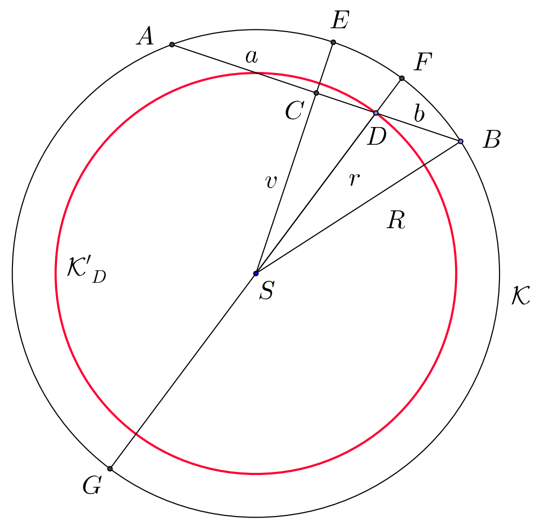
Holditchev izrek

Marko Razpet

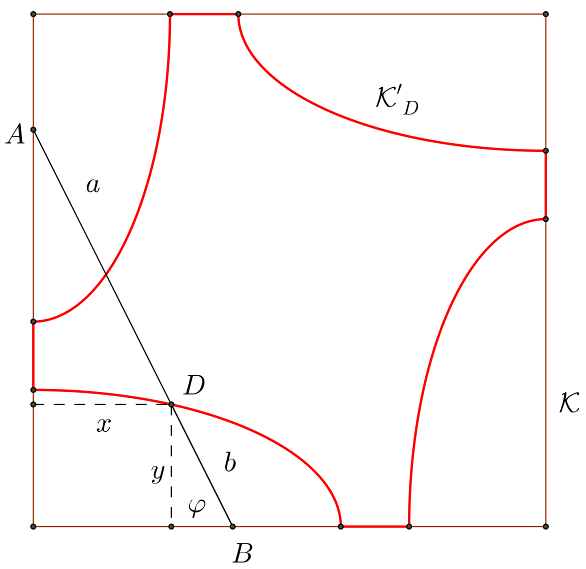
Krožnici $\mathcal{K}$ s polmerom R in središčem S včrtamo tetivo AB izbrane dolžine $t = |AB|$. Tetiva krožnice je vsaka daljica, ki povezuje dve točki te krožnice. Najdaljša tetiva krožnice je premer te krožnice. Točka D naj tetivo AB razdeli na dva dela z dolžinama $a = |AD|$ in $b = |BD|$, točka C pa naj bo središče tetive AB. Pri tem je seveda $0 < t \leq 2R$ in $a + b = t$. Če točki A in B enkrat zakrožita po $\mathcal{K}$ in pri tem ves čas tetiva AB ohranja svojo dolžino, točka D pri tem na tej tetivi ne spreminja svoje lege. To pomeni, da se razdalji $|AD|$ in $|BD|$ ne spreminjata. Očitno se tudi razdalje $|SC|$, $|CD|$ ter $|SD|$ ne spreminjajo, zato D opiše krožnico $\mathcal{K}'_D$ s polmerom $r = |SD|$ in središčem v S. Ne da bi karkoli izgubili na splošnosti, lahko privzamemo, da je $a \geq b$.



SLIKA 1.
Točka D na tetivi AB krožnice $\mathcal{K}$ zariše rdeče obarvano krožnico $\mathcal{K}'_D$.

Pri vsem tem je najbolj zanimivo to, da je ploščina P kolobarja med obema krožnicama $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'_D$ odvisna samo od a in b, in sicer je $P = \pi ab$. Tega ni težko dokazati. V pravokotnem trikotniku SBC (slika 1) sta kateti $|SC| = v$, $|CB| = (a+b)/2$, hipotenuza pa R. V pravokotnem trikotniku SDC pa sta kateti v in $|CD| = a-(a+b)/2 = (a-b)/2$. Po Pitagorovem izreku veljata relaciji $R^2 = v^2+(a+b)^2/4$, $r^2 = v^2+(a-b)^2/4$, iz katerih sledi $R^2-r^2 = (a+b)^2/4-(a-b)^2/4 = ab$. Za ploščino kolobarja takoj dobimo $P = \pi(R^2-r^2) = \pi ab$. S tem smo trditev, izrečeno na začetku odstavka, potrdili. Lahko pa uporabimo tudi izrek, ki pove, da za odseke sekajočih se tetiv AB in FG (slika 1) velja enakost $|AD| \cdot |DB| = |GD| \cdot |DF|$ oziroma $ab = (R+r)(R-r) = R^2-r^2$. Iz te zveze ravno tako sledi $P = \pi ab$.

