Nekaj dokazov Talesovega izreka

Anto Franjić, Dina Kamber Hanzić, Zenan Šabanac
Univerza v Sarajevu, Oddelek za matematiko, Sarajevo, Bosna in Hercegovina
Univerzitet u Sarajevu, Odsjek za matematiku, Zmaja od Bosne 33-35, 71000 Sarajevo, Bosna i Hercegovina

Izvleček

V članku predstavimo več različnih dokazov Talesovega izreka o obodnem kotu nad premerom krožnice. Predstavimo uporabo omenjenega izreka pri nalogah na matematičnih tekmovanjih v Sloveniji in na Hrvaškem.

Ključne besede: Talesov izrek, pravi kot, premer, tekmovalne naloge

Some of the Evidence of Thales' Theorem

Abstract

This article introduces some of the different evidence of Thales' Theorem defining an angle inscribed in a semicircle over a diameter. The use of the theorem is presented based on the solutions of tasks from mathematics competitions in Slovenia and Croatia.

Keywords: Thales' Theorem, right angle, diameter, competition tasks

O Talesu iz Mileta in nekaj izrekov iz geometrije

Tales iz Mileta (624 pr. n. št.–547 pr. n. št.) je kot prvi znani grški filozof, matematik in astronom napovedal Sončev mrk, ki se je zgodil na Bližnjem vzhodu 28. maja 585 pr. n. št. (v. [1, str. 29] in [3, str. 137]. Talesa uvrščamo med sedem legendarnih grških modrecev, bil je prvi filozof, ki si je prislužil ta naziv.

Talesovo ime povezujemo z nekaterimi izreki iz geometrije:
1. Krog je z vsakim svojim premerom razdeljen na dva ploščinsko enaka dela.
2. Kota ob osnovnici enakokrakega trikotnika sta skladna.
3. Dva para kotov med dvema premicama, ki se sekata, sta skladna.
4. Dva trikotnika sta skladna, če imata skladno stranico in skladna oba para priležnih kotov.
5. Obodni kot nad premerom krožnice je pravi kot.

Predvidevamo, da so bili vsi ti izreki Egipčanom in Babiloncem poznani že od prej, vendar je bil Tales prvi, ki jih je dokazal (več podrobnosti si lahko preberete v [3, str. 130–137]). Izreki (1)–(4) so navedeni in opisani v prvem delu Evklidovih *Elementov*, izrek (5), ki se imenuje Talesov izrek, pa je naveden v tretjem delu Evklidovih *Elementov* kot trditev 31. Evklidovi *Elementi* so matematična razprava o elementarni matematiki, sestavljena iz 13 knjig, ki jih pripisujemo starogrškemu matematiku Evklidu iz 3. stoletja pr. n. št. Gre za nabor definicij, postulatov, trditev in matematičnih dokazov trditev iz elementarne geometrije, teorije števil in algebre.

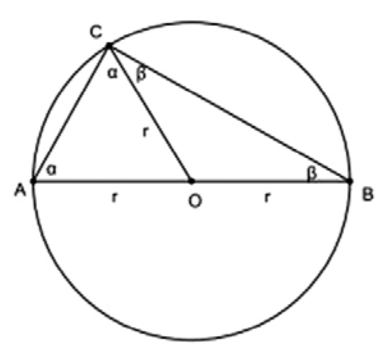
Talesov izrek

Talesov izrek o kotu nad premerom krožnice pravi:

Izrek 1. Naj bo daljica AB premer krožnice in C poljubna točka na krožnici različna od A in B, potem je $\sphericalangle ACB$ pravi kot.

Predstavili bomo različne dokaze Talesovega izreka.

