KATAKAVSTIKA BERNOULLIJEVE LEMNISKATE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A45, 53A04

V prispevku predstavljamo kratko zgodovino Bernoullijeve lemniskate in njeno katakavstiko za središčne žarke.

A CATACAUSTIC OF THE BERNOULLI LEMNISCATE

A brief history of the Bernoulli lemniscate and its catacaustic for central rays are presented.

Uvod

Kot že naslov pove, je osnova obravnavane katakavstike imela opravka z matematično družino Bernoullijevih v švicarskem Baslu. Lemniskato sta namreč že poznala matematika, brata Jakob (1655–1705) in Johann Bernoulli (1667–1748). Jakob je leta 1694 v septembrski številki revije Acta Eruditorum objavil članek (navajamo samo del naslova) *Constructio curvæ accessus & recessus æquabilis*, ki omenja algebrsko krivuljo z enačbo $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$. Danes jo običajno zapišemo v kartezičnih koordinatah z enačbo $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Prej omenjeni članek je dodatek Bernoullijevemu prispevku iz junijske številke iste revije, kar je razvidno iz drugega dela naslova. Napisan je v latinščini. Izvor ima sicer v povsem drugem problemu, in sicer v teoriji elastičnosti. Za nas pa je v članku zanimiva uporaba besede lemniſci, kar je rodilnik ednine samostalnika *lemniscus*. Bernoulli piše, da *je krivulja četrte razsežnosti* in ima obliko (namenoma uporabljamo starinske črke)

… jacentis notæ octonarii ∞, ſeu complicatæ in nodum faſciæ, ſive lemniſci, *d'un nœud de ruban* Gallis.

Bernoulli s tem pove, da ima omenjena krivulja obliko ležeče osmice, torej ∞, ali v vozel zvitega traku ali *lemniskusa*, obliko vozla francoskega traku. Navedeno besedilo je deloma v francoščini, kar je v reviji zapisano kurzivno. Namesto enačba ali krivulja *četrte razsežnosti* danes rečemo enačba ali krivulja *četrte stopnje*.

Beseda *lemniscus* je bila Bernoulliju všeč in krivuljo je na koncu članka poimenoval *curva lemniscata*, s trakovi okrašena krivulja, Bernoulliju na čast pa jo imenujemo *Bernoullijeva lemniskata*, da jo razlikujemo od drugih lemniskat.

Beseda *lemniscus* je grškega izvora. Stari Grki so zmagovalcu na športnih igrah na glavo pripeli lovorjev venec s posebnim volnenim trakom, ki se imenuje v grščini λημνίσκος. Nekateri besedo izpeljujejo iz λῆμος, kar pomeni *volna*, drugi (na primer [5]) pa iz imena otoka Lemnos, Λῆμνος, kjer naj bi prvi izdelovali take trakove. Beseda *lemniscus* je znana tudi v anatomiji. Ljudje nosimo *lemniskuse* v glavi, ne da bi za to sploh vedeli: *lemniscus medialis*, *lemniscus lateralis* in *lemniscus trigeminalis*.

Besedo *lemniskata* najdemo tudi v imenih nekaterih drugih krivulj, na primer: Boothova lemniskata, Geronova lemniskata in Brualdijeva lemniskata. Ker teh ne bomo obravnavali, bomo Bernoullijevo lemniskato odslej imenovali kar lemniskata.

Lemniskata kot Cassinijev oval

Jakob Bernoulli še ni vedel, da je lemniskati sorodne krivulje, *Cassinijeve ovale*, poznal že Giovanni Domenico Cassini (1625–1712), italijansko-francoski matematik in astronom. Lemniskata je poseben primer Cassinijevih ovalov. Oglejmo si, kako definiramo Cassinijeve ovale.

