

G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications INC., Mineola, New York 2007, 267 strani.

Knjiga *Artis Magne Sive de Regulis Algebraicis* (na kratko »*Ars Magna*«, prva izdaja 1545, druga izdaja 1570, tretja izdaja 1663) velja poleg Kopernikove *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543) in Vesaliusove *De Fabrica Humani Corporis* (1543) za eno izmed treh najpomembnejših znanstvenih del v renesansi. V njej je Girolamo Cardano (1501–1576), eden izmed najvplivnejših renesančnih matematikov, polihistor in avtor več kot 200 znanstvenih del z različnih področij (medicina, astronomija, astrologija, filozofija, matematika idr.), klasificiral enačbe 3. in 4. stopnje in ne samo prvi objavil, temveč tudi dokazal ter s konkretnimi zgledi ilustriral pravila (postopke reševanja) za vsak razred enačb iz te klasifikacije. Delo, ki velja za enega izmed mejnikov v razvoju matematike, so vedno visoko cenili, vendar je postajalo vse težje dostopno, saj se je skozi stoletja ohranilo le v redkih izvodih zgodnjih izdaj, pa tudi znanje latinščine se je izgubljalo¹. Prevod v angleščino je izšel šele leta 1967 (ponatisa pa 1993 in 2007). Od takrat se lahko z njim seznanijo tudi sodobni matematiki.² Danes bi ga karakterizirali kot »elementaren« tekst s področja teorije enačb, ki velja za »izčrpano« področje, za Cardanove sodobnike pa je pomenilo pomemben prodor, saj so pravila za reševanje enačb 3. in 4. stopnje matematiki zavzeto iskali kar nekaj stoletij. Danes za reševanje kubične enačbe $x^3 + px + q = 0$ uporabljamo t. i. *Cardanove formule*:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Enačbo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ lahko s substitucijo $z = x + \frac{b}{3a}$ prevedemo v obliko $x^3 + px + q = 0$. V resnici je Cardano namesto ene same formule,

¹Latinščina je – po Gutenbergovem izumu tiska s premičnimi črkami (1439), ki je v Evropi omogočil masovno produkcijo knjig in širjenje znanja zunaj ozkega kroga elite ter spodbudil pisanje knjig v nacionalnih jezikih, postopoma začela izgubljati svoj privilegirani status, ki ga je imela ves srednji vek.

²Kogar zanimajo stare knjige, lahko latinski izvirnik iz 1545 – stavljen v dveh vzporednih stolpcih, z bogato okrašeno naslovnico in inicialkami ter kar brez ravnila narisanimi diagrami – najde na spletni strani www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf, ogled 19. 1. 2019.

veljavne za vse kubične enačbe, v svoji knjigi podal in dokazal pravila za reševanje vseh 13 različnih tipov kubičnih enačb (po tedanji klasifikaciji, ki ni dopuščala negativnih koeficientov). Izhajajoč iz opažanja, da so rešitve nekaterih enačb oblike $x = a + \sqrt{b}$, je s primerjavo iracionalnih delov njihovih kvadratov in kubov znal pokazati, kateri enačbi tipa $Mx^2 = x^3 + N$ tak x zadošča. Tako je npr. za rešitev $x = 2 + \sqrt{3}$ dobil enačbo $3\frac{3}{4}x^2 = x^3 + \frac{1}{4}$ (str. 49). S tem je močno presegel dosežke svojih predhodnikov in sodobnikov na tem področju, katerih prispevke je sicer korektno navajal in priznaval. Velik korak naprej so pomenile tudi njegove metode, ki jih je sistematično razvijal in uporabljal tudi pri reševanju enačb višjih stopenj. Tudi v tem pogledu – da ni skrival ne svojih odkritij ne poti do njih – je bil veliko pred svojim časom; tedaj so namreč matematiki pogosto ljubosumno skrivali svoja odkritja, da ne bi izgubili prednosti na matematičnih tekmovanjih, od izida katerih so bile usodno odvisne njihove kariere. V tem smislu je Cardano predhodnik Eulerja, ki je prav tako veliko pozornosti namenjal opisom, kako je prišel do svojih rezultatov.

Za boljše razumevanje in vrednotenje Cardanovega prispevka je dobro poznati širši kontekst, zato na kratko preglejmo nekaj mejnikov v zgodovini algebre pred Cardanom.

