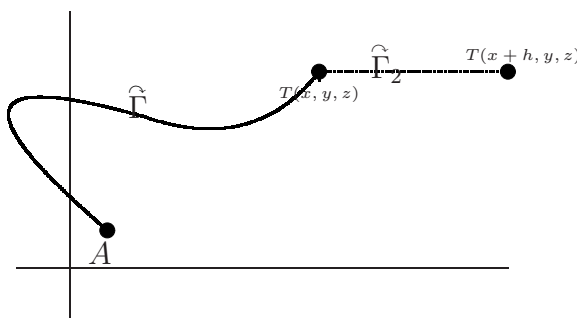
Slika 23: DVE RAZLIČNI KRIVULJI KI POVEZUJETA ISTI TOČKI. ENI KRIVULJI OBRNIMO ORIENTACIJO, PA DOBIMO „ZANKO“ — SKLENJENO KRIVULJO. KRIVULJNI INTEGRAL PO SKLENJENI KRIVULJI PA JE CIRKULACIJA POLJA, TOREJ PRI NAS ENAK NIČ.

(ii)  $\implies$  (iii) Izberimo neko začetno točko  $A = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Definirajmo

$$u(x, y, z) := \int_A^{T(x,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r},$$

kjer integriramo po poljubni orientirani krivulji, ki znotraj  $\Omega$  povezuje  $A$  z  $T(x, y, z)$ . Zaradi (ii) je integral neodvisen od oblike krivulje. Na tak način imamo nedvoumno definirano skalarno polje  $u = u(x, y, z)$ . Pokazati moramo le še, da je  $u$  skalarni potencial polja  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ . Preveriti je potrebno troje: (a)  $\frac{\partial u}{\partial x} = F_1$ , (b)  $\frac{\partial u}{\partial y} = F_2$  ter  $\frac{\partial u}{\partial z} = F_3$ . Najprej preverimo (a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y, z) - u(x, y, z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left( \int_A^{T(x+h,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} - \int_A^{T(x,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{T(x,y,z)}^{T(x+h,y,z)} \mathbf{F} \, d\mathbf{r} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \mathbf{F}(t, y, z) \cdot (1, 0, 0) \, dt = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F_1(t, y, z) \, dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h F_1(\xi, y, z)}{h}; \quad (x \leq \xi \leq x+h) \\ &= F_1(x, y, z). \end{aligned}$$



Slika 24: INTEGRAL OD  $A$  DO  $T(x+h, y, z)$  RAČUNAMO PO KRIVULJI, KI SESTOJI IZ KRIVULJE  $\Gamma$  TER DALJICE, KI POVEZUJE  $T(x, y, z)$  IN  $T(x+h, y, z)$ .

**Naloga 60.** Preveri še točki (b)-(c).

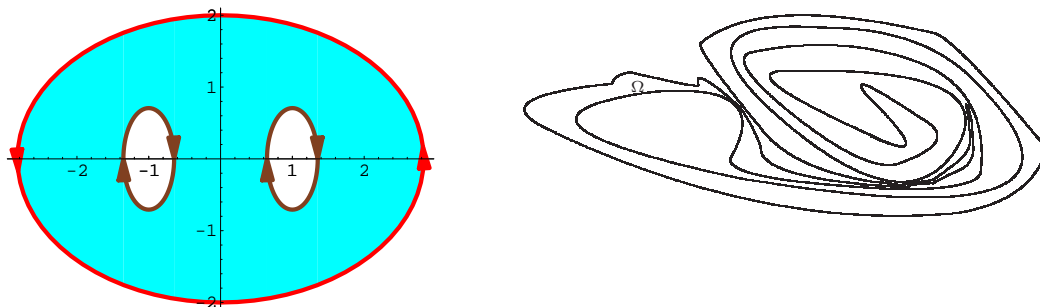
(iii)  $\implies$  (iv) Že poznano iz Leme 22.

(iv)  $\implies$  (i) Dokaz tukaj spustimo; naredili ga bomo po Stokesovem izreku. □

V primeru ravninskega polja, torej če  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ , kjer sta  $F_1, F_2$  odvisna zgolj od  $x, y$  nič pa od spremenljivke  $z$ , lahko točko (iv)  $\implies$  (i) dokažemo s pomočjo Greenove formule, za katero se bo kasneje izkazalo, da je le poseben primer Stokesovega izreka.

