

O SVETLOBNEM TLAKU¹

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 03.30.+p

Sevalni tlak je vezan na gibalno količino svetlobe. Povezavo gibalne količine z energijo svetlobe v srednji šoli lahko uporabimo kot izhodišče za vstop v kvantno mehaniko. V članku teče razprava o ozadju klasične enačbe. Pri nekaterih pojavih je odločilen sevalni tlak. Enačbo za sevalni tlak je mogoče preprosto izpeljati. Izpeljavi enačbe so nekateri ugovarjali. Pripombe o tem utegnejo koristiti učiteljem.

ON LIGHT PRESSURE

The radiation pressure is bound to the momentum of light. The connection of momentum with the energy of light may be used in high school as a point of departure for the approach to quantum mechanics. In the article the background of the classical equation is discussed. Phenomena are described for which the radiation pressure is decisive. The equation for the radiation pressure is derived in a simple way. Objections against the derivation of the equation are mentioned. Remarks are added which may be useful for teachers.

Pojav

Svetloba izvaja silo na oviro, v kateri se absorbira ali na kateri se odbije. Dokler so svetlobo opisovali s hitrimi delci, so zamisel opirali na silo curka tekočine, ki spolzi ob oviri ali se na njej odbije. Okoli leta 1872 je James Clerk Maxwell z napetostnim tenzorjem ugotovil, da je sevalni tlak vzporednega curka elektromagnetnega valovanja pri pravokotnem vpadu na ploščico, ki ga absorbira, enak povprečni gostoti energije v valovanju: $p = \bar{w}$.

Sevalni tlak svetlobe je prvi izmeril Pjotr Nikolajevič Lebedev leta 1900 v Peterburgu [1]. Leto zatem sta merjenje v Združenih državah ponovila Ernest Fox Nichols in Gordon Ferrie Hull. John H. Poynting je v nagovoru kot predsednik britanskega fizikalnega društva leta 1905 izjavil: „Zelo kratka izkušnja z merjenjem teh svetlobnih sil zadostuje, da se prepričamo o skrajni majhnosti, majhnosti, ki jih postavi onstran razprave o zemeljskih zadevah.“ Razmere so se spremenile z odkritjem laserjev leta 1960. Z laserskim curkom, usmerjenim navpično navzgor, je bilo mogoče izravnati težo drobne kroglice in doseči, da lebdi v curku [2]. Pozneje so s posebnimi prijemi zagotovili, da atomi v plinu absorbirajo svetlobo z določeno valovno

¹Po prispevku na strokovnem srečanju DMFA 2011

dolžino iz laserskega curka. Sevajo na vse strani in zaradi odriva izgubljajo hitrost v smeri curka. Trije pari med seboj pravokotnih laserskih curkov lahko zadržujejo atome v pasti. Lasersko hlajenje in optično-magnetne pasti so močno izpopolnili.

Svetlobni tlak v osončju

Johannes Kepler je na začetku 17. stoletja v okviru delčne predstave domneval, da so repi kometov obrnjeni od Sonca zaradi sevalnega tlaka. Danes vemo, da imajo kometi dva repa. Modrikasti *rep I* sestavljajo ioni, večinoma CO^- , rjavkasti *rep II* pa plini in prašni delci. Sončna svetloba ionizira molekule plina in rep ionov zaradi sončnega vetra, to je toka naelektrenih delcev s Sonca, in sončnega magnetega polja kaže naravnost od Sonca. Rep II nastane, ker plini odparevajo z zmrznjenega jedra in potegnejo za seboj prašne delce. Ta rep zaradi sevalnega tlaka, gravitacije kometa in sončnega vetra leži med repom I in tirnico kometa.

