OD INTEGRALOV DO OGRLIC[1]

BARBARA DRINOVEC DRNOVŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2010): 26-01, 26A42

V članku obravnavamo nalogo, ki so jo reševali madžarski študenti matematike na memorialnem tekmovanju Miklós Schweitzer.

FROM INTEGRALS TO NECKLACES

In the paper we consider a problem which was given to Hungarian students of mathematics at the Miklós Schweitzer Memorial Competition.

Uvod

Madžarsko matematično društvo od leta 1949 organizira memorialno tekmovanje Miklós Schweitzer, ki je namenjeno študentom matematike na Madžarskem. Naloge na tem tekmovanju so zahtevne, študenti jih rešujejo 10 dni, pri reševanju pa smejo uporabljati kakršno koli literaturo. Naloge sodijo v različna matematična področja, ki jih študenti spoznajo na univerzitetnem in magistrskem študiju: algebra, analiza, geometrija, kombinatorika, operatorska teorija, teorija množic, teorija števil, topologija, verjetnost in druga [7]. Objavljene so na spletu [8] ter v knjižni obliki z rešitvami [2, 5].

V članku bomo obravnavali nalogo iz leta 1995:

Naloga 1. *Naj bosta f in g integrabilni funkciji na intervalu $[0, 1]$, za kateri velja*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1.$$

Pokaži, da obstaja tak interval $I \subset [0, 1]$, da velja

$$\int_I f(x)\,dx = \int_I g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

V. Totik je v članku [6] napisal sedem različnih študentskih rešitev zgornje naloge iz analize z uporabo zelo različnih matematičnih rezultatov, ki segajo na področja kombinatorike, geometrije in topologije. Predstavili bomo

[1]Del članka je avtorica predstavila udeležencem Seminarja za učitelje matematike UL FMF dne 20. 9. 2019.

dve rešitvi naloge 1, spoznali bomo problem ogrlice in ga s pomočjo naloge rešili ter predstavili njeno ekvivalentno formulacijo.

V nalogi lahko uporabimo katero koli od običajnih definicij integrabilnosti: Riemannovo, Lebesguovo ali Riemann-Stieltjesovo.

Če v nalogi vzamemo $f = g$, potem iz integrabilnosti funkcije f sledi, da je integral kot funkcija zgornje meje, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, zvezna funkcija na intervalu $[0,1]$. Zato funkcija F doseže vse vrednosti med $F(0) = 0$ in $F(1) = 1$, torej doseže tudi vrednost $\frac{1}{2}$, tj. obstaja $x \in [0,1]$, za katerega velja $F(x) = \frac{1}{2}$ in interval $I = [0,x]$ reši nalogo.

Z uvedbo nove spremenljivke enostavno izpeljemo, da lahko interval $[0,1]$ zamenjamo z drugim zaprtim intervalom. Če vrednosti obeh integralov v predpostavki zamenjamo z $a \in \mathbb{R}$, potem je treba v zaključku $\frac{1}{2}$ zamenjati z $\frac{a}{2}$.

Nalogo je dovolj rešiti za kakšno gosto podmnožico integrabilnih funkcij, npr. za zvezne funkcije ali za stopničaste funkcije: denimo, da sta funkciji f in g limitni funkciji zaporedij $(f_n)_n$ in $(g_n)_n$, torej da velja

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx = 0, \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |g(x) - g_n(x)|\,dx = 0$$

in denimo, da velja

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 g_n(x)\,dx = 1.$$

Če je naloga rešljiva za funkciji f_n in g_n, potem obstajata števili a_n in b_n, $0 \le a_n < b_n \le 1$, za kateri velja

$$\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx = \int_{a_n}^{b_n} g_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ker sta zaporedji $(a_n)_n$ in $(b_n)_n$ omejeni, obstajata konvergentni podzaporedji $(a_{n_k})_k$ in $(b_{n_k})_k$ z limitama a in b. Z upoštevanjem pravila o aditivnosti domene in trikotniške neenakosti dobimo

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx\right| \\
&= \left|\int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f(x)\,dx - \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx + \int_a^{a_{n_k}} f(x)\,dx + \int_{b_{n_k}}^b f(x)\,dx\right| \\
&\le \int_0^1 |f(x) - f_{n_k}(x)|\,dx + \int_a^{a_{n_k}} |f(x)|\,dx + \int_{b_{n_k}}^b |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Vsi trije členi v vsoti konvergirajo proti 0, ko pošljemo k proti neskončno, zato velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{a_{n_k}}^{b_{n_k}} f_{n_k}(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ker enak sklep velja za funkcijo g, je interval $I = [a,b]$ rešitev naloge za funkciji f in g.