Spomnimo, da je krivulja  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  *odsekoma gladka in enostavno sklenjena*, če je sestavljena iz gladkih kosov, in nima samopresečišč, ter je sklenjena. Natančneje: Obstaja vsaj ena preslikava  $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \Gamma$ , ki je (i) zvezna, (ii) odsekoma zvezno odvedljiva, (iii)  $\dot{\mathbf{r}} \neq \vec{0}$ , v točkah kjer pa odvoda ni, pa zahtevamo, da sta levi in desni odvod neničelna, (iv) sklenjenost podaja zahteva  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$ , in (v) v primeru ko  $t \leq s$  je  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s)$  možno le, če  $t = s$ , ali če  $t = 0$  in  $s = 1$  (nima samopresečišč).

Če odsekoma je gladka krivulja rob nekega ravninskega lika, bomo malce površno rekli, da je orientirano *pozitivno*, če pri obhodu leva roka kaže v ravninski lik. Kaj natančno ta nazorna „definicija“ pomeni, tukaj ne bomo razlagali. Naj samo omenimo, da je iz naše intuitivne, nazorne „definicije“ včasih težko odkriti, ali je robna krivulja orientirana pozitivno ali ne.



Slika 25: POZITIVNO ORIENTIRAN ROB OBMOČJA. ČE HOČEMO, DA LEVA ROKA KAŽE V NOTRANJOST OBMOČJA, SE MORAMO PO ZUNANJI KRIVULJI GIBATI V OBRATNI SMERI URINEGA KAZALCA, PO NOTRANJJIH KRIVULJAH PA V SMERI URINEGA KAZALCA. NA DESNI SLIKI VIDIMO, DA JE VČASIH TO NAZORNO „DEFINICIJO“ TEŽKO UPORABITI.

**Izrek 61** (Greenova Formula). *Bodi  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  omejena odprta povezana množica, katere rob,  $\partial\Omega$  sestoji iz končno odsekoma gladkih, enostavno sklenjenih krivulj. Orientirajmo jih pozitivno glede na  $\Omega$ . Če je  $\mathbf{F} = (P, Q) : G \rightarrow \mathbb{R}^2$  gladka funkcija, definirana na neki odprti množici  $G \supseteq \bar{\Omega} = \Omega \cup \text{Meja } \Omega$ , potem velja*

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy$$

**Naloga 62.** *Pokaži, da lahko Greenovo formulo zapišemo tudi takole:*

$$\iint_{\Omega} \text{Rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dx dy = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

kjer je  $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$  vektorsko polje, in je  $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$  normalni vektor na ravnino  $z = 0$ .

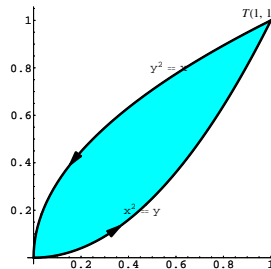
**Naloga 63.** *Preveri Greenovo formulo za krivuljni integral*

$$\oint_{\Gamma} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

kjer je  $\Gamma$  robna krivulja območja, omejenega z  $y = x^2$  in  $y^2 = x$ .

Rešitev.

Kot vedno nam precej pomaga dobra skica. Ravninski krivulji  $y = x^2$  in  $y^2 = x$  se sekata v točkah  $T(0,0)$  in  $T(1,1)$ . Krivuljni integral razdelimo na dva dela. Vzdolž  $y = x^2$  je njegova vrednost



$$\int_{x=0}^1 ((2x)(x^2) - x^2) dx + (x + (x^2)^2) d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 - x^2) \cdot 1 + (x + x^4) \cdot 2x dx = \frac{7}{6}.$$

Vzdolž  $y^2 = x$  pa

$$\int_{y=1}^0 (2(y^2)y - (y^2)^2) d(y^2) + ((y^2) + y^2) dy = \int_1^0 (2y^3 - y^4) \cdot 2y + (2y^2) \cdot 1 dy = \frac{-17}{15}.$$

Vrednost krivuljnega integrala je torej  $= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$ . Po drugi strani pa je

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy - y^2)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (y - 2xy) dx dy = \int_{x=0}^1 dx \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \\ &= \int_{x=0}^1 (y - 2xy) \Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 x^{1/2} - 2x^{2/3} - x^2 + 2x^3 dx = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