Omar Hajam, perzijski pesnik, filozof, matematik in astronom iz druge polovice 11. stoletja, je v knjigi *O dokazih problemov algebre in muqabale* klasificiral tipe kubičnih enačb, v katerih nastopata monom in binom:

$$x^3 + ax = b, x^3 + b = ax, x^3 = ax + b, x^3 + ax^2 = b, x^3 + b = ax^2, x^3 = ax^2 + b,$$

in jih reševal z *geometrijsko metodo*, kot presečišča dveh stožnic (npr. parabole in kroga).³ Metodi *al-jabr* in *al-muqabala* sta v Italiji najprej postali poznani po latinskih prevodih al-Khowarizmijeve *Algebre*, ki jih je priskrbel Gerard iz Cremona, ter po delu Leonarda iz Pise (Fibonacci). Med

³V gornjih enačbah sta a in b vselej pozitivni števili (sicer bi imeli le dva tipa: brez kvadratnega člena, in brez linearne člena). Vsak tip enačbe zahteva nekoliko drugačno geometrijsko metodo (konstrukcijo). Tako npr. rešitve enačbe $x^3 + px = q$ oz. $\frac{x^4}{p} + x^2 = \frac{q}{p}x$ iščemo kot presečišče parabole $y = \frac{x^2}{\sqrt{p}}$ in krožnice $y^2 + x^2 = \frac{q}{p}x$.

njunimi nasledniki je najbolj znan pisec aritmetičnih učbenikov Luca Pacioli, čigar knjigo »*De divina proportionem*« (napisano 1496–98 v Milanu, objavljeno 1509 v Benetkah) je ilustriral Leonardo da Vinci.

V 13. stoletju je razvoj matematike v Italiji močno pospešil prehod iz blagovne v monetarno trgovino. Razvilo se je bančništvo, potreba po računanju obresti in dolgov. Namesto rimskih števil, ki so bile za računanje prenerodne, so začeli uporabljati arabske.

V Italiji, nekje od 13. do 16. stoletja, pred pojavom analitične geometrije, so matematiki iskali eksplicitne rešitve enačb tretje in četrte stopnje. Svoje rešitve so zapisovali verbalno, brez algebrskega simbolizma, ki se pojavi šele kasneje.⁴ Poznali so že recept za reševanje kvadratne enačbe (Al Khwarizmi, Omar Hajam), po analogiji so iskali podobno metodo (formulo) za reševanje enačb tretje in četrte stopnje.

S kubičnimi in bikvadratnimi enačbami so se v Italiji ukvarjali: mojster Benedetto iz Firenc, mojster Biaggio iz Firenc, Attonio Mazzinghi, Luca Pacioli, mojster Dardi iz Pise, Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Lodovico Ferrari, Rafael Bombelli idr.

Ker še ni bilo razvitega matematičnega simbolizma, so uporabljali nekakšno »retorično algebro«. Vsak matematik je uporabljal svoje izraze ali oznake za x , x^2 , x^3 , x^4 itd. Namesto formul, kot jih poznamo danes, so uporabljali besedne opise postopkov, ki pripeljejo do rešitev. Dostikrat so bili razloženi le na konkretnih številskih primerih.

Scipione del Ferro (1465–1526) iz Bologne je leta 1515 odkril rešitev za »*reducirano kubično enačbo*« $x^3 = px + q$ oziroma enačbo tretje stopnje brez kvadratnega člena. Ključni korak te metode je zelo domiseln trik: neznanko nadomestimo z dvema parametroma, $x = u + v$, kjer u in v pametno izberemo tako, da dobimo zanju sistem dveh enačb. Takrat so razlikovali med tremi tipi reduciranih kubičnih enačb, ker so dopuščali le pozitivne koeficiente in pozitivne x : $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$. Rešitvi za druga dva tipa reduciranih kubičnih enačb je našel Niccolo Tartaglia.

⁴François Viète je v svojem delu *In artem analyticam isagoge*, 1591, prvi uporabil črke za označevanje neznank in konstant v algebrskih enačbah.

Rešitve kubičnih enačb Scipiona del Ferra in Tartaglie je objavil Cardano 1545 v knjigi *Ars Magna*. Njune rešitve je razširil tudi na enačbe »brez manjkajočih členov« (kot so npr. $x^3 + 6x^2 = 20x + 112$, glej str. 141) in objavil pravila za vseh 13 tipov kubičnih enačb z različnimi kombinacijami členov različnih stopenj s samimi pozitivnimi koeficienti na obeh straneh enačbe. Te enačbe so takrat obravnavali kot različne, ker se še niso naučili trika, vse člene prestaviti na eno stran enačbe in na drugo stran zapisati število nič, in ker niso uvideli, da »manjkajoči« členi v resnici ne manjkajo, ampak imajo koeficient nič. V isti knjigi je objavil tudi rešitve za enačbe 4. stopnje svojega učenca Lodovica Ferrarija (1522–1565). Vendar to ne izčrpa vsebine Cardanove knjige, v kateri je objavil tudi druge formule oz. pravila. Tako npr. problem *najti število, enako vsoti svojega kvadratnega korena in dvakratnika svojega kubičnega korena*, reši prek rešitve x enačbe $x^6 = x^3 + 2x^2$, za katero izpelje izraz $x = \frac{1}{3} + \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} + \frac{47}{56}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{2241}{2916}} - \frac{47}{54}}$; iskano število je potem x^6 (str. 243).