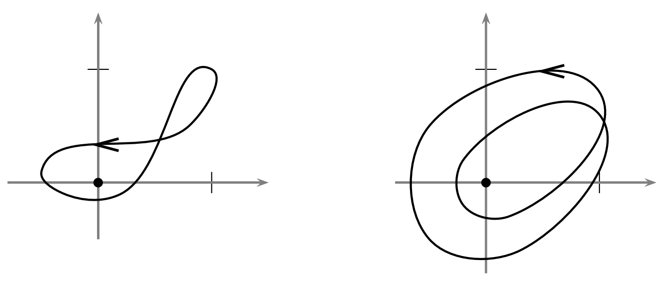
Rešitev z uporabo ovojnega števila

Ovojno število orientirane sklenjene krivulje v ravnini, ki ne vsebuje izhodišča, prešteje, kolikokrat krivulja obkroži izhodišče. Če je krivulja gladka, ovojno število določimo tako, da preštejemo, kolikokrat krivulja orientirano preseka poltrak skozi izhodišče, ki krivuljo seka transverzalno.

Formalno ovojno število definiramo takole: Naj bo $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zvezna preslikava, za katero velja $\gamma(a) = \gamma(b)$. Potem je njena zaloga vrednosti $\gamma(I)$ orientirana sklenjena krivulja v ravnini. Točko $\gamma(t)$ zapišemo v polarnem zapisu z $r(t)$ in $\varphi(t)$, pri čemer velja $\gamma(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t))$. Spomnimo se, da točka $\gamma(t)$ določa polarni kot $\varphi(t)$ do večkratnika 2π natančno. Ker je γ zvezna preslikava, lahko s pravilno izbiro tega večkratnika dosežemo, da je funkcija φ zvezna na intervalu $[a,b]$. Ker je $\gamma(a) = \gamma(b)$, je razlika $\varphi(b) - \varphi(a)$ celoštevilski večkratnik števila 2π. *Ovojno število* γ je

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{2\pi}.$$

Iz zapisanega sledi, da je ovojno število preslikave γ celo število. Natančno definicijo ovojnega števila in izpeljavo njegovih osnovnih lastnosti najdemo v [4].



Slika 1. Krivulji z ovojnima številoma 1 in 2.

Naj bo V zvezno vektorsko polje na $D \subset \mathbb{R}^2$ in $K \subset D$ orientirana enostavno sklenjena krivulja, tj. orientirana sklenjena krivulja brez samopresečišč. Izberimo zvezno parametrizacijo $\gamma\colon [a,b] \to K$ krivulje K, ki določa dano orientacijo. Če V nima ničel na K, je *ovojno število zožitve* V *na* K ovojno število preslikave $V \circ \gamma$ in ni odvisno od izbire parametrizacije γ. Ovojno število zožitve zveznega vektorskega polja V na K prešteje, kolikokrat se V zasuka okrog izhodišča, ko potujemo po K v izbrani smeri.

Izrek 2. *Naj bo $V : \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^2$ zvezno vektorsko polje na zaprtem enotskem disku, ki nima ničel na robu $b\mathbb{D}$. Če je ovojno število zožitve V na $b\mathbb{D}$ neničelno, potem ima V ničlo na $\mathbb{D}$.*