**Zgled 64.** Obravnavajmo integral

$$I := \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

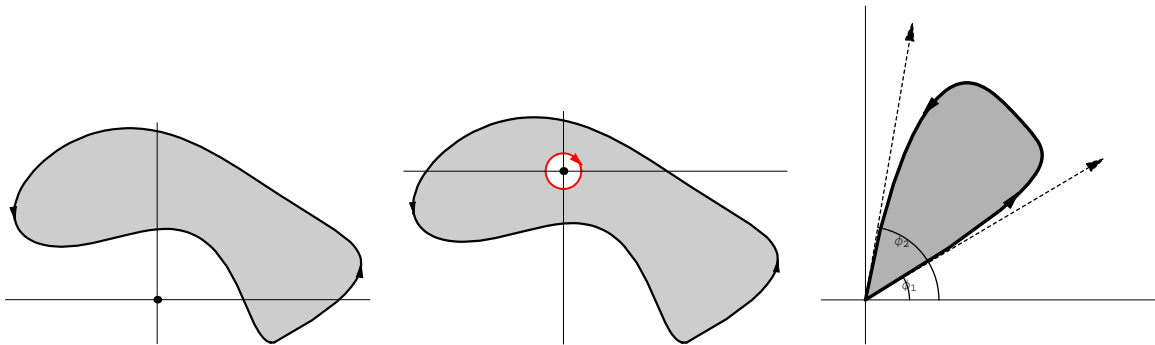
v odvisnosti od sklenjene krivulje  $\Gamma$ .

Polje  $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$  je sedaj podano z  $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$  ter  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . V točki  $T(0,0)$  ni definirano, niti ga ne moremo definirati, da bi bilo zvezno povsod. Zatorej bomo ločili 3 možnosti glede položaja krivulje  $\Gamma$ .

- (i) Krivulja  $\Gamma$  ne obkroži točke  $T(0,0)$ . Tedaj je  $\mathbf{F}$  zvezno odvedljivo znotraj  $\Gamma$ , in lahko uporabimo Greenovo formulo. Rezultat:

$$I = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy = \iint_{\Omega} 0 dx dy = 0$$

- (ii) Krivulja  $\Gamma$  obkroži  $T(0,0)$ . Sedaj ne moremo uporabiti Greenove formule, saj polje  $\mathbf{F}$  ni niti definirano, niti ga ne moremo zvezno razširiti, da bi bilo definirano znotraj  $\Gamma$ . Pomagamo si tako, da iz območja izrežemo točko  $T(0,0)$  s majhnim krogom  $K_{\varepsilon}$  polmera  $\varepsilon$ . Na dobljenem območju je polje  $\mathbf{F}$  zvezno odvedljivo. Na tako obrezanem območju  $\Omega'$



Slika 26: RAZLIČNI POLOŽAJI KRIVULJE  $\Gamma$ . (I) LAHKO NE OBKROŽI TOČKO  $T(0,0)$ , (II) LAHKO JO OBKROŽI—TEDAJ IZ OBMOČJA IZREŽEMO MAJHEN KROG, ALI (III) LAHKO POTUJE NATANKO SKOZI  $T(0,0)$ —NA TRETJI SLIKI VIDIMO, DA IMA TAM OST, POD KOTOM  $\phi_2 - \phi_1$ .

pa torej lahko uporabimo Greenovo formulo:

$$\begin{aligned}
 I &= \left( I + \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \right) - \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\
 &= \int_{\partial\Omega'} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} - \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\
 &= \iint_{\Omega'} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \right) dx dy - \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0 - \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\
 &= + \oint_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}
 \end{aligned}$$

Preostali krivuljni integral računamo po definiciji: Izberimo orientacijo ohranjajočo parametrizacijo krožnice  $\widehat{K}_\varepsilon$ , npr.  $\varepsilon(t) := \varepsilon(\cos t, \sin t)$ , oz.  $x = \varepsilon \cos t$ ,  $y = \varepsilon \sin t$ . Potem je

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\widehat{K}_\varepsilon} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(\varepsilon \cos t) d(\varepsilon \sin t) - (\varepsilon \sin t) d(\varepsilon \cos t)}{(\varepsilon \cos t)^2 + (\varepsilon \sin t)^2} = \int_0^{2\pi} 1 dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2 t - (-\varepsilon^2 \sin^2 t)}{\varepsilon^2} dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

- Krivulja  $\Gamma$  gre natanko skozi točko  $T(0,0)$ . Sedaj pa vrednost integrala  $I$  zavisi od oblike krivulje v bližini točke  $T(0,0)$ . Najlažje to vidimo, če izberemo parametrizacijo s polarnimi koordinatami:  $r = r(\phi)$ , oziroma  $\mathbf{r}(\phi) = r(\phi)(\cos \phi, \sin \phi)$ ;  $\phi \in [\phi_1, \phi_2]$ . Zahtevajmo še, da  $\mathbf{r}(\phi_1) = (0,0) = \mathbf{r}(\phi_2)$ . Pri  $\phi = \phi_1$  imamo opravka z izlimitiranim integralom, prav tako pri  $\phi = \phi_2$ :

$$\begin{aligned}
 I &= \lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ \eta \searrow 0}} \int_{\phi_1 + \delta}^{\phi_2 - \eta} \frac{r(\phi) \cos \phi \cdot (r(\phi) \cos \phi + r'(\phi) \sin \phi) - r(\phi) \sin \phi \cdot (r'(\phi) \cos \phi - r(\phi) \sin \phi)}{r(\phi)^2} d\phi \\
 &= \lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ \eta \searrow 0}} \int_{\phi_1 + \delta}^{\phi_2 - \eta} 1 d\phi = \phi_2 - \phi_1
 \end{aligned}$$