Znano je, da je *elipsa* množica točk T v ravnini, za katere je *vsota* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 ($G_1 \neq G_2$) te ravnine konstantna. Podobno je *hiperbola* množica točk T v ravnini, za katere je *razlika* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstantna. Kaj pa, če vsoto oziroma razliko nadomestimo s produktom ali kvocientom? Za *kvocient* je odgovor preprost: krožnica, ki ji pravimo *Apolonijeva krožnica*. Če pa vzamemo produkt, dobimo Cassinijev oval. Torej: *Cassinijev oval* je množica točk T v ravnini, za katere je *produkt* razdalj od dveh izbranih točk G_1 in G_2 te ravnine konstanten.

Če označimo $r_1 = |G_1T|$ in $r_2 = |G_2T|$ ter izberemo za konstanto neko dolžino k, potem je enačba Cassinijevega ovala $r_1 \cdot r_2 = k^2$. Pri tem smo vzeli k^2 zato, da uskladimo dimenzije obeh strani enačbe. Točki G_1 in G_2 po zgledu elipse in hiperbole imenujemo *gorišči* ovala. S točkama G_1 in G_2 smo v ravnini vzpostavili tako imenovani *bipolarni koordinatni sistem*. Razdalji r_1 in r_2 določata točki T in T', ki sta si zrcalni glede na premico skozi G_1 in G_2. Razdalji r_1 in r_2 imenujemo *prevodnici* (poimenovanje po [7]) ustrezne točke. Elipsa ima v bipolarnem koordinatnem sistemu enačbo $r_1 + r_2 = 2a$, hiperbola pa $|r_1 - r_2| = 2a$.

Kako pridemo do enačbe Cassinijevega ovala? V koordinatnem sistemu Oxy izberemo gorišči $G_1(-c,0)$ in $G_2(c,0)$. Pri tem je $c = |G_1G_2|/2 > 0$ polovica medgoriščne razdalje. Prevodnici točke $T(x,y)$ sta

$$r_1 = |G_1T| = \sqrt{(x+c)^2+y^2},\ r_2 = |G_2T| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Enačba Cassinijevega ovala v kartezičnih koordinatah je potem

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2} = k^2.$$

Ko odpravimo korene in enačbo preuredimo, dobimo

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = k^4 - c^4.$$

Oval je simetričen glede na os x in glede na os y ter glede na koordinatno izhodišče O, ki je njegovo središče. Oblika ovala je močno odvisna od razmerja k/c. Za $k > c$ je oval enodelna, za $k < c$ pa dvodelna sklenjena krivulja brez samopresečišč.

Zanimiv je mejni primer $k = c$, ko je krivulja sicer enodelna, toda samo sebe preseka v točki O (slika 1). To je ravno *lemniskata*, za katero velja $r_1 \cdot r_2 = c^2$, v pravokotnih kartezičnih koordinatah pa

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Krivulja poteka skozi koordinatno izhodišče, je simetrična glede na obe koordinatni osi in glede na svoje samopresečišče O, kjer se seka pod pravim kotom. Tangenti v O sta premici $y = x$ in $y = -x$. Če vpeljemo *polos* lemniskate $a = c\sqrt{2}$, lahko njeno enačbo zapišemo v obliki, ki smo jo zapisali v uvodu:

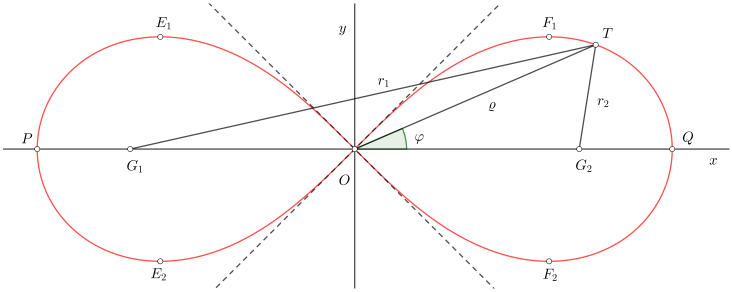
$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2).$$

Lemniskata os x preseka v svojih temenih $P(-a,0)$ in $Q(a,0)$. Točke E_1, E_2, F_1 in F_2 na lemniskati, ki imajo ekstremne ordinate, ustrezajo polarnemu radiju c.