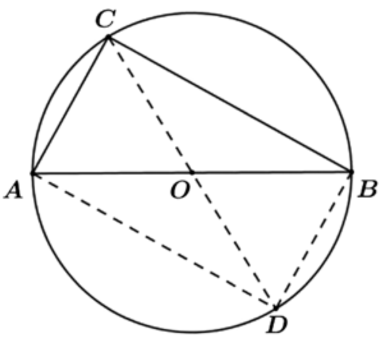
Dokaz 1. Naj bo O središče krožnice s premerom $|AB|$ (Slika 1). Naj bo $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$ ter $\sphericalangle ACB = \gamma$. Ker je trikotnik ΔAOC enakokrak ($|AO| = |CO| = r$) z osnovnico AC, je kot $\sphericalangle ACO = \alpha$. Ker je trikotnik ΔBOC enakokrak ($|OB| = |OC| = r$) z osnovnico BC, je kot $\sphericalangle BCO = \beta$. Iz tega sledi, da je $\gamma = \sphericalangle ACB = \sphericalangle ACO + \sphericalangle OCB = \alpha + \beta$. Iz enakosti $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ sledi $2 \cdot \gamma = 180°$. Dobimo $\gamma = 90°$.



Slika 1

V naslednjem dokazu uporabimo zrcaljenje čez točko.

Dokaz 2. Dan naj bo trikotnik ΔABC, ki mu je očrtana krožnica, tako da je daljica AB premer te krožnice (Slika 2). Točka O naj bo središče te krožnice.



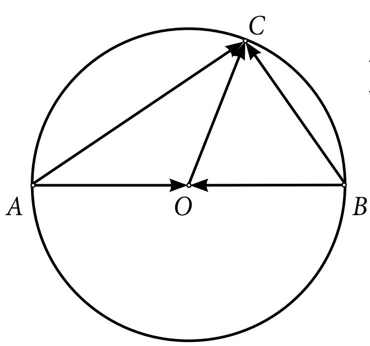
Slika 2

Prezrcalimo točko C čez središče krožnice O. Tako dobljeno točko označimo z D. Ker je zrcaljenje čez točko izometrija, pomeni, da ohranja razdaljo, pri čemer točka D pripada krožnici, daljica CD pa je njen premer. Vse točke na premici AC se pri zrcaljenju čez točko O preslikajo v točke premice BD, ki je vzporedna prvotni premici. Zato sta daljici AC in BD vzporedni ter enako CB in AD. Tako ima štirikotnik $ADBC$ dva para vzporednih stranic, kar pomeni, da je paralelogram. Daljici CD ter AB sta diagonali tega paralelograma. Ker sta diagonali premera iste krožnice, sta enako dolgi. Tako je štirikotnik $ADBC$ paralelogram z enako dolgima diagonalama, torej je štirikotnik $ADBC$ pravokotnik. Ker je v pravokotniku vsak notranji kot pravi, je tudi kot $\sphericalangle ACB$ pravi kot. ■

Oba dokaza sta klasična dokaza, ki ju lahko najdemo v učbenikih matematike za učence osnovnih in srednjih šol, kakor tudi v knjigah o evklidski geometriji, namenjenih študentom. V njih smo uporabljali razlago, ki temelji na aksiomih in trditvah, s pomočjo katerih se izvajajo in dokazujejo nove trditve ter na način kot je izpostavljen v Evklidovih *Elementih* pred več kot 2000 leti.

V 17. stoletju je francoski filozof in matematik Rene Descartes (1596–1650) uvedel pojem *koordinate točke* kot enega od načinov opisovanja lege točke v prostoru, kar je privedlo do ideje uporabe enačb za opisovanje črt in krivulj. Na ta način so se odprla vrata k uporabi algebre in algebrskih metod (analitična geometrija, vektorji, matrike, kompleksna števila, algebrske strukture in podobno) v dokazovanju trditev iz geometrije. V dokazih, ki sledijo, bomo uporabili nekatere algebrske pristope, ki so navedeni zgoraj.

Dokažimo Talesov izrek z uporabo lastnosti vektorjev.



Dokaz 3. Iz slike 3 sledi: daljica AB je premer krožnice, O je središče krožnice, C je poljubna točka na krožnici različna od A in B.