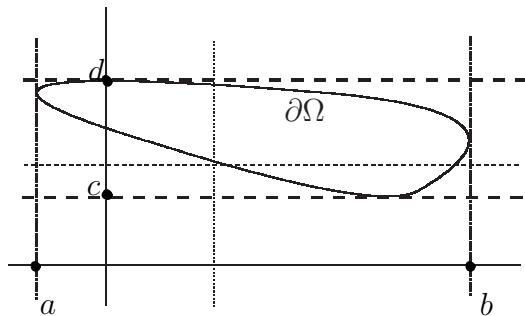
Rezultat je torej enak kotu, pod katerim krivulja poteka skozi točko  $T(0,0)$ . Ta kot je enak kotu med tangentama pri parametrih  $\phi_1$  in  $\phi_2$ . Če je krivulja v točki  $T(0,0)$  gladka, je ustrezni kot  $\pi$ . Če pa ima v  $T(0,0)$  ost, je ustrezni kot bodisi manjši, bodisi večji.

*Dokaz Greenove formule.* Krivuljni integral razbijmo na dva dela:

$$\oint_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \oint_{\partial\Omega} P dx + \oint_{\partial\Omega} Q dy,$$

nato pa obravnavajmo vsak del posebej.

Za začetek privzemimo, da je  $\partial\Omega$  tako preprosta krivulja, da jo vsaka navpična premica  $x = \text{const}$  seka v največ dveh točkah, in isto naj velja za vsako vodoravno premico  $y = \text{const}$ . Vzemimo poljubno navpično premico  $x = x_0$ . Najnižje presečišče označimo z  $f(x_0)$ , najvišjega



Slika 27: PREPROSTA MEJNA KRIVULJA. VSAKA NAVPOIČNA PREMICA JO SEKA NAJVEČ V DVEH TOČKAH. ŠTEVILI, KJER JO SEKA V ENI SAMI TOČKI, OZNAČIMO Z  $a$  IN  $b$ . PODOBNO ZA VODORAVNE PREMICE

pa z  $g(x_0)$ . Torej je množica  $\Omega$ , ki leži znotraj krivulje  $\partial\Omega$  enaka

$$\Omega = \{(x, y); x \in (a, b), g(x) < y < f(x)\},$$

orientirana krivulja  $\partial\Omega$  pa je sestavljena iz dveh kosov; spodnji ima parametrizacijo  $\mathbf{r}_1(t) := (t, g(t)); t \in [a, b]$ , zgornji kos pa je parametriziran z  $\mathbf{r}_2(t) := (t, f(t))$ , in se  $t$  spušča od  $b$  proti  $a$ . S tem pa je

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} P dx &= \left( \int_{t=a}^b P(t, g(t)) dt + \int_{t=b}^a P(t, f(t)) dt \right) = \int_a^b P(t, g(t)) - P(t, f(t)) dt \\ &= \int_a^b dt \int_{s=f(t)}^{g(t)} \frac{\partial P}{\partial y}(t, s) ds = - \int_a^b dt \int_{s=g(t)}^{f(t)} \frac{\partial P}{\partial s}(t, s) ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial s}(t, s) dt ds, \end{aligned} \quad (4)$$

kjer smo nazadnje računali po Fubinniju.

Za integral druge komponente, tj  $\oint_{\partial\Omega} Q dy$  pa upoštevajmo, da tudi vsaka vodoravna premica seka krivuljo  $\partial\Omega$  v največ dveh točkah. Najmanjše vodoravno presečišče označimo z  $c$ , največjega z  $d$ , in kot prej lahko najdemo funkciji  $\beta(y) \leq \gamma(y)$ , definirani za  $y \in [c, d]$ , da je