Z uvedbo polarnih koordinat ϱ in φ, tako da je $x = \varrho\cos\varphi$ in $y = \varrho\sin\varphi$, dobimo enačbo lemniskate v polarni obliki: $\varrho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Pri geometrijski konstrukciji posameznih točk Cassinijevih ovalov, in s tem tudi lemniskate, se je treba nasloniti na kak izrek iz evklidske geometrije, ki govori o produktu dveh razdalj, na primer na višinski izrek v pravokotnem trikotniku ali na izrek o potenci točke glede na krožnico.

Lemniskata omejuje dva skladna lista. Njuno skupno ploščino S je prvi pravilno izračunal Giulio Carlo Fagnano dei Toschi (1682–1766) okoli leta



Slika 1. Osnovni elementi Bernoullijeve lemniskate.

1750. Rezultat je presenetljivo preprost: $S = 2c^2 = a^2$. Dolžina lemniskate pa je delala matematikom kar hude težave, ker ni izrazljiva z elementarnimi funkcijami. Bernoulli je znal izraziti diferencial ds loka lemniskate s polarnim radijem ϱ. Velja namreč $ds^2 = \varrho^2\, d\varphi^2 + d\varrho^2$. Iz polarne oblike dobimo najprej z diferenciranjem

$$d\varrho = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\, d\varphi = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{\varrho}\, d\varphi,$$

nato pa

$$d\varrho^2 = \frac{a^4}{\varrho^2}(1 - \cos^2 2\varphi)\, d\varphi^2 = \frac{a^4 - \varrho^4}{\varrho^2}\, d\varphi^2.$$

Nazadnje dobimo preprost rezultat

$$ds = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}}\, d\varrho.$$

Za dolžino s lemniskate je dovolj, da izrazimo dolžino ℓ njenega dela v prvem kvadrantu:

$$\ell = a^2 \int_0^a \frac{d\varrho}{\sqrt{a^4 - \varrho^4}}.$$

S pomočjo substitucij $\varrho = au$ in $\varrho = a\cos\psi$ lahko rezultat zapišemo v oblikah

$$\ell = \frac{a\boldsymbol{\Gamma}^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\mathbf{K}(1/\sqrt{2}),$$

pri čemer je $\boldsymbol{\Gamma}$ Eulerjeva funkcija gama, $\mathbf{K}$ pa popolni eliptični integral prve vrste v Legendrovi obliki:

$$\boldsymbol{\Gamma}(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \quad (p > 0), \quad \mathbf{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} \quad (0 < k < 1).$$

Osnovna lastnost funkcije $\mathbf{\Gamma}$ je njena rekurzivna enačba

$$\mathbf{\Gamma}(p+1) = p\mathbf{\Gamma}(p)\ (p>0).$$

Pri izpeljavi prvega izraza za ℓ uporabimo tudi Eulerjevo funkcijo $\mathbf{B}$ (beta), ki je definirana z izrazom

$$\mathbf{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \quad (p>0, q>0),$$

in formule

$$\mathbf{B}(p,q) = \frac{\mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(q)}{\mathbf{\Gamma}(p+q)},\ \mathbf{\Gamma}(p)\mathbf{\Gamma}(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}\ (0<p<1),\ \mathbf{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Po zgledu četrtine krožnice s polmerom a in dolžino $\pi a/2$ so za lemniskato s polosjo a vpeljali število ϖ (*pi skript*), tako da je $\ell = \varpi a/2$ (več o tem na primer v [1]). Grobi približek za število ϖ je 2,622, natančna vrednost pa se izraža kot

$$\varpi = \frac{\mathbf{\Gamma}^2(1/4)}{2\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2}\mathbf{K}(1/\sqrt{2}).$$

Drug razlog za uvedbo števila ϖ sta analogni obliki za dolžino krožnice in lemniskate pri $a=1$:

$$\pi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\quad \varpi = 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Računanje dolžine lemniskate je bil začetek razvoja teorije eliptičnih integralov in eliptičnih funkcij, s katerimi so se veliko ukvarjali na primer Leonhard Euler (1707–1783), Adrien-Marie Legendre (1752–1833), Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Niels Henrik Abel (1802–1829), Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) in Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897).

