Rešene naloge iz Afine in projektivne geometrije

J. Kališnik

zapiski vaj na FMF UL
2017/2018

NASLOV: Rešene naloge iz Afine in projektivne geometrije
AVTOR: Jure Kališnik
IZDAJA: 1. izdaja
ZALOŽNIK: samozaložba Jure Kališnik, Ljubljana
LETO IZIDA: 2019

CENA: publikacija je brezplačna
NATIS: elektronsko gradivo, dostopno na naslovu:
http://www.fmf.uni-lj.si/~kalisnik/apg_vaje.pdf

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID=298833408

ISBN 978-961-290-041-0 (pdf)

Uvod

To so zapiski vaj pri predmetu Afina in projektivna geometrija za študente matematike iz študijskega leta 2017/2018. Vsebina se navezuje na zapiske predavanj profesorja Vavpetiča, ki je zadnja leta predavatelj pri tem predmetu.

Ljubljana 2019
Jure Kališnik

Kazalo

1 Izometrije evklidskih prostorov

Začeli bomo s študijem izometrij evklidske ravnine. To so bijekcije $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki zadoščajo pogoju

$$d(T_1, T_2) = d(\tau(T_1), \tau(T_2))$$

za vsak par točk $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$. Glede na geometrični pomen je vsaka izometrija ene izmed oblik:

· translacija za nek vektor,
· rotacija okoli neke točke,
· zrcaljenje čez neko premico,
· zrcalni zdrs čez neko premico.

V nadaljevanju bomo spoznali, s kakšnimi predpisi lahko opišemo izometrije evklidske ravnine. Kot bomo videli, lahko vsako izometrijo $\mathbb{R}^2$ enolično zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $Q \in \mathrm{O}(2)$ ortogonalna matrika velikosti 2×2 in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ nek poljuben vektor.

(1) Zapiši predpisa za naslednji izometriji evklidske ravnine:

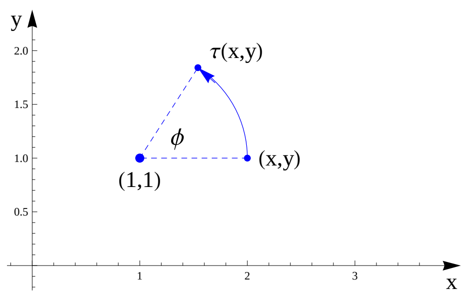
(a) rotacija za kot $\phi = 45°$ okoli točke $(1, 1)$,

(b) zrcaljenje čez premico $x + y = 1$.

Rešitev: (a) Najprej se spomnimo, kako se rotira vektorje v ravnini okoli koordinatnega izhodišča. Rotacijo za kot $\phi \in (0, 2\pi)$ v pozitivni smeri lahko predstavimo z rotacijsko matriko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Rotacijske matrike so ortogonalne in imajo determinanto enako 1. Obratno pa vsaka 2×2 ortogonalna matrika, ki ima determinanto enako 1, ustreza neki rotaciji R_ϕ, ali pa je identična matrika.



Pri rotaciji okoli poljubne točke si lahko pomagamo s to matriko na naslednji način. Če želimo zavrteti točko (x, y) okoli točke $(1, 1)$, moramo najprej zarotirati vektor $(x-1, y-1)$ (to je vektor od središča vrtenja do točke) s pomočjo matrike R_ϕ, nato pa temu prišteti še vektor $(1, 1)$. Isti postopek deluje pri rotaciji okoli poljubne točke. Od tod dobimo predpis

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \cdot x - \sin\phi \cdot y + 1 - \cos\phi + \sin\phi \\ \sin\phi \cdot x + \cos\phi \cdot y + 1 - \cos\phi - \sin\phi \end{bmatrix}.$$

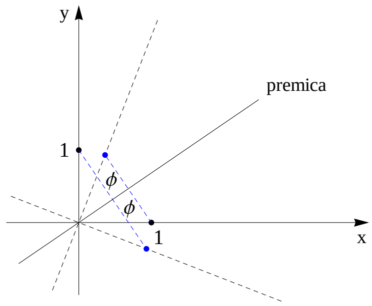
Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\cos\phi+\sin\phi \\ 1-\cos\phi-\sin\phi \end{bmatrix}.$$

Če vstavimo $\phi = 45°$, dobimo, da je

$$\tau(x,y) = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+1, \tfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)+1-\sqrt{2}).$$

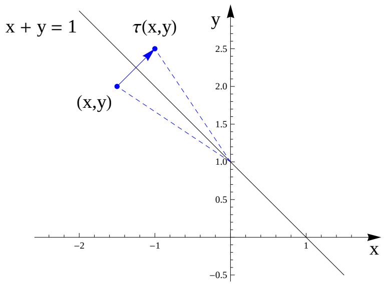
(b) Tudi tokrat bomo najprej pogledali, kako lahko predstavimo zrcaljenje čez premico, ki gre skozi izhodišče in ima smer $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$ za nek $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$.



S slike je razvidno, da se točka $(1,0)$ preslika v točko $(\cos 2\phi, \sin 2\phi)$, točka $(0,1)$ pa v točko $(\sin 2\phi, -\cos 2\phi)$. Matrika za zrcaljenje čez premico s smerjo $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$ je torej

$$Z_\phi = \begin{bmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{bmatrix}.$$

Premica $x+y=1$ ne poteka skozi izhodišče, z abscisno osjo pa oklepa kot $\phi = -\frac{\pi}{4}$.



Da bi izračunali predpis, najprej izberimo neko točko na premici, npr. točko $(0,1)$. Zrcalno sliko točke (x,y) čez premico $x+y=1$ potem dobimo tako, da najprej z matriko $Z_{-\frac{\pi}{4}}$ prezrcalimo vektor $(x, y-1)$ nato pa prištejemo še vektor $(0,1)$.

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y+1 \\ -x+1 \end{bmatrix}.$$

Ta predpis lahko zapišemo tudi v obliki

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da lahko poljubno zrcaljenje zapišemo kot kompozicijo translacije in pa zrcaljenja čez neko premico skozi izhodišče. □

(2) Geometrično opiši naslednje izometrije evklidske ravnine:

(a) $\tau(x,y) = (-y+1, x-1)$,

(b) $\tau(x,y) = (y-2, x+2)$,

(c) $\tau(x,y) = (x+2, -y)$.

Rešitev: (a) Najprej zapišimo preslikavo τ kot kompozicijo linearne preslikave in translacije

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

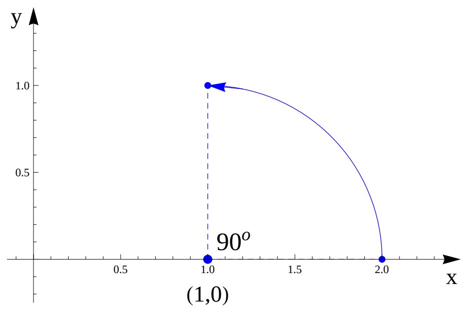
Ker je linearni del preslikave τ rotacija

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

je preslikava τ rotacija za kot $\phi = 90^\circ$ okoli neke točke v ravnini. Ta točka je ravno fiksna točka preslikave τ, zato zanjo velja $\tau(x,y) = (x,y)$, oziroma:

$$\begin{aligned} -y+1 &= x, \\ x-1 &= y. \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je točka $(1,0)$, kar pomeni, da preslikava τ predstavlja rotacijo za kot $\phi = 90^\circ$ okoli točke $(1,0)$.



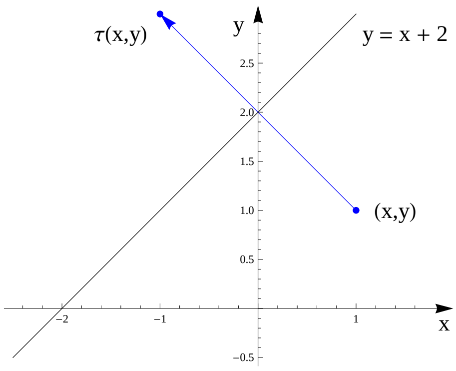
(b) Najprej preslikavo τ zapišimo v obliki

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Linearni del preslikave τ je zrcaljenje

$$Z_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

čez simetralo lihih kvadrantov. Vektor translacije $\vec{a} = (-2, 2)$ je pravokoten na to simetralo, zato imamo opravka z zrcaljenjem čez neko premico, ki je vzporedna simetrali lihih kvadrantov. Ta premica je ravno množica točk, ki jih preslikava τ fiksira, vedno pa na njej leži točka $\frac{1}{2}\vec{a}$. V našem primeru gre torej za zrcaljenje čez premico $y = x + 2$.



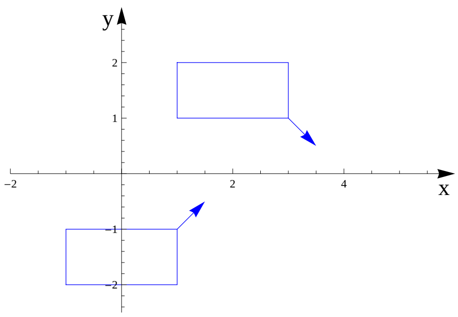
(c) Sedaj lahko zapišemo preslikavo τ v obliki

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del preslikave τ je tokrat zrcaljenje

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

čez abscisno os, preslikava τ pa je kompozicija tega zrcaljenja in pa translacije vzdolž abscisne osi. Kadar kaže translacijski vektor v smeri premice, čez katero zrcalimo, imamo opravka s tako imenovanim zrcalnim zdrsom.



Za konec si poglejmo še klasifikacijo izometrij evklidske ravnine.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. V tem primeru je $Q = \mathrm{Izom}$.

2. Rotacije:

Rotacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = R_\phi \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\phi \in (0, 2\pi)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Takšna preslikava ustreza rotaciji za kot ϕ okoli točke v ravnini, ki je določena z enačbo $\tau(\vec{x}) = \vec{x}$.

3. Zrcaljenja:

Zrcaljenja so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, vektor $\vec{a}$ pa je pravokoten na smer $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$. Takšna preslikava ustreza zrcaljenju čez premico s smerjo $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$, ki gre skozi točko $\frac{\vec{a}}{2}$.

4. Zrcalni zdrsi:

Zrcalni zdrsi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\phi \in [-\pi/2, \pi/2)$, vektor $\vec{a}$ pa ni pravokoten na smer $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$. Takšna preslikava ustreza kompoziciji zrcaljenja čez neko premico p s smerjo $\vec{s} = (\cos\phi, \sin\phi)$ ter translacije vzdolž te premice. Dana premica je določena s pogojem $\tau(p) = p$. □

Množica vseh izometrij evklidske ravnine tvori grupo

$$\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2) = \{\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid \tau \text{ je izometrija}\}.$$

Simbolično lahko vsako izometrijo predstavimo s parom $(Q, \vec{a})$, kjer je $Q \in \mathrm{O}(2)$ in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Enota je par $(\mathrm{I}, 0)$, produkt in inverz pa se v tem zapisu izražata s formulama:

$$(Q_1, \vec{a}_1)(Q_2, \vec{a}_2) = (Q_1 Q_2, Q_1 \vec{a}_2 + \vec{a}_1),$$
$$(Q, \vec{a})^{-1} = (Q^{-1}, -Q^{-1}\vec{a}).$$

Translacije tvorijo podgrupo edinko grupe $\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2)$, ki je izomorfna grupi $\mathbb{R}^2$, izometrije, ki ohranjajo izhodišče, pa podgrupo $\mathrm{O}(2)$ grupe $\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2)$, ki pa ni podgrupa edinka. Ker lahko vsako izometrijo enolično zapišemo kot kompozicijo linearne izometrije in translacije, je grupa $\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2)$ izomorfna semidirektnemu produktu grup $\mathrm{O}(2)$ in $\mathbb{R}^2$, oziroma

$$\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2) \cong \mathrm{O}(2) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

Grupa izometrij $\mathrm{Izom}(\mathbb{R}^2)$ je tridimenzionalna, sestavljena pa je iz dveh komponent, ki sta obe homeomorfni $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

(3) Poišči vse izometrije evklidske ravnine, ki ohranjajo dane množice:

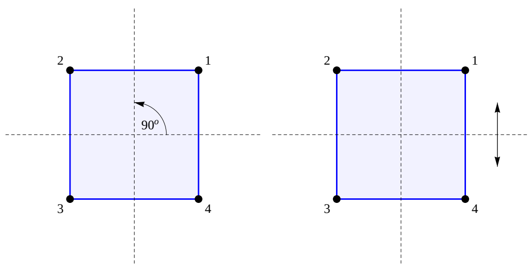
(a) kvadrat $[-1, 1] \times [-1, 1]$,

(b) hiperbolo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$,

(c) kvadratno mrežo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.

Rešitev: Naj bo $L \subset \mathbb{R}^2$ poljubna podmnožica. *Grupa simetrij* množice L je potem grupa vseh izometrij $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, za katere je $\tau(L) = L$. V naslednjih primerih bomo izračunali grupe simetrij lika, krivulje in diskretne podmnožice $\mathbb{R}^2$.

(a) Obstaja osem izometrij kvadrata. Identiteta, tri rotacije in štiri zrcaljenja. Vsaka izometrija kvadrata slika oglišča v oglišča, kar pomeni, da jo lahko opišemo s permutacijo oglišč. Izkaže se, da lahko vsako izmed teh izometrij izrazimo z eno rotacijo in z enim zrcaljenjem.



Izberemo lahko na primer:

- $a = (1\,2\,3\,4) \ldots$ rotacija za $90°$ v pozitivni smeri,
- $b = (1\,4)(2\,3) \ldots$ zrcaljenje preko vodoravnice.

Preostale netrivialne izometrije so potem:

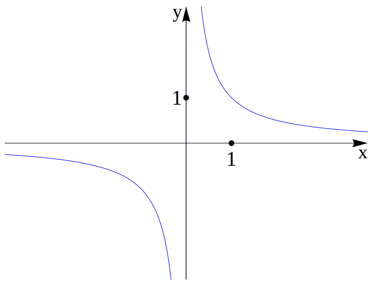
- $a^2 = (1\,3)(2\,4) \ldots$ rotacija za $180°$,
- $a^3 = (1\,4\,3\,2) \ldots$ rotacija za $270°$,
- $ab = (1\,3)(2)(4) \ldots$ zrcaljenje preko simetrale sodih kvadrantov,
- $a^2b = (1\,2)(3\,4) \ldots$ zrcaljenje preko navpičnice,
- $a^3b = (2\,4)(1)(3) \ldots$ zrcaljenje preko simetrale lihih kvadrantov.

Grupi izometrij kvadrata rečemo diedrska grupa reda 8 in jo označimo z D_8. Dejstvo, da lahko vsako izometrijo izrazimo z a in b, pomeni, da je grupa D_8 generirana z elementoma a in b, ki pa še zadoščata nekim pogojem. Reda elementov a in b nam dasta pogoja $a^4 = 1$ in $b^2 = 1$. Poleg teh dveh pa velja še zveza $bab = a^3$. Kompaktno lahko te pogoje strnemo v naslednjem zapisu

$$D_8 = \{a, b \,|\, a^4 = 1,\, b^2 = 1,\, bab = a^3\}.$$

Opomba: V splošnem ima grupa izometrij pravilnega n-kotnika $2n$ elementov. Poleg identične preslikave ima še $n-1$ rotacij in pa n zrcaljenj. Označimo jo z D_{2n} in ji rečemo diedrska grupa reda $2n$. V primeru $n = 3$ je grupa D_6 izomorfna grupi S_3.

(b) Sedaj iščemo vse preslikave oblike $\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a}$, ki preslikajo hiperbolo nazaj nase.

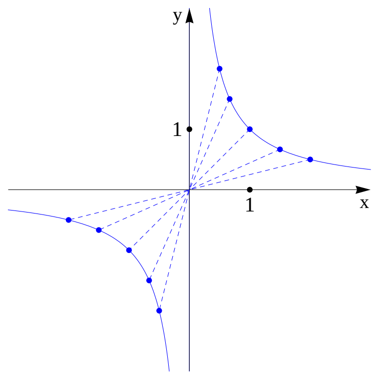


Če hočemo, da izometrija τ preslika hiperbolo nazaj nase, mora τ tudi obe asimptoti preslikati nazaj nase (lahko ju zamenja). Od tod sledi, da τ ohranja izhodišče, kar pomeni, da je $\vec{a} = 0$. Torej nam ostanejo možnosti:

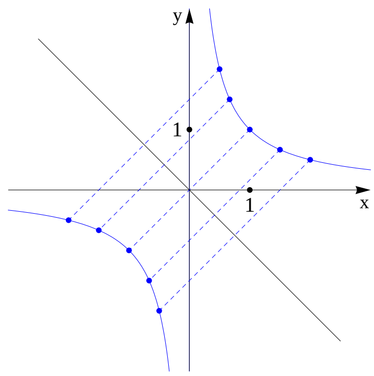
$$\tau(\vec{x}) = R_\phi \vec{x},$$
$$\tau(\vec{x}) = Z_\phi \vec{x},$$

za nek ϕ. Izmed rotacij pride v poštev rotacija R_π za kot $180°$, izmed zrcaljenj pa zrcaljenji $Z_{-\frac{\pi}{4}}$ in $Z_{\frac{\pi}{4}}$ čez simetrali sodih oziroma lihih kvadrantov. Hiperbolo seveda ohranja tudi identična preslikava. Imamo torej štiri preslikave, ki ohranjajo hiperbolo:

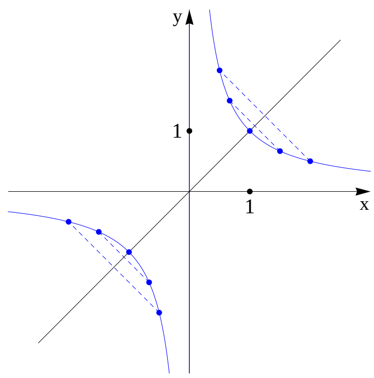
1. Identična preslikava $\tau(x, y) = (x, y)$,
2. Rotacija za kot π okoli koordinatnega izhodišča $\tau(x, y) = (-x, -y)$,



3. Zrcaljenje preko simetrale sodih kvadrantov $\tau(x, y) = (-y, -x)$,

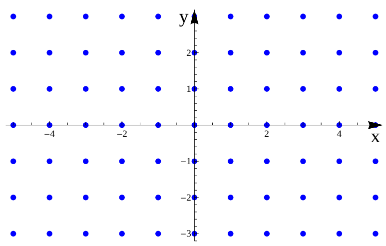


4. Zrcaljenje preko simetrale lihih kvadrantov $\tau(x, y) = (y, x)$.



Grupa simetrij hiperbole je torej izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

(b) Sedaj si poglejmo kvadratno mrežo $K = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$.



Vsaka simetrija te mreže je oblike

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

za primerno izbrana števila a, b, c, d, e in f, ki morajo zadoščati pogoju, da τ preslika K nazaj nase. Iz pogoja, da je

$$\tau(0,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

spet element mreže K sledi, da sta e in f celi števili. Podobno sledi iz pogojev $\tau(1,0) \in K$ in $\tau(0,1) \in K$, da so tudi a, b, c in d cela števila. Če hočemo, da je matrika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ortogonalna in da ima celoštevilske koeficiente imamo na voljo samo osem možnosti. Poleg identitete so to še štiri zrcaljenja

$$Z_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{-\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, Z_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in tri rotacije

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, R_{\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, R_{-\frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Simetrije mreže K, ki so oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x},$$

kjer je Q ena izmed omenjenih osmih matrik, tvorijo podgrupo vseh simetrij mreže K. Ustrezajo ravno tistim simetrijam mreže, ki ohranjajo izhodišče in tvorijo grupo, ki je izomorfna diedrski grupi D_8. Vsako simetrijo mreže pa lahko zapišemo kot kompozicijo translacije za nek vektor s celoštevilskima komponentama in pa simetrije, ki ohranja izhodišče. $\square$

(4) Naj bosta τ_1 in τ_2 rotaciji evklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$ okoli točk $T_1(1,0)$ in $T_2(-1,0)$. Ali je grupa izometrij $\mathbb{R}^2$, ki jo generirata τ_1 in τ_2, končna?

Rešitev: Zapišimo najprej predpisa danih rotacij:

$$\begin{aligned} \tau_1(x,y) &= (-y+1, x-1), \\ \tau_2(x,y) &= (-y-1, x+1). \end{aligned}$$

Grupa izometrij, ki jo generirata τ_1 in τ_2, sestoji iz vseh možnih kompozitumov celoštevilskih potenc τ_1 in τ_2. Da pokažemo, da je ta grupa neskončna, je dovolj konstruirati izometrijo τ neskončnega reda, kar pomeni, da je $\tau^k \neq \mathrm{id}$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$.

Tipični primeri takšnih izometrij so translacije. Če komponiramo dve rotaciji za kota ϕ_1 in ϕ_2, dobimo rotacijo za kot $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Od tod dobimo idejo, da se splača poskusiti z izometrijo

$$\tau = \tau_2^{-1} \circ \tau_1.$$

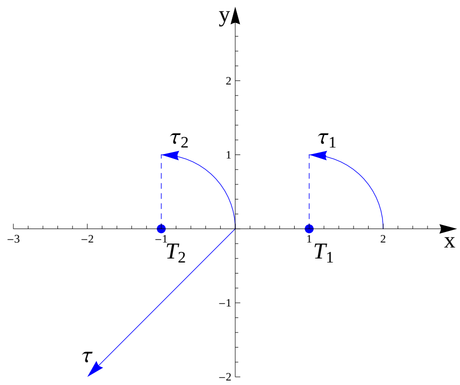
Ker je $\tau_2^{-1}(x,y) = (y-1, -x-1)$, je

$$\tau(x,y) = \tau_2^{-1}(-y+1, x-1) = (x-2, y-2).$$

Vidimo torej, da je τ translacija za vektor $\vec{a} = (-2, 2)$, kar pomeni, da je

$$\tau^k(x,y) = (x-2k, y-2k).$$

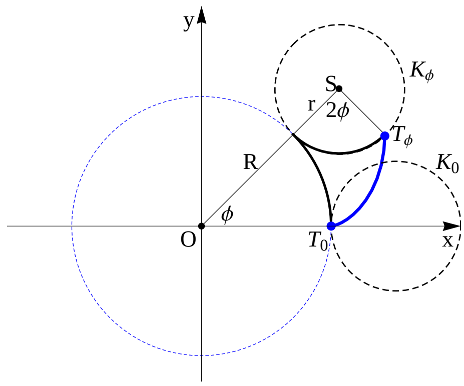
Dana grupa je torej neskončna.



□

(5) Opiši krivuljo, ki jo med kotaljenjem opiše točka na obodu kroga s polmerom r, ki se kotali po krogu s polmerom $R = 2r$.

Rešitev: Najprej si poglejmo skico.



