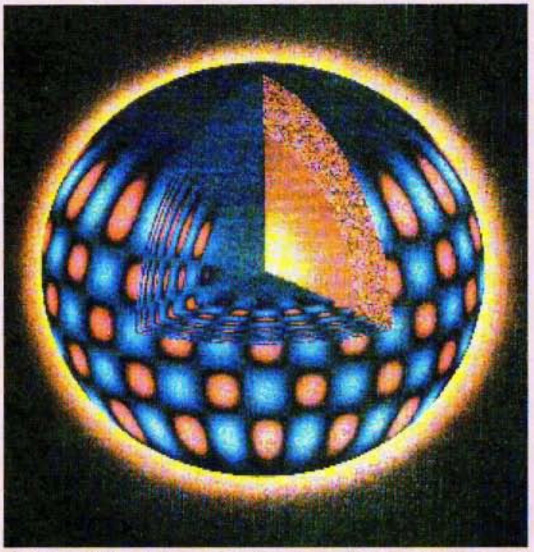
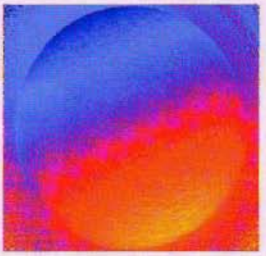
PRESEK

25 (1997-1998) 5

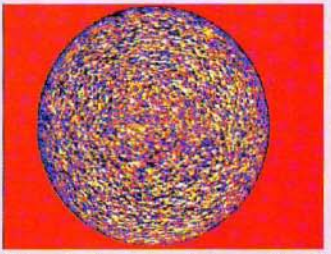
ISSN 0351-6652
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE



(a) Na sliki vidimo podobnost s piščaljo, le da pride do razlik zaradi drugačne oblike. Razlika v predznaku odmika tlaka od ravnovesne vrednosti je ponazorjena s svetlimi in temnimi predeli. Za temne predele je $\delta p > 0$ in za svetle predele $\delta p < 0$.



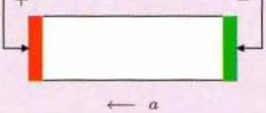
(b) Dopplerjev premik zaradi vrtenja.



(c) Dopplerjev posnetek površine Sonca potem, ko računsko odstranimo premik zaradi vrtenja. Slika predstavlja superpozicijo vseh nihajnih načinov na površini. Temnejši deli se približujejo opazovalcu, svetlejši pa se od opazovalca oddaljujejo.

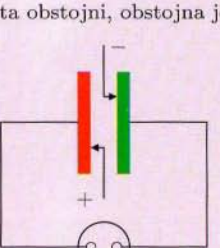
Slika 2 k članku na strani 270: Sonce kot akustični resonator.

Slika 1. Pozitivna "trdnina" in negativna "tekočina" v vodniku sami nista obstojni, obstojna je le nevtralna skupnost obeh.



Slika 2. Na sprednjem delu vodnika med zaustavljanjem v tanki plasti prevlada negativni naboj "tekočine", na zadnjem delu pa pozitivni naboj "trdnine".

Slika 3. Pri influenci v vodniku v bližini pozitivno naelektrenega telesa opazimo enak pojav kot med zaustavljanjem vodnika na sliki 2.



Slika 4. Na ploščah ploščatega kondenzatorja, ki ga priključimo na izvir napetosti, sta presežka pozitivnega in negativnega naboja veliko manjša od naboja "trdnine" in "tekočine" v ploščah.

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, leto 1997/98, številka 5, strani 257-320

VSEBINA

NESREČNO ŠTEVILO 13 JE SREČNO

Ljudski glas pravi, da je število 13 nesrečno. Matematika pozna srečna števila in 13 je med njimi.

Poljski matematik Stanislav Ulam je živel v letih 1909 do 1984. Dolgo je deloval v Ameriki. Tam je izšla leta 1960 njegova "Zbirka matematičnih problemov". V tej knjigi je prvič govor o srečnih številih. Pozneje so se z njimi ukvarjali še drugi.

Postopek, po katerem je Ulam opredelil srečna števila, imenujemo Ulamovo rešeto. Ponazorimo na zgledu, kako to rešeto seje.

Določiti hočemo srečna števila do 50. Zapišemo vsa naravna števila od 1 do 50, podčrtamo 1 in prečrtamo vsako drugo število

$$\underline{1},\ \cancel{2},\ 3,\ \cancel{4},\ 5,\ \cancel{6},\ 7, \ldots,\ \cancel{46},\ 47,\ \cancel{48},\ 49,\ \cancel{50}.$$

Ko izpustimo prečrtana števila, dobimo zaporedje

$$\underline{1},\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 45,\ 47,\ 49\,.$$

Prvo nepodčrtano število v tem zaporedju je 3; podčrtajmo ga in prečrtajmo vsako **tretje** število (ker smo podčrtali število 3)

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \cancel{5},\ 7,\ 9,\ \cancel{11},\ 13,\ 15,\ \cancel{17},\ 19,\ 21,\ \cancel{23},\ 25,\ 27,\ \cancel{29},\ 31,\ 33,\ \cancel{35},\ 37,\ 39,\ \cancel{41},\ 43,\ 45,\ \cancel{47},\ 49\,. \tag{$*$}$$