Dokaz. Denimo, da V nima ničle na $\mathbb{D}$. Za $r \in [0,1]$ definiramo $\gamma_r(t) = V(re^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$. Potem je γ_r parametrizacija orientirane sklenjene krivulje v ravnini, ki ne gre skozi izhodišče. Ovojno število γ_r je zvezno odvisno od parametra r in ima vrednosti v $\mathbb{Z}$, zato je konstantno. Ker je ovojno število γ_0 enako 0, je ovojno število γ_r enako 0 za vse $r \in [0,1]$, kar je v nasprotju s predpostavko. Dokazali smo, da ima V ničlo na $\mathbb{D}$. ∎

Rešitev naloge z uporabo izreka o ovojnem številu:
S T označimo trikotnik $\{(x,y)\colon 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Zvezno vektorsko polje $U\colon T \to \mathbb{R}^2$ definiramo s predpisom

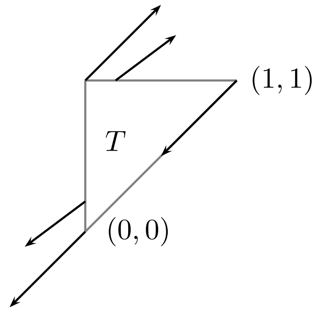
$$U(x,y) = \left(\int_x^y f(t)\,dt - \frac{1}{2}, \int_x^y g(t)\,dt - \frac{1}{2}\right).$$

Če je $(x,y) \in T$ ničla vektorskega polja U, potem interval $I = [x,y]$ reši nalogo.

Ker je trikotnik T homeomorfen zaprtemu enotskemu disku $\bar{\mathbb{D}}$, lahko uporabimo izrek 2: Če vektorsko polje U na bT nima ničle, potem ima U ničlo v notranjosti T, čim ima U na bT neničelno ovojno število. Za $t \in [0,1]$ po definiciji U izračunamo $U(t,t) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ in

$$U(0,t) + U(t,1) = (0,0). \tag{1}$$

Od tod ocenimo ovojno število U na bT: Iz točke $(0,0)$ potujemo po robu bT v pozitivni smeri. Vektorsko polje U je na diagonali konstantno. Zasuk U vzdolž horizontalne stranice od $U(1,1) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ do $U(0,1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je π do celoštevilskega večkratnika 2π natančno, kajti vektorja sta si nasprotno enaka. Iz (1) sledi, da je zasuk U vzdolž vertikalne stranice, ko nadaljujemo potovanje v pozitivni smeri, enak zasuku U vzdolž horizontalne stranice, ko potujemo v pozitivni smeri (glej sliko 2). Polarna kota se seštejeta, torej je zasuk vektorskega polja U vzdolž bT enak 2π do celoštevilskega večkratnika 4π natančno, zato je ovojno število $U|bT$ neničelno. S tem smo rešili nalogo.



Slika 2. Primer vektorskega polja U na bT.

Rešitev z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka

Izrek 3. *Naj bo $T\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava iz n razsežne enotske sfere. Potem obstaja točka $x \in \mathbb{S}^n$, za katero velja $T(x) = T(-x)$. Če je preslikava T liha, potem velja $T(x) = T(-x) = 0$.*

Borsuk-Ulamov izrek v posebnem primeru pove, da obstajata antipodni točki na ekvatorju z enako temperaturo in antipodni točki na Zemlji, ki imata enako temperaturo in enak zračni tlak. Dokaz bomo izdelali v primeru $n = 1$, splošen primer pa je bil obravnavan v Obzorniku [3].

Dokaz. Funkcijo $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom $f(x) = T(e^{ix})$. Funkcija f je zvezna in velja $f(0) = f(2\pi)$. Zvezno funkcijo $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definiramo s predpisom $g(x) = f(\pi + x) - f(x)$. Izračunamo $g(0) = f(\pi) - f(0)$ in $g(\pi) = f(2\pi) - f(\pi) = f(0) - f(\pi) = -g(0)$. Bodisi je $g(0) = 0$ ali pa je g v krajiščih intervala nasprotno predznačena, zato ima ničlo. Za ničlo x funkcije g velja $0 = g(x) = T(e^{ix+i\pi}) - T(e^{ix}) = T(-e^{ix}) - T(e^{ix})$. Našli smo antipodni točki na $\mathbb{S}^1$, v katerih T doseže enako vrednost. ∎