Sila sevalnega tlaka sončne svetlobe je pri kroglastih telesih sorazmerna s kvadratom, gravitacijska sila pa s kubom premera. Zato je sila sevalnega tlaka tem pomembnejša, čim manjši je delec. Vseeno je v posebnih okoliščinah pomemben tlak sončne svetlobe na manjše asteroide. Okoli leta 1900 je ruski inženir Ivan Osipovič Jarkovski obdelal nov pojav. Na njegov zapis je desetletje pozneje naletel estonski astronom Ernst J. Öpik. O pojavu je poročal leta 1951 in ga rešil pozabe. Manjši asteroid, ki kroži okoli Sonca, naj se vrti tako, da sta lastna in obhodna vrtilna količina pravokotni na ravnino gibanja in kažeta v isto smer. K Soncu obrnjena stran asteroida se bolj segreje in po četrt vrtljaja močneje seva v smeri nazaj. Od Sonca obrnjena stran se bolj ohladi in po četrt vrtljaja manj seva v smeri naprej. Odriv sevanja pospešuje asteroid v smeri gibanja, tako da se počasi oddaljuje od Sonca. Sila je nasprotno usmerjena, če ima lastna vrtilna količina nasprotno smer kot obhodna. Za določeno telo je učinek zelo težko zanesljivo napovedati. Sila je zelo majhna, a po dolgem času ima lahko opazen učinek. Asteroid 6489 Golevka so skrbno opazovali in ugotovili, da se je zaradi pojava Jarkovskega v 12 letih za 15 km oddaljil od kraja, kjer bi ga pričakovali. Pospešek je meril $a = 2s/t^2 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ m/s}^2$. Pojav bi bilo mogoče izkoristiti ob nevarnosti, da se asteroid preveč približa Zemlji. S primernim absorberjem ali odbojnikom na asteroidu bi ga bilo mogoče v dovolj dolgem času preusmeriti.

Litovski inženir Friedrich Zander je leta 1929 v tedanji Sovjetski zvezi predlagal, da bi tlak sončne svetlobe s *sončnim jadrom* izkoristili za potovanje po osončju. Ta tlak pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje od Sonca. Na mestu Zemlje meri ob absorpciji $4,3 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ in deluje

nprekinjeno, ne da bi bilo treba vlagati energijo.

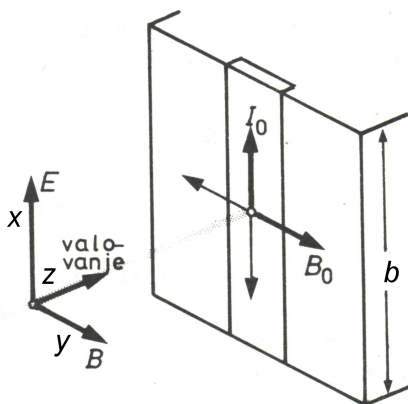
Svetlobni tlak v sredici zvezd pri zelo visoki temperaturi daje glavni prispevek k tlaku plina, ki uravnovesi tlak zaradi gravitacijskega privlaka med deli zvezde.

Enačba

Linearno polarizirano ravno elektromagnetno valovanje v smeri osi z naj pada pravokotno na kovinsko ploščico v obliki pravokotnika s stranico b v smeri osi x in drugo stranico v smeri osi y (slika 1). Ploščica absorbira vse vpadno valovanje. Jakost električnega polja ima amplitudo E_0 v smeri osi x in gostota magnetnega polja amplitudo $B_0 = E_0/c$ v smeri osi y , če je c hitrost svetlobe v praznem prostoru. Amplituda napetosti $U_0 = bE_0$ v smeri osi x požene po Ohmovem zakonu izmenični tok z amplitudo I_0 . Nanj deluje izmenično magnetno polje, ki niha v fazi, z največjo silo $F_0 = bI_0B_0 = bI_0E_0/c = I_0U_0/c$. Največja moč izmeničnega toka je $P_0 = U_0I_0$, tako da je največja sila $F_0 = P_0/c$ in največji tlak $p_0 = F_0/S = W_0/(ctS) = W_0/V$. Svetloba v času t zajame prostornino $V = ctS$. Na levi in desni strani enačbe vzamemo povprečni vrednosti in dobimo s povprečno gostoto energije v valovanju $\bar{w} = \bar{W}/V$ Maxwellovo zvezo:

$$p = \bar{w}. \quad (1)$$

Amplitudi toka in napetosti nadomestimo s $\sqrt{2}$ -krat manjšima efektivnima vrednostma in največjo moč s povprečno močjo $\bar{P} = \frac{1}{2}P_0$.



Slika 1. K izvajanju enačbe (1).

Vzeli smo, da sta amplitudi jakosti električnega polja in gostote magnetnega polja v ploščici konstantni. V resnici z globino eksponentno pojemata: $E_0(z) = E_0(z=0)e^{-|z|/\delta}$. Eksponentno pojemajočo amplitudo smo nadomestili s konstantno amplitudo do globine $\delta = \sqrt{2\zeta/\mu_0\omega}$. Pri tem je ζ specifični upor in je na primer za rumenozeleno svetlobo za srebro $\delta = 30$ nm in za jeklo 390 nm. Po uvedbi Poyntingovega vektorja je mogoče sevalni tlak izračunati z njim. Podrobna obravnava odboja in loma svetlobe na kovini pri poševnem vpadu in splošni polarizaciji pa je zapletena [3]. Iz izreka o gibalni količini $|0 - G| = Ft = pSt = \overline{wct}S/c$ sledi:

$$G = \overline{W}/c. \quad (2)$$

Ploščica prevzame od elektromagnetnega valovanja gibalno količino G , ko absorbira energijo $\overline{W}$.