Cardano, ki mu je njegov sodobnik Niccolo Tartaglia očital, da je v tej knjigi objavil formule, za katere mu je moral priseči, da jih nikoli ne bo, v uvodu odkrito in korektno navede in priznava prispevke drugih matematikov pri iskanju teh formul. Razloži tudi, v čem je šel dlje od svojih predhodnikov, pojasni pa tudi metode, po katerih je prišel do svojih odkritij. V geometrijski metodi dokazovanja, ki jo je, kot sam pravi, prejel od Tartaglie, je prepoznal »kraljevska pot, ki ji velja slediti v vseh drugih primerih« (glej str. 52). V dokazih pravil se sklicuje tudi na izreke iz Evklidovih *Elementov*, predstavil pa je tudi metode za odkrivanje novih pravil in metod reševanja enačb (glej npr. VI. poglavje: str. 48–55, in XIX. poglavje: str. 180–181).

Tartaglia je močno zameril Cardanu, da je objavil formule, ki mu jih je zaupal. Zaradi tega ga je tudi javno napadel, češ da mu je skrivnost zaupal pod pogojem, da je nikoli ne izda. Stvar je šla tako daleč, da je prišlo do javnega intelektualnega dvoboja med Tartaglio in Ferrarijem, ki pa se za prvega ni iztekel najbolje. Cardano je, po današnjih merilih, pošteno in korektno citiral in priznal vsakomur, kar je odkril (glej npr. Poglavje I, str.

7–9). Vendar je Cardano storil veliko več kot samo objavil neko formulo, ki jo je našel nekdo drug. Sam je našel pravila za rešitve vseh tistih tipov enačb 3. stopnje, ki jih drugi niso rešili. O vsem tem je napisal tudi zelo sistematično in lepo strukturirano knjigo.

Cardanov prispevek je, poleg redukcije zapletenejših tipov enačb na preprostejše – ki sta jih znala rešiti že Scipione del Ferro in Tartaglia – obsegal tudi naslednje dosežke (glej Predgovor, str. xvi): i) Odkril in dokazal je obstoj večkratnih korenov za različne vrste kubičnih in bikvadratnih enačb. ii) Raziskal je relacije med rešitvami različnih enačb. Tako je npr. pokazal, kako iz rešitev enačbe $x^2 = 6x + 16$ dobimo rešitve enačbe $x^2 + 6x = 16$ (tako da rešitvi prve enačbe prištejemo koeficient pri linearnem členu, torej 6, str. 56). iii) Pokazal je, da imajo določeni pari enačb korena, ki se razlikujeta le v predznaku. Tako je npr. 4 koren enačbe $x^3 = 12x + 16$, -4 pa koren od $x^3 + 16 = 12x$ (str. 12). iv). Prepoznal je pomen in neizogibnost negativnih, pa tudi iracionalnih rešitev. v) Obravnaval je tudi rešitve, v katerih so nastopali kvadratni koreni iz negativnih števil, čeprav se mu je njihova narava zdela »sostificirana«. Tako je npr. kot rešitev problema, razdeliti 10 na dva sumanda, katerih produkt je 40, dobil $5 + \sqrt{-15}$ in $5 - \sqrt{-15}$ (str. 219–220).⁵ Z vsem tem je Cardano prispeval močan pospešek k neslutnemu razvoju algebre v kasnejših stoletjih.

Cardanovo izvirno besedilo je sodobnemu matematiku razmeroma težko razumljivo, iz več razlogov: 1. Napisano je v latinščini, ki jo danes znajo le redki, potem ko so jo, po izumu tiska, postopoma začeli izpodrivati nacionalni jeziki. 2. Namesto nam domačih modernih matematičnih izrazov in simbolov uporablja terminologijo in oznake tistega časa, dostikrat pa tudi dolgovezne besedne formulacije, značilne za obdobje »*retorične algebre*«. 3. Sama tematika reševanja enačb (z algebrائيčnimi formulami), ki je bila takrat na samem robu raziskovalnega horizonta in eden pomembnih nerešenih problemov matematike, danes ne velja več za zelo zanimivo in zato tudi

⁵K odpravi predsodkov proti kompleksnim številom je odločilno prispeval švicarski matematik, fizik in astronom Leonhard Euler (1707–1783), ki je prikazal njihovo večstransko uporabnost.

