

VIŠINE, POTENCIAL IN GEOPOTENCIALNE KOTE

doc.dr. Božo Koler

FGG-Oddetek za geodezijo, Ljubljana

Prispelo za objavo: 1998-01-21

Pripravljeno za objavo: 1998-03-20

Izvleček

V članku je predstavljena povezava med merjeno višinsko razliko in težnostnim pospeškom. Na osnovi te povezave je opredeljena razlika potencialov in geopotencialne kote, ki predstavljajo osnovo za izračun višin točk v različnih višinskih sistemih.

Ključne besede: geopotencialne kote, nivojska ploskev, potencial, razlika potencialov, težnostni pospešek, višinska razlika

1 UVOD

Višine in višinske razlike imajo geometrični in fizikalni pomen. Običajno si višine predstavljamo kot vertikalno oddaljenost neke točke nad neko primerjalno ploskvijo. V tem primeru je višina opredeljena kot geometrična količina. Iz praktičnih izkušenj tudi vemo, da imata dve točki isto višino, kadar voda med tema dvema točkama miruje. To pomeni, da ti dve točki ležita na isti nivojski ploskvi in da višinska razlika med dvema točkama predstavlja proporcionalno mero razliki potencialov. Tako dobimo fizikalni pomen višine oziroma višinske razlike. Kateri pomen (geometrični ali fizikalni) višine oziroma višinske razlike je bolj pomemben, je predvsem odvisno od namena uporabe višin oziroma višinskih razlik. Za večino naravnih in umetnih dinamičnih procesov, ki potekajo na Zemlji (gibanje vod, vozil in dinamika zgrajenih objektov), je primernejša fizikalna interpretacija višine in višinske razlike. Za potrebe geodezije oziroma določitve položaja točk v tridimenzionalnem prostoru pripisujemo čedalje večji pomen geometrični interpretaciji višine oziroma višinske razlike. Geometrična interpretacija je dobila še posebno veljavo tudi z uvedbo GPS-jeve tehnologije v geodetsko izmero.

2 POTENCIAL IN RAZLIKA POTENCIALA

V vsaki točki na površini Zemlje deluje vektor sile teže, ki je pravokoten na nivojsko ploskev skozi to točko. Tako ima vsaka točka točno določen potencial. Vse točke, ki imajo enak potencial, ležijo na isti nivojski ploskvi. V geodeziji nas zanima povezava med težnostnim pospeškom - g in merjeno višinsko razliko - dh . Vektorskemu polju $W(x, y, z)$ težnostnega pospeška je za lažjo obravnavo prirejeno skalarno polje, tako da velja:

$\vec{g} = \text{grad } W$.

Velikost vektorja sile teže je težnostni pospešek g , za katerega velja:

$$g = \frac{dW}{dh}. \quad 2.1$$

Višinska razlika med točkama je določena z dolžino navpičnice med nivojskima ploskvama, za kateri velja $W(x,y,z) = \text{konstanta}$ (glej sliko 2.2). Negativni predznak v enačbi pomeni, da sta veličini g in višinska razlika (sprememba višine) dh obratnosorazmerni. Med dvema nivojskima ploskvama, ki potekata skozi točki P_1 in P_2 , s konstantnima potencialoma W_{P_1} in W_{P_2} , obstaja tudi konstantna razlika potencialov ($W_{P_1} - W_{P_2}$). Ti dve nivojski ploskvi sta razmaknjeni za dh . Zaradi nepravilno porazdeljenih mas v notranjosti Zemlje je težnostni pospešek g na nivojski ploskvi spremenljivka. Spremembo težnostnega pospeška (Δg) lahko z veliko natančnostjo merimo z gravimetri. Enota za Δg , ki se uporablja v geodeziji, je $1 \text{ gal} = 10^{-2} \text{ m s}^{-2}$ in ni zajeta v mednarodnem merskem sistemu enot SI. Če zapišemo enačbo 2.1 v obliki

$$dW = -g dh = \text{konstanta} \quad 2.2$$

in upoštevamo, da se g spreminja, potem je jasno, da se obratnosorazmerno spreminja tudi razmik med nivojskima ploskvama dh . Iz tega seveda sledi, da sosednje nivojske ploskve med seboj niso vzporedne. Če je g večji, je razdalja med nivojskima ploskvama dh manjša (Bretterbauer, 1986).