Slika 3

Zapišimo skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$. Zaradi trikotniškega pravila dobimo:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\right) =$$
$$= \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

Ker sta vektorja $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{BO}$ nasprotna, dobimo:

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AO}+\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}\right)\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}.$$

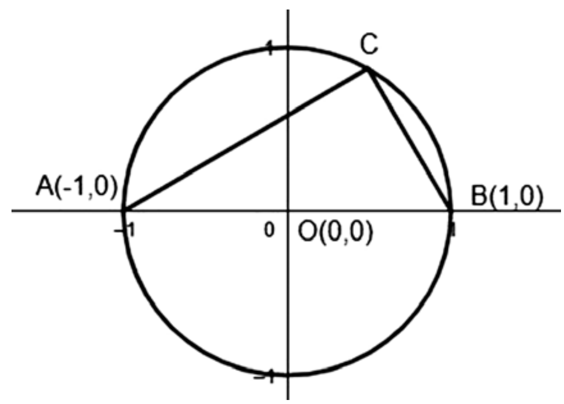
Ker sta $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{BO}$ nasprotna vektorja, velja $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$. Od tod sledi

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC} = -\left|\overrightarrow{AO}\right|^2+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2.$$

Ker vektorja $\overrightarrow{AO}$ in $\overrightarrow{OC}$ določata polmera dane krožnice, sta njuni dolžini enaki $\left|\overrightarrow{AO}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right|$. Dobimo, da je $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=0$, iz česar sledi, da sta vektorja $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravokotna (dva ne-ničelna vektorja sta pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0). ■

Sedaj bomo dokazali Talesov izrek z uporabo analitične geometrije in trigonometrije.

Dokaz 4. Postavimo središče krožnice O v izhodišče koordinatnega sistema, tako da bo daljica AB premer krožnice.



Slika 4

Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da sta koordinati točk A in B, A (-1, 0) in B (1, 0). Naj bo točka C poljubna točka krožnice, ki je različna od točk A in B. Točka C ima koordinate $C(\cos t, \sin t)$. Pokazali bomo, da je trikotnik ΔABC pravokotni. Dokazali bomo, da sta premici, na katerih ležita daljici AC in BC, pravokotni. To pomeni, da je produkt njunih smernih koeficientov enak -1.

Najprej bomo izračunali smerna koeficienta premic, na katerih ležita daljici AC in BC.

$$k_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{\sin t}{\cos t+1}$$

in

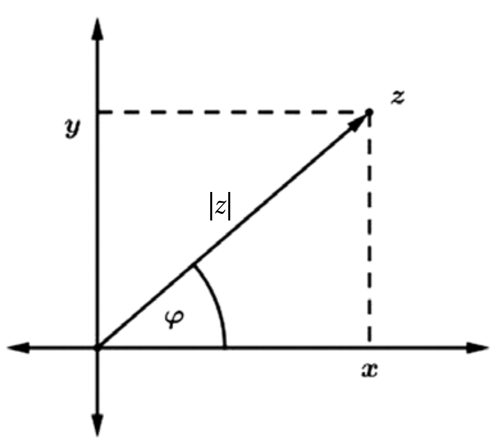
$$k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{\sin t}{\cos t-1}.$$

Dobimo

$$k_{AC} \cdot k_{BC} = \frac{\sin t}{\cos t + 1} \cdot \frac{\sin t}{\cos t - 1} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t - 1} = \frac{\sin^2 t}{-\sin^2 t} = -1.$$

V predzadnjem koraku smo uporabili znano trigonometrijsko enakost $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. ■

Preden podamo dokaz Talesovega izreka z uporabo kompleksnih števil, bomo na kratko navedli lastnosti kompleksnih števil, ki jih bomo uporabili v dokazu. Iz srednje šole nam je znano, da $z = x + iy$ predstavlja algebrski zapis kompleksnega števila, pri čemer je x realni del, y pa imaginarni del kompleksnega števila z. Z oznako $\overline{z}$ označujemo konjugirano kompleksno število števila z, to je število $\overline{z} = x - iy$. Absolutna vrednost kompleksnega števila z se definira z $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ter jo označimo z $|z|$. Vsako kompleksno število določa ustrezni par realnih števil (x, y), kar nam omogoča, da ga prestavimo kot točko v ravnini, v kateri je vpeljan Descartov pravokotni koordinatni sistem. Os x imenujemo realna os, os y pa imaginarna os, ravnino pa imenujemo kompleksna ravnina. Nadalje vsaki točki (x, y) ravnine ustreza vektor, katerega predstavnik je usmerjena dolžina z začetkom v izhodišču koordinatnega sistema in koncem v točki (x, y). Poltrak z izhodiščem v točki $(0, 0)$, ki vsebuje izbrano točko (x, y), določa s pozitivnim delom realne osi kot, ki ga imenujemo argument kompleksnega števila in ga označujemo z $\arg(z) = \varphi$. Na tak način definiran argument za dano kompleksno število z ni enolično določen. Če je $\arg(z) = \varphi$, je tudi $\varphi + 2k\pi$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$ prav tako argument števila z. Enoličnost dobimo s postavljanjem meje, da je $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Pri tem lahko opazimo, da absolutna vrednost kompleksnega števila z enaka oddaljenosti njemu pripadajoče točke od koordinatnega izhodišča, oziroma dolžini njemu pripadajočega vektorja. Iz tega sledi, da je vsako kompleksno število $z \neq 0$ enolično določeno z absolutno vrednostjo in argumentom (Slika 5).



