PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 3
Strani 175–178

Borut Zalar:

MAGIČNI KVADRAT $4n \times 4n$

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/831-Zalar.pdf

MAGIČNI KVADRAT $4n \times 4n$

Magični kvadrat velikosti $m \times m$ tvorijo števila od 1 do m^2, ki so razporejena v kvadratno mrežo tako, da je vsota v vseh stolpcih, vrsticah in obeh diagonalah enaka. Najmanjši magični kvadrat je velikosti 3×3, vsota v njem pa je 15.

magični kvadrat
3×3

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Ta članek želi odgovoriti na vprašanje, kako sestaviti poljuben magični kvadrat velikosti $4n \times 4n$.

Nekaj definicij:

N — vsota, ki je potrebna vsaki vrstici, stolpcu in diagonali,

S_i — vsota v i-tem stolpcu,

V_i — vsota v i-ti vrstici,

D_1 — vsota v diagonali, ki vsebuje zgornje levo polje,

D_2 — vsota v diagonali, ki vsebuje zgornje desno polje,

i-ta in j-ta vrstica (stolpec) sta *diametralna* natanko tedaj, ko velja $i + j = 4n + 1$.

Sestavljanje magičnega kvadrata začnem s tem, da razporedim števila od 1 do $16n^2$ po vrsti v mrežo.

primer za $n = 1$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Oznakam, ki sem jih uvedel na začetku, bom zdaj priredil še vrednosti:

$$N = (1 + 2 + \ldots + 16n^2)/4n = 2n\ (16n^2 + 1)$$

$$S_i = i + (4n + i) + (8n + i) + \ldots + (16n^2 - 4n + i) = 4ni + 8n^2\ (4n - 1)$$

$$V_i = 4n(i-1) + (4n(i-1)+1) + \ldots + 4ni = 16n^2 i - 8n^2 + 2n$$

$$D_1 = 1+(4n+2)+(8n+3)+\ldots+16n^2 = 4n(1+2+\ldots+4n-1) + (1+2+\ldots+4n) = N$$

$$D_2 = 4n+(8n-1)+\ldots+(16n^2-4n+1) = 4n(1+2+\ldots+4n) - (1+2+\ldots+4n-1) = N$$

Bralcu prepuščamo, da se pri vsaki vrstici prepriča o pravilnosti zadnje enakosti.

Naj bo $i \leqslant 2n$. Pri danem i naj bo $j = 4n - i + 1$, tako da sta i-ti in j-ti stolpec diametralna. Vsota vseh elementov v teh dveh stolpcih je

$$S_i + S_j = 4ni + 8n^2\ (4n - 1) + 4n\ (4n - i + 1) + 8n^2\ (4n - 1) = 2N$$

Kaj se zgodi, če v teh stolpcih medsebojno zamenjam $2n$ števil tako, da medsebojno zamenjam števili, ki sta v isti vrstici? Razlika med števili v dveh izbranih diametralnih stolpcih je konstantna (mišljeni sta števili v isti vrstici). Ta konstanta znaša $d = 4n - 2i + 1$, če je i manjši od obeh indeksov, ki pripadata stolpcema. Novi vsoti v i-tem in j-tem stolpcu sta

$$S_i = \text{prvotni } S_i + 2nd = 4ni + 8n^2\ (4n - 1) + 2n\ (4n - 2i + 1) = N$$

$$S_j = 2N - S_i = N$$

Tu se pojavi vprašanje, katerih $2n$ števil zamenjati. Upoštevali bomo naslednji dve pravili.

(A) če v i-tem in j-tem stolpcu zamenjam k-ti element, potem zamenjam tudi $(4n - k + 1)$-ti element.

(B) začnem s prvim elementom in naprej s korakom po ena. Element na diagonali izpustim.

Ta postopek uporabim za $i = 1, 2, \ldots, 2n$.

V nobeni vrstici se vsota ne razlikuje od začetne vsote, saj nobeno število ni zamenjalo vrstice. Zaradi upoštevanja pravila (B) sta tudi diagonali ostali nedotaknjeni. Stanje je sedaj naslednje:

$$S_1 = S_2 = \ldots = S_{4n} = D_1 = D_2 = N$$

$$V_i = 16n^2 i - 8n^2 + 2n; \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, 4n$$

Pravilo (A) se izkaže za zelo pomembno, saj še vedno velja, da je razlika istoležnih elementov v diametralnih vrsticah i in $4n + 1 - i$ konstantna in znaša $e = 4n\,(4n - 1) - 4n\,(i - 1) = 4n\,(4n - 2i + 1)$.

Zdaj zamenjamo še po $2n$ števil v vsakem paru diametralnih vrstic po pravilih (A) in (B), kjer seveda zamenjamo pojma vrstica in stolpec.

Diagonale se ne pokvarijo zaradi pravila (B), vsote stolpcev pa se tudi ne spremenijo in novo stanje je:

$$S_1 = S_2 = \dots = S_{4n} = V_1 = V_2 = \dots = V_{4n} = D_1 = D_2 = N$$

Magični kvadrat je sestavljen.

Naj za konec dodam primer za $n = 1$.

a)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

začetno stanje

b)

1	2	3	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	14	15	16

1. in 4. stolpec

c)

1	3	2	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	15	14	16

2. in 3. stolpec

d)

1	15	14	4
8	6	7	5
12	10	11	9
13	3	2	16

1. in 4. vrstica

e)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2. in 3. vrstica

Bralca vabimo, da razmisli o drugih možnih pravilih za sestavljanje magičnih kvadratov.

Borut Zalar