Če želimo točkam določiti nedvoumne in od poti niveliranja neodvisne višine, potem moramo definicijo višin povezati s potencialom. Zanima nas seveda razlika potencialov, ki je neodvisna od poti, pri čemer se pojavi vprašanje, ali lahko iz podatkov o merjenem težnostnem pospešku in nivelirani višinski razliki, določimo razliko potencialov. Prvi je odgovoril na to vprašanje že Helmert leta 1884. Problem določitve razlike potencialov iz merjenih višinskih razlik in težnostnega pospeška je najprej obravnaval na enem stojišču instrumenta.

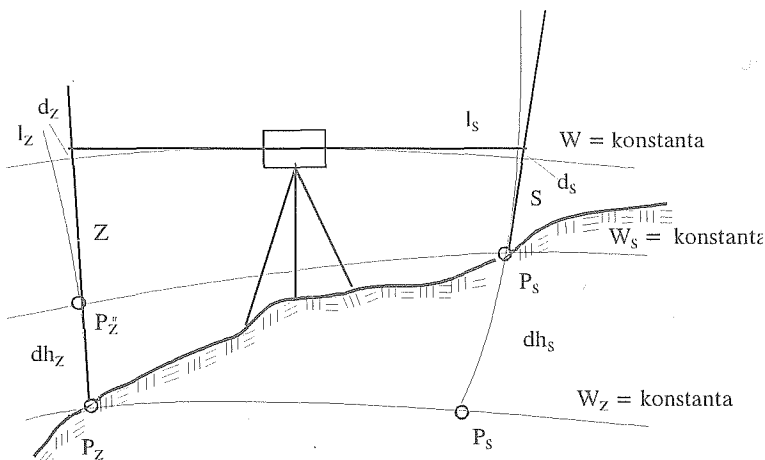
Merjeno višinsko razliko med točkama P_z in P_s dobimo kot razliko odčitkov (Z, S) na vertikalno postavljeni nivelmanski lati na točkah P_z in P_s , pri horizontalni vizuri. V tem primeru je vizura tangenta na nivojsko ploskev, ki poteka skozi optični center objektiva. Za razliko potencialov med točkama P_z in P_s velja (Leismann et al., 1992):

$$W_s - W_z = - \int_{P_z}^{P_s} g dh = - (l_z \bar{g}_z - l_s \bar{g}_s), \quad 2.3$$

kjer so:

l_z, l_s ... dolžina navpičnice skozi točki P_z, P_s med nivojskimi ploskvami ($W_z = \text{konstanta}, W_s = \text{konstanta}$ in $W = \text{konstanta}$)

$\bar{g}_z, \bar{g}_s$... ustrezna srednja vrednost težnostnega pospeška na ustreznem delu navpičnice.



Slika 2.1

Iz slike 2.1 vidimo, da lahko rahlo ukrivljena dela navpičnice zamenjamo z odčitkoma na nivelmanskimi latic Z in S, ki ju zmanjšamo za vrednost d_z in d_s . Po Helmertu je pogrešek, ki ga pri tem naredimo v nivelmanski liniji, zanemarljivo majhen. Zato lahko vrednosti (Leismann et al., 1992)

$$\overline{g_z} = \frac{1}{l_z} \int g dh \quad \text{in} \quad \overline{g_s} = \frac{1}{l_s} \int g dh \quad 2.4$$

aproximiramo z vrednostjo, ki jo dobimo na polovici odčitkov na nivelmanskimi latic, saj lahko pri majhnih višinskih razlikah vzamemo, da se težnostni pospešek zmanjšuje linearno z višino. Tako lahko enačbo 2.3 zapišemo v naslednji obliki:

$$W_s - W_z \cong -(Z - d_z) \overline{g_z} + (S - d_s) \overline{g_s} \quad 2.5$$