Slika 5

Sedaj pokažimo, kako z uporabo argumenta kompleksnega števila v kompleksni ravnini dobimo velikost kota, določenega s tremi točkami. Naj bodo $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ tri točke v kompleksni ravnini, ki predstavljajo tri zaporedne točke A, B in C (Slika 6).

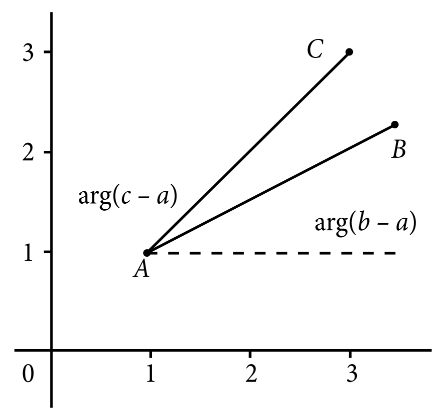
Glede na [10, str. 30] je velikost kota $\sphericalangle BAC$ enaka

$$\sphericalangle BAC = arg(c - a) - arg(b - a) = arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right).$$

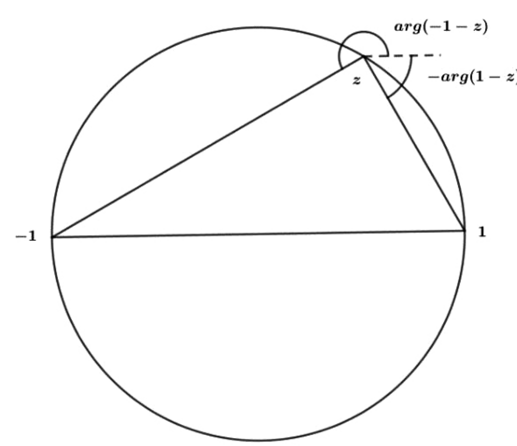
Zadnja enakost izhaja iz lastnosti kompleksnih števil, ki pravi, da če je $z, w \in \mathbb{C}$ in $z, w \neq 0$, potem je $\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$, kjer moramo enakost v splošnem primeru obravnavati po modulu 2π (glej [8, str. 10–11]).

Dokažimo sedaj Talesov izrek o pravem kotu nad premerom krožnice z uporabo kompleksnih števil.

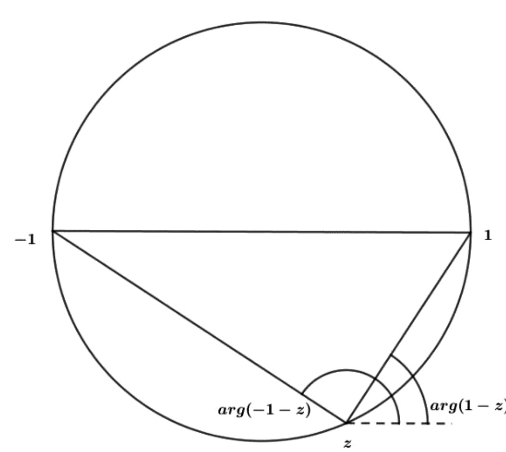
Dokaz 5. [2, str. 37] Brez izgube splošnosti lahko koordinate v ravnini izberemo tako, da ima krožnica premer 1 s središčem v izhodišču koordinatnega sistema, tako točki (1,0) in (–1,0) ležita na krožnici. Vzemimo poljubno točko z na dani krožnici v kompleksni ravnini.