Pri danem kotu ϕ bi radi našli izometrijo τ, ki bo krog K_0 preslikala na krog K_ϕ, točko T_0 pa v točko T_ϕ. Pogoj kotaljenja skupaj z dejstvom, da je $R = 2r$, nam pove, da je središčni kot z vrhom pri $S(3r\cos\phi, 3r\sin\phi)$ enak 2ϕ. Iskano izometrijo lahko potem zapišemo v obliki

$$\tau = \tau_2 \circ \tau_1,$$

kjer je τ_1 rotacija okoli točke $(0,0)$ za kot ϕ, τ_2 pa rotacija okoli točke S za kot 2ϕ. Predpisa rotacij τ_1 in τ_2 sta:

$$\begin{aligned}\tau_1(\vec{x}) &= R_\phi \vec{x},\\ \tau_2(\vec{x}) &= R_{2\phi}(\vec{x} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S.\end{aligned}$$

Kompozicija rotacij je potem

$$\tau(\vec{x}) = \tau_2(R_\phi\vec{x}) = R_{2\phi}(R_\phi\vec{x} - \vec{r}_S) + \vec{r}_S = R_{3\phi}\vec{x} - R_{2\phi}\vec{r}_S + \vec{r}_S.$$

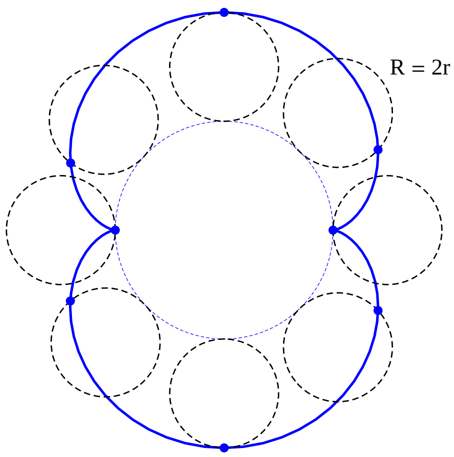
Nas zanima, kako med kotaljenjem potuje točka $T_0(2r, 0)$. Ko njeni koordinati vstavimo v izometrijo τ, dobimo, da je

$$\tau(T_0) = 3r(\cos\phi, \sin\phi) - r(\cos 3\phi, \sin 3\phi).$$

Dano epicikloido lahko torej parametriziramo s predpisom:

$$x(\phi) = 3r\cos\phi - r\cos 3\phi,$$
$$y(\phi) = 3r\sin\phi - r\sin 3\phi$$

za $\phi \in [0, 2\pi]$.



□

(6) Zapiši matriko za linearno rotacijo za kot $\phi = 60°$ okoli osi $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Rešitev: Rotacija evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ohranja izhodišče, je določena z osjo rotacije in kotom. Opišemo jo lahko z rotacijsko matriko, ki je 3×3 ortogonalna matrika z determinanto enako ena. Linearne rotacije $\mathbb{R}^3$ tvorijo grupo

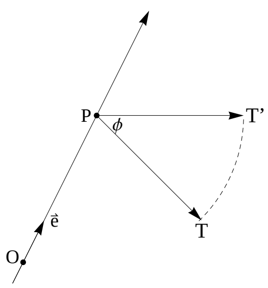
$$\mathrm{SO}(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid R^T R = \mathrm{I},\ \det(R) = 1\}.$$

Za zapis matrike moramo izračunati, kako se preslikajo bazni vektorji. To lahko storimo z uporabo Rodriguesove formule

$$R(\vec{e}, \phi)\vec{r} = \cos\phi\,\vec{r} + (\vec{e}\cdot\vec{r})(1-\cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\,\vec{e}\times\vec{r},$$

ki pove, kako vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ zavrtimo okrog osi $\vec{e}$ za kot ϕ.

Za izpeljavo Rodriguesove formule najprej označimo s T točko, ki jo vrtimo, s P njeno projekcijo na os vrtenja ter s T' zavrteno točko T.



Najprej opazimo, da velja

$$\vec{r}_{T'} = \vec{r}_P + \overrightarrow{PT'}.$$

Pravokotna projekcija točke T na os vrtenja je enaka

$$\vec{r}_P = (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e}.$$

Vektor $\overrightarrow{PT'}$ je pravokoten na vektor $\vec{e}$, z vektorjem $\overrightarrow{PT}$ oklepa kot ϕ, za njegovo dolžino pa velja $|\overrightarrow{PT'}| = |\overrightarrow{PT}|$. Od tod sledi, da je:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT'} &= \cos\phi\, \overrightarrow{PT} + \sin\phi\, \vec{e} \times \overrightarrow{PT}, \\ &= \cos\phi\, (\vec{r}_T - \vec{r}_P) + \sin\phi\, \vec{e} \times (\vec{r}_T - \vec{r}_P), \\ &= \cos\phi\, (\vec{r}_T - (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e}) + \sin\phi\, \vec{e} \times \vec{r}_T.\end{aligned}$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{T'} &= (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e} + \cos\phi\, (\vec{r}_T - (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)\vec{e}) + \sin\phi\, \vec{e} \times \vec{r}_T, \\ &= \cos\phi\, \vec{r}_T + (\vec{e} \cdot \vec{r}_T)(1 - \cos\phi)\vec{e} + \sin\phi\, \vec{e} \times \vec{r}_T.\end{aligned}$$

Če pišemo $\vec{r} = \vec{r}_T$, od tod dobimo Rodriguesovo formulo.

V našem primeru je $\vec{e} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ in $\phi = \frac{\pi}{3}$, zato velja:

$$\begin{aligned}R(\vec{e},\phi)\vec{i} &= \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (1,0,0) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{6}}{4}, -\tfrac{\sqrt{6}}{4}\right), \\ R(\vec{e},\phi)\vec{j} &= \left(0, \tfrac{1}{2}, 0\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0,1,0) = \left(-\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\right), \\ R(\vec{e},\phi)\vec{k} &= \left(0, 0, \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{4}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(0, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \times (0,0,1) = \left(\tfrac{\sqrt{6}}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

Od tod sledi, da rotaciji $R(\vec{e},\phi)$ ustreza rotacijska matrika

$$R(\vec{e},\phi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Opomba: Do rotacijske matrike $R(\vec{e},\phi)$ lahko pridemo tudi na naslednja načina:

· z uporabo prehodne matrike P lahko zapišemo $R(\vec{e},\phi) = PR_\phi P^{-1}$, kjer je R_ϕ matrika, ki ustreza rotaciji za kot ϕ okoli osi z in ima obliko

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

· z uporabo kvaternionov.

□

(7) Opiši linearni izometriji evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$, ki ju določata naslednji matriki:

(a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$,

(b) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

Rešitev: Vsako izometrijo evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

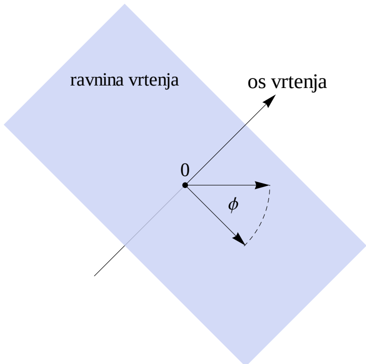
kjer je $Q \in O(3)$ ortogonalna matrika velikosti 3×3, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ pa poljuben vektor. Pri tej nalogi bomo študirali linearne izometrije. Te pustijo izhodišče pri miru in so oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x}.$$

Geometrijsko ustrezajo rotacijam, zrcaljenjem in zrcalnim zasukom.

1. Rotacije:

Če je $\det(Q) = 1$, predstavlja matrika Q rotacijo za nek kot okoli neke osi v prostoru, ki poteka skozi izhodišče.



- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in [0, \pi]$.
- Kot $\phi \in [0, \pi]$ dobimo iz formule $\cos\phi = \frac{\mathrm{sl}(Q)-1}{2}$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju $\vec{e}$ matrike Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = 1$. Eksplicitno je za $\phi \notin \{0, \pi\}$ to vektor

$$\vec{e} = \frac{1}{2\sin\phi}\begin{bmatrix} x_{32} - x_{23} \\ x_{13} - x_{31} \\ x_{21} - x_{12} \end{bmatrix}.$$

2. Zrcaljenja:

Matrika Q določa zrcaljenje preko neke ravnine, če je $\det(Q) = -1$ in ima lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. Normala ravnine zrcaljenja kaže v smeri lastnega vektorja, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.

3. Zrcalni zasuki:

Če je $\det(Q) = -1$ in Q ni zrcaljenje, predstavlja matrika Q kompozicijo rotacije za nek kot okoli neke osi v prostoru in pa zrcaljenja preko ravnine, ki ima to os za normalo.

- Lastne vrednosti matrike Q so $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}$ za nek $\phi \in (0, \pi]$.
- Os vrtenja je vzporedna lastnemu vektorju Q, ki ustreza lastni vrednosti $\lambda = -1$.
- Kot vrtenja je $\pm\phi$, odvisno od orientacije osi.
- Normala ravnine zrcaljenja kaže v smeri osi vrtenja.

(a) Hitro lahko preverimo, da je matrika Q ortogonalna, njena determinanta pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.$$

Matrika Q torej predstavlja rotacijo okoli neke osi v prostoru. Najprej izračunajmo lastne vrednosti matrike Q

$$\begin{aligned} \det(Q - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{vmatrix}, \\ &= -\left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 \lambda + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2} - \lambda, \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1, \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1). \end{aligned}$$

Torej je $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = \pm i$, kar pomeni, da matrika Q predstavlja rotacijo za kot $\phi = \frac{\pi}{2}$. Os rotacije se ujema z jedrom matrike $Q - \mathrm{Id}$:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Os vrtenja je simetrala lihih kvadrantov v xy-ravnini, določena z enačbama:

$$\begin{aligned} -x + y &= 0, \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Smerni vektor te premice je vektor $\vec{e} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Če zarotiramo nek poljuben vektor, lahko opazimo, da je Q rotacija za 90° v pozitivni smeri okoli vektorja $\vec{e}$.

(b) Matrika Q je ortogonalna, njena determinanta pa je

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{27} - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} - \frac{4}{27} = -1.$$

Da bi lahko opisali geometrijski pomen matrike Q, najprej izračunajmo lastne vrednosti

$$\begin{aligned} \det(Q - \lambda \mathrm{Id}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix}, \\ &= \left(\frac{1}{3} - \lambda\right)^3 - \frac{8}{27} - \frac{8}{27} - 3 \cdot \frac{4}{9}\left(\frac{1}{3} - \lambda\right), \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1, \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Vidimo, da je $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_{2,3} = 1$. V tem primeru predstavlja Q zrcaljenje čez ravnino, katere normala kaže v smeri lastnega vektorja pri lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$.

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V jedru te matrike je vektor $\vec{n} = (1,1,1)$, kar pomeni, da je Q zrcaljenje čez ravnino $x+y+z = 0$. $\square$

(8) Geometrično opiši naslednji izometriji evklidskega prostora:

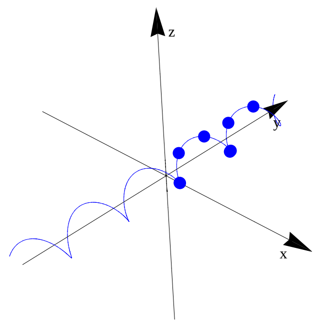
(a) $\tau(x,y,z) = (z, y+1, -x)$,

(b) $\tau(x,y,z) = (-y+1, x-1, -z)$.

Rešitev: (a) Dano izometrijo lahko zapišemo v obliki

$$\tau(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del te izometrije je rotacija za kot $\phi = 90°$ okoli osi $\vec{e} = (0,1,0)$. Hkrati pa imamo poleg vrtenja okoli y-osi še translacijo vzdolž iste osi. Takšni izometriji rečemo vijačni pomik okoli y-osi.



(b) Sedaj imamo izometrijo s predpisom

$$\tau(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Linearni del je tokrat zrcalni zasuk čez ravnino $z = 0$ okoli osi $\vec{e} = (0,0,1)$ za kot $\phi = 90^0$. Translacijski del povzroči, da se ravnina zrcaljenja in os vrtenja vzporedno prestavita. Preverimo lahko, da ima τ natanko eno fiksno točko $S(1,0,0)$. Gre torej za zrcalni zasuk čez ravnino $z = 0$ okoli točke $S(1,0,0)$ za kot $\phi = 90°$. $\square$

Za konec zapišimo še klasifikacijo izometrij evklidskega prostora. Glede na geometrijski pomen ločimo šest tipov izometrij.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. V tem primeru je $Q = \mathrm{I}$.

2. Rotacije:

Rotacije okoli neke osi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\det(Q) = 1$, vektor $\vec{a}$ pa je pravokoten na lastni vektor Q pri $\lambda = 1$. Os vrtenja je množica fiksnih točk preslikave τ.

3. Vijačni pomiki:

Vijačni pomiki vzdolž osi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $\det(Q) = 1$, vektor $\vec{a}$ pa ni pravokoten na lastni vektor Q pri $\lambda = 1$.

4. Zrcaljenja:

Zrcaljenja čez ravnine so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je Q matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 1$, vektor $\vec{a}$ pa je vzporeden lastnemu vektorju Q pri lastni vrednosti $\lambda = 1$.

5. Zrcalni zdrsi:

Zrcalni zdrsi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je Q matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 1$, vektor $\vec{a}$ pa ni vzporeden lastnemu vektorju Q pri lastni vrednosti $\lambda = 1$.

6. Zrcalni zasuki:

Zrcalni zasuki so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = Q\vec{x} + \vec{a},$$

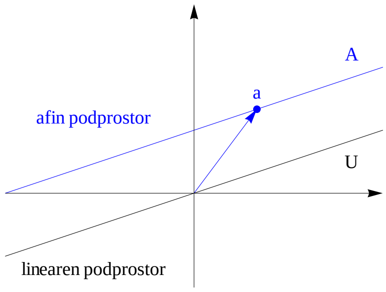
kjer je Q matrika z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = e^{i\phi}$ za nek $\phi \in (0, \pi]$.

2 Afini prostori in podprostori

Afini podprostori v $\mathbb{R}^n$ so posplošitve pojmov premice in ravnine v $\mathbb{R}^3$. Množica $\mathcal{A}$ je afin podprostor v $\mathbb{R}^n$ dimenzije k, če jo lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{A} = a + U,$$

kjer je $a \in \mathcal{A}$ poljubna točka, $U \subset \mathbb{R}^n$ pa linearen podprostor dimenzije k. Točka a je analog začetne točke na premici, prostor U pa lahko razumemo kot množico smeri na $\mathcal{A}$.



V nadaljevanju bomo spoznali, kako lahko afine podprostore afinih prostorov opišemo v parametrični in v normalni obliki.

(1) (a) V ravnini $3x + 2y + z = 7$ ležijo točke $T_0(1,1,2)$, $T_1(3,-1,0)$, $T_2(0,3,1)$, $A(2,0,1)$ in $B(0,4,-1)$. Določi lego točk A in B glede na trikotnik $T_0T_1T_2$.

(b) Ugotovi, ali točka $T(0,1,0)$ leži znotraj piramide z oglišči $T_0(-1,1,-1)$, $T_1(1,2,0)$, $T_2(1,3,1)$ in $T_3(2,1,0)$.

Rešitev: Afine podprostore $\mathbb{R}^n$ lahko podamo v parametrični in v normalni obliki. Pri tej nalogi se bomo posvetili parametrični obliki in spoznali afine koordinate.

(a) Začeli bomo z opisom ravnine v $\mathbb{R}^3$. Ravnino lahko podamo v parametrični obliki

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda_1\vec{s}_1 + \lambda_2\vec{s}_2,$$

kjer je $\vec{r}_0$ začetna točka in $\vec{s}_1$ ter $\vec{s}_2$ smerna vektorja. Če je ravnina definirana s tremi nekolinearnimi točkami T_0, T_1 in T_2, lahko poljubno točko te ravnine izrazimo v obliki

$$T = T_0 + \lambda_1\overrightarrow{T_0T_1} + \lambda_2\overrightarrow{T_0T_2}.$$

Številoma $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ rečemo *afini koordinati* točke T glede na afino ogrodje $\{T_0, T_1, T_2\}$.

V našem primeru je ravnina določena z enačbo $3x + 2y + z = 7$. Za začetno točko vzemimo $T_0(1,1,2)$, za smerna vektorja pa:

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{T_0T_1} = (2,-2,-2),$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{T_0T_2} = (-1,2,-1).$$

Najprej izračunajmo afini koordinati točke A glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$. Določeni sta s sistemom enačb

$$(2,0,1) = (1,1,2) + \lambda_1(2,-2,-2) + \lambda_2(-1,2,-1)$$

oziroma po komponentah:

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2, \\ 0 &= 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 1 &= 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2, \end{aligned}$$

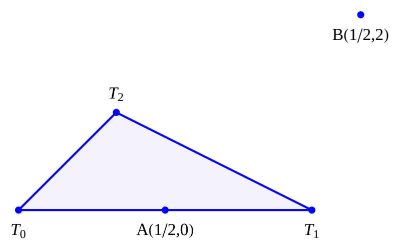
ki ima rešitev $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 0$. Od tod sledi, da je točka A središče stranice T_0T_1.
Afini koordinati točke B glede na afino bazo $\{T_0, T_1, T_2\}$ sta določeni s sistemom enačb

$$(0, 4, -1) = (1, 1, 2) + \lambda_1(2, -2, -2) + \lambda_2(-1, 2, -1)$$

oziroma:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2\lambda_1 - \lambda_2, \\ 4 &= 1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2, \\ -1 &= 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2. \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ in $\lambda_2 = 2$. Ker je $\lambda_2 = 2 > 1$, leži točka B izven trikotnika $T_0T_1T_2$.



(b) Točke T_0, T_1, T_2 in T_3 so afino neodvisne, zato tvorijo afino bazo $\mathbb{R}^3$. Torej lahko točko T izrazimo kot afino kombinacijo teh točk. Če označimo:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (2, 1, 1), \\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (2, 2, 2), \\ \vec{s}_3 &= \overrightarrow{T_0T_3} = (3, 0, 1), \end{aligned}$$

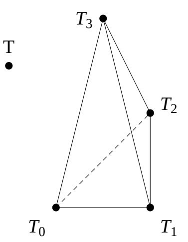
morajo obstajati parametri λ_1, λ_2 in λ_3, da velja

$$(0, 1, 0) = (-1, 1, -1) + \lambda_1(2, 1, 1) + \lambda_2(2, 2, 2) + \lambda_3(3, 0, 1).$$

Točka T leži v notranjosti piramide natanko takrat, ko je $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \in (0, 1)$. Če upoštevamo kartezične koordinate točk, pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3, \\ 1 &= 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2, \\ 0 &= -1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. To pomeni, da točka T ne leži v notranjosti piramide.



□

(2) V afinem prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane točke $A(4,6,-2)$, $B(-2,0,4)$, $C(0,4,1)$ in premica p s parametrizacijo $\vec{r}(t) = (3,2,3) + t(2,1,1)$.

(a) Pokaži, da se premica p in trikotnik ABC ne sekata.

(b) Konstruiraj ravnino π, ki razdeli $\mathbb{R}^3$ na dva odprta polprostora tako, da ležita premica p in trikotnik ABC vsak v svojem polprostoru.

Rešitev: (a) Označimo s Σ ravnino, ki vsebuje trikotnik ABC. Pokazali bomo, da premica p seka Σ v točki, ki leži izven trikotnika ABC. Normala ravnine Σ je

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6,-6,6) \times (-4,-2,3) = (-6,-6,-12).$$

Če upoštevamo, da na ravnini Σ leži točka A, dobimo njeno normalno enačbo

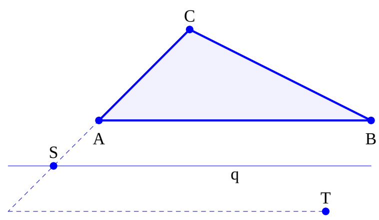
$$x + y + 2z = 6.$$

Presek premice p in ravnine Σ dobimo tako, da koordinate točke na premici vstavimo v normalno enačbo. Tako dobimo enačbo

$$(3 + 2t) + (2 + t) + 2(3 + t) = 6,$$

ki ima rešitev $t = -1$. Presek premice in ravnine je torej točka $T(1,1,2)$. Izračunamo lahko, da sta afini koordinati točke T glede na afino ogrodje $\{A, B, C\}$ enaki $\lambda_1 = \frac{7}{6}$ in $\lambda_2 = -1$, kar pomeni, da točka T leži izven trikotnika ABC.

(b) Najprej bomo konstruirali premico q, ki leži v ravnini Σ in je enako oddaljena od točke T in nosilke stranice AB.



Ta premica vsebuje točko $S(6,7,-\frac{7}{2})$, njena smer pa je $\overrightarrow{AB} = (-6,-6,6)$. Sedaj moramo poiskati ravnino Π, ki vsebuje to premico in ne seka premice p. Normala ravnine Π je torej

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{s}_p = (-6,-6,6) \times (2,1,1) = (-12,18,6)$$

njena normalna enačba pa je

$$-2x + 3y + z = \frac{11}{2}.$$

□

(3) Zapiši dani afini ravnini v parametrični in v normalni obliki:

(a) ravnine v $\mathbb{R}^3$ skozi točke $T_0(1,2,3)$, $T_1(2,0,3)$ in $T_2(2,-1,2)$,
(b) ravnine v $\mathbb{R}^4$ skozi točke $T_0(1,0,1,0)$, $T_1(0,1,1,1)$ in $T_2(1,1,0,0)$.

Rešitev: (a) Za smerna vektorja ravnine lahko vzamemo:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (1,-2,0),\\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (1,-3,-1).\end{aligned}$$

Od tod sledi, da velja $\mathcal{A} = a + U$, kjer je:

$$\begin{aligned}a &= (1,2,3),\\ U &= \mathrm{Lin}\{(1,-2,0),(1,-3,-1)\}.\end{aligned}$$

Če hočemo ravnino opisati v normalni obliki, moramo poiskati smer normale. Pomagamo si lahko z vektorskim produktom

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1,-2,0)\times(1,-3,-1) = (2,1,-1).$$

Dano ravnino lahko torej podamo z enačbo

$$2x + y - z = d,$$

kjer vrednost d dobimo tako, da vstavimo kartezične koordinate ene izmed točk T_i v to enačbo. Sledi $d = 1$, zato je enačba ravnine skozi dane točke

$$2x + y - z = 1.$$

(b) Sedaj imamo ravnino v $\mathbb{R}^4$. Opišemo jo lahko v parametrični obliki z dvema parametroma ali pa v normalni obliki s sistemom dveh linearno neodvisnih enačb. Za smerna vektorja vzemimo:

$$\begin{aligned}\vec{s}_1 &= \overrightarrow{T_0T_1} = (-1,1,0,1),\\ \vec{s}_2 &= \overrightarrow{T_0T_2} = (0,1,-1,0).\end{aligned}$$

Torej velja $\mathcal{A} = a + U$, kjer je:

$$\begin{aligned}a &= (1,0,1,0),\\ U &= \mathrm{Lin}\{(-1,1,0,1),(0,1,-1,0)\}.\end{aligned}$$

Ker smo sedaj v štirih dimenzijah, smer normale ni enolično določena. Zadoščati mora pogojema $\vec{n}\cdot\vec{s}_1 = 0$ in $\vec{n}\cdot\vec{s}_2 = 0$. Če pišemo $\vec{n} = (a,b,c,d)$, nam ta dva pogoja dasta sistem enačb:

$$\begin{aligned}-a + b + d &= 0,\\ b - c &= 0.\end{aligned}$$

Vektorji, ki zadoščajo temu sistemu, tvorijo dvodimenzionalni podprostor $\mathbb{R}^4$, ki se ujema s prostorom $U^\perp$. Ker imamo štiri neznanke in samo dve enačbi, si lahko poljubno izberemo dva parametra, recimo c in d. Vrednosti a in b sta nato natanko določeni. Če izberemo $c = 1$ in $d = 0$, sledi $a = b = 1$, zato definirajmo $\vec{n}_1 = (1,1,1,0)$. Pri izbiri $c = 0$ in $d = 1$ pa dobimo

$a = 1$ in $b = 0$ ter $\vec{n}_2 = (1, 0, 0, 1)$. Če koordinate na $\mathbb{R}^4$ označimo z (x, y, z, w), lahko dano ravnino opišemo s sistemom enačb:

$$\begin{aligned} x + w &= e, \\ x + y + z &= f. \end{aligned}$$

Vrednosti e in f spet dobimo tako, da vstavimo kartezične koordinate ene izmed točk T_i v obe enačbi. Tako dobimo $e = 1$ in $f = 2$, sistem enačb, ki določa našo ravnino, pa je:

$$\begin{aligned} x + w &= 1, \\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

□

(4) Pokaži, da je $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ afin podprostor dimenzije k natanko takrat, ko obstaja surjektivna linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ in $c \in \mathbb{R}^{n-k}$, da je $\mathcal{A} = A^{-1}(c)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo pokazali, da so afini podprostori $\mathbb{R}^n$ ravno množice rešitev sistemov linearnih enačb. Dobro znana sta primera premice v $\mathbb{R}^2$ in ravnine v $\mathbb{R}^3$, ki ju lahko podamo z normalno enačbo. Premico v $\mathbb{R}^3$ pa lahko po drugi strani podamo kot rešitev sistema dveh neodvisnih enačb.