Če enačbo 2.5 preoblikujemo tako, da so posamezni členi izraženi kot vsota oziroma razlika odčitkov na nivelmanskimi latic (Z in S), srednjih vrednosti težnostnega pospeška ($\overline{g_z}$, $\overline{g_s}$) in vrednosti d_z in d_s , dobimo:

$$W_s - W_z = -\frac{(Z - S)}{2} (\overline{g_z} + \overline{g_s}) - \frac{(Z + S)}{2} (\overline{g_z} - \overline{g_s}) + \frac{(d_z - d_s)}{2} (\overline{g_z} + \overline{g_s}) + \frac{(d_z + d_s)}{2} (\overline{g_z} - \overline{g_s}). \quad 2.6$$

Če niveliramo iz sredine, kar je predpisano za precizni nivelman, potem je razlika ($d_z - d_s$) zanemarljivo majhna, ker je ukrivljenost nivojske ploskve med stojiščem instrumenta in stojišči nivelmanskimi latic (spredaj, zadaj) skoraj enaka. Podobno velja tudi za nivelmansko linijo, tako da lahko tretji člen v enačbi 2.6 izpustimo. Na osnovi raziskav, ki so jih opravili Baeschlin, Ramsayer in Zeger, so ugotovili, da sta zanemarljivo majhna tudi drugi in četrti člen omenjene enačbe, torej vrednost $(\overline{g_z} - \overline{g_s})$.

Tako dobimo:

$$W_s - W_z = -\frac{(Z - S)}{2} (\overline{g_z} + \overline{g_s}). \quad 2.7$$

Poleg tega velja za razliko potencialov $W_s - W_z$:

$$W_s - W_z = dh_z g_z'' = dh_s g_s'', \quad 2.8$$

kjer so:

$dh_z, dh_s \dots$ oddaljenost med nivojskima ploskvama $W_z = \text{konstanta}$ in $W_s = \text{konstanta}$ v točki P_z oziroma P_s

$g_z'', g_s'' \dots$ srednja vrednost težnostnega pospeška na intervalu $P_z - P_z''$ in $P_s - P_s''$ (glej sliko 2.1).

Če vzamemo za:

$$\bar{g} = \frac{1}{2} (\bar{g}_z + \bar{g}_s) \quad 2.9$$

in izenačimo enačbi 2.7 in 2.8, ter poiščemo rešitev enačbe za razliko odčitkov na nivelmanskimi lati, potem dobimo enačbi:

$$-(Z - S) \cong dh_z \frac{g_z''}{g} \quad \text{in} \quad -(Z - S) \cong dh_s \frac{g_s''}{g}. \quad 2.10$$

Faktorjev merila, $\frac{g_z''}{g}$ in $\frac{g_s''}{g}$, ni treba upoštevati, ker je njihov vpliv manjši od 1×10^{-8} .

Tako lahko enačbi 2.10 zapišemo z zadovoljivo natančnostjo v obliki:

$$dh_z \cong -(Z - S) \cong dh_s. \quad 2.11$$

To pomeni, da lahko razliko odčitkov na nivelmanskimi latic ($Z - S$), na enem stojšču instrumenta, z zadovoljivo natančnostjo aproksimiramo z oddaljenostjo med nivojskima ploskvama, ki potekata skozi izmenišči nivelmanskih lat. Razliko potencialov med izmeniščema nivelmanskih lat dobimo, če pomnožimo merjeno višinsko razliko s težnostnim pospeškom na stojšču (glej enačbo 2.9). Za posamezno stojšče je ta vrednost enaka težnostnemu pospešku na višini $\frac{Z+S}{4}$ nad stojščem

instrumenta (Leismann et al., 1992). Ker je merjenje težnostnega pospeška v tej točki nepraktično, lahko po Helmertu vzamemo za težnostni pospešek v enačbi 2.9 tudi aritmetično sredino težnostnih pospeškov, ki smo ju izmerili na izmeniščih nivelmanskih lat. Na osnovi omenjenih enačb lahko vidimo, da lahko razliko potencialov med točkama P_z in P_s določimo na osnovi podatkov o merjenem težnostnem pospešku in nivelirani višinski razliki.