Slika 6



Slika 7a



Slika 7b

V primeru, da točka z leži na krožnici nad premerom (slika 7a), moramo dokazati, da velja

$$arg(-1-z) - arg(1-z) = -\frac{\pi}{2},$$

V primeru, da točka z leži na krožnici pod premerom (slika 7b), moramo dokazati, da velja

$$arg(-1-z) - arg(1-z) = \frac{\pi}{2}.$$

Z uporabo lastnosti $\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w)$, vidimo, da moramo pravzaprav dokazati, da je

$$arg\left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = \pm\frac{\pi}{2},$$

Dokazati moramo, da kompleksno število $\frac{-1-z}{1-z}$ leži na imaginarni osi. To pomeni, da je njegov realni del enak 0. Kompleksno število je torej čisto imaginarno, natanko tedaj ko je

$z = -\overline{z}$. [8, str. 8]. Zato je treba dokazati, da velja

$$\left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\overline{\left(\frac{-1-z}{1-z}\right)} \Leftrightarrow \left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\left(\frac{\overline{-1-z}}{\overline{1-z}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{-1-z}{1-z}\right) = -\left(\frac{-1-\overline{z}}{1-\overline{z}}\right) \Leftrightarrow \frac{-1-z}{1-z} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}.$$

Dobimo

$$(-1-z)\cdot(1-\overline{z}) = (1+\overline{z})\cdot(1-z)$$
$$\Leftrightarrow -1+\overline{z}-z+z\cdot\overline{z} = 1-z+\overline{z}-z\cdot\overline{z}$$

Po urejanju zadnje enakosti dobimo $z\cdot\overline{z} = 1$. Za absolutno vrednost kompleksnega števila velja $|z|^2 = z \cdot z$. Sledi, da moramo dokazati, da je $|z| = 1$. Ker smo točko z izbrali tako, da le-ta pripada enotski krožnici, velja $|z| = 1$. Zaradi zaporedja enakosti velja, da je $\frac{-1-z}{1-z}$ čisto imaginarno število, zaradi česar je kot pravi. ■

Opomba 1.: Iz dokaza 5 vidimo, da pravzaprav velja tudi obrat Talesovega izreka: Če je v trikotniku ABC kot $\sphericalangle ACB$ pravi, tedaj je daljica AB premer očrtane krožnice tega trikotnika.

Opomba 2.: Sedaj lahko Talesov izrek in obrat Talesovega izreka formuliramo na sledeči način: Trikotnik je pravokoten natanko tedaj, ko je njegova najdaljša stranica premer trikotniku očrtane krožnice.

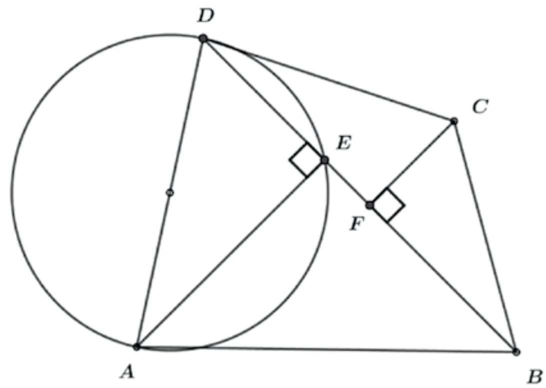
Uporaba Talesovega izreka v različnih nalogah

Navajamo nekaj primerov iz matematičnih tekmovanj v Republiki Hrvaški in Republiki Sloveniji, ki jih rešimo z uporabo Talesovega izreka ali njegovega obrata.

Naloga 1

[9, str. 141]. Dan je konveksni štirikotnik *ABCD*. Dokaži, da poljubna točka tega štirikotnika leži vsaj v enem od štirih krogov, katerih premeri so stranice štirikotnika *ABCD*.