$$\Omega = \{(x, y); y \in (c, d), \beta(y) < x < \gamma(y)\}.$$

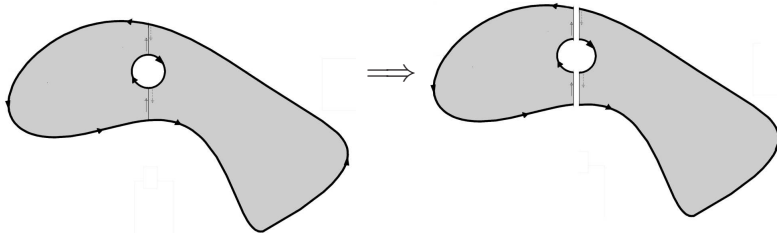
Sedaj pa parametrizacijo orientirane krivulje  $\partial\Omega$  sestavljata desni del  $\mathbf{r}_1^*(\tau) := (\gamma(\tau), \tau); \tau \in [c, d]$  ter levi del  $\mathbf{r}_2^*(\tau) := (\beta(\tau), \tau)$ , ko se  $\tau$  spušča od  $d$  proti  $c$ . Torej je

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} Q dy &= \left( \int_{\tau=c}^d Q(\gamma(\tau), \tau) d\tau + \int_{\tau=d}^c Q(\beta(\tau), \tau) d\tau \right) = \int_c^d Q(\gamma(\tau), \tau) - Q(\beta(\tau), \tau) d\tau \\ &= \int_c^d d\tau \int_{z=\beta(\tau)}^{\gamma(\tau)} \frac{\partial Q}{\partial z}(z, \tau) dz = \int_c^d d\tau \int_{z=\beta(\tau)}^{\gamma(\tau)} \frac{\partial Q}{\partial z}(z, \tau) dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial z}(z, \tau) d\tau dz. \end{aligned}$$

Prištejmo še (4), pa dobimo

$$\oint_{\widehat{\partial\Omega}} P dx - Q dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial z}(z, \tau) d\tau dz - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial s}(t, s) dt ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

**Naloga 65.** Pokaži, da velja Greenova formula tudi za bolj komplicirana območja. (Nasvet: Razreži jih na enostavna območja.) □



Slika 28: KOMPLICIRANA OBMOČJA RAZREŽEMO NA ENOSTAVNA. PO KRIVULJAH RAZREZA SE ENKRAT GIBLJEMO V ENI, DRUGIČ PA V NASPROTNI SMERI. OBA PRISPEVKA SE IZNIČITA. OSTANEJO LE PRISPEVKI PO PRVOTNIH KRIVULJAH.

**Posledica 66.** Če enostavno sklenjena, pozitivno orientirana, gladka krivulja  $\widehat{\partial\Omega} \subset \mathbb{R}^2$  ograjuje množico  $\Omega$ , in je  $\mathbf{r}(t) := (x(t), y(t))$  njena orientacijo ohranjajoča regularna parametrizacija, je ploščina  $\Omega$  enaka

$$\text{ploščina } \Omega = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} x\dot{y} - \dot{x}y dt$$

*Dokaz.* V Greenovo formulo vstavimo  $P(x, y) := -y$  ter  $Q(x, y) := x$ . Na levi strani Greenove enačbe dobimo

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} dx dy = \iint_{\Omega} 2 dx dy = 2 \text{ ploščina } \Omega,$$

na desni pa

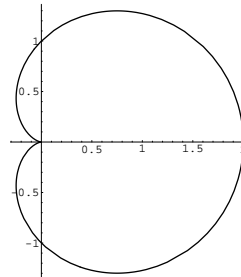
$$\oint_{\widehat{\partial\Omega}} P dx + Q dy = \int_a^b (-y(t))d(x(t)) + (x(t)) d(y(t)) = \int_a^b x\dot{y} - \dot{x}y dt.$$

Izenačimo, in delimo z 2, pa smo posledico dokazali. □

**Naloga 67.** Izračunaj ploščino srčnice, tj. lika, ki ga ograja krivulja v polarnih koordinatah  $r(\phi) = 1 + \cos \phi$ .

*Rešitev.*

Polarne koordinate ustrezajo naslednji parametrizaciji:  $\mathbf{r}(\phi) = r(\phi)(\cos \phi, \sin \phi) = (1 + \cos \phi)(\cos \phi, \sin \phi)$ . Torej je  $x(\phi) = (1 + \cos \phi) \cos \phi$  in  $y(\phi) = (1 + \cos \phi) \sin \phi$ . Odtod pa hitro dobimo



$$\begin{aligned}
\text{ploščina} &= \frac{1}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} xy - \dot{x}y \, d\phi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( (1 + \cos \phi) \cos \phi \, d((1 + \cos \phi) \sin \phi) - \right. \\
&\quad \left. - (1 + \cos \phi) \sin \phi \, d((1 + \cos \phi) \cos \phi) \, d\phi \right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + 2 \cos \phi + \cos^2 \phi \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 + 2 \cos \phi + \frac{1 + \cos(2\phi)}{2} \, d\phi = -\frac{3\phi}{2} - 2 \sin(\phi) - \frac{1}{4} \sin(2\phi) \Big|_{\phi=0}^{2\pi} = 3\pi
\end{aligned}$$