($\Longleftarrow$) Denimo najprej, da je $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ in $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ surjektivna linearna preslikava ter definirajmo

$$\mathcal{A} = A^{-1}(c).$$

Po definiciji je torej $x \in \mathcal{A}$ natanko takrat, ko je $Ax = c$. Ker je A surjektivna preslikava, je $\mathcal{A} \neq \emptyset$, zato lahko najdemo nek $a \in \mathbb{R}^n$, da velja $Aa = c$. Pokazali bomo, da tedaj velja

$$\mathcal{A} = a + U,$$

kjer je $U = \ker(A)$. Izberimo najprej poljuben $x \in \mathcal{A}$. Potem je

$$A(x - a) = Ax - Aa = c - c = 0 \Longrightarrow x - a \in U \Longrightarrow x \in a + U.$$

Po drugi strani pa $x \in a + U$ pomeni, da obstaja $u \in U$, da je $x = a + u$. Torej je

$$Ax = A(a + u) = Aa + Au = c + 0 = c,$$

kar pomeni, da je $x \in \mathcal{A}$.

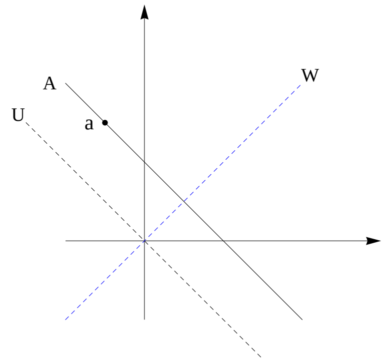
($\Longrightarrow$) Naj bo sedaj $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ poljuben afin podprostor. Potem ga lahko zapišemo v obliki

$$\mathcal{A} = a + U,$$

kjer je $a \in \mathcal{A}$ in $U \subset \mathbb{R}^n$ linearen podprostor dimenzije k. Denimo, da je $\{v_1, \ldots, v_k\}$ neka baza vektorskega prostora U in $\{w_1, \ldots, w_{n-k}\}$ neka baza prostora $W = U^\perp$ ter definirajmo preslikavo $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ s predpisom

$$Ax = (x \cdot w_1, x \cdot w_2, \ldots, x \cdot w_{n-k}).$$

Ker sta U in W pravokotna in je $U \oplus W = \mathbb{R}^n$, je prostor U ravno jedro preslikave A.



Definirajmo sedaj $c = Aa$. Radi bi pokazali, da je potem

$$\mathcal{A} = A^{-1}(c).$$

Če je $x \in \mathcal{A}$ poljuben element, ga lahko enolično zapišemo v obliki $x = a + u$ za nek $u \in U$. Potem je

$$Ax = A(a+u) = Aa + Au = c + 0 = c \Longrightarrow x \in A^{-1}(c).$$

Po drugi strani pa za poljuben $x \in A^{-1}(c)$ velja

$$A(x-a) = Ax - Aa = c - c = 0 \Longrightarrow x - a \in U \Longrightarrow x \in a + U = \mathcal{A}.$$

□

(5) Ugotovi, ali so dani afini prostori vzporedni:

(a) premica $\vec{r} = (1,0,0) + t(1,-1,0)$ in ravnina $x + y - z = 3$ v $\mathbb{R}^3$,

(b) ravnina skozi točke $T_0(1,0,0,0)$, $T_1(2,0,2,1)$ in $T_2(1,1,1,0)$ in premica, določena s sistemom enačb $x - w = 0$, $x - y + z = 1$ in $x + y - 2w = 2$ v $\mathbb{R}^4$.

Rešitev: Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ afina podprostora v $\mathbb{R}^n$ in naj velja:

$$\mathcal{A} = a + U,$$
$$\mathcal{A}' = a' + U'.$$

Potem rečemo, da sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna, če je $U \subset U'$ ali pa $U' \subset U$. Če imata $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ isto dimenzijo, sta vzporedna natanko takrat, ko je $U = U'$. V primeru dveh premic to pomeni, da imata vzporedna smerna vektorja.

V praksi lahko vzporednost afinih podprostorov preverimo na naslednja načina. Denimo, da je $\dim(\mathcal{A}) \leq \dim(\mathcal{A}')$. Potem sta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}'$ vzporedna natanko takrat, ko velja:

(1) vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo smernih vektorjev $\mathcal{A}'$,

(2) vsak smerni vektor $\mathcal{A}$ je pravokoten na vse normalne vektorje $\mathcal{A}'$.

(a) Imamo premico s smernim vektorjem $\vec{s} = (1,-1,0)$ in ravnino z normalo $\vec{n} = (1,1,-1)$. Ker je $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$, sta dana premica in ravnina vzporedni.

(b) Sedaj imamo premico in ravnino v $\mathbb{R}^4$. Premica je določena s tremi neodvisnimi enačbami z normalami $\vec{n}_1 = (1,0,0,-1)$, $\vec{n}_2 = (1,-1,1,0)$ in $\vec{n}_3 = (1,1,0,-2)$. Smerni vektor premice je pravokoten na vse tri normale, zato njegove komponente zadoščajo sistemu enačb:

$$x - w = 0,$$
$$x - y + z = 0,$$
$$x + y - 2w = 0.$$

Ta sistem enačb reši na primer vektor $\vec{s} = (1, 1, 0, 1)$. Ravnina ima po drugi strani smerna vektorja:

$$\vec{s}_1 = \overrightarrow{T_0T_1} = (1, 0, 2, 1),$$
$$\vec{s}_2 = \overrightarrow{T_0T_2} = (0, 1, 1, 0).$$

Premica in ravnina sta vzporedni natanko takrat, ko je smerni vektor premice linearna kombinacija smernih vektorjev ravnine. Pa denimo, da obstajata realni števili α_1 in α_2, da velja

$$(1, 1, 0, 1) = \alpha_1(1, 0, 2, 1) + \alpha_2(0, 1, 1, 0).$$

Po komponentah dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1, \\ 1 &= \alpha_2, \\ 0 &= 2\alpha_1 + \alpha_2, \\ 1 &= \alpha_1, \end{aligned}$$

ki pa ni rešljiv. Od tod sledi, da premica in ravnina nista vzporedni. □

(6) Naj bo $V = \mathbb{F}_p^n$ vektorski prostor dimenzije n nad obsegom $\mathbb{F}_p$.

(a) Poišči število linearnih premic v V.

(b) Poišči število afinih premic v V.

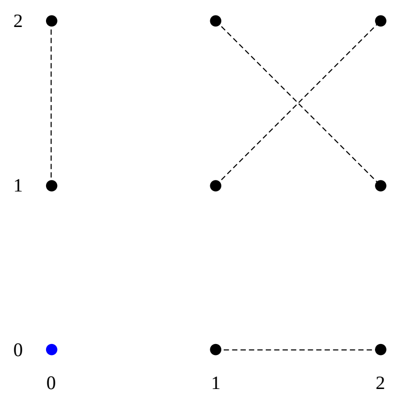
Rešitev: (a) Linearna premica v $\mathbb{F}_p^n$ je podprostor oblike

$$\mathcal{A} = \{\alpha s \,|\, \alpha \in \mathbb{F}_p\}$$

za nek neničeln $s \in \mathbb{F}_p^n$. Na vsaki takšni premici leži izhodišče in pa $p - 1$ neničelnih točk. Če bi točko s zamenjali z neko drugo neničelno točko na $\mathcal{A}$, bi dobili isto premico, a z drugo parametrizacijo. To pomeni, da vsaka neničelna točka $a \in \mathbb{F}_p^n$ natanko določa linearno premico in da po $p - 1$ neničelnih točk določa isto linearno premico. Ker je vseh neničelnih točk v $\mathbb{F}_p^n$ natanko $p^n - 1$, je

$$\text{število linearnih premic v } \mathbb{F}_p^n = \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

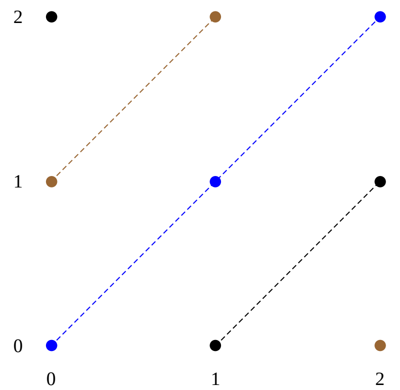
V afini ravnini $\mathbb{F}_3^2$ imamo tako na primer 4 linearne premice. Na vsaki izmed njih ležita dve neničelni točki.



(b) Afine premice dobimo s translacijami linearnih premic. Vsako linearno premico lahko premaknemo na p^n načinov, vendar pa nam po p translacij določa isto vzporednico. Za vsako smer imamo torej p^{n-1} vzporednic s to smerjo, od koder sledi

$$\text{število afinih premic v } \mathbb{F}_p^n = p^{n-1} \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1}.$$

V afini ravnini $\mathbb{F}_3^2$ imamo v vsaki smeri 3 vzporednice. Ena izmed njih pa je linearna.



$\square$

(7) Dani sta točki $(0, -i)$ in $(j, 0)$ v $\mathbb{H}^2$. Zapiši parametrično in normalno enačbo premice skozi ti dve točki.

Rešitev: Začnimo s parametrično enačbo. Premica skozi dani dve točki ima smerni vektor $\vec{s} = (j, i)$ in začetno točko $(0, -i)$. Zato jo lahko parametriziramo v obliki

$$\vec{r}(t) = (0, -i) + t(j, i) = (tj, (t - 1)i)$$

za $t \in \mathbb{H}$. Parametrična oblika enačbe ima enako obliko nad vsemi obsegi. V nadaljevanju pa bomo videli, da moramo biti v primeru nekomutativnih obsegov pozorni pri zapisu normalne oblike enačbe.

Ker točka $(0, 0)$ ne leži na dani premici, lahko poskusimo z enačbo

$$ax + by = 1$$

za primerno izbrana kvaterniona $a, b \in \mathbb{H}$. Ko vstavimo v to enačbo dani dve točki, dobimo, da je $a = -j$ in $b = i$, kar nam da enačbo

$$-jx + iy = 1.$$

Preverimo sedaj, če točke na naši premici res zadoščajo tej enačbi. Izračunali smo že, da je $x = tj$ in $y = (t - 1)i$ za poljuben $t \in \mathbb{H}$. Tako dobimo:

$$\begin{aligned} -j(tj) + i(t - 1)i &= 1, \\ -jtj + iti &= 0. \end{aligned}$$

Če vzamemo na primer $t = j$, dobimo

$$-jtj + iti = j + j = 2j \neq 0,$$

kar pomeni, da dana enačba ne opisuje naše premice.

V primeru kvaternionov (oziroma bolj splošno nekomutativnih obsegov) moramo enačbo premice zapisati v obliki

$$xa + yb = 1.$$

V našem primeru tako dobimo enačbo

$$-xj + yi = i.$$

Ko sedaj vanjo vstavimo $x = tj$ in $y = (t-1)i$, dobimo:

$$\begin{aligned} -(tj)j + ((t-1)i)i &= 1, \\ t + (-t+1) &= 1, \end{aligned}$$

kar je v skladu z našimi pričakovanji. $\square$

3 Afine transformacije

(1) Naj bo Π ravnina v afinem prostoru $\mathbb{R}^3$, ki jo določajo točke $A(4,6,-2)$, $B(-2,0,4)$ in $C(0,4,1)$ ter $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ afina transformacija, ki je podana s predpisom

$$F(x,y,z)=(x+2y+z+1,y-2,x+2z+3).$$

Pokaži, da je $F(\Pi)$ ravnina v $\mathbb{R}^3$ in izračunaj njeno normalno enačbo.

Rešitev: Afina transformacija prostora $\mathbb{R}^n$ je bijekcija, ki poljubno trojico kolinearnih točk preslika v kolinearne točke. Po osnovnem izreku afine geometrije lahko vsako afino transformacijo $\tau:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ zapišemo v obliki

$$\tau(x)=Ax+a,$$

kjer je $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ obrnljiva linearna preslikava in $a\in\mathbb{R}^n$ neka točka.

Najprej bomo pokazali, da afine transformacije slikajo ravnine v ravnine. V ta namen predpostavimo, da je afina transformacija $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dana s predpisom

$$F(\vec{x})=A\vec{x}+\vec{a},$$

kjer je $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ obrnljiva matrika in $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$. Nadalje naj bo ravnina Π podana v parametrični obliki

$$\vec{r}_T=\vec{r}_0+t_1\vec{s}_1+t_2\vec{s}_2,$$

kjer je $\vec{r}_0$ začetna točka in $\vec{s}_1$ ter $\vec{s}_2$ smerna vektorja Π. Potem je

$$F(\vec{r}_T)=A(\vec{r}_0+t_1\vec{s}_1+t_2\vec{s}_2)+\vec{a}=A\vec{r}_0+\vec{a}+t_1A\vec{s}_1+t_2A\vec{s}_2=F(\vec{r}_0)+t_1A\vec{s}_1+t_2A\vec{s}_2.$$

Vidimo torej, da je množica $F(\Pi)$ spet ravnina z začetno točko $F(\vec{r}_0)$ in s smernima vektorjema $A\vec{s}_1$ ter $A\vec{s}_2$.

V našem primeru lahko preslikavo F zapišemo v obliki

$$F(x,y,z)=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\1&0&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

Nadalje je $\vec{r}_0=(4,6,-2)$, $\vec{s}_1=\overrightarrow{AB}=(-6,-6,6)$ in $\vec{s}_2=\overrightarrow{AC}=(-4,-2,3)$. Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}F(\vec{r}_0)&=(15,4,3),\\A\vec{s}_1&=(-12,-6,6),\\A\vec{s}_2&=(-5,-2,2).\end{aligned}$$

Normala na ravnino $F(\Pi)$ je vzporedna vektorju $(0,1,1)$, od koder dobimo normalno enačbo ravnine

$$y+z=7.$$

Opomba: Na podoben način lahko pokažemo, da afina transformacija preslika afin podprostor dimenzije k v afin podprostor dimenzije k. V splošnem nam linearni del afine transformacije pove, kako se transformirajo smerni vektorji afinega podprostora. Če smo v evklidskem prostoru in je naša afina transformacija izometrija, pa podoben sklep velja tudi za normalne smeri. $\square$

(2) V afini ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani premici $p:\ y=1$ in $q:\ x=-2$.

(a) Pokaži, da preslikava $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki je dana s predpisom $\tau(x, y) = (y - 3, x + 3)$, preslika p na q in q na p.

(b) Poišči vse afine transformacije $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ki preslikajo p na q in q na p.

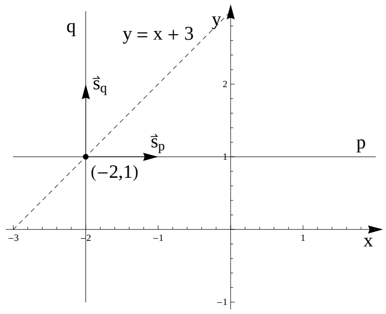
Rešitev: (a) Smerna vektorja premic sta $\vec{s}_p = (1, 0)$ in $\vec{s}_q = (0, 1)$. Ker leži točka $(-2, 1)$ na obeh premicah, lahko izberemo naslednji parametrizaciji premic p in q:

$$\begin{aligned} p : \vec{r} &= (-2, 1) + t(1, 0) = (-2 + t, 1), \\ q : \vec{r} &= (-2, 1) + s(0, 1) = (-2, 1 + s). \end{aligned}$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} \tau(-2 + t, 1) &= (-2, 1 + t), \\ \tau(-2, 1 + s) &= (-2 + s, 1), \end{aligned}$$

kar pomeni, da τ preslika p na q in q na p. Geometrično lahko transformacijo τ opišemo kot zrcaljenje čez premico $y = x + 3$.



(b) Iščemo afine transformacije ravnine $\mathbb{R}^2$, ki preslikajo p na q in obratno. Vsaka takšna preslikava je oblike

$$\tau(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je A obrnljiva matrika velikosti 2×2 in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Če hočemo, da bo preslikava τ preslikala premico p na q, premico q pa na p, mora veljati:

$$\begin{aligned} A\vec{s}_p &\parallel \vec{s}_q, \\ A\vec{s}_q &\parallel \vec{s}_p. \end{aligned}$$

Pišimo sedaj

$$\tau(x, y) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix},$$

za neke $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Pogoj vzporednosti $A\vec{s}_p \parallel \vec{s}_q$ lahko zapišemo v obliki $A\vec{s}_p = \alpha\vec{s}_q$ oziroma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ta sistem ima rešitev $a = 0$ in $c = \alpha$. Podobno iz pogoja $A\vec{s}_q \parallel \vec{s}_p$ sledi

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

oziroma $b = \beta$ in $d = 0$. Oboje skupaj nam pove, da mora biti matrika A oblike

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

za neka neničelna $b, c \in \mathbb{R}$. Za določitev vektorja $\vec{a}$ bomo sedaj uporabili še dejstvo, da se premici p in q sekata v točki $(-2, 1)$. Iz pogoja naloge potem sledi, da je $(-2, 1)$ fiksna točka preslikave τ oziroma $\tau(-2, 1) = (-2, 1)$. Od tod dobimo

$$\tau(-2,1) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b+e \\ -2c+f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

kar nam da $e = -2 - b$ in $f = 1 + 2c$. Vsaka afina transformacija ravnine $\mathbb{R}^2$, ki preslika p na q in q na p je torej oblike

$$\tau(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2-b \\ 1+2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x+2 \\ y-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = (by - 2 - b, cx + 1 + 2c)$$

za neka neničelna realna parametra b in c.

Geometrično lahko takšno preslikavo interpretiramo kot kompozicijo:

- zrcaljenja čez premico $y = x + 3$,
- raztegov s središčema v točki $(-2, 1)$. V navpični smeri raztegujemo za faktor c, v vodoravni smeri pa za faktor b.

□

(3) Preslikava $F \colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ je dana s predpisom

$$(Fp)(x) = x \cdot p'(x) + p(1) + x + 1$$

za poljuben $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a) Zapiši predpis za preslikavo F v koordinatah na $\mathbb{R}_2[x]$, ki jih določa baza $\{x^2, x, 1\}$, in pokaži, da je F afina transformacija.

(b) Naj bo $\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \,|\, p(0) = 1,\, p(1) = 1\}$. Pokaži, da je $\mathcal{A}$ afin podprostor v $\mathbb{R}_2[x]$ in nato zapiši njegovo sliko $F(\mathcal{A})$ v parametrični obliki.

Rešitev: (a) Vektorski prostor $\mathbb{R}_2[x]$ realnih polinomov stopnje največ dva je izomorfen prostoru $\mathbb{R}^3$. Pri tej nalogi bomo uporabili eksplicitni izomorfizem $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$, ki je določen s predpisom

$$\phi(ax^2 + bx + c) = (a, b, c).$$

Preslikava F preslika polinom $p(x) = ax^2 + bx + c$ v polinom

$$\begin{aligned} (Fp)(x) &= x \cdot p'(x) + p(1) + x + 1, \\ &= x(2ax + b) + a + b + c + x + 1, \\ &= 2ax^2 + (b+1)x + (a+b+c+1). \end{aligned}$$

V koordinatah, ki jih določa baza $\{x^2, x, 1\}$, lahko F zapišemo v obliki

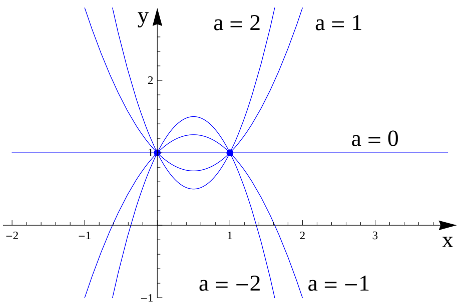
$$F(a,b,c) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Preslikava F je kompozicija obrnljive linearne preslikave in pa translacije, zato je afina transformacija.

(b) Polinomi v množici $\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 1, p(1) = 1\}$ zadoščajo pogojema $c = 1$ in $a + b + c = 1$. Poljuben polinom $p \in \mathcal{A}$ je torej oblike $p(x) = ax^2 - ax + 1$, zato lahko zapišemo

$$\mathcal{A} = 1 + \mathrm{Lin}\{x^2 - x\},$$

od koder sledi, da je $\mathcal{A}$ afin podprostor v $\mathbb{R}_2[x]$. Prostor $\mathcal{A}$ je enodimenzionalen in sestoji iz vseh kvadratnih polinomov, ki potekajo skozi točki $(0, 1)$ in $(1, 1)$.



Iz enakosti

$$F(a, -a, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ -a \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ -a+1 \\ 2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sledi, da je $F(\mathcal{A}) = a + U$, kjer je

$$a = x + 2,$$
$$U = \mathrm{Lin}\{2x^2 - x\}.$$

□

(4) Karakteriziraj dilatacije afine ravnine $\mathbb{R}^2$ in nato pokaži, da dilatacije slikajo krožnice v krožnice.