Rešitev: Naj bo daljica BD diagonala danega štirikotnika, točki E in F pa presečišča pravokotnic iz oglišča A in C na diagonalo BD (Slika 8). Po Talesovem izreku točka E leži na krožnici, katere premer je AD. To pa pomeni, da vsaka točka trikotnika ΔAED leži v krogu, katerega premer je AD. Podobno velja tudi za ostale tri pravokotne trikotnike. Ker je štirikotnik $ABCD$ razdeljen na štiri pravokotne trikotnike, sledi, da vsaka točka tega štirikotnika leži v vsaj enem od štirih krogov, katerih premeri so stranice štirikotnika $ABCD$.

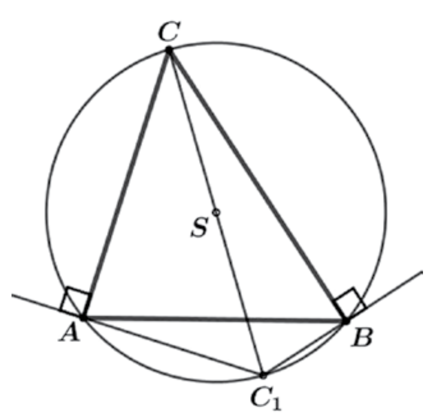


Slika 8

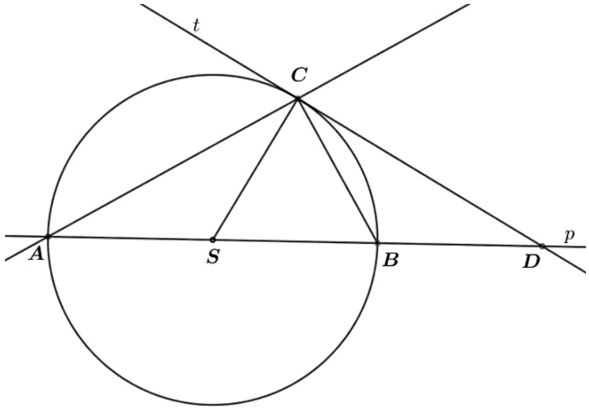
Naloga 2

[9, str. 140]. Skozi oglišča trikotnika *ABC* so narisane pravokotnice na drugi dve stranici trikotnika na naslednji način. Pravokotnica skozi oglišče *B* na stranico *AB* in pravokotnica skozi oglišče *C* na stranico *AC* se sekata v točki A_1, pravokotnica skozi oglišče *C* na stranico *BC* in pravokotnica skozi oglišče *A* na stranico *AB* se sekata v točki B_1, ter pravokotnica skozi oglišče *A* na stranico *AC* in pravokotnica skozi oglišče *B* na stranico *BC* se sekata v točki C_1. Dokažimo, da točke A_1, B_1 in C_1 ležijo na očrtani krožnici trikotnika *ABC*.

Rešitev: Naj bo točka S razpolovišče daljice CC_1. Ker je kot $\sphericalangle CAC_1 = 90°$ in $\sphericalangle CBC_1 = 90°$, po obratu Talesovega izreka točki A in B ležita na krožnici s središčem v S in premerom $|CC_1|$. To pomeni, da točka C_1 leži na krožnici, očrtani trikotniku ABC. Podobno pokažemo, da tudi točki A_1 in B_1 ležita na isti krožnici (Slika 9).



Slika 9



Slika 10

Naloga 3

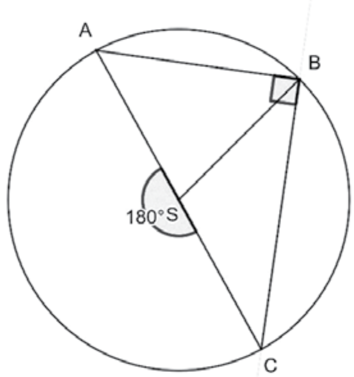
[9, str. 140]. Dana je krožnica *k* in premica *p*, skozi središče *S* dane krožnice *k*. Krožnico seka v točkah *A* in *B*. Tetiva *AC* oklepa s premico *p* kot 30°. Tangenta *t* z dotikališčem v točki *C* seka premico *p* v točki *D*. Dokaži, da je $|SC| = |SD|$ (Slika 10).