Rešitev naloge z uporabo Borsuk-Ulamovega izreka:
Za $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ naj bo

$$X_f(x, y, z) = \operatorname{sgn} x \int_0^{x^2} f(t)\, dt + \operatorname{sgn} y \int_{x^2}^{x^2+y^2} f(t)\, dt + \operatorname{sgn} z \int_{x^2+y^2}^{1} f(t)\, dt,$$

pri čemer smo s sgn označili funkcijo predznak, ki pozitivnemu številu in ničli priredi 1, negativnemu številu pa -1. Če so vse komponente točke $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ neničelne, potem je X_f zvezna v točki (x, y, z), ker je integral zvezna funkcija svojih mej, funkcija predznak pa je v neničelnih točkah zvezna. Če je ena od komponent točke $(x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ enaka 0, potem ustrezna funkcija sgn sicer ni zvezna v 0, vendar je omejena in je pomnožena z zvezno funkcijo, ki ima v 0 vrednost 0, zato je ustrezni člen v vsoti zvezna funkcija. S tem smo dokazali, da je X_f zvezna funkcija na $\mathbb{S}^2$.

Preslikavo $T\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiramo s predpisom

$$T(x, y, z) = (X_f(x, y, z), X_g(x, y, z)).$$

Ker sta funkciji X_f in X_g zvezni in lihi, je preslikava T zvezna in liha, zato ima po Borsuk-Ulamovem izreku ničlo. Označimo jo z $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Med števili $\bar{x}$, $\bar{y}$ in $\bar{z}$ imata natanko dve enak predznak: če bi bila vsa tri enako predznačena, bi po predpostavki o f sledilo, da je $X_f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \{-1, 1\}$, kar pa ni res. Če imata $\bar{y}$ in $\bar{z}$ enak predznak, potem velja $\int_0^{\bar{x}^2} f(t)\,dt = \int_{\bar{x}^2}^1 f(t)\,dt$ in $\int_0^{\bar{x}^2} g(t)\,dt = \int_{\bar{x}^2}^1 g(t)\,dt$. Ker je $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt = 1$, sledi, da za I lahko vzamemo $[0, \bar{x}^2]$. Podobno premislimo, da če imata $\bar{x}$ in $\bar{z}$ enak predznak, lahko vzamemo $I = [\bar{x}^2, \bar{x}^2 + \bar{y}^2]$, če pa imata $\bar{x}$ in $\bar{y}$ enak predznak, lahko vzamemo $I = [\bar{x}^2 + \bar{y}^2, 1]$. S tem smo rešili nalogo.

Problem ogrlice

Problem 4. *Pirata imata ogrlico, na kateri je v naključnem vrstnem redu nanizanih $2k$ belih in $2k$ črnih biserov. Določi najmanjše število rezov, s katerimi ogrlico pravično razdelimo med pirata.*

Iščemo torej najmanjše število rezov, s katerimi razrežemo ogrlico in nato vsakemu od piratov damo natanko k belih in k črnih biserov. Z rešitvijo naloge bomo dokazali, da sta dovolj dva reza. Rešitev problema ogrlice se da izpeljati tudi direktno iz Borsuk-Ulamovega izreka [1].

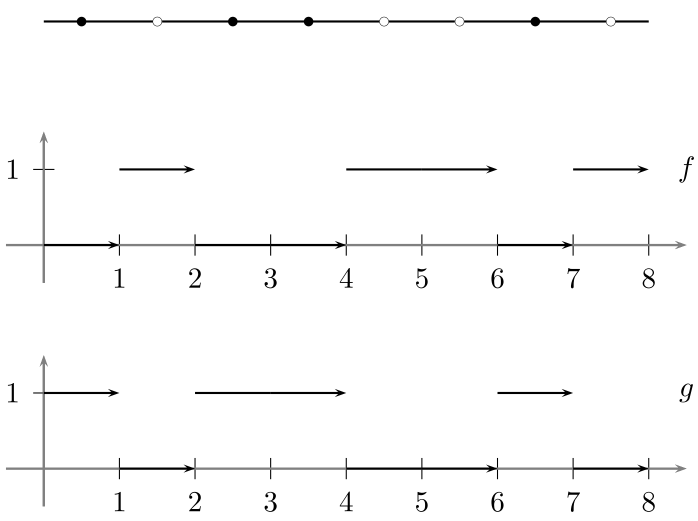
Izberemo biser na ogrlici in ga indeksiramo z 1, nato se premikamo po ogrlici v pozitivni smeri. Zaporedju belih in črnih biserov priredimo funkciji $f, g\colon [0, 4k) \to \mathbb{R}$ takole: če je m-ti biser bel, naj bo