Rešitev: Afina transformacija $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je *dilatacija*, če za vsako premico $p \subset \mathbb{R}^2$ velja $p \parallel \tau(p)$. Kot poljubno afino transformacijo lahko tudi vsako dilatacijo zapišemo v obliki

$$\tau(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a},$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ obrnljiva matrika in $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. Zanima nas, kakšna mora biti matrika A, da bo τ dilatacija. Če hočemo, da bo za vsako premico p veljalo $p \parallel \tau(p)$, mora veljati

$$\vec{s} \parallel A\vec{s}$$

za vsak $\vec{s}$. To pomeni, da je vsak vektor lastni vektor matrike A, od koder pa sledi, da je matrika A oblike

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

za nek $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta matrika predstavlja razteg s središčem v koordinatnem izhodišču za faktor λ. Dilatacije so torej preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \lambda\vec{x} + \vec{a}.$$

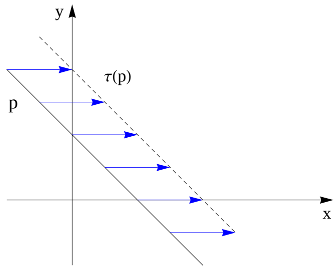
Ločimo dva tipa dilatacij.

1. Translacije:

Translacije so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$$

za nek $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$. V tem primeru je $\lambda = 1$.

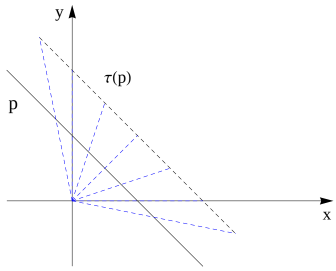


2. Središčni raztegi:

Središčni raztegi so preslikave oblike

$$\tau(\vec{x}) = \lambda\vec{x} + \vec{a}$$

za $\lambda \notin \{0, 1\}$. V tem primeru gre za razteg s središčem v točki $\frac{1}{1-\lambda}\vec{a}$ in za faktor λ.



Pokažimo sedaj, da dilatacije slikajo krožnice v krožnice. Naj bo dilatacija τ podana s predpisom

$$\tau(\vec{x}) = \lambda\vec{x} + \vec{a},$$

krožnica $\mathcal{K}$ s središčem v S in polmerom R pa z enačbo

$$(\vec{r}_T - \vec{r}_S)(\vec{r}_T - \vec{r}_S) = R^2.$$

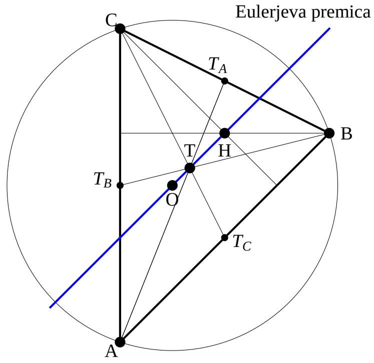
Pokazali bomo, da je potem $\mathcal{K}' = \tau(\mathcal{K})$ krožnica s središčem v $S' = \tau(S)$ in s polmerom $R' = |\lambda|R$. To sledi iz računa:

$$\begin{aligned}(\tau(\vec{r}_T) - \tau(\vec{r}_S))(\tau(\vec{r}_T) - \tau(\vec{r}_S)) &= (\lambda\vec{r}_T + \vec{b} - (\lambda\vec{r}_S + \vec{b}))(\lambda\vec{r}_T + \vec{b} - (\lambda\vec{r}_S + \vec{b})),\\ &= \lambda^2(\vec{r}_T - \vec{r}_S)(\vec{r}_T - \vec{r}_S) = \lambda^2 R^2.\end{aligned}$$

□

(5) Naj bo ABC neenakostraničen trikotnik. Pokaži, da so težišče T, višinska točka H in središče očrtane krožnice O kolinearne točke in da velja $|TH| = 2|TO|$. Pomagaj si s središčnim raztegom s središčem v T in faktorjem $\lambda = -2$.

Rešitev: Označimo s T_A, T_B in T_C središča stranic trikotnika kot na spodnji sliki.



Naj bo τ središčni razteg s središčem v T in faktorjem $\lambda = -2$. Ker težišče T deli težiščnico CT_C v razmerju $|TC| = 2|TT_C|$, je $\tau(T_C) = C$. Po definiciji dilatacije od tod sledi, da τ preslika premico p skozi O in T_C v neko njej vzporedno premico $\tau(p)$, ki vsebuje točko C. Ker je premica p pravokotna na stranico AB, je $\tau(p)$ ravno premica, ki vsebuje višino na AB. Od tod sklepamo, da $\tau(O)$ leži na višini na stranico AB. Podoben sklep nam pove, da $\tau(O)$ leži tudi na preostalih dveh višinah, kar pa pomeni, da je $\tau(O) = H$. Nadalje velja še

$$\overrightarrow{TH} = -2\overrightarrow{TO}.$$

Premico, ki vsebuje težišče, višinsko točko in središče očrtane krožnice neenakostraničnega trikotnika, imenujemo Eulerjeva premica. $\square$

(6) Naj bo ABC neenakostraničen trikotnik. Pokaži, da središčni razteg s središčem v višinski točki in faktorjem $\lambda = \frac{1}{2}$ preslika očrtano krožnico $\mathcal{K}$ v krožnico 9 točk.

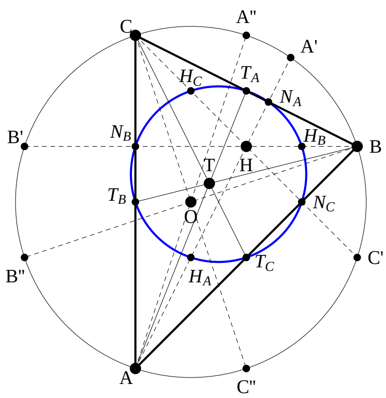
Rešitev: Krožnica 9 točk vsebuje:

· nožišča višin N_A, N_B in N_C,

· središča stranic T_A, T_B in T_C,

· središča daljic med višinsko točko in oglišči H_A, H_B in H_C.

Z uporabo središčnega raztega bomo pokazali, da teh 9 točk res leži na isti krožnici.



V ta namen najprej označimo s $\mathcal{K}$ očrtano krožnico trikotnika ABC. Nadalje naj bo C' presečišče premice CH in $\mathcal{K}$ ter C'' presečišče premice CO s $\mathcal{K}$. Analogno definiramo tudi točke A', A'', B' in B''. Pokazali bomo, da središčni razteg s središčem v H in faktorjem $\lambda = \frac{1}{2}$ preslika očrtano krožnico $\mathcal{K}$ v krožnico 9 točk. To bomo naredili v naslednjih 3 korakih.

(1) $|HN_C| = |N_CC'|$:

Obodna kota $\angle ABC'$ in $\angle ACC'$ nad tetivo AC' sta enaka in velja

$$\angle ABC' = \angle ACC' = \frac{\pi}{2} - \angle BAC.$$

Ker je trikotnik ABN_B pravokoten, pa velja tudi

$$\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \angle BAC.$$

Od tod sklepamo, da je trikotnik $C'BH$ enakokrak z vrhom pri B. Ker je daljica $N_C B$ pravokotna na osnovnico $C'H$, pa od tod sledi

$$|HN_C| = |N_C C'|.$$

Analogno lahko dokažemo tudi, da velja:

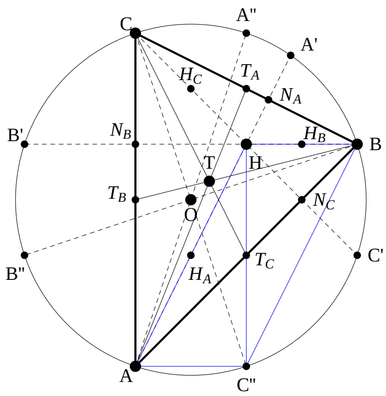
$$|HN_A| = |N_A A'|,$$
$$|HN_B| = |N_B B'|.$$

(2) H, T_C in C'' so kolinearne in velja $|HT_C| = |T_C C''|$:

Najprej opazimo, da je daljica CC'' premer očrtane krožnice $\mathcal{K}$, zato je

$$\angle C''BC = \angle C''AC = \frac{\pi}{2}.$$

Od tod sklepamo, da je $C''B \parallel AH$ in $C''A \parallel BH$, kar pomeni, da je $C''BHA$ paralelogram.



Ker se diagonali tega paralelograma razpolavljata, je njuno presečišče nujno točka T_C. Od tod pa sledi, da so H, T_C in C'' kolinearne in da velja

$$|HT_C| = |T_C C''|.$$

Kot prej lahko tudi tokrat podobno pokažemo, da velja:

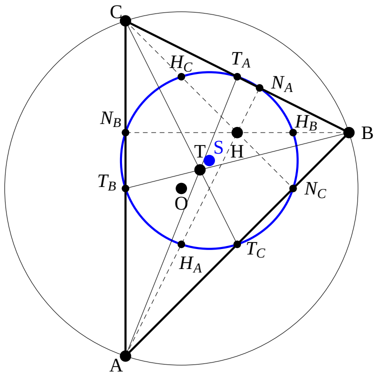
$$|HT_A| = |T_A A''|,$$
$$|HT_B| = |T_B B''|.$$

(3) Obstoj krožnice 9 točk:

Pokazali smo, da velja:

$$|HT_C| = \tfrac{1}{2}|HC''|,$$
$$|HN_C| = \tfrac{1}{2}|HC'|,$$
$$|HH_C| = \tfrac{1}{2}|HC|.$$

Ker podobne formule veljajo tudi za točki A in B, je krožnica 9 točk ravno slika očrtane krožnice pri središčnem raztegu s središčem v H in faktorjem $\lambda = \frac{1}{2}$. Med drugim od tod sledi tudi, da središče S krožnice 9 točk leži na razpolovišču daljice OH.



□

(7) (a) Poišči vse avtomorfizme obsegov $\mathbb{F}_p$ in $\mathrm{GF}(4)$.
(b) Izračunaj, koliko je afinih transformacij afinih ravnin $\mathbb{F}_p^2$ in $\mathrm{GF}(4)^2$.

Rešitev: (a) V primeru, ko je V vektorski prostor nad obsegom $\mathcal{O}$, je po osnovnem izreku afine geometrije vsaka afina transformacija $\tau : V \to V$ oblike

$$\tau(x) = Mx + a,$$

kjer je $M : V \to V$ obrnljiva semilinearna preslikava in $a \in V$ neka točka. V primeru, ko je V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$, je vsaka semilinearna preslikava avtomatično linearna, zato so v teh primerih afine transformacije ravno kompozicije obrnljivih linearnih preslikav in translacij. Preslikava $M : V \to V$ iz vektorskega prostora V nad $\mathcal{O}$ nazaj vase je semilinearna, če obstaja tak avtomorfizem ϕ obsega $\mathcal{O}$, da za vsaka $x, y \in V$ in za vsak $\alpha \in \mathcal{O}$ velja:

$$M(x+y) = M(x) + M(y) \qquad \text{aditivnost,}$$
$$M(\alpha x) = \phi(\alpha)M(x) \qquad \text{semihomogenost.}$$

Za opis vseh afinih transformacij moramo torej klasificirati vse avtomorfizme obsega $\mathcal{O}$. Spomnimo se, da je avtomorfizem obsega $\mathcal{O}$ bijekcija $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, ki zadošča pogojema:

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y),$$
$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$$

za vsaka $x, y \in \mathcal{O}$. Od tod avtomatično sledi $\phi(0) = 0$ in $\phi(1) = 1$.

Avtomorfizmi obsega $\mathbb{F}_p$:

Obseg $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ je končen obseg praštevilske moči p. Seštevanje in množenje definiramo po modulu p. Enota za seštevanje je 0, enota za množenje pa 1. Za poljuben avtomorfizem obsega $\mathbb{F}_p$ je torej $\phi(0) = 0$ in $\phi(1) = 1$. Izberimo sedaj poljuben $n \in \mathbb{F}_p$, $1 < n < p$. Potem lahko pišemo

$$n = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n},$$

zato iz aditivnosti preslikave ϕ sledi

$$\phi(n) = \phi(\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n}) = \underbrace{\phi(1) + \phi(1) + \ldots + \phi(1)}_{n} = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = n.$$

To pomeni, da je ϕ nujno identična preslikava, grupa avtomorfizmov obsega $\mathbb{F}_p$ pa vsebuje en sam element.

Avtomorfizmi obsega GF(4):

Teorija obsegov nam pove, da je vsak končen obseg ene izmed naslednjih dveh oblik:

· Obseg $\mathbb{F}_p$ ostankov pri deljenju s praštevilom p s p elementi,
· Galoisov obseg $\mathrm{GF}(p^n)$ s p^n elementi, kjer je p praštevilo in $n > 1$ naravno število.

Ker obsege ostankov $\mathbb{F}_p$ že dobro poznamo, si bomo v nadaljevanju pogledali konstrukcijo Galoisovih obsegov. Galoisov obseg $\mathrm{GF}(p^n)$ konstruiramo na naslednji način:

· Izberemo nerazcepen polinom stopnje n v kolobarju $\mathbb{F}_p[x]$.
· Elementi $\mathrm{GF}(p^n)$ so polinomi stopnje največ $n-1$ v $\mathbb{F}_p[x]$, ki jih lahko interpretiramo tudi kot ostanke pri deljenju s polinomom $p(x)$.
· Seštevanje je definirano kot seštevanje polinomov.
· Produkt dveh polinomov dobimo tako, da najprej izračunamo njun produkt v $\mathbb{F}_p[x]$, nato pa vzamemo ostanek pri deljenju s polinomom $p(x)$.

V našem primeru je

$$\mathrm{GF}(2^2) = \{0, 1, x, 1+x\}$$

operaciji seštevanja in množenja pa lahko predstavimo s tabelama:

$$\begin{array}{c|cccc} + & 0 & 1 & x & 1+x \\ \hline 0 & 0 & 1 & x & 1+x \\ 1 & 1 & 0 & 1+x & x \\ x & x & 1+x & 0 & 1 \\ 1+x & 1+x & x & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} \cdot & 0 & 1 & x & 1+x \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & x & 1+x \\ x & 0 & x & 1+x & 1 \\ 1+x & 0 & 1+x & 1 & x \end{array}.$$

Množica vseh elementov obsega GF(4) tvori grupo za seštevanje, ki je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, grupa obrnljivih elementov obsega GF(4) pa je izomorfna grupi $\mathbb{Z}_3$.

Preverimo lahko, da ima obseg GF(4) poleg identičnega še netrivialni avtomorfizem ϕ, ki je definiran s predpisom:

$$\phi(0) = 0,\ \phi(1) = 1,\ \phi(x) = 1+x,\ \phi(1+x) = x.$$

(b) Afine transformacije $\mathbb{F}_p^2$:

Vsaka afina transformacija $\mathbb{F}_p^2$ je oblike

$$\tau(x) = Ax + a,$$

kjer je A obrnljiva matrika s koeficienti v $\mathbb{F}_p$ in $a \in \mathbb{F}_p^2$.

Matrika A je obrnljiva natanko tedaj, ko sta njena stolpca linearno neodvisna. Za prvi stolpec lahko izberemo poljuben neničelni vektor $v_1 \in \mathbb{F}_p^2$, kar pomeni, da imamo na izbiro $p^2 - 1$ možnosti. Drugi stolpec moramo izbrati tako, da ne bo ležal na premici, ki jo napenja v_1. Takšnih točk je $p^2 - p$. Število obrnljivih matrik je torej $(p^2 - 1)(p^2 - p)$. Ker imamo za izbiro elementa a na voljo p^2 možnosti, je število vseh afinih transformacij afine ravnine $\mathbb{F}_p^2$ enako

$$p^2(p^1 - 1)(p^2 - p).$$

Afine transformacije $\mathrm{GF}(4)^2$:

Sedaj imamo obseg z netrivialnim avtomorfizmom. Vsaka semilinearna preslikava

$$M : \mathrm{GF}(4)^2 \to \mathrm{GF}(4)^2$$

je sedaj ene izmed naslednjih dveh oblik:

$$M(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$
$$M(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \end{bmatrix},$$

kjer je ϕ netrivialni avtomorfizem obsega $\mathrm{GF}(4)$. Število obrnljivih semilinearnih preslikav je torej $2 \cdot (4^2 - 1) \cdot (4^2 - 4) = 360$, vseh afinih transformacij afine ravnine $\mathrm{GF}(4)^2$ pa je

$$360 \cdot 16 = 5760.$$

$\square$

4 Aksiomatsko definirana afina ravnina

(1) Ugotovi, ali naslednji par zadošča aksiomom aksiomatsko definirane afine ravnine:

$$\mathcal{A} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2,$$
$$\mathcal{A}_1 = \{p \cap \mathcal{A} \,|\, p \text{ je premica v } \mathbb{R}^2 \text{ z enačbo } ax + by + c = 0, \text{ kjer so } a, b, c \in \mathbb{Z}\} \setminus \{\emptyset\}.$$

Rešitev: Denimo, da imamo par množic $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$, kjer je $\mathcal{A}_1 \subset 2^{\mathcal{A}}$. Elemente v $\mathcal{A}$ bomo interpretirali kot točke, elemente v $\mathcal{A}_1$ pa kot premice. Par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ sestavlja aksiomatsko definirano afino ravnino, če zadošča aksiomom:

$A1$ Skozi različni točki poteka natanko ena premica.

$A2$ Za vsako točko $X \in \mathcal{A}$ in vsako premico $p \in \mathcal{A}_1$ obstaja natanko ena premica, ki gre skozi X in je vzporedna p.

$A3$ Obstajajo tri nekolinearne točke.

Študirali bomo celoštevilsko mrežo $\mathcal{A}$ v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$. Premice v $\mathcal{A}_1$ ustrezajo premicam v $\mathbb{R}^2$ s celoštevilskimi smernimi vektorji.

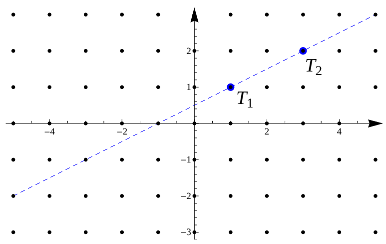
Najprej bomo pokazali, da par $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}_1\}$ ustreza aksiomu $A1$. V ta namen izberimo poljubni točki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{A}$. Če je $x_1 = x_2 = m$, je

$$p : x - m = 0$$

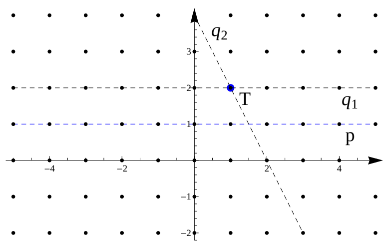
edina premica, ki poteka skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2). Naj bo sedaj $x_1 \neq x_2$. Pokazali bomo, da lahko evklidsko premico, ki poteka skozi dani točki, zapišemo v predpisani obliki. Računajmo:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \\ (y - y_1)(x_2 - x_1) &= (y_2 - y_1)(x - x_1), \\ 0 &= (y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + (x_2 y_1 - x_1 y_2). \end{aligned}$$

Ker so x_1, x_2, y_1 in y_2 cela števila, so tudi $a = y_2 - y_1$, $b = x_1 - x_2$ in $x_2 y_1 - x_1 y_2$ cela števila, kar smo želeli pokazati.



Pokažimo sedaj, da aksiom $A2$ ni izpolnjen v tem modelu. Izberimo na primer premico $p : y - 1 = 0$ in točko $(1, 2)$. Premici $q_1 : y - 2 = 0$ in $q_2 : 2x + y - 4 = 0$ potem obe vsebujeta točko $(1, 2)$, a ne sekata premice p.



Brez težav lahko opazimo tudi, da je aksiom $A3$ v našem primeru izpolnjen. □

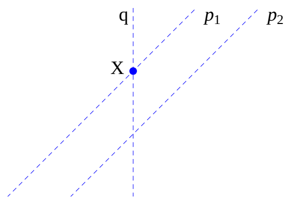
(2) Dokaži, da v vsaki aksiomatsko definirani afini ravnini veljajo naslednje trditve:

(a) za poljubni vzporedni premici p_1 in p_2 ter poljubno od njih različno premico q velja, da q seka p_1 natanko takrat, ko q seka p_2,

(b) na vsaki premici ležita vsaj dve točki,

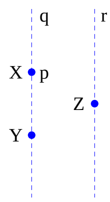
(c) vse premice imajo enako število točk.

Rešitev: (a) Denimo, da premica q seka premico p_1 v točki X. Če q ne bi sekala premice p_2, bi skozi točko X potekali premici q in p_1, ki bi bili obe vzporedni premici p_2. To pa je v protislovju z aksiomom $A2$.



Od tod sledi, da je vzporednost premic ekvivalenčna relacija na množici premic.

(b) Sedaj bomo pokazali, da na vsaki premici ležita vsaj dve točki. Recimo, da obstaja premica p, ki vsebuje samo točko X. Po aksiomu $A3$ obstajata še vsaj dve točki Y in Z, da so X, Y in Z nekolinearne. Označimo s q premico skozi X in Y, ki obstaja po aksiomu $A1$. Po aksiomu $A2$ lahko sedaj najdemo vzporednico r premice q, ki gre skozi Z. Ta premica r ne vsebuje točke X, zato je vzporedna tudi premici p. To pa pomeni, da skozi X potekata dve vzporednici p in q premice r, kar pa je v protislovju z aksiomom $A2$.

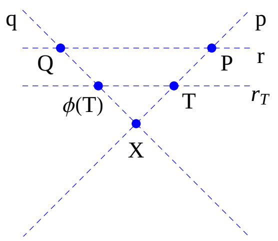


(c) V afini ravnini $\mathbb{F}_p^2$ leži na vsaki premici p točk. V nadaljevanju bomo pokazali, da imajo v poljubni aksiomatsko definirani afini ravnini vse premice enako število točk.

Za začetek bomo obravnavali primer, ko se premici p in q sekata v točki X. Ker vsebuje vsaka premica vsaj dve točki, lahko najdemo točki $P \in p$ in $Q \in q$, različni od X. Označimo z r premico, ki poteka skozi točki P in Q. Za vsako točko $T \in p$ potem po aksiomu $A2$ obstaja natanko ena vzporednica premice r skozi T, ki jo označimo z r_T. Po točki (a) mora premica r_T sekati tudi premico q v točki, ki jo označimo s $\phi(T)$. Na ta način dobimo preslikavo

$$\phi : p \to q.$$

Po aksiomu $A2$ skozi vsako točko na q poteka natanko določena vzporednica premice r, od koder sledi, da je ϕ bijekcija.



Če se p in q ne sekata, lahko najdemo premico r, ki seka tako p kot q. Potem imata p in q enako točk kot r. $\square$

(3) Naj bo $\mathcal{A}$ aksiomatsko definirana afina ravnina reda n. Dokaži:

(a) afina ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje n^2 točk,

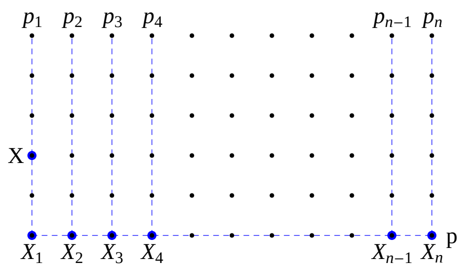
(b) skozi vsako točko $X \in \mathcal{A}$ poteka $n+1$ premic,

(c) afina ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje $n^2 + n$ premic.

Rešitev: Aksiomatsko definirana ravnina $\mathcal{A}$ je reda n, če na vsaki premici leži n točk.

(a) Najprej pokažimo, da aksiomatsko definirana afina ravnina $\mathcal{A}$ reda n vsebuje n^2 točk.

