PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 1
Strani 26–31

Ivan Vidav:

TETRAEDRI S PLOŠČINSKO ENAKIMI MEJNIMI PLOSKVAMI

Ključne besede: matematika, geometrija, tetraedri, ploščina, Heronov obrazec.

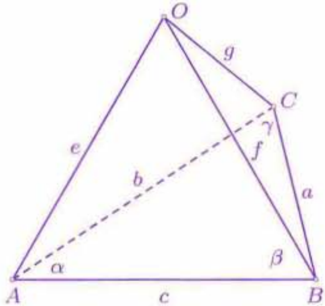
Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1502-Vidav.pdf

TETRAEDRI S PLOŠČINSKO ENAKIMI MEJNIMI PLOSKVAMI

Skladni liki imajo enako ploščino, toda hkrati ne drži, da bi bili liki z enako ploščino vselej skladni.

Tetraeder (tristrana piramida) je omejen s štirimi trikotniki. Kaj lahko rečemo o tetraedru, če imajo vse štiri njegove mejne ploskve enako ploščino? Bangov izrek trdi, da so v tem primeru mejne ploskve skladni trikotniki. Poskušajmo ta izrek dokazati. Dokaz je elementaren in matematično prav nič zahteven, le nekoliko dolgovezen je in v njem je precej dolgočasnega računanja. Če se bralcu računanje upira, naj kar neha brati ta članek. (Dokaz se precej poenostavi, če uporabimo vektorsko algebro.)

Imejmo tetraeder $ABCO$ (slika 1). Njegova osnovna ploskev je trikotnik ABC, njegov vrh pa O. Stranice osnovne ploskve zaznamujmo z $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ in $\overline{AC} = b$, stranske robove pa z $\overline{AO} = e$, $\overline{BO} = f$ in $\overline{CO} = g$. Stranske ploskve so trikotniki ABO, BCO in ACO; prvi ima stranice e, f, c, drugi f, g, a in tretji e, g, b.



Slika 1.

Ploščino trikotnika s stranicami a, b, c izračunamo po Heronovem obrazcu

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

kjer je s polovični obseg, tako da je $2s = a+b+c$. Če to vstavimo v izraz na levi, ga kvadriramo in pomnožimo s 16, dobimo enačbo

$$16p^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\,. \tag{1}$$

Denimo, da imajo vse stranske ploskve našega tetraedra $ABCO$ enako ploščino kakor osnovna ploskev, torej ploščino p. Potem veljajo poleg (1) tudi tele tri enačbe:

$$\begin{aligned} 2e^2f^2+2c^2e^2+2c^2f^2-c^4-e^4-f^4&=16p^2\\ 2f^2g^2+2a^2f^2+2a^2g^2-a^4-f^4-g^4&=16p^2\\ 2e^2g^2+2b^2e^2+2b^2g^2-b^4-e^4-g^4&=16p^2\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Leve strani teh enačb določajo ploščine stranskih ploskev ABO, BCO in ACO. Dobimo jih tako, da v formuli (1) zamenjamo najprej a z e in b z f, nato b z f in c z g, nazadnje pa a z e in c z g. Vse mejne ploskve imajo enako ploščino natanko tedaj, kadar zadoščajo robovi a, b, c, e, f in g enačbam (1) in (2).

Če je $e=a$, $f=b$ in $g=c$, so vse enačbe (1) in (2) izpolnjene. Mejne ploskve so štirje skladni trikotniki s stranicami a, b, c. Ali obstaja še kakšna druga rešitev teh enačb?

Zaznamujmo $e^2-a^2=x$, $f^2-b^2=y$ in $g^2-c^2=z$, torej

$$e^2=a^2+x \qquad f^2=b^2+y \qquad g^2=c^2+z\,. \tag{3}$$

Vstavimo te izraze v enačbe (2). Če upoštevamo enačbo (1), ki določa $16p^2$, dobimo po nekoliko dolgoveznem računu tale sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2(b^2+c^2-a^2)x+2(a^2+c^2-b^2)y+2xy-x^2-y^2&=0\\ 2(a^2+c^2-b^2)y+2(a^2+b^2-c^2)z+2yz-y^2-z^2&=0\\ 2(b^2+c^2-a^2)x+2(a^2+b^2-c^2)z+2xz-x^2-z^2&=0\,. \end{aligned}$$