Rešitev: Po Talesovem izreku je trikotnik ΔABC pravokoten. Ker je $\sphericalangle BAC = 30°$, je $\sphericalangle ABC = 60°$. Trikotnik ΔSBC je enakokrak, ker je $|SB| = |SC|$, iz česar sledi, da je $\Delta SCB = 60°$, kar pomeni tudi enakostraničen, to je $|SB| = |SC| = |BC|$. Sedaj je očitno $\sphericalangle BCD = 30°$ zaradi $SC \perp t$. Ker je kot $\sphericalangle BDC$ zunanji kot trikotnika ΔBCD, sledi, da je ΔBDC enakokrak. Torej je $|BD| = |BC|$. Sedaj imamo zaporedno $|SB| + |BD| = |SD|$, $|SC| + |BC| = |SD|$, $|SC| + |SC| = |SD|$, $2|SC| = |SD|$. Dobimo $|SC| = \frac{1}{2}|SD|$ (Slika 10).

Naloga 4

[5, naloga A6. za 9. razred]. Dan je krog in tetiva *AB* na krog (Slika 11). V krajišču *B* tetive *AB* je narisana pravokotnica na tetivo. Večjega od lokov *AB* razdeli razmerju 2 : 5. Koliko meri središčni kot, ki pripada tetivi *AB*?

Rešitev: Presečišče pravokotnice in krožnice označimo s *C*. Ker je kot $\sphericalangle ABC$ pravi, iz obrata Talesovega izreka sledi, da je *AC* premer kroga. Naj bo *S* središče kroga. Ker je $\sphericalangle ASC = 180°$, je $\sphericalangle BSC : 180° = 2 : 5$ (glej sliko 11). Od tod dobimo $\sphericalangle BSC = 72°$, njegovo sokot pa meri 108°. Torej središčni kot, ki pripada tetivi *AB*, meri 108°.

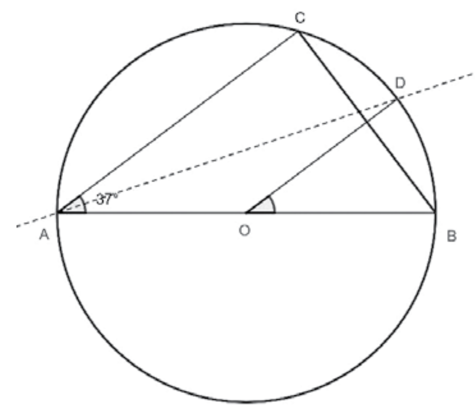


Slika 11

Naloga 5

[6, naloga 3. za 7. razred]. Dan je pravokotni trikotnik *ABC* s hipotenuzo *AB* (Slika 12). Točka *O* naj bo središče temu trikotniku očrtane krožnice. Simetrala kota $\sphericalangle BAC$ seka krožnico v točkah *A* in *D*. Kot $\sphericalangle BAC$ meri 37°. Izračunaj velikost kota $\sphericalangle BOD$.

Rešitev: Po Talesovem izreku je točka *O* je razpolovišče hipotenuze *AB*. Kot $\sphericalangle BOD$ je središčni kot nad krožnim lokom *BD*, zato je dvakrat večji od obodnega kota nad istim krožnim lokom (v. [4, str. 85]). Takrat je $\sphericalangle BOD = 2\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC = 37°$

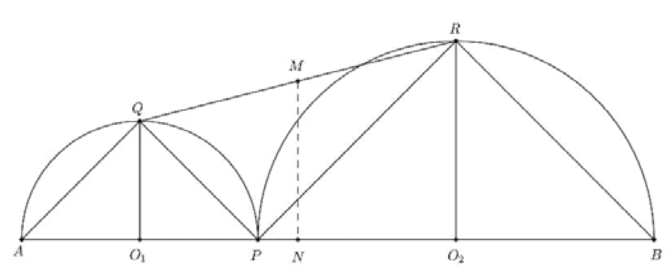


Slika 12

Naloga 6

[7, naloga 3. za 1. letnik srednje šole]. Za poljubno točko *P* sta na isti strani daljice *AB* dana dva enakokraka pravokotna trikotnika *APQ* in *PBR* s pravima kotoma v ogliščih *Q* in *R*. Dokaži, da oddaljenost razpolovišča *M* daljice *QR* od premice *AB* ni odvisna od izbire točke *P* (Slika 13).