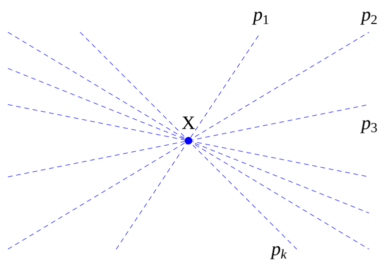
Izberimo poljubno premico p v $\mathcal{A}$ in označimo točke na njej z $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Po aksiomu $A3$ obstaja točka $X \in \mathcal{A}$, ki ne leži na p. Nadalje lahko po aksiomu $A1$ najdemo enolično določeno premico p_1, ki poteka skozi točki X in X_1. Ker $X \notin p$, se premici p in p_1 sekata samo v točki X_1. Z uporabo aksioma $A2$ lahko sedaj najdemo vzporednice $p_2, p_3, \ldots, p_n$ premice p, ki potekajo skozi točke $X_2, X_3, \ldots, X_n$.



V ravnini $\mathcal{A}$ imamo torej n vzporednic, od katerih vsaka vsebuje po n točk. Zato ravnina $\mathcal{A}$ vsebuje vsaj n^2 točk. Pokazati moramo še, da drugih točk ni. Pa denimo, da obstaja točka $Y \in \mathcal{A}$, ki ne leži na nobeni izmed premic p_i. Po aksiomu $A2$ lahko najdemo premico q, ki vsebuje Y in je vzporedna premici p_1. Tako dobljena premica q bi potem morala sekati premico p in bi zato sovpadala z eno izmed premic p_i. To pa je v nasprotju s predpostavko.

(b) Dokažimo sedaj, da skozi vsako točko poteka $n+1$ premic.

Izberimo poljubno točko $X \in \mathcal{A}$ in označimo s $p_1, p_2, \ldots, p_k$ premice, ki potekajo skozi točko X. Poljubni dve izmed teh premic se sekata natanko v točki x, njihova unija pa je cela ravnina $\mathcal{A}$. Oboje sledi iz aksioma $A1$.



Imamo torej k premic, ki vsebujejo po n točk. Če seštejemo te točke in upoštevamo, da smo točko X šteli k-krat, dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} kn-(k-1) &= n^2, \\ k(n-1) &= n^2-1, \\ k &= n+1. \end{aligned}$$

Torej skozi točko X poteka $n+1$ premic.

(c) Pokazali smo že, da v ravnini $\mathcal{A}$ leži n^2 točk in da gre skozi vsako točko $n+1$ premic. Ker leži na vsaki premici n točk, je vseh premic

$$\frac{n^2(n+1)}{n} = n^2+n.$$

□

(4) Konstruiraj $p-1$ paroma ortogonalnih latinskih kvadratov reda p, kjer je p praštevilo.

Rešitev: Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrika s koeficienti $\{1,2,\ldots,n\}$, katere vsaka vrstica in vsak stolpec vsebuje vseh n števil. Latinska kvadrata $A=(a_{ij})$ in $B=(b_{ij})$ sta ortogonalna, če sta enaki množici

$$\{(a_{ij},b_{ij})\,|\,i,j\in\{1,2,\ldots,n\}\} = \{(i,j)\,|\,i,j\in\{1,2,\ldots,n\}\}\,.$$

Poglejmo si pojem ortogonalnosti na primeru dveh latinskih kvadratov reda 3.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	2	1
2	1	3
1	3	2

Če ta dva kvadrata zložimo skupaj, dobimo naslednjo matriko urejenih parov.

(1,3)	(2,2)	(3,1)
(3,2)	(1,1)	(2,3)
(2,1)	(3,3)	(1,2)

Dva latinska kvadrata sta potem ortogonalna natanko takrat, ko v tej matriki parov vsak urejeni par nastopa natanko enkrat.

Pri konstrukciji ortogonalnih latinskih kvadratov reda p si bomo pomagali s končno afino ravnino $\mathbb{Z}_p^2$. V tej afini ravnini imamo natanko $p+1$ linearnih premic. Ena izmed teh je vodoravna, ena navpična, ostale pa so poševne. Pokazali bomo, da lahko vsaki poševni premici pridružimo nek latinski kvadrat tako, da bodo različne premice določale paroma ortogonalne latinske kvadrate.

Izberimo si torej neko poševno linearno premico $\mathcal{A}_1$. Ta premica določa družino vzporednic

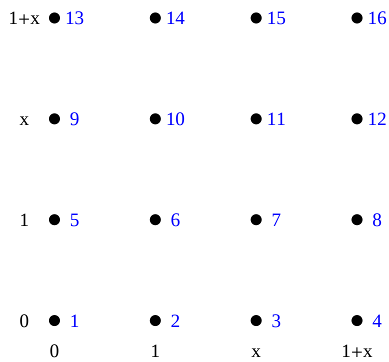
$$\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\ldots,\mathcal{A}_p\},$$

ki so paroma disjunktne, njihova unija pa je cela ravnina $\mathbb{F}_p^2$. Na vsaki premici je natanko p točk. Označimo sedaj mesta v kvadratu, ki ustrezajo točkam na premici $\mathcal{A}_i$, z i. Premica $\mathcal{A}_i$ seka vsako vodoravnico in vsako navpičnico natanko enkrat, zato bo število i nastopalo v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natanko enkrat. To pa pomeni, da smo s tem postopkom konstruirali latinski kvadrat.

Denimo sedaj, da je $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{A}_1$ neka druga poševna linearna premica ter $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_p\}$ njej pridružena družina vzporednic. Označimo z A in B prirejena latinska kvadrata. Za poljuben par (i,j) se premici $\mathcal{A}_i$ in $\mathcal{B}_j$ sekata v natanko eni točki. Torej matrika parov, ki jo dobimo z združitvijo latinskih kvadratov A in B, vsebuje vsak par (i,j) natanko enkrat, kar pa pomeni, da sta A in B ortogonalna. $\square$

(5) Trener ima v ekipi 16 igralcev. Vsak dan v tednu jih razdeli v 4 skupine po 4 igralce. Kako naj to stori, da bosta tekom tedna vsaka dva igralca natanko enkrat skupaj v skupini?

Rešitev: Za konstrukcijo skupin bomo uporabili geometrijo končne afine ravnine $\mathrm{GF}(4)^2$. V afini ravnini $\mathrm{GF}(4)^2$ poteka skozi izhodišče pet premic, ki določajo 5 smeri. Vsaka izmed teh premic ima še tri vzporednice. Torej imamo v vsaki smeri 4 premice, vsega skupaj pa je premic 20. Vsaka četverica vzporednic nam bo povedala, kako igralce razporedimo v skupine na določeni dan. Če označimo množico igralcev z $S = \{1, 2, \ldots, 16\}$, imamo bijekcijo med S in točkami $\mathrm{GF}(4)^2$, ki jo lahko ponazorimo s spodnjo sliko.



Izračunajmo najprej premice, ki potekajo skozi izhodišče.

- Premica p_1 ima smerni vektor $\vec{s}_1 = (1,0)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,0),(x,0),(1+x,0)\} \longleftrightarrow \{1,2,3,4\}.$$
- Premica p_2 ima smerni vektor $\vec{s}_2 = (0,1)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(0,1),(0,x),(0,1+x)\} \longleftrightarrow \{1,5,9,13\}.$$
- Premica p_3 ima smerni vektor $\vec{s}_3 = (1,1)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,1),(x,x),(1+x,1+x)\} \longleftrightarrow \{1,6,11,16\}.$$
- Premica p_4 ima smerni vektor $\vec{s}_4 = (1,x)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,x),(x,1+x),(1+x,1)\} \longleftrightarrow \{1,8,10,15\}.$$
- Premica p_5 ima smerni vektor $\vec{s}_5 = (1,1+x)$, na njej pa ležijo točke
$$\{(0,0),(1,1+x),(x,1),(1+x,x)\} \longleftrightarrow \{1,7,12,14\}.$$

Ko za vsako od zgornjih premico izračunamo še njene vzporednice, dobimo naslednjo razporeditev igralcev po skupinah:

$$
\begin{aligned}
&(1)\,\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8\},\{9,10,11,12\},\{13,14,15,16\},\\
&(2)\,\{1,5,9,13\},\{2,6,10,14\},\{3,7,11,15\},\{4,8,12,16\},\\
&(3)\,\{1,6,11,16\},\{2,5,12,15\},\{3,8,9,14\},\{4,7,10,13\},\\
&(4)\,\{1,8,10,15\},\{2,7,9,16\},\{3,6,12,13\},\{4,5,11,14\},\\
&(5)\,\{1,7,12,14\},\{2,8,11,13\},\{3,5,10,16\},\{4,6,9,15\}.
\end{aligned}
$$

□

5 Projektivna ravnina

(1) Objekte v $\mathbb{R}^3$ bi radi projicirali na ravnino $x = 1$ vzdolž žarkov skozi koordinatno izhodišče.

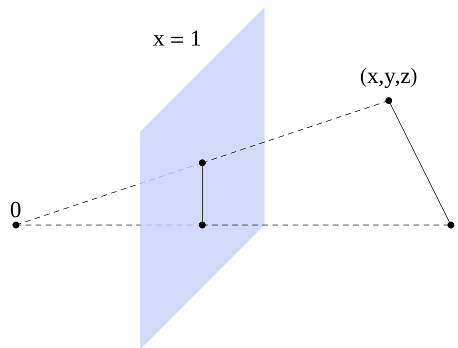
(a) Zapiši predpis za to projekcijo.

(b) Ugotovi, kam se projicirata poltraka:

$$p_1 : \vec{r} = (1, 1, -1) + t(1, 0, 0),\ t \geq 0,$$
$$p_2 : \vec{r} = (1, -1, -1) + t(1, 0, 0),\ t \geq 0.$$

(c) Skiciraj projekcijo kocke z oglišči $A(2, -1, -1)$, $B(2, 1, -1)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, -1, 1)$, $E(4, -1, -1)$, $F(4, 1, -1)$, $G(4, 1, 1)$ in $H(4, -1, 1)$.

Rešitev: (a) Recimo, da imamo točko $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ki leži desno od ravnine $x = 1$. Njena projekcija na ravnino $x = 1$ vzdolž žarka skozi izhodišče je presek žarka in pa ravnine. Takšni projekciji rečemo centralna projekcija.

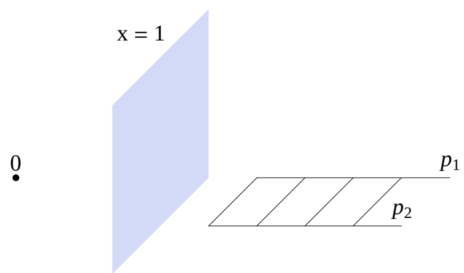


Žarek lahko parametriziramo s predpisom $p : \vec{r} = t(x, y, z)$. Če želimo, da bo prva koordinata enaka 1, mora biti $t = 1/x$, kar nam da predpis

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Mislimo si lahko, da nam ta projekcija določa, kakšna je slika nekega tridimenzionalnega objekta na dani ravnini.

(b) Izračunajmo sedaj, kako se projicirata železniška tira na ravnino $x = 1$.



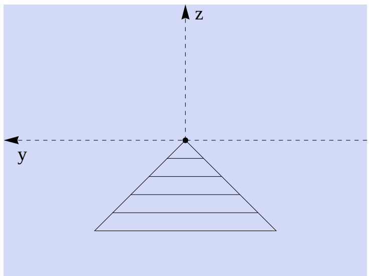
Poltrak p_1 je parametriziran s predpisom

$$p_1 : \vec{r} = (1 + t, 1, -1),$$

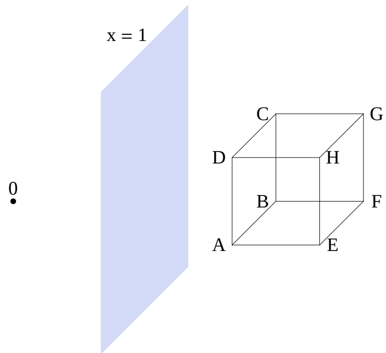
njegova projekcija pa je krivulja

$$\phi(p_1) : \vec{r} = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{1}{1+t} \right).$$

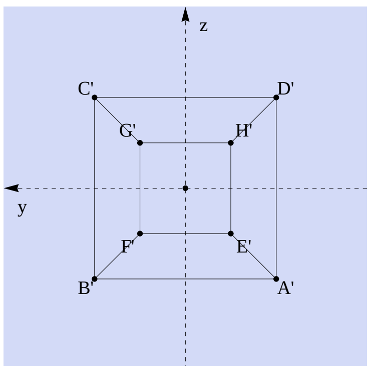
Ko t preteče interval $[1, \infty)$, v projekciji dobimo daljico od točke $(1, -1)$ do točke $(0, 0)$. Na podoben način lahko izračunamo, da je slika poltraka p_2 daljica od točke $(-1, -1)$ do točke $(0, 0)$. V projekciji se sicer vzporedna poltraka sekata v točki na obzorju.



(c) Sedaj si bomo pogledali, kako se projicira kocka.



Označimo s črticami projekcije oglišč. Potem je $A'\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $B'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $C'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $D'\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E'\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$, $F'\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, $G'\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ in $H'\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. V projekciji dobimo naslednji lik.



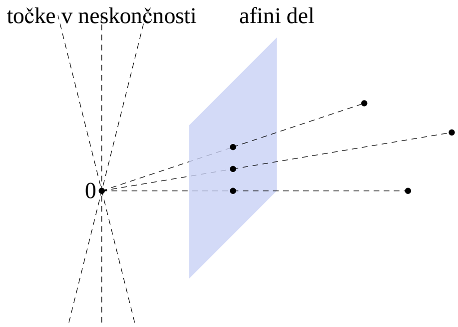
Vidimo, da objekti, ki ležijo dlje od centra projekcije, izgledajo manjši. $\square$

(2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ poišči:

(a) premico, ki poteka skozi točki $T_1 = [1:2:3]$ in $T_2 = [1:1:4]$,

(b) presek premic $p_1 = \{[x:y:z] \,|\, x+y+z=0\}$ in $p_2 = \{[x:y:z] \,|\, -x-y+z=0\}$.

Rešitev: Prejšnja naloga nam je pokazala, da premice v evklidskem prostoru ustrezajo točkam na ravnini, na katero projiciramo. Če smo povsem natančni, to velja za premice, ki niso vzporedne ravnini. Če jim dodamo še množico teh premic, dobimo projektivno ravnino. Ravnina, na katero projiciramo, tvori afini del projektivne ravnine, množica premic, ki so ji vzporedne, pa tako imenovano premico v neskončnosti. Mislimo si lahko, da afini ravnini dodamo za vsako smer še po eno točko v neskončnosti. Tako dosežemo, da se dve vzporedni premici sekata v ustrezni točki v neskončnosti.



Formalno definiramo projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ na naslednji način:

- točke v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$,
- premice v $P(\mathbb{R}^3)$ ustrezajo ravninam skozi izhodišče v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.

Vsako premico p v $\mathbb{R}^3$, ki poteka skozi izhodišče, lahko parametriziramo s predpisom

$$p: \vec{r} = t\vec{s},$$

kjer je $\vec{s} = (x, y, z)$ njen smerni vektor. Torej je vsaka taka premica določena s svojim smernim vektorjem, zato lahko premico p na kratko opišemo z oznako

$$p = [x:y:z].$$

Če gledamo premico p kot točko projektivne ravnine $P(\mathbb{R}^3)$, rečemo, da so $[x:y:z]$ njene homogene koordinate. Ker je smerni vektor premice določen le do skalarnega večkratnika natančno, velja

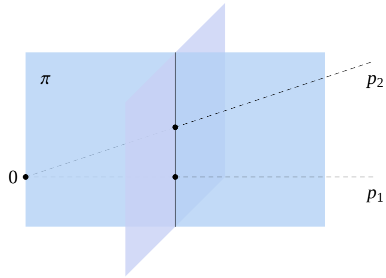
$$[x:y:z] = [\lambda x : \lambda y : \lambda z]$$

za vsak $\lambda \neq 0$. Na projektivno ravnino $P(\mathbb{R}^3)$ lahko torej gledamo tudi kot na množico ekvivalenčnih razredov trojic $[x:y:z]$, ki imajo vsaj eno koordinato neničelno.

(a) Imamo točki $T_1 = [1:2:3]$ in $T_2 = [1:1:4]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki ju lahko predstavimo s premicama:

$$p_1: \vec{r} = t(1,2,3),$$
$$p_2: \vec{r} = t(1,1,4)$$

v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$.



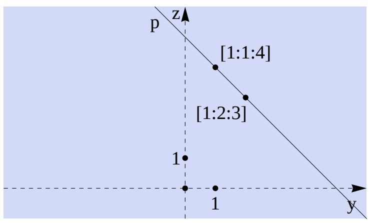
Ti dve premici natanko določata ravnino Π skozi izhodišče, ki pa po drugi strani določa premico p skozi točki $[1:2:3]$ in $[1:1:4]$ v projektivni ravnini. Ta ravnina ima smer normale

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = (1,2,3) \times (1,1,4) = (5,-1,-1).$$

Premica p skozi točki $[1:2:3]$ in $[1:1:4]$ v $P(\mathbb{R}^3)$ je torej množica

$$p = \{[x:y:z] \,|\, 5x - y - z = 0\} \subset P(\mathbb{R}^3).$$

Na ravnini $x = 1$ je premica p določena z enačbo $y + z = 5$. Poleg točk v afinem delu pa ta premica vsebuje še točko v neskončnosti $[0:1:-1]$.



(b) Sedaj iščemo presek premic:

$$\begin{aligned} p_1 &= \{[x:y:z] \,|\, x + y + z = 0\}, \\ p_2 &= \{[x:y:z] \,|\, -x - y + z = 0\} \end{aligned}$$

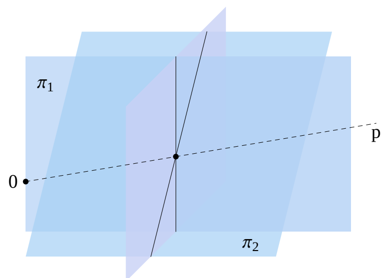
v projektivni ravnini. Ti dve premici sta določeni z ravninama:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \; x + y + z = 0, \\ \Pi_2 &: \; -x - y + z = 0 \end{aligned}$$

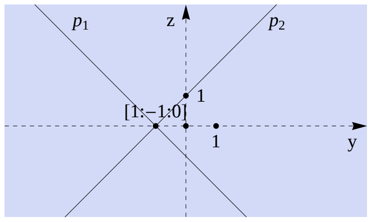
v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Njun presek v $\mathbb{R}^3$ je premica p s smernim vektorjem

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,1,1) \times (-1,-1,1) = (2,-2,0).$$

Od tod sledi, da je presek premic p_1 in p_2 točka $T = [1:-1:0]$.



Na ravnini $x = 1$ imata premici p_1 in p_2 enačbi $y + z = -1$ in $-y + z = 1$, točka T pa ima koordinati $(-1, 0)$.



$\square$

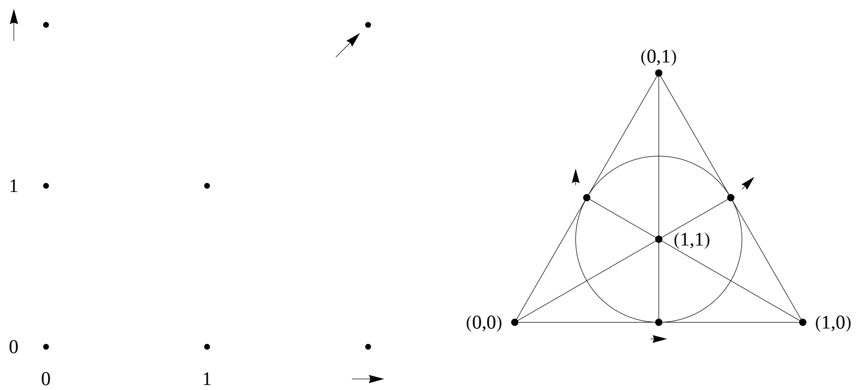
(3) Izračunaj število točk in število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$.

Rešitev: Točke v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ ustrezajo premicam skozi izhodišče v prostoru $\mathbb{F}_p^3$. Vemo že, da je takšnih premic $\frac{p^3-1}{p-1}$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$

$$\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$$

točk. Do tega rezultata lahko pridemo tudi drugače, če upoštevamo, da je projektivna ravnina unija afine ravnine in pa premice v neskončnosti. Afina ravnina $\mathbb{F}_p^2$ vzebuje p^2 točk, točke na premici v neskončnosti pa ustrezajo ekvivalenčnim razredom vzporednih premic v $\mathbb{F}_p^2$. Teh razredov je ravno $p + 1$, zato ima projektivna ravnina $P(\mathbb{F}_p^3)$ natanko $p^2 + p + 1$ točk.

Kot primer si poglejmo projektivno ravnino $P(\mathbb{F}_2^3)$. Sestoji iz štirih točk v afini ravnini in treh točk na premici v neskončnosti, ki ustrezajo trem smerem v afini ravnini. Tej ravnini rečemo Fanova ravnina in jo pogosto ponazorimo z diagramom na desni sliki.



Po principu dualnosti je tudi število premic v projektivni ravnini $P(\mathbb{F}_p^3)$ enako $p^2 + p + 1$. Bolj eksplicitno pa lahko to vidimo, če preštejemo, koliko ravnin v prostoru $\mathbb{F}_p^3$ gre skozi izhodišče. Vsaka takšna ravnina je določena z enačbo

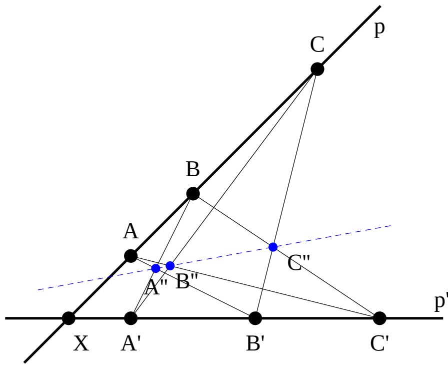
$$ax + by + cz = 0,$$

kjer je $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3$ neničeln vektor, ki igra vlogo normale na ravnino. Ker vzporedni normalni vektorji določajo isto ravnino, je ravnin skozi izhodišče v $\mathbb{F}_p^3$ ravno toliko kot je premic skozi izhodišče. $\square$

(4) Pokaži, da v projektivni ravnini $P(\mathcal{O}^3)$ velja Pappusov izrek natanko takrat, ko je $\mathcal{O}$ komutativen obseg.

Rešitev: Najprej si poglejmo formulacijo Pappusovega izreka:

Pappusov izrek: Naj bosta p in p' različni premici v $P(\mathcal{O}^3)$ in $A, B, C \in p$ ter $A', B', C' \in p'$ različne točke na njih. Potem so točke $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = AC' \cap A'C$ in $C'' = AB' \cap A'B$ kolinearne.