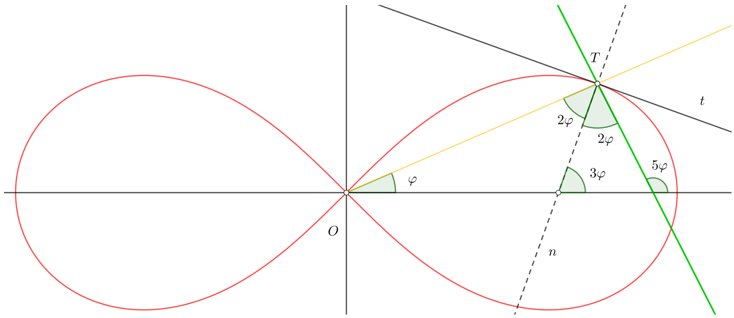
Normala in tangenta na lemniskato ter katakavstika

Za krivuljo, ki je podana v polarni obliki, je kot μ, ki ga tangenta t v točki T s polarnima koordinatama φ in ϱ na krivulji oklepa z daljico OT, dan s splošno formulo

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\varrho}{\varrho'}.$$

Črtica označuje odvajanje polarnega radija po kotu φ. Izpeljavo te pomembne formule v teoriji krivulj najdemo na primer v [7]. Za Bernoullijevo lemniskato je

$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{ctg}2\varphi,$$



Slika 2. Odboj središčnega žarka na lemniskati.

iz česar sledi $\mu = \pi/2 - 2\varphi$, če je T v prvem kvadrantu. Omejitev na prvi kvadrant za naše potrebe popolnoma zadošča. Kot med krajevnim vektorjem in normalo n pa je tako enak 2φ. Normala n seka abscisno os pod kotom 3φ (slika 2).

To pomeni, da normalo in tangento na Bernoullijevo lemniskato v dani točki T konstruiramo s kotom 2φ, ki ima en krak enak TO in vrh v točki T. Obstaja pa še nekaj postopkov za konstrukcijo tangente v točki lemniskate (glej na primer [3, 6]). Še več zanimivih lastnosti lemniskate najdemo v [2]. Avtor jih je navedel in dokazal v [4].

Katakavstika ravninske krivulje je ogrinjača premic nosilk odbitih žarkov, ki iz skupne točke z imenom *radiant* padajo v ravnini krivulje na to krivuljo. Upoštevamo samo prvi odboj na krivulji. Radiant je lahko »v neskončnosti«. Takrat so na krivuljo padajoči žarki med seboj vzporedni v neki smeri. Oblika katakavstike lemniskate je odvisna od radianta. Za žarke, ki na lemniskato padajo vzporedno z eno od njenih simetral, dobimo neomejeno katakavstiko.

Omejeno, srčasto katakavstiko lemniskate dobimo za žarke, ki izhajajo iz njenega središča O. Če je naklonski kot vpadnega žarka φ, je naklonski kot odbitega žarka 5φ (slika 2). Pri tem upoštevamo, kar že vemo: vpadni in odbojni kot žarka sta enaka 2φ.

Žarek naj se odbije v točki T, ki ima polarni kot φ. Ker je naklonski kot odbitega žarka 5φ, ima odbiti žarek v koordinatnem sistemu Oxy enačbo

$$y - \varrho \sin\varphi = \operatorname{tg} 5\varphi(x - \varrho\cos\varphi),$$

iz katere brez težav izpeljemo za računanje ugodnejšo obliko

$$x \sin 5\varphi - y\cos 5\varphi = \varrho \sin 4\varphi.$$

To je enoparametrična družina premic, kjer je φ parameter. Njihovo ogrinjačo dobimo po splošni metodi, ki je opisana na primer v [7]. Zgornjo enačbo odvajamo po parametru φ in rezultat delimo s 5:

$$x\cos 5\varphi + y\sin 5\varphi = \frac{1}{5}\varrho'\sin 4\varphi + \frac{4}{5}\varrho\cos 4\varphi.$$