metode reševanja enačb, ki so privedle do teh formul, večini matematikov niso poznane. 4. Pri klasificiranju enačb (podobno kot pred njim npr. Omar Hajam) upošteva predznake koeficientov (kar se z današnjega zornega kota zdi nepotrebno kompliciranje). 5. Dokaze pravil za reševanje enačb različnih tipov podaja z referencami na Evklidove *Elemente*, ki jih danes matematiki ne poznamo tako dobro, kot so jih nekoč, formule, relacije in razmerja med količinami pa ilustrira z nekakšnimi diagrami, npr. pravokotniki, razdeljenimi na manjše pravokotnike (po vzoru »*geometrijske algebre*« islamskih matematikov). 6. Dostikrat pove pravilo šele potem, ko ga opiše ob posebnem številskem primeru (kar se lahko zdi nenavadno, čeprav je pedagoško po svoje utemeljeno). 7. Nekatera pravila poda brez dokaza. 8. Nekatera mesta v besedilu so nejasna ali netočna (toda ustrezna pravila se na srečo dajo rekonstruirati iz posameznih številskih zgledov).

In še nekaj besed o strukturi in vsebini dela.

Knjiga obsega 40 poglavij. V vsakem poglavju je obravnavan drugačen tip enačb. Te so dostikrat izpeljane iz problemov, npr. iskanja števila ali para števil, ki ustreza določenim pogojem. Nekatera pravila so *splošna*, nekatera pa *partikularna*, namenjena reševanju posameznih problemov.

Iz nekaterih osnovnejših pravil izpeljuje druga pravila. Pri dokazih se dostikrat nasloni na diagrame in sklicuje na izreke iz Evklidovih *Elementov*. Pove, zakaj se večinoma ne bo ukvarjal z enačbami, ki imajo stopnje višje od 3: »*Narava tega ne dopušča.*« (str. 9). V knjigi ne podaja samo eksaktnih formul, s katerimi dobimo eksaktne rešitve. Tako nam npr. eno od njegovih pravil (str. 182–185) omogoča najti zaporedje vse natančnejših približkov k rešitvam. Vsako pravilo oziroma postopek ponazori s primeri. Pravi, da se teh pravil najlažje naučimo ob reševanju problemov. Knjiga v tem pogledu spominja na zbirke nalog za tekmovalce na matematičnih tekmovanjih. Dejansko so se v renesansi matematiki pogosto pomerili med seboj v reševanju problemov oziroma enačb. Od izidov takih soočenj so bile pogosto odvisne njihove kariere in ugled.

Zelo zanimivo je Cardanovo primerjanje rešitev različnih enačb. Tako npr. dokaže: če $x^3 = ax^2 + b$ in $y = x - a$, potem je $y^3 + ay^2 = c$, kjer je $\frac{c}{b} = \frac{y}{x}$.

To pravilo ponazori s primerom: če rešitvi $x = 2\frac{1}{4}$ enačbe $x^3 = 2x^2 + 1\frac{17}{64}$ odštejemo $a = 2$, dobimo $y = \frac{1}{4}$, ki ustreza enačbi $y^3 + 2x^2 = \frac{9}{64}$, katere konstantni člen $c = \frac{9}{64}$ je v enakem razmerju do konstantnega člena $b = 1\frac{17}{64}$ prve enačbe, kot je razmerje $y = \frac{1}{4}$ do $x = 2\frac{1}{4}$ (str. 254–255).

Stvaritev moderne verzije starega znanstvenega besedila postavlja prevajalcu zahtevne probleme (odločati se je treba med novo in staro terminologijo, treba se je odločiti, kako interpretirati nejasne dele besedila in v kolikšni meri uporabljati moderne matematične simbole ipd.). Angleški prevod uporablja (namesto stare matematične terminologije Cardanovega časa) moderne izraze ter (namesto Cardanovih oznak in dolgih besednih opisov) moderno algebraično pisavo, ki naredi besedilo veliko razumljivejše sodobnemu matematiku. Branje angleškega prevoda olajša seznam citatov iz Evklidovih *Elementov*, na katere se Cardano v svojih dokazih sklicuje.

Cardanova knjiga se konča z naslednjim citatom:

NAPISANO V PETIH LETIH. NAJ TRAJA
TOLIKO TISOČ.
KONEC VELIKE UMETNOSTI
PRAVIL ALGEBRE
GIROLAMA CARDANA.

To Cardanovo plemenito upanje se bo uresničilo le v primeru, da bodo ljudje ohranili spoštovanje do dragocenih starih knjig in revij in da jih bomo kot dragoceno kulturno dediščino ohranjali tudi v tiskani, ne le v elektronski obliki. Naj nas naše spoštovanje do Cardanove »*Velike umetnosti*« spomni, da so tudi v starih knjigah shranjeni zakladi in skrivnosti, ki jih ne gre omalovaževati, temveč jih je treba na novo odkriti in prinesiti na svetlobo.

LITERATURA

- [1] G. Cardano, *The Rules of Algebra (Ars Magna)*, Dover Publications INC., Mineola, New York, 2007.
- [2] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972, str. 189.

Jurij Kovič