($\Longleftarrow$) Denimo najprej, da je $\mathcal{O}$ komutativen obseg. Da si olajšamo računanje, bomo zvito izbrali koordinate v $P(\mathcal{O}^3)$. Iz predpostavk Pappusovega izreka sledi, da tvorijo točke A, A', A'' in $X = p \cap p'$ projektivno ogrodje. Kot bomo videli v naslednjem poglavju, lahko vsako projektivno ogrodje z neko projektivnostjo preslikamo na standardno projektivno ogrodje. Zato lahko brez škode za splošnost predpostavimo, da velja:

$$\begin{aligned} X &= [1 : 0 : 0], \\ A &= [0 : 1 : 0], \\ A' &= [0 : 0 : 1], \\ A'' &= [1 : 1 : 1]. \end{aligned}$$

Ta predpostavka je analog temu, da bi v evklidski ravnini izbrali, da je p vodoravna, p' pa navpična os ter da točki A in A' ustrezata enotskima smernima vektorjema.

Pri teh izbirah lahko hitro vidimo, da je premica p skozi točki X in A določena z enačbo $z = 0$. Točka $B \in p$ je torej oblike $B = [x : y : 0]$. Če bi bil $x = 0$, bi sledilo $B = [0 : y : 0] = [0 : 1 : 0] = A$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da sta A in B različni točki. Zaradi lastnosti homogenih koordinat lahko torej predpostavimo, da je $x = 1$. Ko naredimo podoben sklep še za točko C, vidimo, da je

$$\begin{aligned} B &= [1 : b : 0], \\ C &= [1 : c : 0] \end{aligned}$$

za neka neničelna in različna skalarja $b, c \in \mathcal{O}$. Podobno dobimo, da je premica p' določena z enačbo $y = 0$, zato obstajata različna, neničelna $b', c' \in \mathcal{O}$, da velja

$$\begin{aligned} B &= [1 : 0 : b'], \\ C &= [1 : 0 : c']. \end{aligned}$$

Vidimo, da smo pri tej konkretni izbiri koordinat število parametrov sistema zmanjšali na vsega skupaj 4.

Izračunajmo sedaj koordinate točk B'', C'' in A''. Točka B'' je po definiciji presek premic AC' in $A'C$. Preverimo lahko, da je premica AC' določena z enačbo $c'x = z$, premica $A'C$ pa z enačbo $cx = y$. Od tod sledi, da je

$$B'' = [1 : c : c'].$$

Podobno dobimo tudi, da je

$$C'' = [1 : b : b'].$$

Točka A'' je po eni strani presek premic BC' in $B'C$, po drugi strani pa smo predpostavili, da je $A = [1 : 1 : 1]$. Oboje skupaj nam bo dalo sistem dveh enačb za koeficiente b, b', c in c'. Premici BC' in $B'C$ lahko opišemo z enačbama:

$$\begin{aligned} bc'x - c'y - bz &= 0, \\ -b'cx + b'y + cz &= 0. \end{aligned}$$

Ko vstavimo koordinate točke A'', tako dobimo sistema enačb:

$$\begin{aligned} bc' - c' - b &= 0, \\ -b'c + b' + c &= 0. \end{aligned}$$

Sedaj moramo preveriti, da so točke A'', B'' in C'' kolinearne, kar pa pomeni, da so njihovi smerni vektorji koplanarne točke v $\mathcal{O}^3$. Koplanarnost vektorjev najlažje preverimo z izračunom determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & c' \\ 1 & b & b' \end{vmatrix} = b'c + c' + b - (c + bc' + b') = 0.$$

($\Longrightarrow$) Sedaj bomo predpostavili, da v projektivni ravnini $P(\mathcal{O}^3)$ velja Pappusov izrek in pokazali, da od tod sledi, da je $\mathcal{O}$ komutativen obseg. Koordinate točk X, A, A', A'' bomo izbrali enako kot prej. Preverimo lahko, da imajo potem tudi točke B, B', B'', C, C', C'' enake koordinate kot prej. Razlika je le v enačbi, ki povezuje točko A'' s presekom premic BC' in $B'C$. Če je $\mathcal{O}$ komutativen, lahko premico BC' določimo z enačbo

$$bc'x - c'y - bz = 0.$$

Če $\mathcal{O}$ ni komutativen, pa lahko na primer eksplicitno preverimo, da koordinate točke $B = [1 : b : 0]$ ne ustrezajo nujno tej enačbi, saj je

$$bc'1 - c'b - b0 = bc' - c'b \neq 0.$$

V splošnem enačba

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

ne določa neke ravnine v $\mathcal{O}^3$, če elemente $\mathcal{O}^3$ množimo z $\mathcal{O}$ z leve. Bo pa na srečo prava oblika enačbe ravnine v $\mathcal{O}^3$ oblike

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$$

za nek $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Koeficienti enačbe premice $x\alpha + y\beta + z\gamma = 0$ skozi točki $B = [1 : b : 0]$ in $C' = [1 : 0 : c']$ morajo torej zadoščati pogojema:

$$\begin{aligned} \alpha + b\beta &= 0, \\ \alpha + c'\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Če na primer izberemo $\gamma = 1$, bo $\alpha = -c'$ in $\beta = b^{-1}c'$, enačba premice BC' pa bo

$$-xc' + yb^{-1}c' + z = 0.$$

Podobno lahko dobimo tudi, da je

$$-xb' + yc^{-1}b' + z = 0$$

enačba premice skozi točki B' in C. Ker hočemo, da je A presek teh dveh premic, v tem primeru po nekaj računanja pridemo do enačb:

$$\begin{aligned} bc' &= b + c', \\ cb' &= c + b'. \end{aligned}$$

Sedaj bo naš cilj, da iz kolinearnosti točk A'', B'' in C'' izpeljemo, da je $bc = cb$ za poljubna $b, c \in \mathcal{O}$. Zaenkrat so bili koeficienti b, c, b', c' še poljubni. Ker pa po predpostavki Pappusov izrek velja za poljuben trikotnik, lahko na primer izberemo $b = b'$, kar pomeni, da smo določili položaj točk B in B'. Ker je točka A'' že fiksirana, sta s tem v bistvu natanko določeni tudi točki C in C'. Sedaj lahko preverimo, da iz pogoja kolinearnosti točk $A'' = [1 : 1 : 1]$, $B'' = [1 : c : c']$ in $C'' = [1 : b : b]$ sledi, da je $c = c'$, kar pa pomeni, da je

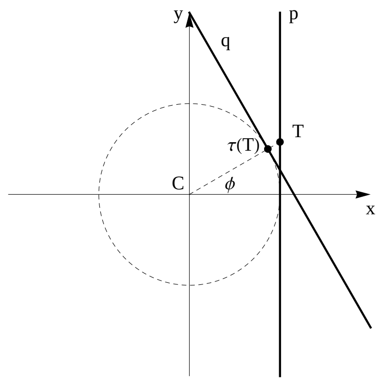
$$bc = bc' = b + c' = b' + c = cb' = cb,$$

kar smo želeli pokazati. □

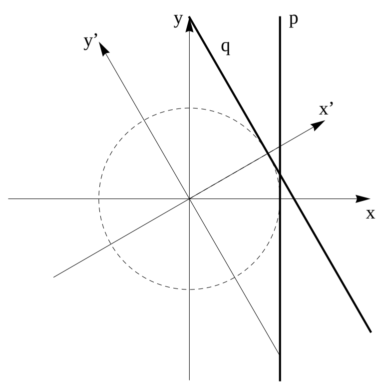
6 Kolineacije in projektivnosti

(1) V ravnini $\mathbb{R}^2$ sta dani premici $p:\ x=1$ in $q:\ \cos\phi\, x+\sin\phi\, y=1$. Zapiši predpis za perspektivnost s centrom v $C(0,0)$ s premice p na premico q.

Rešitev: Imamo premici p in q v ravnini $\mathbb{R}^2$. *Perspektivnost* s centrom C je preslikava $\tau : p \to q$, ki točki $T \in p$ priredi presečišče premice CT in premice q.



Da bi zapisali predpis za perspektivnost s p na q, moramo najprej izbrati koordinate na premicah p in q. Na premici p ležijo točke oblike $(1, y)$, zato jo lahko parametriziramo kar s koordinato y. Za parametrizacijo premice q bomo najprej definirali nov koordinatni sistem, ki je zavrten za ϕ v pozitivni smeri glede na standardni koordinatni sistem.



Zvezo med koordinatami (x, y) in (x', y') lahko podamo v obliki

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

oziroma:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\phi\, x + \sin\phi\, y, \\ y' &= -\sin\phi\, x + \cos\phi\, y. \end{aligned}$$

Premica q ima potem v novem koordinatnem sistemu enačbo $x' = 1$, parametriziramo pa jo lahko z y'. Koordinati točke $T(1, y)$ v novem koordinatnem sistemu sta:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\phi + \sin\phi\, y, \\ y' &= -\sin\phi + \cos\phi\, y. \end{aligned}$$

Če ju normaliziramo tako, da bo $x' = 1$, dobimo predpis

$$\tau(y) = \frac{-\sin\phi + \cos\phi\, y}{\cos\phi + \sin\phi\, y}$$

za preslikavo $\tau : p \to q$. Preslikavi takšne oblike rečemo lomljena linearna transformacija.

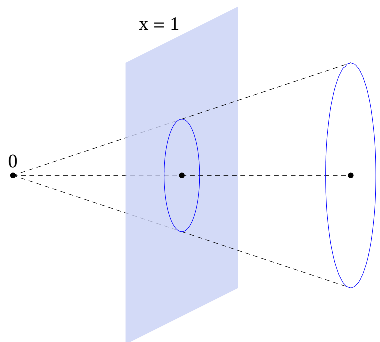
Bolj podrobno si bomo pogledali primer, ko je $\phi = 45°$. V tem primeru je

$$\tau(y) = \frac{y-1}{y+1}.$$

Dano preslikavo lahko gledamo kot preslikavo med afinima premicama, bolj primerno pa jo je gledati kot preslikavo med projektivnima premicama. V tem primeru τ pošlje točko -1 na p v točko v neskončnosti na q, točko v neskončnosti na p pa v točko 1 na q. □

(2) S fotoaparatom z zornim kotom π in razdaljo 1 do ravnine fotografije napravimo posnetek, na katerem vidimo krožnico $y^2 + z^2 = 1$. Fotoaparat obrnemo za kot $\frac{\pi}{4}$ v levo in spet fotografiramo. Kaj vidimo na novem posnetku?

Rešitev: Pri tej nalogi bomo izračunali, kako se spremeni slika objekta na zaslonu pri zasuku zaslona. Da bo računanje bolj preprosto, si bomo pogledali zasuk za kot $\frac{\pi}{4}$, isti postopek pa lahko uporabimo tudi pri poljubnem zasuku zaslona.



Spet bomo imeli opravka z dvema koordinatnima sistemoma. Zveza med koordinatami (x, y, z) in (x', y', z') je pri rotaciji za kot $\frac{\pi}{4}$ okoli navpične osi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(x + y)\,, \\ y' &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,(-x + y)\,, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Če koordinate normaliziramo na $x' = 1$, dobimo predpis za prehod med koordinatami

$$\tau(y, z) = \left(\frac{y-1}{y+1}, \frac{\sqrt{2}z}{y+1} \right).$$

Zanima nas, kam preslikava τ preslika krožnico $y^2 + z^2 = 1$. Iz zvez:

$$y' = \frac{y-1}{y+1},$$
$$z' = \frac{\sqrt{2}z}{y+1}$$

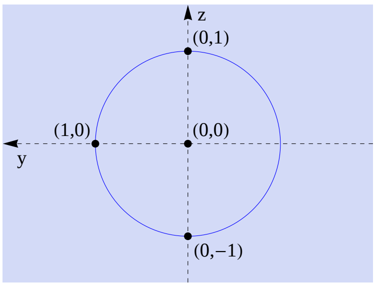
lahko izrazimo:

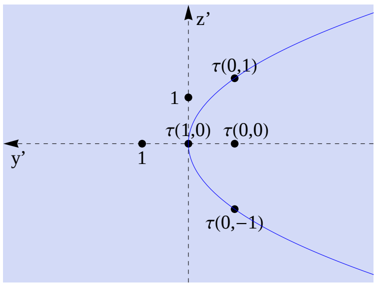
$$y = \frac{1+y'}{1-y'},$$
$$z = \frac{\sqrt{2}z'}{1-y'}.$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned} y^2 + z^2 &= 1, \\ \frac{(1+y')^2}{(1-y')^2} + \frac{2z'^2}{(1-y')^2} &= 1, \\ (1+y')^2 + 2z'^2 &= (1-y')^2, \\ y' &= -\frac{1}{2}z'^2. \end{aligned}$$

Vidimo, da se krožnica na prvotni sliki preslika v parabolo na novi sliki.





Razlog je v tem, da se pri vrtenju fotoaparata v levo desni del krožnice pomika proti robu našega vidnega polja. Ko pade čez rob, to na sliki izgleda, kot da se razteza proti neskončnosti. □

(3) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dano standardno projektivno ogrodje $X_0 = [1:1:1]$, $X_1 = [1:0:0]$, $X_2 = [0:1:0]$ in $X_3 = [0:0:1]$.

(a) Poišči predpis za projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, ki je določena s pogoji:

$$\begin{aligned} \theta_A(X_0) &= [1:1:1], \\ \theta_A(X_1) &= [1:0:0], \\ \theta_A(X_2) &= [1:1:0], \\ \theta_A(X_3) &= [1:0:1]. \end{aligned}$$

(b) Ugotovi, kam θ_A preslika premico $p = \{[x:y:z] \,|\, x = 0\}$.

Rešitev: Kolineacije in projektivnosti imajo v projektivni geometriji analogno vlogo, kot jo imajo izometrije v evklidski geometriji. Bijektivni preslikavi

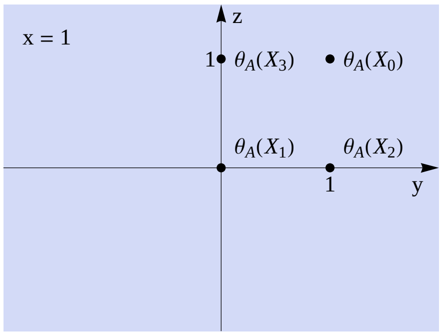
$$\theta : P(\mathcal{O}^n) \to P(\mathcal{O}^n)$$

med projektivnima prostoroma nad obsegom $\mathcal{O}$ rečemo kolineacija, če slika kolinearne točke v kolinearne točke. Po osnovnem izreku projektivne geometrije zmeraj obstaja obrnljiva semilinearna preslikava $M : \mathcal{O}^n \to \mathcal{O}^n$, da velja

$$\theta(X) = MX$$

za vsako točko $X \in P(\mathcal{O}^n)$. V tem primeru pišemo $\theta = \theta_M$. Preslikava M je določena do neničelnega skalarja natančno. Če je $M = A$ linearna preslikava, rečemo kolineaciji θ_A projektivnost. Nad obsegi $\{\mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ je vsaka kolineacija tudi projektivnost, nad obsegom $\mathbb{C}$ pa obstajajo kolineacije, ki niso projektivnosti.

(a) Podobno kot je vsaka linearna preslikava $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ natanko določena s slikami baznih vektorjev $\mathbb{R}^3$, je vsaka projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$ natanko določena s slikami standardnega projektivnega ogrodja. Te slike morajo spet tvoriti neko projektivno ogrodje $P(\mathbb{R}^3)$, kar z drugimi besedami pomeni, da nobena trojica od teh štirih točk ni kolinearna. Kot vidimo na spodnji sliki, je v našem primeru temu pogoju zadoščeno.



Pišimo

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Pogoji:

$$\begin{aligned} \theta_A(X_0) &= [1 : 1 : 1], \\ \theta_A(X_1) &= [1 : 0 : 0], \\ \theta_A(X_2) &= [1 : 1 : 0], \\ \theta_A(X_3) &= [1 : 0 : 1] \end{aligned}$$

nam določajo sistem linearnih enačb za koeficiente matrike A.

$\underline{\theta_A([1 : 1 : 1]) = [1 : 1 : 1]}$:

Ta pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} a + b + c &= \alpha, \\ d + e + f &= \alpha, \\ g + h + i &= \alpha. \end{aligned}$$

$\underline{\theta_A([1:0:0]) = [1:0:0]}$:
Sedaj je

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} a &= \beta, \\ d &= 0, \\ g &= 0. \end{aligned}$$

$\underline{\theta_A([0:1:0]) = [1:1:0]}$:
Tokrat imamo

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} b &= \gamma, \\ e &= \gamma, \\ h &= 0. \end{aligned}$$

$\underline{\theta_A([0:0:1]) = [1:0:1]}$:
V tem primeru je

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} c &= \delta, \\ f &= 0, \\ h &= \delta. \end{aligned}$$

Iz teh pogojev najprej razberemo, da je $d = f = g = h = 0$. Nadalje je $c = i$ in $b = e$. Ko to vstavimo v sistem:

$$\begin{aligned} a + b + c &= \alpha, \\ d + e + f &= \alpha, \\ g + h + i &= \alpha, \end{aligned}$$

dobimo, da je $b = c = e = i = -a = \alpha$. Ker je matrika A določena le do skalarja natančno, lahko na primer vzamemo $\alpha = 1$, da dobimo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

od koder sledi

$$\theta_A([x:y:z]) = [-x + y + z : y : z].$$

Na afinem delu $x = 1$ pa dobimo preslikavo

$$\theta_A(y, z) = \left(\frac{y}{y + z - 1}, \frac{z}{y + z - 1} \right).$$

Vidimo, da je to preslikava, katere komponenti sta lomljeni linearni transformaciji. Takoj lahko vidimo še, da se premica $y + z = 1$ preslika na premico v neskončnosti $x = 0$.

(b) Premica $p = \{[x : y : z] \mid x = 0\}$ je premica skozi točki X_2 in X_3, zato je $\theta_A(p)$ premica skozi sliki teh dveh točk. Računsko ali pa grafično lahko preverimo, da je to premica

$$\theta_A(p) = \{[x : y : z] \mid x - y - z = 0\}.$$

□

(4) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ sta dani premici:

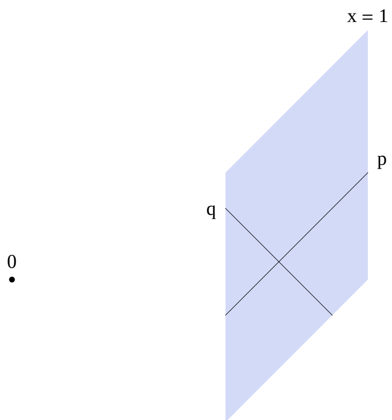
$$p = \{[x : y : z] \mid z = 0\},$$
$$q = \{[x : y : z] \mid x + y + z = 0\}.$$

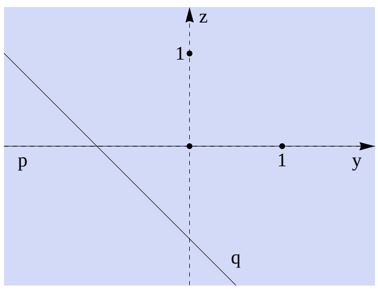
(a) Parametriziraj premici p in q.

(b) Poišči predpis za projektivnost $\theta : p \to q$, za katero je $\theta([1 : 0 : 0]) = [0 : 1 : -1]$, $\theta([0 : 1 : 0]) = [1 : 1 : -2]$ in $\theta([1 : 1 : 0]) = [1 : 3 : -4]$.

(c) Pokaži, da je θ perspektivnost in poišči center perspektivnosti θ.

Rešitev: Spoznali smo že, kako se opiše projektivnost projektivne ravnine $P(\mathbb{R}^3)$ nazaj nase, pri tej nalogi pa imamo dve projektivni premici, ki ležita v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Če hočemo izračunati predpis za projektivnost med njima, ju moramo najprej parametrizirati.





(a) Parametrizacija projektivne premice $p \subset P(\mathbb{R}^n)$ je projektivnost

$$i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p.$$

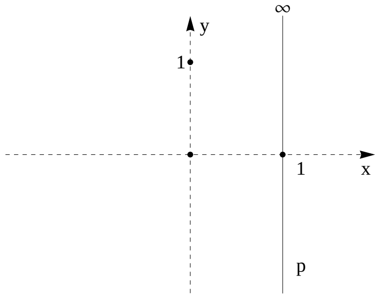
Parametrizacija nam omogoča, da premico p enačimo s standardno projektivno premico $P(\mathbb{R}^2)$. Izbira parametrizacije projektivne premice je analogna izbiri baze vektorskega prostora.

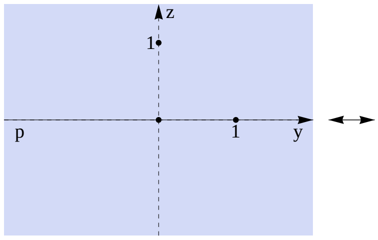
Parametrizacija premice p:

Vzamemo lahko parametrizacijo $i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p$, ki je podana s predpisom:

$$i_p([x : y]) = [x : y : 0],$$
$$[1 : y] \mapsto [1 : y : 0].$$

Pri tej parametrizaciji se točka v neskončnosti $[0 : 1] \in P(\mathbb{R}^2)$ preslika v točko na premici v neskončnosti v $P(\mathbb{R}^3)$, ki ustreza vodoravni smeri.



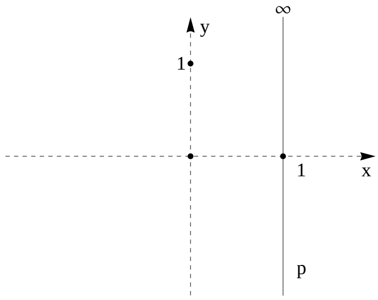


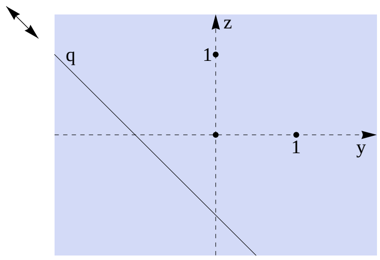
Parametrizacija premice q:

Tokrat bomo vzeli parametrizacijo $i_q : P(\mathbb{R}^2) \to q$, ki je podana s predpisom:

$$\begin{aligned} i_q([x:y]) &= [x:y:-x-y], \\ [1:y] &\mapsto [1:y:-1-y]. \end{aligned}$$

Tokrat se točka v neskončnosti $[0:1] \in P(\mathbb{R}^2)$ preslika v točko na premici v neskončnosti v $P(\mathbb{R}^3)$, ki ustreza poševni smeri.