Dobimo linearni sistem enačb za x in y z determinanto 1. Rezultat je naslednja parametrična oblika katakavstike:

$$x = \frac{4\varrho\cos 4\varphi + \varrho'\sin 4\varphi}{5}\cos 5\varphi + \varrho\sin 4\varphi\sin 5\varphi,$$

$$y = \frac{4\varrho\cos 4\varphi + \varrho'\sin 4\varphi}{5}\sin 5\varphi - \varrho\sin 4\varphi\cos 5\varphi.$$

Če v obeh izrazih na desni strani izpostavimo ϱ in upoštevamo, da je $\varrho'/\varrho = -\operatorname{tg} 2\varphi$, dobimo s pretvorbami trigonometričnih izrazov preprostejšo obliko:

$$x = \frac{1}{5}\varrho(\varphi)(5\cos\varphi - \cos 5\varphi),\quad y = \frac{1}{5}\varrho(\varphi)(5\sin\varphi - \sin 5\varphi).$$

Omejenost dobljene krivulje se lepo vidi iz njene parametrične oblike. Ne pozabimo, da je pri tem $\varrho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ in da φ ni polarni kot točk katakavstike.

Kot zanimivost dodajmo še, da je krivulja

$$x = 5\cos\varphi - \cos 5\varphi,\quad y = 5\sin\varphi - \sin 5\varphi$$

epicikloida s štirimi loki na krožnici z enačbo $x^2 + y^2 = 16$. Potemtakem je katakavstika neke vrste hibrid med lemniskato in to epicikloido.

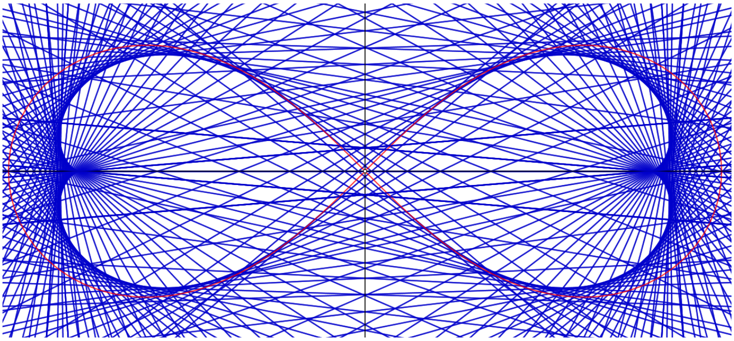
Katakavstika ima osti v točkah $(-4a/5, 0)$ in $(4a/5, 0)$. V okolici središča O se lemniskata in katakavstika dobro ujemata (slika 4).

Ploščina S_k lika, ki ga ograjujeta oba dela katakavstike, je $4a^2/5$, kar pomeni, da pokriva 4/5 obeh listov lemniskate. Do tega rezultata pridemo z naslednjim računom:

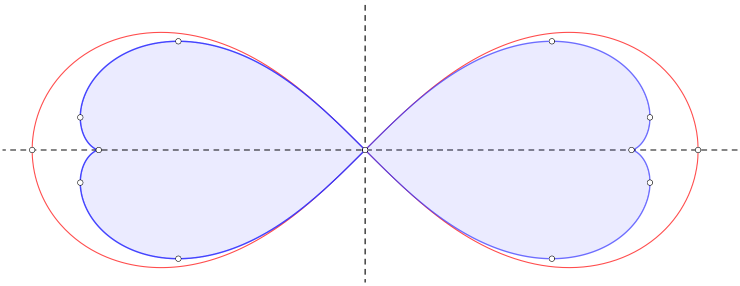
$$S_k = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(xy' - x'y)\,d\varphi = \frac{6a^2}{5}\int_0^{\pi/4}(\cos 2\varphi - \cos 6\varphi)\,d\varphi = \frac{4a^2}{5}.$$

Prav tako dobimo za diferencial ločne dolžine ds katakavstike za središčne žarke v nasprotju s samo lemniskato razmeroma preprost izraz:

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi = \frac{6a}{5}\cdot\frac{\sin 2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$



Slika 3. Družina premic nosilk odbitih žarkov.