Zaradi krajše pisave zaznamujmo

$$b^2+c^2-a^2=q,\quad a^2+c^2-b^2=r,\quad a^2+b^2-c^2=s\,. \tag{4}$$

Potem lahko zapišemo zgornji sistem v razmeroma pregledni obliki:

$$\begin{aligned} 2qx+2ry&=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\\ 2ry+2sz&=y^2-2yz+z^2=(y-z)^2\\ 2qx+2sz&=x^2-2xz+z^2=(x-z)^2\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Seštejmo prvo in tretjo enačbo (5) in od vsote odštejmo drugo. Če krajšamo z 2, dobimo

$$2qx=x^2-xy-(x-y)z \tag{6}$$

in od tod

$$(x-y)z = x^2 - xy - 2qx\,. \tag{7}$$

Pomnožimo zdaj tretjo enačbo (5) z $(x-y)^2$ in dobimo

$$2qx(x-y)^2 + 2sz(x-y)^2 = x^2(x-y)^2 - 2xz(x-y)^2 + z^2(x-y)^2\,.$$

Vstavimo za produkt $(x-y)z$ izraz (7). Po krajšem računu pridemo do enačbe

$$2qx(x-y)^2 + 2s(x-y)(x^2 - xy - 2qx) = 4q^2x^2\,,$$

ki jo lahko zapišemo tudi takole:

$$(2qx + 2sx)(x-y)^2 - 4qsx(x-y) = 4q^2x^2\,.$$

Prva enačba (5) pove, da je $(x-y)^2 = 2qx + 2ry$, torej

$$(2qx + 2sx)(2qx + 2ry) - 4qsx(x-y) = 4q^2x^2\,.$$

Če to uredimo, je pred nami tale preprosta enačba:

$$4(qr + qs + rs)xy = 0\,. \tag{8}$$

Tako smo ugotovili, da vsaka trojka, ki zadošča sistemu (5), zadošča tudi enačbi (8).

Spet nekoliko dolgovezen račun pokaže, da je

$$qr + qs + rs = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16p^2\,,$$

kjer seveda pomeni p ploščino osnovnega trikotnika ABC. V tetraedru imajo mejne ploskve od nič različno ploščino, torej je $p \neq 0$. Zato smemo (8) krajšati s $64p^2$ in pridemo do enačbe

$$xy = 0\,. \tag{9}$$

Tri možnosti imamo:

a) $x \neq 0,\ y = 0$ b) $x = 0,\ y \neq 0$, c) $x = 0,\ y = 0$.

Oglejmo si najprej možnost a). Iz prve enačbe (5) dobimo $2qx = x^2$. Ker $x \neq 0$, smemo krajšati z x in je v tem primeru $x = 2q$. Če to vstavimo v (7), dobimo $xz = 0$, torej $z = 0$. Tako smo dobili rešitev $x = 2q$, $y = 0$, $z = 0$.

V primeru b) je $x = 0$. Enačba (7) nam da $yz = 0$. Ker $y \neq 0$, sledi od tod $z = 0$. Iz prve enačbe (5) pa dobimo $2ry = y^2$, torej $y = 2r$. Pripadajoča rešitev se glasi $x = 0$, $y = 2r$, $z = 0$.

Nazadnje si oglejmo še zadnji primer c), ko je $x = 0$ in $y = 0$. Druga enačba (5) nam da $2sz = z^2$. Od tod izhajata dve možnosti: ali je $z = 2s$ ali $z = 0$.

Tako smo ugotovili, da obstajajo natanko štiri rešitve sistema (5), namreč:

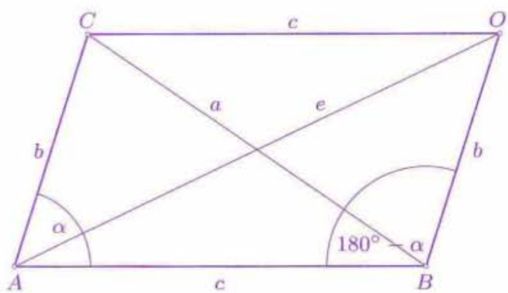
1. x=2q, y=0, z=0.
2. x=0, y=2r, z=0.
3. x=0, y=0, z=2s.
4. x=0, y=0, z=0.

Oglejmo si prvo rešitev. Ker je $y = 0$ in $z = 0$, dobimo iz enačb (3) $f = b$ in $g = c$. (Robovi se izražajo s pozitivnimi števili. Zato iz $f^2 = b^2$ in $g^2 = c^2$ sledi $f = b$, $g = c$.) Enakost $x = 2q$ pa nam da $e^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$. Torej so robovi med seboj povezani takole:

$$f = b, \quad g = c, \quad e^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2. \tag{10}$$

Kakšen je pripadajoči tetraeder?

Vzemimo v ravnini paralelogram $ABOC$, pri katerem naj bosta nevzporedni stranici $\overline{AB} = c$ in $\overline{AC} = b$, diagonala $\overline{BC}$ pa naj bo enaka a. S temi podatki je paralelogram natanko določen (slika 2). Drugo diagonalo označimo z e, torej $\overline{AO} = e$.



Slika 2.