Obravnavo smo začeli s krožnico. Kaj pa dobimo, če namesto nje vzamemo kakšno drugo sklenjeno krivuljo? Poglejmo, kakšno krivuljo $\mathcal{K}'_D$ dobimo v primeru, ko je dana krivulja $\mathcal{K}$ obod kvadrata. Tako kot pri krožnici lahko tudi sedaj govorimo o tetivah. Za razliko od krožnice, katere tetive vedno ležijo v krogu, ki ga omejuje, pa tetive oboda kvadrata lahko ležijo na tem obodu ali pa v kvadratu. Dolžina tetive AB tedaj ne more biti daljša od diagonale kvadrata. Če je dolžina tetive daljša od stranice kvadrata, novo krivuljo sicer dobimo, toda le-ta sama sebe seka. Takrat lik med obodom kvadrata in novo krivuljo ni dobro opredeljen. Zato moramo privzeti, da dolžina tetive ne presega stranice kvadrata. Ko je eno krajišče tetive na eni stranici kvadrata, drugo pa na sosedni, točka D opiše četrtino eliptičnega loka. Ustrezna elipsa ima za polosi ravno a in b. Kako to vidimo? Vzemimo (slika 2) spodnjo stranico kvadrata za os x, levo navpično pa za os y pravokotnega koordinatnega sistema. Naj bo φ kot, ki ga tetiva, ki ima krajišči na teh oseh, oklepa z osjo x. Potem je abscisa točke S enaka $x = a\cos\varphi$, ordinata pa $y = b\sin\varphi$. Koordinati točke D zadoščata enačbi $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$, kar je enačba elipse s polo-



SLIKA 2.
Točka D na tetivi AB oboda kvadrata zariše rdeče obarvano krivuljo.

sema a in b in središčem v spodnjem levem oglišču kvadrata. Ker je $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, upoštevamo samo eliptični lok v prvem kvadrantu. Za preostala tri oglišča pridemo do podobnega sklepa.

Krivulja $\mathcal{K}'_D$ je sestavljena iz štirih skladnih eliptičnih lokov, ki ustrezajo elipsi s polosema a in b, in sicer tistih lokov, ki povezujejo sosedni temeni te elipse. Če je dolžina tetive manjša od stranice kvadrata, sestavljajo krivuljo $\mathcal{K}'_D$ še štiri na obodu kvadrata ležeče daljice, ki te eliptične loke povezujejo. Ker je ploščina četrtine take elipse enaka $\pi ab/4$, je ploščina lika med obodom kvadrata in krivuljo $\mathcal{K}'_D$ spet enaka $P = \pi ab$. Poskusimo lahko še s kakšno drugo sklenjeno krivuljo. V veliko pomoč nam je pri tem lahko GeoGebra.

Kar smo ugotovili, ni nič posebnega, če ne bi veljal splošnejši izrek, ki ga je leta 1858 formuliral britanski matematik Hamnet Holditch (1800–1867). Še prej pa smo dolžni nekaj pojasnil. Krožnica in obod kvadrata sta *sklenjeni krivulji*. Omejujeta konveksna lika, v tem primeru krog oziroma kvadrat. *Konveksni lik* je tak lik, ki vsebuje vse daljice, katerih krajišča so v tem liku. Krivulja, ki omejuje konveksni lik, je *sklenjena konveksna krivulja*. Tetiva AB take krivulje je poljubna daljica s krajiščema na tej krivulji. Tetiva AB leži v celoti v liku, ki ga sklenjena konveksna krivulja omejuje. V splošnem krivulja lahko seka sama sebe v kakšni točki. Taki točki rečemo *samopresečišče krivulje*. Sedaj smo pripravljeni, da navedemo napovedani izrek.

Holditchev izrek. *Naj bo $\mathcal{K}$ sklenjena konveksna krivulja. Točka D naj deli njeno tetivo AB na odseka dolžin a in b. Pri tem mora biti vsota $a + b$ taka, da vse tetive s to dolžino ležijo znotraj krivulje $\mathcal{K}$. Če krajišči A in B tetive enkrat obkrožita krivuljo $\mathcal{K}$ in tetiva pri tem ves čas ohranja svojo dolžino, točka D pa na njej ne spreminja svoje lege, potem točka D opiše krivuljo $\mathcal{K}'_D$. Če le-ta nima samopresečišč, je ploščina lika med krivuljama $\mathcal{K}$ in $\mathcal{K}'_D$ neodvisna od oblike krivulje $\mathcal{K}$, odvisna je le od dolžine tetive AB ter lege točke D na njej in je enaka $P = \pi ab$.*

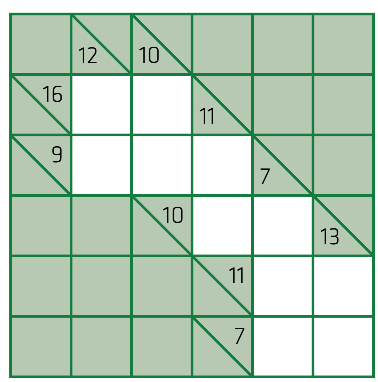
Izreka ni tako lahko dokazati kot v primeru krožnice ali oboda kvadrata in se mu bomo odpovedali. Dokaz lahko poiščemo v primerni matematični literaturi.

× × ×

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v obarvanem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×