(b) Sedaj, ko imamo premici p in q parametrizirani, bomo zapisali predpis za projektivnost θ v teh parametrizacijah. Ta predpis bomo označili s θ_A. Pogoji $\theta([1:0:0]) = [0:1:-1]$, $\theta([0:1:0]) = [1:1:-2]$ in $\theta([1:1:0]) = [1:3:-4]$ se prevedejo v pogoje:

$$\begin{aligned} \theta_A([1:0]) &= [0:1], \\ \theta_A([0:1]) &= [1:1], \\ \theta_A([1:1]) &= [1:3]. \end{aligned}$$

$\theta_A([1:0]) = [0:1]$:

Ta pogoj nam da

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$\begin{aligned} a &= 0, \\ c &= \alpha. \end{aligned}$$

$\theta_A([0:1]) = [1:1]$:

Sedaj je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$b = \beta,$$
$$d = \beta.$$

$\underline{\theta_A([1:1]) = [1:3]}$:
Tokrat imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

oziroma

$$a + b = \gamma,$$
$$c + d = 3\gamma.$$

Od tod dobimo $a = 0$ in $c = 2b = 2d$. Če izberemo $b = d = 1$, dobimo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

od koder sledi $\theta_A([x : y]) = [y : 2x + y]$ oziroma

$$\theta([x : y : 0]) = [y : 2x + y : -2x - 2y].$$

(c) Naj bosta p in q premici v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in $\theta : p \to q$ neka projektivnost. Potem je θ perspektivnost natanko takrat, ko ohranja presečišče premic p in q. V našem primeru je presečišče premic p in q točka $T = [1 : -1 : 0]$, zanjo pa velja

$$\theta([1 : -1 : 0]) = [-1 : 1 : 0] = [1 : -1 : 0],$$

od koder sledi, da je θ perspektivnost.

Center perspektivnosti lahko izračunamo tako, da izberemo različni točki A in B na premici p in nato izračunamo presečišče premic skozi A in $\theta(A)$ oziroma skozi B in $\theta(B)$.

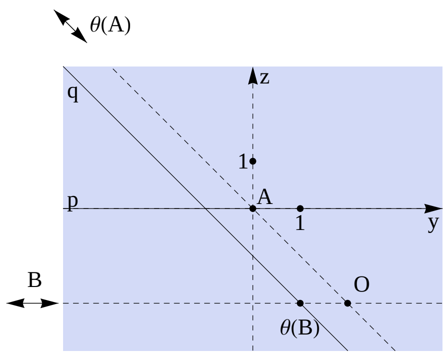
Najprej izberimo $A = [1 : 0 : 0]$. Potem je $\theta(A) = [0 : 1 : -1]$, premica skozi A in $\theta(A)$ pa ima enačbo

$$\overline{A\theta(A)} = \{[x : y : z] \,|\, y + z = 0\}.$$

Kot drugo točko si lahko izberemo točko $B = [0 : 1 : 0]$. Sedaj je $\theta(B) = [1 : 1 : -2]$ in

$$\overline{B\theta(B)} = \{[x : y : z] \,|\, 2x + z = 0\}.$$

Presek teh dveh premic je točka $O = [1 : 2 : -2]$. Če pogledamo sliko na afinem delu $x = 1$, ima premica $\overline{A\theta(A)}$ enačbo $z = -y$, premica $\overline{B\theta(B)}$ pa enačbo $z = -2$. Točki $\theta(A)$ in B ustrezata točkam na premici v neskončnosti, ki pripadata vodoravni oziroma poševni smeri. Točka B je ravno točka v neskončnosti na premici p, točka $\theta(A)$ pa točka v neskončnosti na premici q.



$\square$

(5) Naj bo $\theta : P(\mathbb{F}_3^3) \to P(\mathbb{F}_3^3)$ projektivnost s fiksnima točkama $[1 : 1 : 0]$ in $[2 : 1 : 1]$.

(a) Koliko je različnih projektivnosti, ki zadoščajo zgornjemu pogoju?

(b) Ali je grupa projektivnosti, ki zadoščajo temu pogoju, komutativna?

Rešitev: (a) Da si olajšamo računanje, bomo na $P(\mathbb{F}_3^3)$ izbrali nove koordinate. Naj bo $\alpha : P(\mathbb{F}_3^3) \to P(\mathbb{F}_3^3)$ poljubna projektivnost, za katero je $\alpha([1 : 1 : 0]) = [1 : 0 : 0]$ in $\alpha([2 : 1 : 1]) = [0 : 1 : 0]$. Potem ima projektivnost

$$\theta' = \alpha \circ \theta \circ \alpha^{-1}$$

fiksni točki $[1 : 0 : 0]$ in $[0 : 1 : 0]$. Od tod sledi, da jo lahko enolično opišemo z matriko

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kjer sta a in b neničelna, c in d pa poljubna elementa obsega $\mathbb{F}_3$. Različnih projektivnosti, ki zadoščajo danemu pogoju, je torej $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$.

(b) Grupa projektivnosti, ki zadoščajo danemu pogoju, ni komutativna. Če vzamemo na primer matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

je

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

7 Dvorazmerje

(1) Dane so točke $A = [3 : 6 : 0]$, $B = [0 : 3 : 1]$, $C = [1 : 5 : 1]$ in $D = [4 : -7 : -5]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$.

(a) Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in poišči enačbo premice p, ki jih vsebuje.

(b) Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

Rešitev: (a) Kolinearnost točk A, B, C in D bomo dokazali tako, da bomo najprej poiskali premico p skozi A in B ter nato pokazali, da točki C in D ležita na njej. Premica skozi točki A in B je predstavljena z ravnino skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$, ki ima smer normale

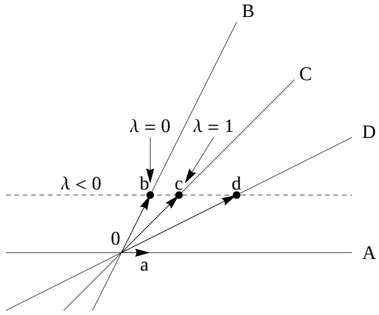
$$\vec{n} = \vec{s}_A \times \vec{s}_B = (3, 6, 0) \times (0, 3, 1) = (6, -3, 9).$$

Torej velja

$$p = \{[x : y : z] \,|\, 2x - y + 3z = 0\}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da točki C in D ležita na p.

(b) Dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ štirih točk na projektivni premici nam pove, kakšne so koordinate točke D glede na projektivno ogrodje, ki ga določajo točke A, B in C.



Formalno ga lahko definiramo takole. Izberimo nek vektor $c \in \mathbb{R}^3$, ki leži na premici, ki določa točko C. Potem lahko izberemo vektorja a in b, ki ležita na premicah, ki določata točki A in B in ki zadoščata pogoju

$$c = a + b.$$

Ker tvorita vektorja a in b bazo prostora, ki določa projektivno premico, obstaja enolično določen $\lambda \in \mathbb{R}$, da vektor

$$d = \lambda a + b$$

leži na premici v $\mathbb{R}^3$, ki je določena s točko D. Pri tem moramo predpostaviti, da $D \neq A$. Parametru λ rečemo dvorazmerje točk A, B, C in D ter ga označimo z

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \lambda.$$

Izberimo $c = (1, 5, 1)$ in $a' = (3, 6, 0)$, $b' = (0, 3, 1)$. Najprej moramo vektor c zapisati kot vsoto vektorjev, ki ležita na premicah, ki določata točki A in B. Pišimo:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a' + \beta b', \\ (1, 5, 1) &= \alpha(3, 6, 0) + \beta(0, 3, 1), \\ (1, 5, 1) &= (1, 2, 0) + (0, 3, 1). \end{aligned}$$

Označimo torej $a = (1,2,0)$ in $b = (0,3,1)$. Če označimo $d' = (4,-7,-5)$, je dvorazmerje $\lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$ natanko določeno s pogojem:

$$\begin{aligned} \delta d' &= \lambda a + b, \\ \delta(4,-7,-5) &= \lambda(1,2,0) + (0,3,1). \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $\delta = -1/5$ in $\lambda = -4/5$, od koder sledi

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = -\frac{4}{5}.$$

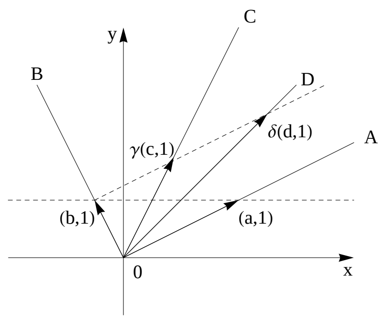
Opomba: Dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,C,D)$ točk A,B,C,D na projektivni premici p določa koordinate točke D glede na projektivno ogrodje, ki ga definirajo točke A,B in C. Če namreč označimo s $\theta : P(\mathbb{R}^2) \to p$ projektivnost, ki je določena s pogoji:

$$\begin{aligned} \theta([1:0]) &= A, \\ \theta([0:1]) &= B, \\ \theta([1:1]) &= C, \end{aligned}$$

je točka D slika točke $[\lambda : 1]$, kjer je $\lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$. □

(2) Naj bodo $A = [a:1]$, $B = [b:1]$, $C = [c:1]$ in $D = [d:1]$ točke na projektivni premici $P(\mathbb{R}^2)$. Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,C,D)$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo izračunali dvorazmerje četverice realnih števil.



Najprej bomo poiskali α in β tako, da bo veljalo

$$(c,1) = \alpha(a,1) + \beta(b,1).$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a + \beta b, \\ 1 &= \alpha + \beta, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $\alpha = \frac{c-b}{a-b}$ in $\beta = \frac{a-c}{a-b}$. Nadalje mora veljati

$$\delta(d,1) = \delta\alpha(a,1) + \beta(b,1).$$

Tako dobimo sistem:

$$\begin{aligned} \delta d &= \lambda\alpha a + \beta b, \\ \delta &= \lambda\alpha + \beta. \end{aligned}$$

Izračunamo lahko, da velja

$$\lambda = \frac{b-d}{d-a} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b-d}{d-a} \cdot \frac{a-c}{c-b}.$$

Ta izraz lahko zapišemo tudi v obliki

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \frac{d-b}{c-b} : \frac{d-a}{c-a},$$

ki nakazuje izvor imena dvorazmerje. Če je $A = [1:0]$ točka v neskončnosti, dobimo

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \frac{d-b}{c-b}.$$

Opomba: Z uporabo formule

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \frac{d-b}{c-b} : \frac{d-a}{c-a},$$

lahko izpeljemo naslednji lastnosti dvorazmerja:

(1) $\mathcal{D}(B,A,C,D) = \mathcal{D}(A,B,D,C) = \mathcal{D}(A,B,C,D)^{-1}$,

(2) $\mathcal{D}(A,C,B,D) = \mathcal{D}(D,B,C,A) = 1 - \mathcal{D}(A,B,C,D)$.

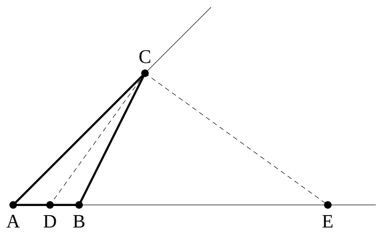
□

(3) Naj bo ABC trikotnik v $\mathbb{R}^2$. Označimo z D in E presečišči simetral notranjega oziroma zunanjega kota pri oglišču C s premico AB. Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,D,E)$.

Rešitev: Po znanem izreku delita simetrali notranjega in zunanjega kota pri danem oglišču nasprotno stranico v razmerju, ki je enako razmerju priležnih stranic

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|BE|}.$$

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da ležijo točke A, B, D in E na x-osi in da so njihove koordinate $A = (a,0)$, $B = (b,0)$, $D = (d,0)$ in $E = (e,0)$.



Potem velja

$$\mathcal{D}(A,B,D,E) = \frac{d-a}{d-b} : \frac{e-a}{e-b} = \frac{|AD|}{-|BD|} : \frac{|AE|}{|BE|} = -1.$$

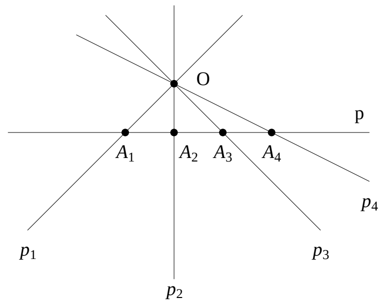
Kolinearnim točkam A, B, D, E, ki zadoščajo pogoju

$$\mathcal{D}(A,B,D,E) = -1,$$

rečemo harmonična četverka. □

(4) Dane so premice $p_1 = \{[x : y : z] \,|\, x - y - z = 0\}$, $p_2 = \{[x : y : z] \,|\, 3x - y - z = 0\}$ in $p_3 = \{[x : y : z] \,|\, y + z = 0\}$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Poišči premico p_4, za katero velja $\mathcal{D}(p_1, p_2, p_3, p_4) = -1$.

Rešitev: Imejmo šop premic p_1, p_2, p_3 in p_4 v projektivni ravnini, ki potekajo skozi točko O in naj bo p premica, ki ne poteka skozi O. Označimo preseke premice p s premicami p_i z $A_i = p_i \cap p$.



Dvorazmerje šopa premic je potem definirano s predpisom

$$\mathcal{D}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \mathcal{D}(A_1, A_2, A_3, A_4).$$

Najprej izračunajmo točko O. To je točka, v kateri se sekajo premice p_1, p_2 in p_3. Velja

$$\vec{s}_O = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -1, -1) \times (3, -1, -1) = (0, -2, 2),$$

od koder sledi

$$O = [0 : -1 : 1].$$

Za premico p lahko sedaj izberemo katerokoli premico, ki ne vsebuje točke O. Pametno je izbrati čimbolj preprosto premico, da si poenostavimo računanje. Takšna je na primer premica $p = \{[x : y : z] \,|\, z = 0\}$. Njene preseke s premicami p_1, p_2 in p_3 lahko izračunamo kar na pamet:

$$\begin{aligned} A_1 &= [1 : 1 : 0], \\ A_2 &= [1 : 3 : 0], \\ A_3 &= [1 : 0 : 0]. \end{aligned}$$

Sedaj bomo poiskali točko A_4 na premici p, da bo veljalo $\mathcal{D}(A_1, A_2, A_3, A_4) = -1$.

Naj bo $c = (1, 0, 0)$, $a' = (1, 1, 0)$ in $b' = (1, 3, 0)$. Potem je:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a' + \beta b', \\ (1, 0, 0) &= \alpha(1, 1, 0) + \beta(1, 3, 0), \\ (1, 0, 0) &= (3/2, 3/2, 0) + (-1/2, -3/2, 0). \end{aligned}$$

Vzemimo torej $a = (3/2, 3/2, 0)$ in $b = (-1/2, -3/2, 0)$. Od tod sledi

$$d = -a + b = (-2, -3, 0)$$

Oziroma

$$A_4 = [-2 : -3 : 0].$$

Premica p_4 je potem premica skozi točki O in A_4. Velja

$$\vec{n}_4 = \vec{s}_O \times \vec{s}_4 = (0, -1, 1) \times (2, 3, 0) = (-3, 2, 2).$$

Iskana premica je torej

$$p_4 = \{[x : y : z] \,|\, -3x + 2y + 2z = 0\}.$$

□

8 Stožnice

(1) Homogeniziraj dane enačbe in opiši stožnice v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki jih določajo:

(a) $x^2 + y^2 = 1$,

(b) $x^2 - y^2 = 1$,

(c) $y^2 = x$.

Rešitev: Stožnica v evklidski ravnini je krivulja, ki jo določa enačba

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Posamezni členi v zgornji enačbi imajo različne geometrijske pomene:

· Člen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ določa tip stožnice in pa njeno orientacijo. Neizrojene stožnice so krožnica, elipsa, parabola in hiperbola, poleg njih pa obstajajo še izrojene stožnice.

· Člen $2dx + 2ey$ določa središče stožnice.

· Člen f določa velikost stožnice.

Stožnici v evklidski ravnini $\mathbb{R}^2$, ki je določena z enačbo

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

lahko priredimo stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ s homogenizacijo zgornje enačbe. To pomeni, da vsakemu členu dodamo potenco spremenljivke z, tako da imajo na koncu vsi členi stopnjo 2. Konkretno tako dobimo stožnico z enačbo

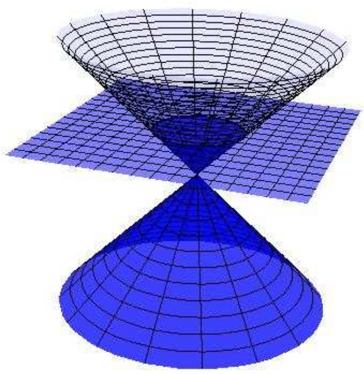
$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

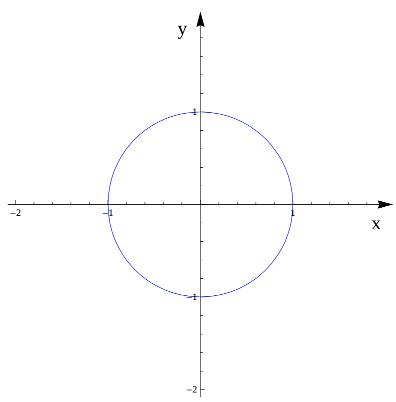
Pri homogenizaciji torej iz kvadratne enačbe dveh spremenljivk dobimo kvadratno enačbo treh spremenljivk, ki določa neko ploskev v evklidskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Ker je dobljena enačba homogena, je ta ploskev premonosna (sestavljena iz premic), zato definira neko krivuljo v projektivni ravnini. Prvotna krivulja ustreza zožitvi te krivulje na afini del projektivne ravnine, ki je dan s pogojem $z = 1$. V splošnem pa lahko pri homogenizaciji krivulje dobimo še kakšno dodatno točko na premici v neskončnosti.

(a) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 + y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ta enačba določa neko krivuljo v projektivni ravnini, katere slika na afinem delu $z = 1$ je ravno prvotna krožnica.





Poglejmo še, ali morda vsebuje še kakšno točko na premici v neskončnosti. Na premici v neskončnosti je $z = 0$, zato dobimo pogoj

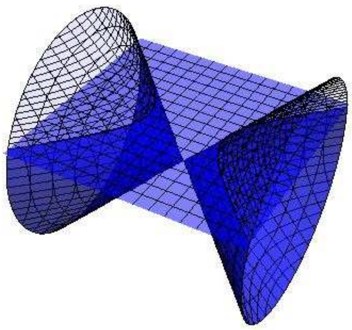
$$x^2 + y^2 = 0,$$

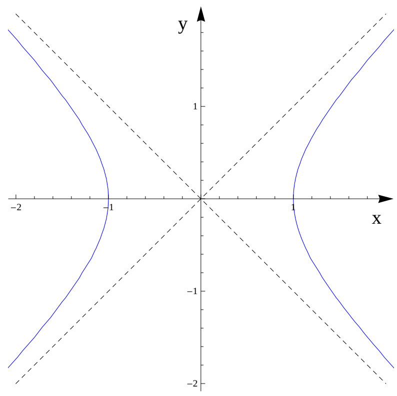
od koder sledi $x = y = 0$. Rešitev enačbe je torej točka $(0, 0, 0)$, ki pa ne definira nobene točke v projektivni ravnini.

(b) Pri homogenizaciji enačbe $x^2 - y^2 = 1$ dobimo enačbo

$$x^2 - y^2 = z^2.$$

Na afinem delu $z = 1$ tokrat dobimo hiperbolo.



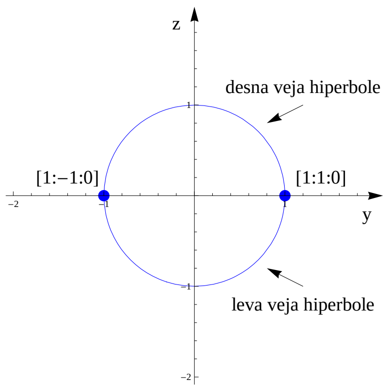


V preseku te projektivne krivulje s premico v neskončnosti so točke, za katere velja

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Takšni sta točki $T_1 = [1 : 1 : 0]$ in $T_2 = [1 : -1 : 0]$, ustrezata pa asimptotama hiperbole.

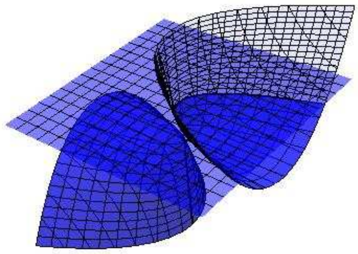
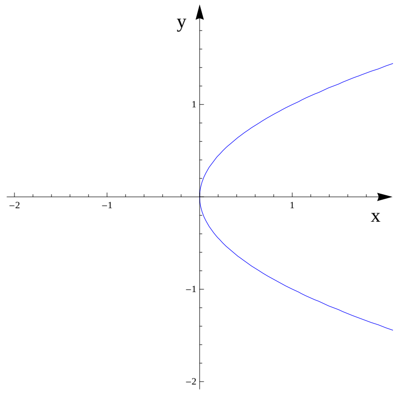
Zanimivo je pogledati, kaj dobimo, če to krivuljo pogledamo na afinem delu $x = 1$. Tam je podana z enačbo $y^2 + z^2 = 1$, kar pomeni, da gre za krožnico. Točki $(1, 0)$ in $(-1, 0)$ ustrezata točkama T_1 in T_2, medtem ko zgornja in spodnja polkrožnica ustrezata desni in levi veji hiperbole.



(c) Za konec si poglejmo še parabolo $y^2 = x$. Če to enačbo homogeniziramo, dobimo enačbo

$$y^2 = xz.$$

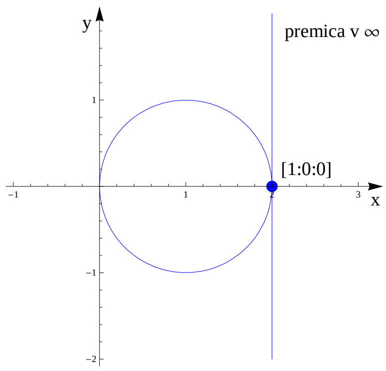
Tokrat dobimo v neskončnosti še eno dodatno točko, in sicer $T = [1 : 0 : 0]$.

Če na to stožnico pogledamo iz različnih zornih kotov, dobimo različne slike. Pri izbiri $x+z=2$ tako dobimo krivuljo z enačbo:

$$
\begin{aligned}
y^2 &= x(2-x), \\
(x-1)^2 + y^2 &= 1,
\end{aligned}
$$

ki pa je v bistvu krožnica. Na tem afinem delu ima standardna premica v neskončnosti enačbo $x=2$ in se dotika naše krivulje v točki $(2,0)$, ki je v bistvu točka $T=[1:0:0]$. Iz tega zornega kota dobro vidimo, da je premica v neskončnosti tangenta na našo parabolo, čeprav na začetku to ni bilo jasno.



<u>Opomba</u>: Iz zgornjih primerov je razvidno, da v projektivni ravnini krožnice, elipse, parabole in hiperbole vse predstavljajo isto stožnico, ki pa jo opazujemo iz različnih zornih kotov. V projektivni ravnini namreč do projektivne ekvivalence natanko obstaja le en tip neizrojenih stožnic. V afini in evklidski ravnini je situacija drugačna. Tam z izometrijami oziroma afinimi transformacijami ne moremo preslikati elipse v parabolo ali hiperbolo. $\square$

(2) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica $\mathcal{S} = \{[x:y:z] \,|\, x^2+y^2-z^2=0\}$.

(a) Izračunaj polare točk $A=[0:0:1]$, $B=[-1/2:0:1]$, $C=[0:1:1]$ in $D=[1:1:1]$ glede na stožnico $\mathcal{S}$.

(b) Poišči pola premic $p=\{[x:y:z] \,|\, x-z=0\}$ in $q=\{[x:y:z] \,|\, x=0\}$ glede na $\mathcal{S}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali geometrijska opisa polare in pola glede na stožnico v projektivni ravnini.

Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna, neizrojena stožnica v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ in M simetrična 3×3 matrika, ki ji pripada. Nadalje naj bo $A \in P(\mathbb{R}^3)$ poljubna točka in $a \in \mathbb{R}^3$ poljuben vektor na premici skozi izhodišče, ki določa točko A. *Polara* točke A glede na stožnico $\mathcal{S}$ je projektivna premica

$$A^\circ = \{[x : y : z] \mid \langle x, Ma\rangle = 0\}.$$

Če je p poljubna premica v projektivni ravnini, je njen *pol* tista točka p° v projektivni ravnini, katere polara je premica p.

(a) Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

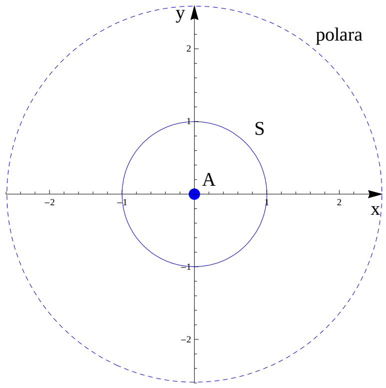
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Polara točke $A = [0 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Pri računanju polare v bistvu iščemo ortogonalni komplement vektorja Ma v $\mathbb{R}^3$. Tako dobimo ravnino v $\mathbb{R}^3$ (vektor Ma je njena normala), ki določa polaro v projektivni ravnini. V našem primeru je $Ma = (0, 0, -1)$, zato je

$$A^\circ = \{[x : y : z] \mid z = 0\}.$$

Polara točke A je torej premica v neskončnosti.

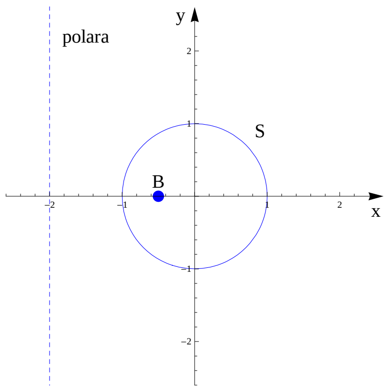


Polara točke $B = [-1/2 : 0 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj je $Mb = (-1/2, 0, -1)$, zato je

$$B^\circ = \{[x : y : z] \mid \tfrac{x}{2} + z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ ima polara točke B enačbo $x = -2$.

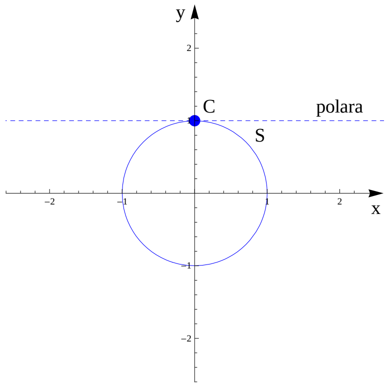


Polara točke $C = [0 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

V tem primeru je $Mc = (0, 1, -1)$, od koder dobimo

$$C^\circ = \{[x : y : z] \,|\, y - z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ ima polara točke C enačbo $y = 1$. Vidimo, da je polara v tem primeru kar tangenta na krožnico skozi točko C.

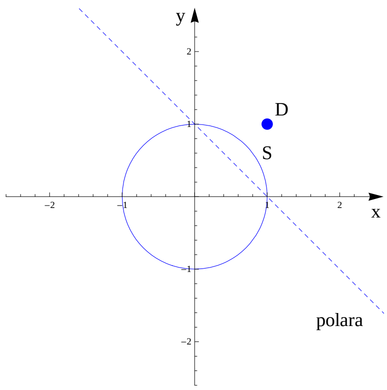


Polara točke $D = [1 : 1 : 1]$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj imamo $Md = (1, 1, -1)$. Od tod sledi

$$D^\circ = \{[x : y : z] \,|\, x + y - z = 0\}.$$

Na afinem delu $z = 1$ lahko polaro točke D podamo z enačbo $x + y = 1$.



(b) Sedaj bomo imeli dano neko premico v projektivni ravnini, iskali pa bomo točko, katere polara je ta premica. Denimo, da je premica p v $P(\mathbb{R}^3)$ določena z neko ravnino v $\mathbb{R}^3$ z normalo n. Potem je pol p° premice p določen z enačbo

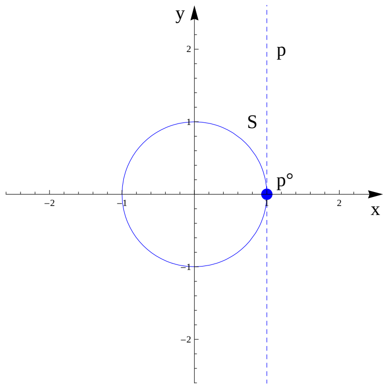
$$Ma = n.$$

Pol premice $p = \{[x : y : z] \,|\, x - z = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$:

Iščemo vektor a, ki reši enačbo $Ma = (1, 0, -1)$, oziroma:

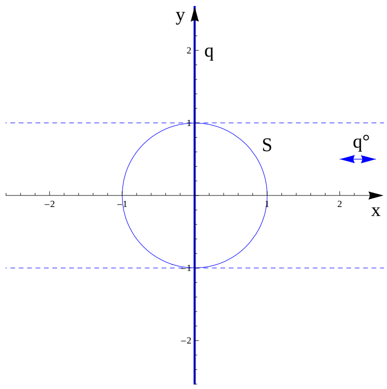
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi, da je pol premice p točka $p^\circ = [1 : 0 : 1]$. Vidimo, da premica p vsebuje svoj pol. To se zgodi natanko takrat, ko je premica tangentna na stožnico, pol pa je v tem primeru kar dotikališče premice in stožnice.

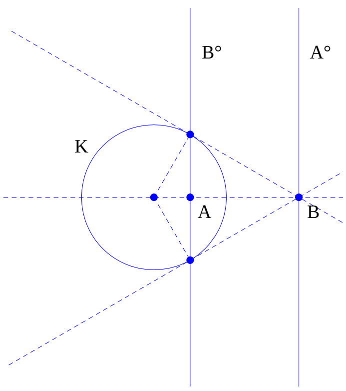


Pol premice $q : \{[x : y : z] \,|\, x = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$:

Sedaj iščemo vektor a, ki reši enačbo $Ma = (1, 0, 0)$, oziroma $(x, y, -z) = (1, 0, 0)$. Pol premice q je točka $q^\circ = [1 : 0 : 0]$, ki leži na premici v neskončnosti. Točka q° je presečišče tangent na stožnico $\mathcal{S}$ v presečiščih premice q in stožnice $\mathcal{S}$.



Opomba: Pojma polare in pola po naši definiciji sta posplošitvi pojmov polare in pola glede na krožnico v evklidski ravnini. Denimo, da sta A in B inverzni točki glede na krožnico K. Potem gre polara točke A skozi točko B in je pravokotna na zveznico točk A in B. Analogno velja tudi za polaro točke B. Polara točke B seka krožnico K natanko v dotikališčih tangent na K, ki potekata skozi B.



□

(3) V projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$ je dana stožnica

$$\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, -x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2 = 0\}.$$

(a) Določi polaro točke $A = [0 : 1 : 0]$ glede na $\mathcal{S}$.

(b) Določi pol premice $p = \{[x : y : z] \,|\, x + y + z = 0\}$ glede na $\mathcal{S}$.

(c) Ali je premica $q = \{[x : y : z] \,|\, x + 2y + z = 0\}$ tangentna na stožnico $\mathcal{S}$?

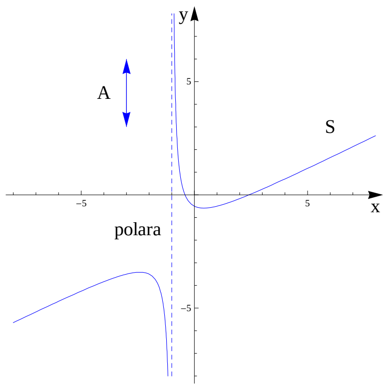
Rešitev: Stožnici $\mathcal{S} = \{[x : y : z] \,|\, -x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2 = 0\}$ pripada simetrična matrika

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Polara točke $A = [0, 1, 0]$ je premica

$$A^\circ = \{[x : y : z] \,|\, x + z = 0\}.$$

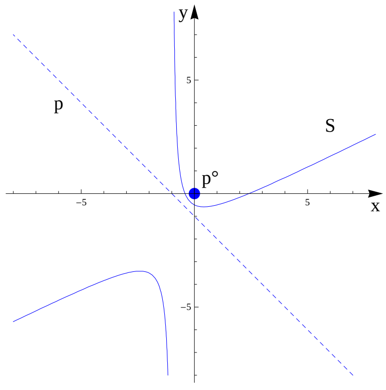
Ker točka A leži na stožnici (v neskončnosti), je polara točke A tangenta na stožnico v projektivni ravnini. Na afinem delu $z = 1$ pa polara sovpada z asimptoto hiperbole.



(b) Pol premice p mora rešiti enačbo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

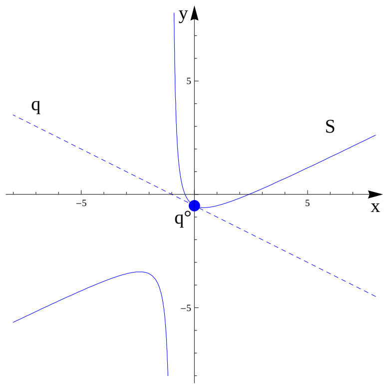
kar pomeni, da je pol premice p točka $p^\circ = [0 : 0 : 1]$.



(c) Za testiranje, ali je dana premica tangentna na stožnico, imamo na voljo dokaj preprost kriterij. Premica je namreč tangentna na stožnico natanko takrat, ko vsebuje svoj pol. Pol premice q zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

od koder sledi, da je pol točka $q^\circ = [0 : -1 : 2]$. Preverimo lahko, da točka q° leži na premici q, kar pomeni, da je q tangentna na stožnico $\mathcal{S}$.



□

(4) Poišči stožnico v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$, ki vsebuje točke $T_1 = [0 : 0 : 1]$, $T_2 = [1 : 0 : 1]$, $T_3 = [1 : 1 : 1]$, $T_4 = [0 : 1 : 1]$ in $T_5 = [2 : 3 : 1]$.

Rešitev: Kot smo videli pri prejšnji nalogi, štiri točke še ne določajo natanko stožnice v ravnini. Če pa imamo pet točk v splošni legi, je stožnica z njimi natanko določena. Začeli bomo s splošno enačbo stožnice

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0.$$

Če v to enačbo vstavimo danih pet točk, dobimo sistem petih enačb za šest neznank. Ker je enačba homogena, lahko eno neničelno neznanko fiksiramo, tako da ostanemo s samo petimi neznankami, ki jih nato dobljeni sistem natanko določa. V našem primeru dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ a + 2d + f &= 0, \\ a + 2b + c + 2d + 2e + f &= 0, \\ c + 2e + f &= 0, \\ 4a + 12b + 9c + 4d + 6e + f &= 0. \end{aligned}$$

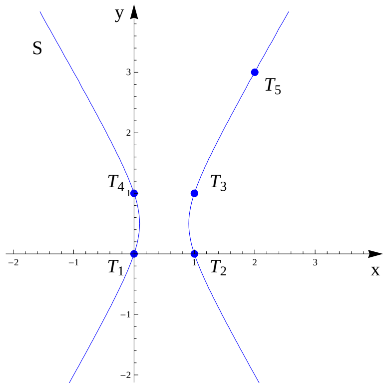
Fiksirajmo recimo $a = 1$. Potem sledi $b = 0$, $c = -1/3$, $d = -1/2$, $e = 1/6$ in $f = 0$, od koder sledi, da je iskana stožnica

$$\mathcal{S} = \left\{ [x : y : z] \,\middle|\, x^2 - \frac{y^2}{3} - xz + \frac{yz}{3} = 0 \right\}.$$

Zožitev te stožnice na afino ravnino $z = 1$ ima enačbo:

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{y^2}{3} - x + \frac{y}{3} &= 0, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Gre za hiperbolo s središčem v točki $T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.



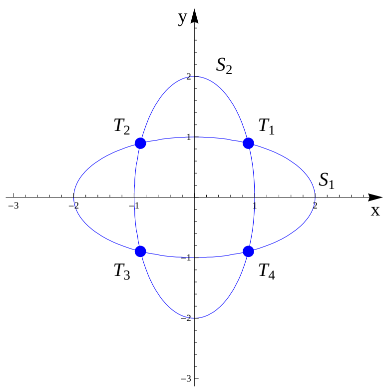
$\square$

(5) Parametriziraj šop stožnic, ki ga določata stožnici:

$$\mathcal{S}_1 = \{[x:y:z] \mid \tfrac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 0\},$$
$$\mathcal{S}_2 = \{[x:y:z] \mid x^2 + \tfrac{y^2}{4} - z^2 = 0\}$$

ter poišči vse izrojene stožnice v tem šopu.

Rešitev: Poglejmo si najprej skici obeh stožnic na zaslonu $z = 1$.



Presečišča obeh stožnic zadoščajo sistemu enačb:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$
$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1,$$

katerega rešitve so $T_1\left(\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$, $T_2\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$, $T_3\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$ in $T_4\left(\sqrt{\frac{4}{5}}, -\sqrt{\frac{4}{5}}\right)$.
Označimo z M_1 in M_2 matriki, ki pripadata stožnicama $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$. Zanimala nas bo družina stožnic, ki potekajo skozi te štiri točke. Tej družini rečemo šop stožnic, ki ga določata $\mathcal{S}_1$ in $\mathcal{S}_2$, stožnice v tej družini pa lahko opišemo z matrikami

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2,$$

kjer je $[\alpha : \beta] \in P(\mathbb{R}^2)$ (večkratniki matrike M namreč določajo isto stožnico v $P(\mathbb{R}^3)$).

V našem primeru dobimo

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2 = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{4} + \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \frac{\beta}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha - \beta \end{bmatrix}.$$

Izrojene so tiste stožnice v tem šopu, katerih pripadajoče matrike niso obrnljive. To pomeni, da imajo ničelno determinanto, od koder sledi

$$\det(M) = \left(\frac{\alpha}{4} + \beta\right)\left(\alpha + \frac{\beta}{4}\right)(-\alpha - \beta) = 0.$$

Ker nas zanima samo razmerje α in β in ker rešitve $[0 : 0]$ ne upoštevamo, lahko postavimo $\alpha = 1$. V danem šopu so potem tri izrojene stožnice.

$\alpha = 1$, $\beta = -1/4$:

V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-1/4} = \left\{ [x : y : z] \,\middle|\, \frac{15}{16} y^2 - \frac{3}{4} z^2 = 0 \right\}.$$

Na zaslonu $z = 1$ dobimo unijo dveh vzporednih premic

$$y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

$\alpha = 1$, $\beta = -1$:

Sedaj je izrojena stožnica

$$\mathcal{S}_{-1} = \left\{ [x : y : z] \,\middle|\, -\frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} y^2 = 0 \right\},$$

ki je na zaslonu $z = 1$ unija simetral kvadrantov

$$y = \pm x.$$

$\alpha = 1$, $\beta = -4$:

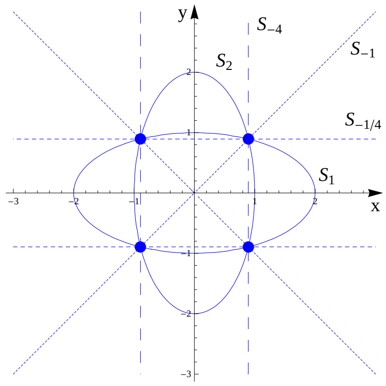
V tem primeru dobimo izrojeno stožnico

$$\mathcal{S}_{-4} = \left\{ [x : y : z] \,\middle|\, \frac{15}{16} x^2 - \frac{3}{4} y^2 = 0 \right\},$$

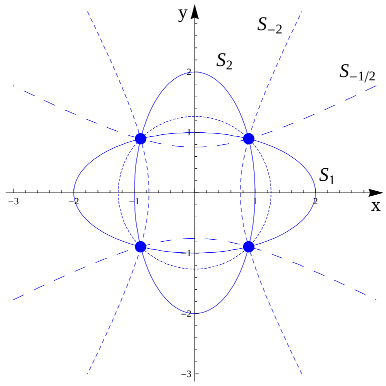
ki je na zaslonu $z = 1$ unija premic

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}.$$

Poglejmo si sliko stožnic $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ ter vseh treh izrojenih stožnic.



Zanimivo je še pogledati, kako se spreminja oblika stožnice, ko spreminjamo parameter β.



Pri dani vrednosti β dobimo stožnico, ki je na zaslonu $z = 1$ dana z enačbo

$$\left(\frac{1}{4} + \beta\right) x^2 + \left(1 + \frac{\beta}{4}\right) y^2 = 1 + \beta.$$

Stožnica $\mathcal{S}_1$ ustreza vrednosti $\beta = 0$, stožnica $\mathcal{S}_2$ pa vrednosti $\beta = \infty$. Sedaj bomo opisali, kako se spreminja oblika stožnice, ko β preteče realna števila.

Pri vrednostih $\beta \to -\infty$ dobimo elipse, ki od zunaj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}_2$. Ko nato β narašča od $-\infty$ do -4, dobimo elipse, ki so čedalje bolj raztegnjene v navpični smeri. Pri $\beta = -4$ se elipsa pretrga, nastaneta pa dve navpični premici, ki tvorita prvo izrojeno stožnico iz šopa. Za parametre $-4 < \beta < -1$ dobimo vodoravne hiperbole, katerih asimptote so sprva skoraj navpične, nato pa se približujejo k simetralam kvadrantov, ki ustrezata drugi izrojeni stožnici pri $\beta = -1$. Na intervalu $-1 < \beta < -1/4$ dobimo navpične hiperbole, ki se pri vrednosti $\beta = -1/4$ izrodijo v dve vodoravni premici. Pri vrednostih $-1/4 < \beta < 0$ pridejo na vrsto elipse, ki se čedalje bolj od zunaj prilegajo elipsi $\mathcal{S}_1$, ki ustreza parametru $\beta = 0$. Do vrednosti $\beta = 1$ se nato elipse približujejo krožnici, ki poteka skozi štiri skupne točke, za parametre $\beta > 1$ pa dobimo elipse, ki čedalje bolje od znotraj aproksimirajo elipso $\mathcal{S}_2$. $\square$

(6) Naj bo $\mathcal{S}$ neprazna neizrojena stožnica v $P(\mathbb{R}^3)$ in $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$ projektivnost.

(a) Izračunaj enačbo stožnice $\mathcal{S}' = \theta_A(S)$, če je stožnica $\mathcal{S}$ dana z enačbo $x^T M x = 0$.

(b) Naj bo premica p z enačbo $\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$ tangentna na $\mathcal{S}$. Pokaži, da potem premica q z enačbo $A\vec{n} \cdot \vec{x} = 0$ ni nujno tangentna na $\mathcal{S}'$.

Rešitev: (a) Poglejmo si najprej na konkretnem primeru, kako projektivnost preslika stožnico. Vzemimo projektivnost $\theta_A : P(\mathbb{R}^3) \to P(\mathbb{R}^3)$, ki je porojena z matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

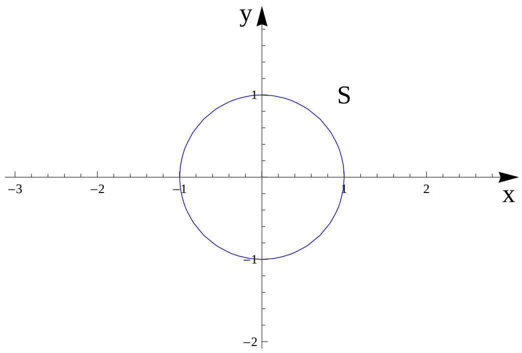
in poglejmo, kam preslika stožnico $\mathcal{S}$, ki je določena za enačbo $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Matrika A določa zamenjavo koordinat

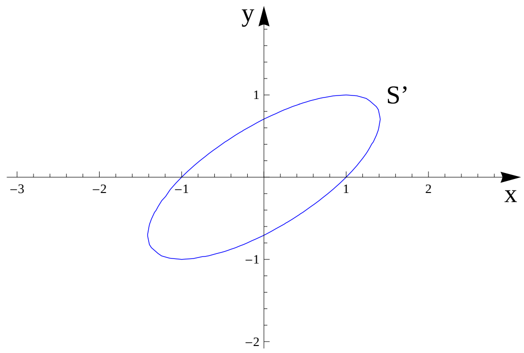
$$\begin{aligned} x' &= x + y, \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Ko od tod izrazimo koordinate x, y in z in jih vstavimo v enačbo stožnice $\mathcal{S}$, dobimo enačbo

$$x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - z'^2 = 0,$$

ki določa stožnico $\mathcal{S}'$.





Poglejmo sedaj splošen primer. Recimo, da je stožnica $\mathcal{S}$ določena z enačbo $x^T M x = 0$. Potem velja:

$$\begin{aligned} x^T M x &= 0, \\ x^T A^T A^{-T} M A^{-1} A x &= 0, \\ (Ax)^T (A^{-T} M A^{-1})(Ax) &= 0. \end{aligned}$$

Na stožnici $\mathcal{S}'$ ležijo točke oblike $x' = Ax$, iz zgornje enačbe pa sledi, da torej stožnici $\mathcal{S}'$ pripada simetrična matrika

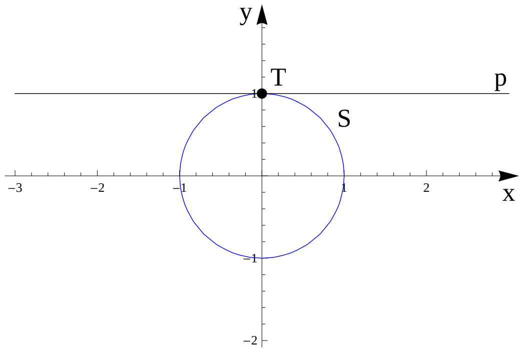
$$M' = A^{-T} M A^{-1}.$$

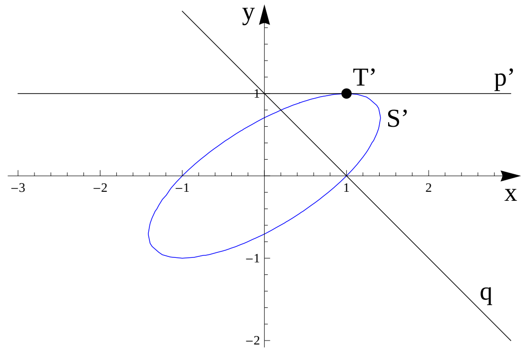
V našem primeru je

$$M' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

To se ujema z izračunom po prejšnji metodi.

(b) Vzemimo stožnico $\mathcal{S}$ iz prejšnjega primera in tangento p z enačbo $y - z = 0$. V tem primeru ima premica q enačbo $x + y - z = 0$.





Vidimo, da premica q ni tangentna na stožnico $\mathcal{S}'$. Podobno kot prej lahko pokažemo, da sliki $p' = \theta_A(p)$ premice p pripada ravnina z normalnim vektorjem

$$\vec{n}' = A^{-T}\vec{n}.$$

$\square$