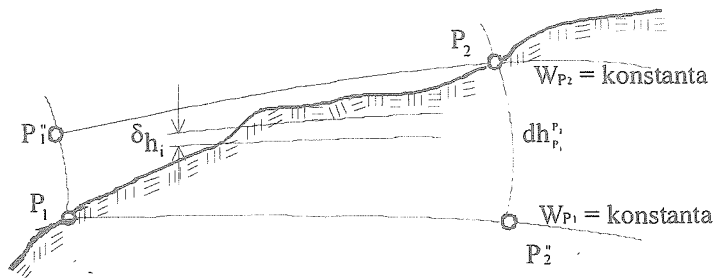
Na podoben način lahko določimo razliko potencialov v nivelmanski liniji med točkama P_1 in P_2 . Če označimo z δh_i višinsko razliko na enem stojšču instrumenta (odčitek na lati zadaj - odčitek na lati spredaj), potem je merjena višinska razlika med točkama P_1 in P_2 enaka:

$$dh_{P_1}^{P_2} = \sum_{i=P_1}^{P_2} \delta h_i.$$

Ker nivojske ploskve težnostnega polja niso med seboj vzporedne in ker sta vrhunjenje libele in lega kompenzatorja nivelirja tesno povezana s težnostnim poljem, višine točk niso določljive neodvisno od poti niveliranja. Iz slike 2.2 lahko vidimo, da je nivelirana višinska razlika odvisna od poti. Če si zamislimo niveliranje od P_1 prek P_2'' do P_2 ali od

P_1 prek P_1'' do P_2 , dobimo različen rezultat, ker je nivelman vzdolž nivojskih ploskev P_1P_2'' in $P_1''P_2$ enak nič. Neodvisna od poti je samo razlika potencialov ($W_{P_2} - W_{P_1}$), ki jo dobimo z integriranjem enačbe 2.2. V praksi integral aproksimiramo z vsoto in tako dobimo (Bretterbauer, 1986):

$$W_{P_2} - W_{P_1} = - \int_{P_1}^{P_2} g \, dh_{P_i}^{P_i} \cong \sum_{i=P_1}^{P_2} g_i \delta h_i. \quad 2.12$$



Slika 2.2

Na sliki 2.2 so:

δh_i ... višinska razlika med dvema izmeniščema nivelmanskih lat (razlika odčitkov na lati zadaj in lati spredaj)

$dh_{P_1}^{P_1}$... višinska razlika med točkama P_1 in P_2 .

3 GEOPOTENCIALNE KOTE

V predhodnem poglavju smo ugotovili, da lahko razliko potencialov med točkama P_1 in P_2 določimo na osnovi podatkov o merjenem težnostnem pospešku in nivelirani višinski razliki. Takšen nivelman lahko imenujemo geopotencialni nivelman. Geopotencialni nivelman je opredeljen kot nivelman, ki povezuje geometrični nivelman s podatki o merjenem težnostnem pospešku. Razlike potencialov posameznih točk, glede na ničelno nivojsko ploskev - geoid, je francoski geodet P. Tardi imenoval geopotencialne kote - (C). Tako velja za točko P_i :

$$C_{P_i} = W_{P_i^0} - W_{P_i} = \int_{P_i^0}^{P_i} g_i \, dh_{P_i^0}^{P_i}, \quad 3.1$$

kjer je:

$W_{P_i^0}$... potencial ničelne nivojske ploskve - geoida

W_{P_i} ... potencial nivojske ploskve skozi točko P_i

P_i^0 ... točki P_i prirejena točka na ničelni nivojski ploskvi - geoidu.