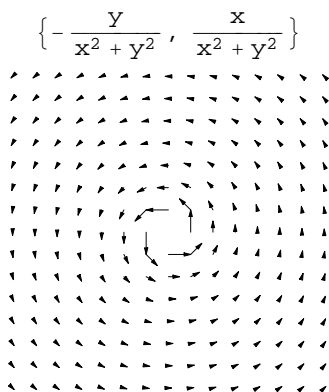
**Naloga 68.** Kolika pa je dožina krivulje, ki omejuje srčnico?

S pomočjo Greenove formule lahko delno pokažemo tudi manjkajočo točko (iv)  $\implies$  (i) iz izreka o skalarnem potencialu. Vendar zaenkrat le v primeru ravninskih polje  $\mathbf{F} = (F_1, f_2, 0)$ , kjer  $F_1 = F_1(x, y)$  in  $F_2 = F_2(x, y)$ .

**Naloga 69.** Denimo, da je ravninsko polje  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, 0)$ ;  $F_1 = F_1(x, y)$  in  $F_2 = F_2(x, y)$  definirano na neki enostavni povezani množici  $(x, y) \in \Omega$ . Privzemimo še, da  $\text{Rot } \mathbf{F} = 0$ . Pokaži, da je potem cirkulacija tega polja enaka nič.

(Nasvet:  $\text{Rot } \mathbf{F} = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) = (0, 0, 0)$ . Ker je polje definirano na množici „brez lukenj“, lahko cirkulacijo  $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy$  lahko izračunaš iz Greenove formule.)

**Zgled 70.** Greenova formula pa ne velja nujno, če ima množica  $\Omega$  kakšno „luknjo,“ torej če ni enostavno povezana. Protiprimere lahko najdemo že, če ji manjka zgolj ena sama točka. Npr. za  $\Omega := K_1(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$  vzemimo kar punktiran odprti enotski disk, na njej pa vzemimo polje iz Zgleda 64. Torej je  $\mathbf{F} = (P, Q, 0)$ , kjer  $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$  ter  $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ . Robna krivulja območja je



Slika 29: VEKTORSKO POLJE Z ROTORJEM NIČ, PA KLJUB TEMU NIMA SKALARNEGA POTENCIALA. NA DEFINICIJSKEM OBMOČJU NIMA VRTINCEV. KLJUB TEMU SE CELOTNO POLJE VRTI, VENDAR OKOLI TOČKE, KJER NI DEFINIRANO. ZATO JE CIRKULACIJA POLJA PO KRIVULJI, KI OBKROŽI TO TOČKO NENIČELNA — KRIVULJA BI SE V TEM POLJU VRTELA.

sedaj enotska krožnica, in obkroži točko  $T(0, 0)$ . V Zgledu 64 smo pod točko (ii) že izračunali, da je krivuljni integral po robni krivulji enak

$$\oint_{\hat{\Gamma}} P dx + Q dy = 2\pi,$$



in prav tako smo dobili tudi levo stran Greenove enačbe:

$$\iint_{\Gamma} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = 0.$$

Enačaja torej res nimamo!

Katera predpostavka v izreku o Greenovi formuli pa tukaj ni bila izpolnjena? Čisto tazadnja: polje  $\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$  je sicer definirano na odprti množici  $\Omega$ . Toda v Greenovi formuli smo zahtevali, da lahko polje  $\mathbf{F}$  zvezno razširimo da bo definirano na neki odprti množici  $G$ , ki vsebuje  $\Omega$  in vse njene robne točke. Ena robnih točk množice  $\Omega$  je tudi  $T(0,0)$ . Mi pa vemo (naloga: pokaži to!), da se polja  $\mathbf{F}$  ne da razširiti tako, da bi bilo definirano in zvezno tudi še v  $T(0,0)$ .

S pomočjo Greenove formule lahko dokažemo tudi šibkejšo različico izreka o substituciji v dvojni integral, in sicer za konstantno funkcijo.