Slika 4. Katakavstika lemniskate za središčne žarke omejuje dve srci.

Dolžina ℓ_k njenega loka v prvem kvadrantu je

$$\ell_k = \frac{6a}{5}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{6a}{5}.$$

Ugotovili smo že, da je dolžina lemniskate v prvem kvadrantu

$$\ell = \frac{\varpi a}{2},$$

kar je približno $1{,}311a$ in seveda več kot $6a/5 = 1{,}2a$. Tudi slika 4 kaže, da je katakavstika za spoznanje krajša od lemniskate.

Lepo se da izračunati tudi ekstremne koordinate točk katakavstike. Ekstremne abscise imajo točke s koordinatami

$$x = \pm\frac{4a}{5}, \;\; y = 0 \quad \text{in} \quad x = \pm\frac{a}{8}\sqrt[4]{20}(\sqrt{5}+1), \;\; y = \pm\frac{a}{20}\sqrt{29\sqrt{5}-61},$$

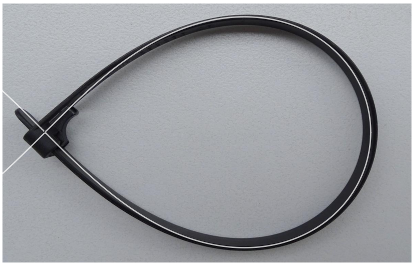
ekstremne ordinate pa točke s koordinatami

$$x = \pm\frac{a}{20}\sqrt{29\sqrt{5}+61}, \;\; y = \pm\frac{a}{8}\sqrt[4]{20}(\sqrt{5}-1).$$

Vse navedene točke so konstruktibilne (z neoznačenim ravnilom in šestilom). Prvi dve točki iz prve skupine sta osti katakavstike.

Za konec

Ekstremne točke katakavstike lemniskate so konstruktibilne. Za samo lemniskato so se matematiki že od samega začetka trudili, da bi njen lok v prvem kvadrantu z geometrijsko konstrukcijo razdelili na dolžinsko enake dele. Omenjeni Fagnano je potrdil, da se lok da razdeliti na dva, tri in pet dolžinsko enakih delov. Na vprašanje, kdaj se ga da razdeliti na n enakih delov, je odgovoril Abel. Odgovor je presenetljiv: natanko tedaj, ko je konstruktibilen pravilni n-kotnik.



Slika 5. Upogib kabelske plastične vezice. Svetla krivulja je lemniskata.

Pravilnost Bernoullijevega računa v članku, ki je bil omenjen na začetku pričujočega prispevka, lahko sami preverimo z upogibom primerno prožnega traku, na primer še ne uporabljene kabelske plastične vezice. Poskrbeti je treba, da se oba konca stikata pod pravim kotom (slika 5). Ujemanje je kar dobro, kljub temu, da vezica ni idealno prožna.

LITERATURA

[1] P. Eymard in J.-P. Lafon, *The number π*, AMS, Providence, 2004.

[2] W. Hess, *Eigenschaften der Lemniskate*, Z. Math. Phys. **26** (1881), 143–144.

[3] A. Ostermann in G. Wanner, *Geometry by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Heidelberg, 2012.

[4] M. Razpet, *Bernoullijeva lemniskata*, študijsko gradivo, dostopno na `www.pef.uni-lj.si/matwww/lemniskata01.pdf`, ogled 7. 11. 2019.

[5] S. Schwartzman, *The words of mathematics*, MAA, Washington, 1994.

[6] J. Steiner, *Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate*, J. Reine Angew. Math. **14** (1835), 80–82.

[7] I. Vidav, *Višja matematika I*, DZS, Ljubljana, 1968.