Rešitev: Naj bosta točki O_1 in O_2 središči polkrožnic s premeroma $|AP|$ in $|PB|$ zaporedoma. Točka *N* pa naj bo presečišče pravokotnice iz točke *M* na daljico *AB*. Iz obrata Talesovega izreka sledi, da točka *Q* leži na polkrožnici s premerom $|AP|$, točka *R* pa na krožnici s premerom $|PB|$.



Slika 13

Ker sta trikotnika *APQ* in *PBR* enakokraka z osnovnicama *AP* in *PB* zaporedoma, je $QO_1 \perp AP$ in $RO2 \perp PB$ in velja $|QO_1| = |AO_1| = |O_1P| = \frac{1}{2}|AP|$ in $|RO2| = |PO_2| = |O2B| = \frac{1}{2}|PB|$. Štirikotnik O_1O_2RQ je pravokotni trapez z osnovnicama QO_1 in RO_2. Ker je M razpolovišče daljice *QR, je MN* srednjica trapeza in $MN \parallel QO_1 \parallel RO_2$. Znano je, da je dolžina srednjice trapeza enaka polovici vsote dolžin osnovnic trapeza, zato velja

$$|MN| = \frac{1}{2}\left(|QO_1| + |RO_2|\right) = \frac{1}{4}\left(|AP| + |PB|\right) = \frac{1}{4}|AB|.$$

Torej oddaljenost točke *M* od daljice *AB* ni odvisna od izbire točke *P*, kar je bilo treba dokazati.

V tem prispevku smo navedli več različnih dokazov Talesovega izreka z uporabo znanja iz različnih matematičnih področij ter na konkretnih primerih pokazali uporabo pri reševanju (tekmovalnih) nalog. Naš cilj je z omenjenim prispevkom pritegniti pozornost učencev osnovnih in srednjih šol ter njihovih učiteljev za podrobnejše preučevanje Talesovega izreka in reševanje geometrijskih nalog. Predlagamo, da bralec poskuša odkriti še katerega od dokazov Talesovega izreka. Kot prvi korak k temu cilju pa poskušajte rešiti naslednje naloge.

Naloga 7

Dokažite Talesov izrek z uporabo Apollonijevega izreka, ki pravi:

Naj bo *D* razpolovišče stranice *AB* trikotnika *ABC*. Potem je

$|CA|^2 + |CB|^2 = 2\,(\,|CD|^2 + |AD|^2)$.

Naloga 8

Dokažite Talesov izrek z uporabo Stewartovega izreka, ki pravi:

Naj bo D poljubna točka na stranici *AB* trikotnika *ABC*. Potem je

$|CA|^2 \cdot |BD| + |CB|^2 \cdot |AD| = |AB| \cdot (|CD|^2 + |AD| \cdot |BD|$.

Naloga 9

Dokažite Talesov izrek z uporabo kompleksnih števil in kosinusnega izreka.

Uporabo Talesovega izreka pri reševanju konstrukcijskih nalog najdete v [4, str. 91–97].

Literatura

[1] Anglin, W. S. in Lambek, J. (1995). *The heritage of Thales*. Springer.

[2] Earl, R. (2017). *Towards higher mathematics: A companion*. Cambridge University Press.

[3] Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics*. Vol. I. Oxford at the Clarendon Press.

[4] Ivanec, D. idr., *Vega 2*, i-učbenik za matematiko v 2. letniku gimnazij, Zavod Republike Slovenije za šolstvo (http://eucbeniki.sio.si/vega2/).

[5] *Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli* (2007). 43. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje, Področno tekmovanje. Ljubljana: DMFA Slovenije.

[6] *Komisija za popularizacijo matematike v osnovni šoli* (2012). 48. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje, Državno tekmovanje. Ljubljana: DMFA Slovenije.

[7] *Komisija za popularizacijo matematike v srednji šoli* (2007). 45. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije. Idrija: DMFA Slovenije.

[8] Odžak, A. in Smajlović, L. (2013). K*ompleksna analiza.* Sarajevo: Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu.

[9] Stošić, V. (1994). Matematička natjecanja učenika osnovnih škola. Zagreb: Element: Hrvatsko matematičko društvo.

[10] Yaglom, I. M. (1968). Complex numbers in geometry. New York in London: Academic Press.