**Naloga 71.** Denimo, da (parcialno zvezno odvedljiva) transformacija  $\Xi(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$  preslika ravninsko območje  $\mathcal{D}$  bijektivno na ravninsko območje  $\mathcal{D}'$  in da  $\det \Xi' \neq 0$ . Pokaži, da tedaj

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} |\det \mathcal{J}_{\Xi}| du dv$$

*Rešitev.* Bodi  $\Gamma$  pozitivno orientirana robna krivulja območja  $\mathcal{D}$ . Tedaj je po posledici 66

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx$$

Transformacija  $\Xi$  nam  $(x, y)$  preslika v  $x = f(u, v)$ ,  $dx = \dot{x} dt = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial v} \dot{v}\right) dt$  oziroma v  $y = g(u, v)$ ,  $dy = \left(\frac{\partial g}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial g}{\partial v} \dot{v}\right) dt$ . S to zamenjavo spremenljivk v enojnem integralu dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma'} f \left( \frac{\partial g}{\partial u} du + \frac{\partial g}{\partial v} dv \right) - g \left( \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma'} \left( f \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial f}{\partial u} \right) du + \left( f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv \end{aligned}$$

kjer je  $\Gamma'$  preslikana krivulja  $\Gamma$ . Po Greenovi formuli je dalje

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma'} \left( f \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial f}{\partial u} \right) du + \left( f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right) dv \\ &= \pm \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}'} \frac{\partial}{\partial u} \left( f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left( f \frac{\partial g}{\partial u} - g \frac{\partial f}{\partial u} \right) du dv \\ &= \pm \iint_{\mathcal{D}'} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u} du dv \\ &= \pm \iint_{\mathcal{D}'} \det \mathcal{J}_{\Xi} du dv \end{aligned}$$

na desni strani integriramo po notranjosti krivulje  $\Gamma'$ ; vzamemo pa  $+1$ , če je  $\Gamma' = \Xi(\Gamma)$  tudi pozitivno orientirana, sicer pa vzamemo  $-1$ . Ker je  $\det \mathcal{J}_{\Xi} \neq 0$ , je determinanta bodisi povsod pozitivna, bodisi povsod negativna. Integriramo torej funkcijo, ki ne spreminja predznaka. Zato je

$$\iint_{\mathcal{D}} dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = \pm \iint_{\mathcal{D}'} \det \mathcal{J}_{\Xi} du dv = \iint_{\mathcal{D}'} |\det \mathcal{J}_{\Xi}| du dv,$$

nazadnje smo vzeli absolutno vrednost, ker vemo, da je leva stran nenegativna.

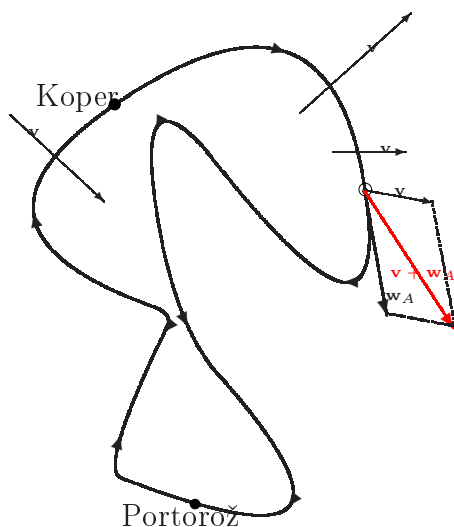
**Naloga 72.** Ob predpostavkah iz prejšnje naloge pokaži, da

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(\Xi_1(u, v), \Xi_2(u, v)) |\det \mathcal{J}_{\Xi}| du dv$$

Za konec si oglejmo še eno letalsko:

**Naloga 73.** Avion se v brezvrtinčnem in časovno konstantnem vetrovnem polju  $\mathbf{v}$  giblje s konstantno hitrostjo 1 glede na zrak. Pri tem preleti sklenjeno pot Koper-Portorož-Koper ne da bi spreminjal nadmorsko višino. Pokaži, da bo čas potovanja najmanjši natanko takrat, ko ni vetra, tj., ko je  $\mathbf{v} = \vec{0}$ .

*Rešitev.* Naj bo  $\mathbf{w}_A$  hitrost, s katero se avion giblje glede na tla (mislimo si, da je opoldan in



Slika 30: KROŽNA POT AVIONA V VETROVNEM POLJU GLEDE NA TLA.

sonce sije navpično — tedaj je  $\mathbf{w}_A$  hitrost sence aviona). Hitrost glede na tla se spreminja vzdolž poti, na razdalji  $s$  od začetka potovanja je enaka  $\mathbf{w}_A = \mathbf{w}_A(s)$ . Tudi vetrovno polje se krajevno spreminja:  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ . Veljati mora naslednje:

- Vektor hitrosti  $\mathbf{w}_A(s)$  vedno leži v smeri tangente na krivuljo potovanja, torej  $\mathbf{w}_A(s) = w_A(s)\mathbf{T}(s)$ .
- Letalo ohranja višino. Torej navpična komponenta vetra ne vpliva na hitrost letala glede na tla. Nanjo vplivata edino komponenta  $v_1(s)$  v smeri tangente in komponenta  $v_2(s)$  v smeri normale.
- Vektorji hitrosti se seštevajo. Torej je relativna hitrost aviona glede na zrak enaka  $1 = \sqrt{(w_A(s) + v_1(s))^2 + v_2(s)^2}$ . Sklepamo, da

$$w_A = -v_1 + \sqrt{1 - v_2^2}. \quad (5)$$

- Če hočemo, da bo opisano potovanje sploh možno, mora vedno biti  $w_A(s) > 0$ .
- Hitrost je odvod poti po času, torej  $w_A(s) = \frac{ds}{dt}$ . Odtod: delček poti  $ds$  avion opravi v času  $dt = \frac{ds}{w_A(s)}$ . Celoten čas leta je potemtakem

$$t = \int_0^{\text{dolž poti}} \frac{ds}{w_A(s)} = \int_{\Gamma} \frac{ds}{w_A(s)};$$

enačaj velja, ker je  $s$  naravni parameter.

- Kdaj bo čas najmanjši? Preoblikujmo (5):

$$\frac{1}{w_A(s)} = \frac{1}{2} \left( w_A(s) + \frac{1}{w_A(s)} \right) + v_1(s) + \frac{v_1(s)^2 + v_2(s)^2}{2w_A(s)}.$$

(Obratna pot je lažja — če gornji v gornjem izrazu odpraviš ulomke, prideš hitro do (5)). Zaradi  $w_A(s) > 0$  je drugi sumand pozitiven, torej

$$\frac{1}{w_A(s)} = \frac{1}{2} \left( w_A(s) + \frac{1}{w_A(s)} \right) + v_1(s) + \frac{v_1(s)^2 + v_2(s)^2}{2w_A(s)} \geq \frac{1}{2} \left( w_A(s) + \frac{1}{w_A(s)} \right) + v_1(s) + 0.$$

Toda  $\frac{1}{2} \left( x + \frac{1}{x} \right) \geq 1$  za vsak pozitiven  $x$ , in v posebnem tudi za  $x := w_A(s)$ . Sklepamo, da  $\frac{1}{w_A(s)} \geq 1 + v_1(s)$ , in torej

$$\frac{1}{w_A(s)} \geq 1 + v_1(s).$$

Še več: Čim bi bilo  $\frac{v_1(s)^2 + v_2(s)^2}{2w_A(s)} > 0$ , bi tudi zgoraj veljala stroga neenakost. Odtod pa je

$$t = \int_{\Gamma} \frac{ds}{w_A(s)} \geq \int_{\Gamma} 1 ds + \int_{\Gamma} v_1(s) ds.$$

- Upoštevajmo še, da

$$\int_{\Gamma} v_1(s) ds = \int_{\Gamma} \mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{T}(s) ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} d\mathbf{r} = 0,$$

saj vetrovno polje nima vrtincev, torej je njegova cirkulacija ničelna. Končno dobimo

$$t = \int_{\Gamma} \frac{ds}{w_A(s)} \geq \int_{\Gamma} 1 ds,$$

in enačaj velja le, če  $\frac{v_1(s)^2 + v_2(s)^2}{2w_A(s)} \equiv 0$ , oz., če je  $\mathbf{v}(s) \equiv 0$ .

## Literatura

- [1] F. Brešar, *Matematika III*, Univerza v Mariboru, Maribor 1995.
- [2] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer; 2nd rev. and enlarged ed. edition, 1982.
- [3] B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in Analysis*, Holden-day INC. London, 1964.

- [4] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC Press, London, 1998.
- [5] Martin M. Lipschutz, *Schaum's Outline of Differential Geometry*, McGraw-Hill; 1 edition, 1969.
- [6] N. Prijatelj, *Uvod v matematično analizo 2. del*, DMFA, Ljubljana, 1999
- [7] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math; 3 edition, 1986.
- [8] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [9] G. Schwarz: *A pretender to the title "canonical Moebius strip."* Pacific J. Math. Volume 143, Number 1 (1990), 195-200.
- [10] Murray R. Spiegel, *Schaum's outline of theory and problems of advanced calculus*, Schaum Publishing CO., New York, 1963.
- [11] M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York, 1965.
- [12] I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS Ljubljana, 1974.
- [13] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*. Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1990.