V posebni teoriji relativnosti veljata zvezi:

$$G = vW/c^2 \quad \text{in} \quad W^2 = (cG)^2 + (mc^2)^2.$$

Iz prve enačbe z $v = c$ sledi (2). Druga enačba pove, da je v tem primeru lastna masa enaka 0. Posebna teorija relativnosti na enaki podlagi obravnava delce s končno lastno maso in z lastno maso 0.

Max Planck je spekter sevanja črnega telesa pojasnil s privzetkom, da stena votline s sevanjem izmenjava energijo v obrokih – *fotonih*. Za energijo fotona v valovanju s frekvenco ν je dobil $W_1 = h\nu$, če je h za kvantno fiziko značilna Planckova konstanta. V enačbo (2) vstavimo energijo fotona, pa dobimo izraz za gibalno količino fotona $G_1 = h\nu/c = h/\lambda$. Enačba poveže gibalno količino, značilno za delce, z valovno dolžino λ , značilno za valovanje. Enačbo, ki smo jo dobili za fotone z lastno maso 0, razširimo na počasne delce z maso m_1 :

$$\lambda_B = h/(m_1v). \quad (3)$$

Enačba gibalno količino počasnega delca m_1v poveže z *de Broglievo valovno dolžino* v valovanju, ki ga priredimo curku delcev. Z enačbo (3) pojasnimo interferenčne poskuse z elektroni in drugimi delci ter ločljivost elektronskega mikroskopa. Z njo lahko okvirno uvedemo tudi kvantna stanja delca v potencialni jami in jih primerjamo z lastnimi nihanji strune. Po podobnosti z „valovno funkcijo“ v klasični mehaniki lahko vpeljemo valovno funkcijo v kvantni mehaniki.

Ozadje

Članek [4] je ugovarjal izpeljavi enačbe (2) v dveh ameriških uvodnih univerzitetnih učbenikih, enem dokaj znanem [5]. Ali bi utegnila biti navedena izpeljava zgrešena? Ali se ne učimo na napakah, posebno na lastnih?

Raziskovalcem v fiziki, ki se spuščajo na neraziskano območje, gre *pravica do napake*. Fizikalne napake ne vplivajo veliko na ugled fizike. Zdi se, da ne vplivajo dosti tudi na ugled raziskovalcev. O fizikalnih napakah Alberta Einsteina razpravljajo v člankih in knjigi, ne da bi to prizadelo njegov ugled.

Z napakami pri poučevanju je nekoliko drugače. Širijo se v manj poučenem okolju, zato je pravica učiteljev do napake omejena. Zahteva ni pretirana, ker ostajajo na raziskanem območju. Poleg tega tudi nekateri študenti njihovo morebitno napako prepoznajo in popravijo ter tako pridobijo dragoceno izkušnjo. Napake v poučevanju pa imajo lahko tudi motivacijsko vlogo. Precej razširjeno je mnenje, da poučevanju koristi, če tu in tam vpletemo kakšno napako in jo ob razpravi razkrijejo in popravijo študenti.

Max Planck se je pritožil nad predavanji Hermanna von Helmholtza in dodal, da je bilo „Kirchhoffovo predavanje skrbno izdelano in je vsak stavek dobro premišljeno stal na pravem mestu, nobena beseda ni bila premalo in nobena preveč, toda vse skupaj je delovalo kot na pamet naučeno, pusto in enolično. Občudovali smo predavatelja, ne pa tega, kar je predaval.“ [6] Tudi nekdanji urednik American Journal of Physics Robert Romer je v spominih na predavanja, ki jih je poslušal, zapisal, „da si ne more kaj, da ne bi razmišljal o tem, ali je jasnost zares tako zaželena.“ [7] John Archibald Wheeler se je na predavanjih včasih delal nepripravljenega, da je zbudil pozornost študentov. Ali to pomeni, da naj učitelji ne poskušajo biti jasni za vsako ceno? Pisci učbenikov imajo še bolj omejeno pravico do napak od učiteljev. Medtem ko predavanja hitro minejo, so učbeniki dolgo časa dostopni javni kritiki. Kritike pa včasih niso utemeljene.