V vsakem paralelogramu je vsota kvadratov vseh štirih stranic enaka vsoti kvadratov obeh diagonal. V našem primeru je zato

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + e^2\,. \tag{11}$$

Kako ugotovimo, da velja zveza (11)? Oglejmo si trikotnika ABC in ABO na sliki 2. Če je pri oglišču A notranji kot α, je v paralelogramu pri oglišču B notranji kot $180° - \alpha$. Po kosinusnem izreku dobimo iz prvega trikotnika

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\,,$$

iz drugega pa

$$e^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(180° - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha\,.$$

Če ti dve enačbi seštejemo, je pred nami zveza (11).

Paralelogram $ABOC$ imamo lahko za izrojeni tetraeder, vsa njegova oglišča so namreč v isti ravnini. Robovi osnovne ploskve ABC so $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ in $\overline{AB} = c$, stranski robovi pa $\overline{AO} = e$, $\overline{BO} = f = b$ in $\overline{CO} = g = c$. Ker velja zveza (11), so robovi takšni, kakor jih določa prva rešitev (10). Mejne ploskve tega "tetraedra" so trikotniki ABC, ABO, ACO in BCO. Če paralelogram ni pravokotnik, ti trikotniki, ki imajo vsi enako ploščino (namreč polovico ploščine paralelograma), niso vsi med seboj skladni.

Tetraeder je s svojimi robovi natanko določen: dva tetraedra z enakimi robovi sta bodisi skladna bodisi zrcalni sliki drug drugega. Zato je vsak tetraeder, katerega robovi so povezani z enačbami (10), skladen s paralelogramom $ABOC$, torej izrojen. Njegov rob $\overline{AO}$ je diagonala paralelograma.

Podobno kakor izraža Heronov obrazec ploščino trikotnika z njegovimi stranicami, obstaja formula, ki izraža prostornino V tetraedra z njegovimi robovi. Tako formulo najde bralec v [1] na strani 130. Če v formulo za prostornino V vstavimo izraze (10), izračunamo, da je $V = 0$. Tako se ponovno lahko prepričamo, da določajo robovi (10) izrojeni tetraeder.

Kar smo povedali za prvo rešitev sistema (5), velja tudi za drugo in tretjo. Pripadajoči tetraeder je paralelogram, pri drugi rešitvi je njegova diagonala rob $\overline{BO}$, pri tretji pa rob $\overline{CO}$.

Preostane nam še zadnja, četrta rešitev, ko je $x = 0$, $y = 0$ in $z = 0$. Iz enačb (3) dobimo $e = a$, $f = b$ in $g = c$. Mejne ploskve so skladni trikotniki s stranicami a, b, c. Edino ta rešitev nam da neizrojeni tetraeder. Tako smo dokazali:

IZREK (Bang). Če imajo v (neizrojenem) tetraedru vse štiri mejne ploskve enako ploščino, so te ploskve skladni trikotniki.

Pravilni tetraeder omejujejo štirje skladni enakostranični trikotniki. Kakšen mora biti trikotnik, da lahko s štirimi kopijami tega trikotnika sestavimo površje tetraedra?

V tetraedru na sliki 1 je oglišče A vrh treh kotov, namreč kota $\sphericalangle BAC$, kota $\sphericalangle BAO$ in kota $\sphericalangle CAO$. Če so mejne ploskve trikotniki, ki so skladni s trikotnikom ABC, le-ta pa ima pri ogliščih A, B in C zaporedoma notranje kote α, β in γ, so zgoraj navedeni koti enaki

$$\sphericalangle BAC = \alpha, \qquad \sphericalangle BAO = \beta, \qquad \sphericalangle CAO = \gamma .$$

Vsota katerihkoli dveh kotov pri istem oglišču (neizrojenega) tetraedra pa je vselej večja od tretjega kota. Zato veljajo v našem primeru neenačbe

$$\alpha + \beta > \gamma \qquad \alpha + \gamma > \beta, \qquad \beta + \gamma > \alpha .$$

Ker je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, dobimo iz prve neenačbe, da je $180° - \gamma > \gamma$, torej $180° > 2\gamma$ oziroma $\gamma < 90°$. Podobno sledi iz druge neenačbe, da je $\beta < 90°$, iz tretje pa $\alpha < 90°$. Trikotnik ABC je ostrokoten. Zato lahko sestavimo površje tetraedra le s štirimi skladnimi kopijami ostrokotnega tikotnika.

Bralec se lahko brez težav prepriča, da je trikotnik s stranicami a, b, c ostrokoten natanko tedaj, kadar so vsi trije izrazi q, r in s, podani z enačbami (4), pozitivni.

Literatura

[1] I. Vidav, O neki posplošitvi Heronovega obrazca. Obzornik za matematiko in fiziko, 46 (1999), str. 129 – 135.

Ivan Vidav