$$f|[m-1, m) \equiv 1 \text{ in } g|[m-1, m) \equiv 0,$$

sicer pa

$$f|[m-1, m) \equiv 0 \text{ in } g|[m-1, m) \equiv 1.$$

Integral funkcije f po intervalu s celoštevilskima krajiščema prešteje bele bisere na ustreznem delu ogrlice, integral g pa prešteje črne bisere. Zato velja $\int_0^{4k} f(t)\,dt = \int_0^{4k} g(t)\,dt = 2k$. Rešitev naloge zagotavlja obstoj intervala $I \subset [0, 4k]$, za katerega velja: $\int_I f(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt = k$.



Slika 3. Primer ogrlice in prirejenih funkcij f in g.

Če ima I celoštevilski krajišči, potem integral f po I prešteje število belih, integral g po I pa prešteje število črnih biserov, torej lahko ogrlico pravično razdelimo z dvema rezoma.

Denimo, da je $I = [a, b]$, kjer je $a = \lfloor a \rfloor + \alpha$ in $b = \lfloor b \rfloor + \beta$, pri čemer je vsaj eden od $\alpha, \beta \in [0, 1)$ neničeln. Sledi, da je $\alpha = \beta$, sicer vsaj eden od integralov po I ni naravno število. Podobno sklepamo, da je $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$. V tem primeru velja $\int_I f(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} f(t)\,dt$ in $\int_I g(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} g(t)\,dt$, torej je na intervalu $[\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor]$ natanko k belih in k črnih biserov.

Ekvivalentna trditev

Trditev 5. *Dva igralca mečeta kovanec. Če pade cifra, igralec dobi en evro, sicer izgubi en evro. Denimo, da sta oba igralca v nekem časovnem intervalu dobila $2n$ evrov. Potem obstaja časovni interval, v katerem sta oba dobila n evrov.*

Dokazali bomo, da sta trditev 5 in naloga 1 ekvivalentni.

Najprej pokažimo, kako trditev 5 izpeljemo iz naloge. Recimo, da sta oba igralca dobila $2n$ evrov po k metih kovanca. Zaporedju metov prvega igralca priredimo funkcijo $f\colon [0,k) \to \mathbb{R}$ takole: če je pri m-tem metu padla cifra, naj bo $f|[m-1,m) \equiv 1$, sicer pa $f|[m-1,m) \equiv -1$. Zaporedju metov drugega igralca priredimo funkcijo g na enak način. Integral funkcije f po intervalu s celoštevilskima krajiščema je dobiček oziroma izguba prvega igralca v ustreznem času. Zato velja $\int_0^k f(t)\,dt = \int_0^k g(t)\,dt = 2n$. Rešitev naloge zagotavlja obstoj intervala $I = [a,b]$, za katerega velja $\int_I f(t)\,dt = \int_I g(t)\,dt = n$.

Če sta a in b celi števili, potem smo dobili ustrezni časovni interval. Sicer lahko zapišemo $a = \lfloor a \rfloor + \alpha$ in $b = \lfloor b \rfloor + \beta$, kjer je vsaj eno od števil $\alpha, \beta \in [0,1)$ neničelno.

- Če $\alpha \neq \beta$, potem vsaj eden od integralov funkcij f in g po I ni celo število, kar je protislovje.

- Če je $\alpha = \beta \neq \frac{1}{2}$, potem sta integrala funkcij f in g po I lahko celoštevilska samo v primeru, ko je $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$. V tem primeru velja $\int_I f(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} f(t)\,dt$ in $\int_I g(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor}^{\lfloor b \rfloor} g(t)\,dt$, torej je $[\lfloor a \rfloor, \lfloor b \rfloor]$ ustrezni časovni interval.