Premislek pokaže, da velja to za ugovore [4] proti izpeljavi v učbeniku [5]. Nakažimo izpeljavo. Vzemimo, da prost elektron, ki spočetka miruje, zadene ravno linearno polarizirano elektromagnetno valovanje. Na elektron z nabojem $e = -e_0$ deluje z Lorentzevo silo $\vec{F} = -e_0\vec{E} - e_0\vec{v} \times \vec{B}$, ki ima v smeri jakosti električnega polja, to je v smeri osi x , komponento $-e_0E + e_0v_zE/c$ in v smeri potovanja valovanja, to je v smeri osi z , komponento $-e_0v_xE/c$. Povprečje prve komponente po enem nihaju je enako 0, ker prvi člen sinusno niha, v drugem pa je hitrost v_z zelo majhna. Po Newtonovem zakonu je $\vec{F} = d\vec{G}/dt$, v povprečju $\overline{F_z} = d\overline{G_z}/dt = -e_0v_x\overline{E}/c$. Moč je $\vec{v} \cdot \vec{F} = dW/dt = -e_0v_xE$. Tako je $d\overline{W}/dt = c d\overline{G_z}/dt$ in $\overline{W} = c\overline{G_z}$ na začetku pospeševanja. Elektron absorbirane energije ne obdrži. V telesu, ki absorbira vso vpadno energijo, jo zaradi upora v celoti odda okolni snovi, prost pa jo izseva. Piscu [5] je mogoče očitati le, da je opombo dal v oklepaj.

Pisca članka [4] sta priznala, da nista vedela za vpliv upora. Iz njunega članka pa vseeno izhaja koristen sklep. Opazujmo prost elektron z maso m v ravnini $z = 0$ v valovanju z jakostjo električnega polja $E = E_0 \cos \omega t$ v smeri osi x in gostoto magnetnega polja $B = B_0 \cos \omega t$ v smeri osi y .

Newtonov zakon za gibanje elektrona v smeri osi x se glasi $m dv/dt = eE = -e_0 E_0 \cos \omega t$. Hitrost je potem $v = -(-e_0 E_0 / m\omega) \sin \omega t$ in odmik $x = (-e_0 E_0 / m\omega^2) \cos \omega t$. Na nihajoči elektron deluje magnetno polje s silo: $F = evB = -e_0(-e_0 E_0 / m\omega) \sin \omega t \cdot B_0 \cos \omega t = (e_0^2 E_0^2 / 2mc\omega^2) \sin 2\omega t$. Povprečna vrednost je enaka 0. Na prost elektron elektromagnetno valovanje s konstantno amplitudo ne izvaja sile v smeri potovanja. Svetlobni tok s konstantno amplitudo ne odrine oblaka plazme. Odrine ga valovanje s spremenljivo amplitudo, denimo udarni val.

Svetlobnega tlaka ne moremo pojasniti, če elektrone v kovini obravnavamo kot idealni plin. Pojasnimo ga, če v enačbo gibanja vključimo upor: $F = eE - \text{konst} \cdot v$ [8]. Pisca sta temu koraku ugovarjala, češ da je pri svetlobi s krožno frekvenco $\omega = 10^{15} \text{ s}^{-1}$ in amplitudo jakosti električnega polja $E_0 = 10^4 \text{ V/m}$ amplituda odmika elektronov $e_0 E_0 / (m\omega^2) = 10^{-15} \text{ m}$ veliko manjša od razmika med atomi v kristalu [9]. Ugovor ni umesten. Naboj elektronov v kovini lahko obravnavamo kot zvezen. O tem priča tudi Ohmov upor kovinskega vodnika. Amplituda odmika elektronov v srebru pri gostoti toka 1 A/mm^2 s frekvenco nad 50 MHz postane manjša od desetine nanometra, ne da bi se zaradi tega zmanjšal Ohmov upor.

Poznamo še druge primere, pri katerih je mikroskopski opis tako zapleten, da za poučevanje ni pripraven. Viskoznosti plina ali kapljevine ali površinske napetosti kapljevine ne moremo preprosto pojasniti z gibanjem molekul. Deli zraka v zvoku, ki ga komaj zaznamo z ušesi, nihajo z amplitudo 10^{-11} m , kar je manj od premera molekul. Predstava, da se v plinu ali tekočini gibljejo molekule ali po kovini elektroni, ne koristi vselej.