V praksi integral aproksimiramo z vsoto in tako dobimo:

$$C_{P_i} \cong \sum_{i=P_i^0}^{P_i} g_i \delta h_i, \quad 3.2$$

kjer je:

δh_i ... višinska razlika na i-tem stojišču instrumenta

g_i ... srednja vrednost težnostnega pospeška med izmeniščema i in i-1, torej:

$\delta h_i \dots$ višinska razlika na i -tem stojšču instrumenta

$g_i \dots$ srednja vrednost težnostnega pospeška med izmeniščema i in $i-1$, torej:

$$g_i = \frac{g_{i-1}^{izm} + g_i^{izm}}{2}.$$

Če določimo, da je višina ničelne nivojske ploskve oziroma geoida enaka 0, potem nam razlika potencialov predstavlja naravno mero za višine točk na zemeljski površini. Enota za geopotencialne kote je Nm/kg, kar pomeni delo na enoto mase. Leta 1954 je Mednarodna zveza geodetov na zasedanju v Rimu sprejela, da je enota za geopotencialne kote $1 \text{ kgal m} = 1 \text{ gpu}$ (geopotencialna enota) = $10 \text{ Nm/kg} = 10 \text{ m}^2/\text{s}^2$. Razlike geopotencialnih kot, med reperjema P_1 in P_2 , izračunamo po enačbi (Bilajbegović et al., 1989):

$$\Delta C_{P_1}^{P_2} = \overline{g_{P_1}^{P_2}} dh_{P_1}^{P_2},$$

$\overline{g_{P_1}^{P_2}}$ izračunamo po enačbi:

$$\overline{g_{P_1}^{P_2}} = \frac{g_{P_1} + g_{P_2}}{2},$$

kjer so:

$g_{P_1} \dots$ težnostni pospešek na reperju P_1

$g_{P_2} \dots$ težnostni pospešek na reperju P_2

$dh_{P_1}^{P_2} \dots$ merjena višinska razlika med reperjema P_1 in P_2 .

4 ZAKLJUČEK

Čeprav za geopotencialne kote velja, da nedvoumno opredelijo višine točk in je višina točk določena neodvisno od poti niveliranja, so za večino uporabnikov neprimerne, saj predstavljajo povsem fizikalno opredeljene višine točk. Glavna pomanjkljivost geopotencialnih kot je, da jih ne moremo geometrično interpretirati in niso izražene v metrih, kar je zelo bistveno za številne uporabnike. Ti dve glavni pomanjkljivosti geopotencialnih kot lahko odpravimo na ta način, da geopotencialne kote delimo s težnostnim pospeškom v določeni točki. Tako nam geopotencialne kote predstavljajo osnovo za določitev višin točk v različnih višinskih sistemih (ortometrične višine in normalne višine), razen seveda za določitev elipsoidnih višin točk, ki so povsem geometrično opredeljene višine točk.

Literatura:

Bilajbegović, A. et al., *Istraživanja o izboru sustava visina za NVT SFRJ s obzirom na točnost ubrzanja sile teže*. Geodetski list, Zagreb, 1989, letnik 43 (66), št. 4-6, str. 97-106

Bretterbauer, K., *Das Höhenproblem der Geodäsie*, Oesterreichische Zeitschrift fuer Vermessungswesen und Photogrammetrie, Dunaj, 1986, letnik 74, št. 4, str. 205-215

Leismann, M. et al., *Untersuchungen verschiedener Höhensysteme, dargestellt an einer Testschleife in Rheinland-Pfalz*. Muenchen, DGK-Reihe B, 1992, str. 3-30

Recenzija: dr. Miran Kuhar
doc.dr. Bojan stopar