- Denimo, da je $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Potem velja bodisi $f(a) = f(b)$ in $g(a) = g(b)$ bodisi $f(a) \neq f(b)$ in $g(a) \neq g(b)$, kajti sicer bi bil en integral lih, drugi pa sod. V prvem primeru lahko ponovimo sklep iz prejšnje točke, v drugem primeru pa velja: $\int_I f(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor+1}^{\lfloor b \rfloor} f(t)\,dt$ in $\int_I g(t)\,dt = \int_{\lfloor a \rfloor+1}^{\lfloor b \rfloor} g(t)\,dt$, torej smo v obeh primerih dobili ustrezni časovni interval.

Dokazali smo, da trditev 5 sledi iz naloge 1.

Dokažimo še obratno: denimo, da trditev 5 drži. Nalogo 1 je dovolj dokazati za zvezni funkciji f in g, ki ustrezata predpostavki. Ker sta zvezni, sta omejeni, torej obstaja $M \in \mathbb{R}$, da velja $|f(x)| \leq M$ in $|g(x)| \leq M$ za vse $x \in [0,1]$. Funkciji

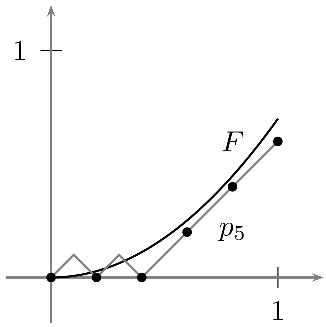
$$F(x) = \frac{1}{M} \int_0^x f(t)\,dt \text{ in } G(x) = \frac{1}{M} \int_0^x g(t)\,dt$$

sta zvezno odvedljivi in velja $F'(x) = \frac{1}{M} f(x)$ ter $G'(x) = \frac{1}{M} g(x)$. Zato veljata oceni $|F'(x)| \leq 1$ in $|G'(x)| \leq 1$ za vse $x \in [0,1]$. V nadaljevanju bomo dokazali, da lahko funkciji F in G enakomerno poljubno dobro aproksimiramo z zveznima kosoma linearnima funkcijama, ki imata enaki vrednosti v 0 in 1 ter imata na vsakem linearnem delu naklon 1 ali -1.

Naj bo $m \in \mathbb{N}$. Za vsak $l \in \{0,1,\ldots,m\}$ obstaja natanko en $j \in \mathbb{Z}$, za katerega velja $F(\frac{l}{m}) \in [\frac{j-1}{m}, \frac{j}{m})$ in definiramo $p_m(\frac{l}{m}) = \frac{j-1}{m}$. Po

Lagrangeevem izreku velja $|F(x+\frac{1}{m})-F(x)| = \frac{1}{m}|F'(c)| \leq \frac{1}{m}$ za neki $c \in [x, x+\frac{1}{m}]$, od tod sledi $p_m(\frac{l+1}{m}) - p_m(\frac{l}{m}) \in \{-\frac{1}{m}, 0, \frac{1}{m}\}$ za vsak $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Definiramo še

$$p_m(\tfrac{2l+1}{2m}) = \begin{cases} p_m(\frac{l}{m}) + \frac{1}{2m}, & p_m(\frac{l+1}{m}) \geq p_m(\frac{l}{m}) \\ p_m(\frac{l}{m}) - \frac{1}{2m}, & p_m(\frac{l+1}{m}) < p_m(\frac{l}{m}) \end{cases}.$$



Slika 4. Aproksimacija funkcije F s kosoma linearno funkcijo p_5.