Pri svoji izpeljavi enačbe (2) sta si pisca morala pomagati s sipanjem valovanja in s kvantno mehaniko. Pot utegne biti zgrešena, zagotovo pa ni dosledna, saj v izpeljavo klasične enačbe (2) ne gre vpletati kvantnih sestavin.

Dele obravnavane snovi je mogoče vključiti v fiziko v srednji šoli. Učitelji naj o tem razmislijo in se glede na sprejemljivost srednješolcev odločijo, v kolikšni meri je to mogoče. Če se jim zdi del snovi pretežaven ali predolgovezen, ga je mogoče obravnavati v krožku. V ozadju je odločitev, koliko kvantne mehanike sodi v srednjo šolo.

Planckova izpeljava

Dodajmo v poenostavljeni obliki račun, ki se ne ozira na elektrone in ki ga je Planck predložil leta 1912 [4]. Ravno elektromagnetno valovanje pravokotno pada na ravno kovinsko ploščico in se na njej v celoti odbije. Sestavimo vpadno in odbito valovanje. Jakost električnega polja v smeri osi x je $E = E_0 \cos(kz - \omega t) - E_0 \cos(kz + \omega t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t$. Pri tem je $k = 2\pi/\lambda$

velikost valovnega vektorja. Električno polje se odbije z nasprotno fazo, tako da je v meji vozalna ploskev. Magnetno polje se odbije z enako fazo, da smeri električnega in magnetnega polja ter potovanja v odbitem valovanju sestavljajo desni trirob:

$$B = B_0 \cos(kz - \omega t) + B_0 \cos(kz + \omega t) = 2(E_0/c) \cos kz \cos \omega t.$$

Iz Ampèrovega zakona $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ sledi $\mu_0 j = -\partial B / \partial z$, če se omejimo na komponente v smeri osi x in člen $\varepsilon_0 \mu_0 \partial E / \partial t = c^{-2} \partial E / \partial t$ zanemarimo. Na tok v smeri osi x deluje magnetno polje v smeri osi y z gostoto sile jB v smeri osi z . Tlak se spreminja z globino in velja $dp = jBdz = -(B/\mu_0)(\partial B / \partial z)dz = -BdB/\mu_0$. Gostota magnetnega polja v kovini pojema od $B(z=0) = 2B_0 \cos \omega t$ do 0 v dovolj veliki globini z . Za tlak dobimo $p = -\int_0^\infty BdB/\mu_0 = B^2(z=0)/(2\mu_0) = 2B_0^2 \cos^2 \omega t / \mu_0$ in za njegovo povprečno vrednost B_0^2/μ_0 . S povprečno gostoto energije $\bar{w} = B_0^2/(2\mu_0)$ sledi nazadnje $p = 2\bar{w}$. Vpadnemu valovanju ustreza polovica tega, to je $\bar{w}$. Tudi sila vodoravnega vodnega curka, ki se odbije na navpični oviri, je dvakrat večja od sile curka, ki spolzi ob oviri navzdol. Planckov račun odpravi morebitne pomisleke o preprostem računu. David J. Griffiths je v članku [10] navedel obsežen seznam literature o gibalni količini elektromagnetnega polja in obdelal odprta vprašanja.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Svetlobni tlak in P. N. Lebedev*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 148–153.
- [2] A. Ashkin, *The pressure of laser light*, Scientific American **226** (1972), 63–71 (2).
- [3] K. T. McDonald, *Radiation pressure of a monochromatic plane wave on a flat mirror*, (2009), 1–19, na spletu s tem naslovom.
- [4] T. Rothman in S. Boughn, *The Lorentz force and the radiation pressure of light*, Am. J. Phys. **77** (2009), 122–127.
- [5] F. Crawford, *Waves. Berkeley Physics Course*, Vol. 3, McGraw-Hill, New York 1965, str. 362.
- [6] M. Planck, *Scientific Autobiography and Other Papers*, Philosophical Library, New York, 1949.
- [7] R. H. Romer, *Is clear teaching good teaching. A tale of two teachers*, Am. J. Phys. **58** (1990), 1129–30.
- [8] C. E. Mungan, *Repairing an elementary explanation of radiation pressure*, Am. J. Phys. **77** (2009), 965.
- [9] T. Rothman in S. Boughn, *On „Repairing an elementary explanation of radiation pressure“*, Am. J. Phys. **77** (2009), 966.
- [10] D. J. Griffiths, *Resource letter EM-1: Electromagnetic momentum*, Am. J. Phys. **80** (2012), 7–18.