Za vse $l \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$ velja $|p_m(\frac{l+1}{2m}) - p_m(\frac{l}{2m})| = \frac{1}{2m}$, zato lahko p_m razširimo do zvezne kosoma linearne funkcije na $[0,1]$, ki ima na vsakem linearnem delu naklon ± 1. Za vsak $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ in za vsak $x \in [\frac{l}{m}, \frac{l+1}{m}]$ z uporabo trikotniške neenakosti dobimo

$$\begin{aligned} |F(x) - p_m(x)| &\leq |F(x) - F(\tfrac{l}{m})| + |F(\tfrac{l}{m}) - p_m(\tfrac{l}{m})| + |p_m(\tfrac{l}{m}) - p_m(x)| \\ &\leq \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{m} = \tfrac{3}{m}, \end{aligned} \tag{2}$$

pri čemer smo pri oceni prvega člena upoštevali, da je $|F'| \leq 1$, pri drugem in tretjem členu pa ocena velja po definiciji funkcije p_m. Na enak način funkciji G priredimo funkcijo q_m. Ker imata F in G v krajiščih intervala $[0,1]$ enaki vrednosti, imata p_m in q_m v krajiščih intervala $[0,1]$ enaki vrednosti.

Funkciji p_m priredimo izide $2m$ metov kovanca za prvega igralca takole: če je naklon p_m na intervalu $[\frac{l}{2m}, \frac{l+1}{2m}]$ enak 1, je rezultat cifra, sicer grb. Na enak način funkciji q_m priredimo izide metov drugega igralca. Ker je $p_m(0) = q_m(0)$ in $p_m(1) = q_m(1)$, igralca po $2m$ metih dobita enako. Ker je število metov sodo, je njun dobiček sodo število $2n$. Z uporabo trditve 5 dobimo časovni interval $[a_m, b_m]$, v katerem sta oba igralca dobila n evrov. Na tem intervalu sta oba igralca vrgla enako cifer (in enako grbov), njun dobiček na tem intervalu pa je bil enak polovičnemu dobičku na koncu, zato velja

$$p_m(b_m) - p_m(a_m) = q_m(b_m) - q_m(a_m) = \frac{1}{2}(p_m(1) - p_m(0)).$$

Po definiciji funkcije F velja

$$\int_0^1 f(x)\,dx = M(F(1) - F(0)) = M(p_m(1) - p_m(0) + o_1),$$

pri čemer z uporabo ocene (2) dobimo $|o_1| < \frac{6}{m}$. Podobno izpeljemo

$$\int_{a_m}^{b_m} f(x)\,dx = M(F(b_m) - F(a_m)) = M(p_m(b_m) - p_m(a_m) + o_2),$$

kjer je $|o_2| < \frac{6}{m}$. Sedaj izračunamo

$$\begin{aligned}\int_{a_m}^{b_m} f(x)\,dx &= M(p_m(b_m) - p_m(a_m) + o_2) = \frac{1}{2}M(p_m(1) - p_m(0)) + Mo_2\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}Mo_1 + Mo_2 = \frac{1}{2} + Mo_3,\end{aligned}$$

kjer je $|o_3| < \frac{9}{m}$. Podobno velja za G in q_m. Sedaj nadaljujemo podobno kot v začetku uvodnega razdelka: v omejenih zaporedjih $(a_m)_m$ in $(b_m)_m$ obstajata konvergentni podzaporedji in za njuni limiti a in b velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Torej smo rešili nalogo.

LITERATURA

[1] N. Alon in D. B. West, *The Borsuk-Ulam theorem and bisection of necklaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986), 623–628.

[2] *Contests in higher mathematics* (Hungary, 1949–1961). In memoriam Miklós Schweitzer, (G. Szasz, L. Geher, I. Kovacs, L. Pinter, eds), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.

[3] K. Kelvišar, *Borsuk-Ulamov izrek*, Obzornik Mat. Fiz. **63** (2016), 41–52.

[4] R. Narasimhan in Y. Nievergelt, *Complex analysis in one variable*, Second edition. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.

[5] G. J. Szekely (Ed.), *Contests in Higher Mathematics*, Springer, New York, 1996.

[6] V. Totik, *A tale of two integrals*, Amer. Math. Monthly **106** (1999), 227–240.

[7] *Miklós Schweitzer Competition*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/Mikl%C3%B3s_Schweitzer_Competition`, ogled 22. 11. 2019.

[8] *Problems of the Miklós Schweitzer Memorial Competition*, dostopno na `www.math.u-szeged.hu/~mmaroti/schweitzer/`, ogled 22. 11. 2019.