Odvržemo prečrtana števila in pridemo do zaporedja

$$\underline{1},\ \underline{3},\ 7,\ 9,\ 13,\ 15,\ 19,\ 21,\ 25,\ 27,\ 31,\ 33,\ 37,\ 39,\ 43,\ 45,\ 49\,. \tag{1}$$

Število 7 je v zaporedju (1) prvo, ki je nepodčrtano. Podčrtamo ga in v (1) prečrtamo vsako sedmo število

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ 9,\ 13,\ 15,\ \cancel{19},\ 21,\ 25,\ 27,\ 31,\ 33,\ 37,\ \cancel{39},\ 43,\ 45,\ 49\,.$$

Ko izpustimo prečrtana števila, imamo zaporedje

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ 9,\ 13,\ 15,\ 21,\ 25,\ 27,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 45,\ 49\,. \tag{2}$$

Sedaj v (2) podčrtamo 9 in prečrtamo vsako deveto število

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{9},\ 13,\ 15,\ 21,\ 25,\ \cancel{27},\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 45,\ 49\,.$$

Izpustimo prečrtano število 27 in smo pri zaporedju

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{9},\ 13,\ 15,\ 21,\ 25,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 45,\ 49\,. \tag{3}$$

V (3) podčrtamo 13 in prečrtamo vsako trinajsto število

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{9},\ \underline{13},\ 15,\ 21,\ 25,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ \cancel{45},\ 49\,.$$

Treba je torej 45 odvreči in ostane zaporedje

$$\underline{1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{9},\ \underline{13},\ 15,\ 21,\ 25,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 49\,. \tag{4}$$

Ker je v (4) prvo nepodčrtano število 15, bi ga v naslednjem koraku podčrtali in iz (4) izpustili vsako petnajsto število. Toda v (4) je le trinajst členov, zato je sejanje končano. Števila, ki so imela "srečo", da niso bila prečrtana in odvržena, so srečna. Srečna števila do 50 so tako podana z zaporedjem (4), 13 je eno od njih.

Iz napravljenega zgleda je jasno, kako presejemo srečna števila do naravnega števila a. Za $a = 100$ najdemo, da so srečna števila do 100

$$\begin{gathered}1,\ 3,\ 7,\ 9,\ 13,\ 15,\ 21,\ 25,\ 31,\ 33,\ 37,\ 43,\ 49,\ 51,\ 63,\ 67,\\ 69,\ 73,\ 75,\ 79,\ 87,\ 93,\ 99\,.\end{gathered} \tag{5}$$

Mislimo si sedaj, da izhajamo iz zaporedja vseh naravnih števil

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots,\ n,\ n+1,\ldots$$

in ga presejemo z Ulamovim rešetom. Števila, ki ostanejo, so srečna; neskončno jih je, prvih triindvajset podaja zaporedje (5).

Ob opazovanju srečnih števil se porajajo raznovrstna vprašanja.

Iz (5) vidimo, da so med srečnimi števili do 100 štirje kvadrati $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $25 = 5^2$, $49 = 7^2$. Ali je v zaporedju vseh srečnih števil neskončno kvadratov?

Praštevilo je srečno ali pa tudi ne. Po (5) je npr. praštevilo 3 srečno, praštevilo 5 pa ne. Do 100 je 25 praštevil, med njimi so srečna $3, 7, 13, 31, 37, 43, 67, 73, 79$, kot pove (5). Ali je neskončno praštevil, ki so srečna?

Srečno število je zmeraj liho, saj Ulamovo rešeto vsa soda števila odvrže. Včasih sta zaporedni lihi števili obe srečni. Iz (5) preberemo, da so med srečnimi števili do 100 pari te vrste

$$1,3;\ 7,9;\ 13,15;\ 31,33;\ 49,51;\ 67,69;\ 73,75\,.$$

Takšnim parom pravimo srečni dvojčki. Ali je neskončno srečnih dvojčkov?

Začetna soda števila se dajo izraziti z vsoto dveh srečnih števil. Tako je

$$\begin{array}{rr} 2 = 1 + 1 & 12 = 3 + 9 \\ 4 = 1 + 3 & 14 = 1 + 13 \\ 6 = 3 + 3 & 16 = 3 + 13 \\ 8 = 1 + 7 & 18 = 3 + 15 \\ 10 = 3 + 7 & 20 = 7 + 13 \end{array}$$

(Včasih je takih izrazitev več. Npr. $16 = 1 + 15 = 3 + 13 = 7 + 9$.) Ali je vsako sodo naravno število vsota dveh srečnih števil?

Na nobeno od zgornjih vprašanj odgovor ni znan.

Do 100 je 25 praštevil, srečnih števil je 23; do 200 je praštevil 46, srečnih števil 39. Naj pomeni $A(x)$ število praštevil, $B(x)$ število srečnih števil do naravnega števila x. Dognali so, da gre kvocient $\frac{B(x)}{A(x)}$ proti 1, ko rase x čez vse meje. Pri velikem x je torej do x približno toliko srečnih števil, kot je do x praštevil.

Oglejmo si sedaj naravna števila oblike $n = 3t + 2$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Če je t sod, je n sod in odpade pri prvem sejanju. Če je t lih, je $t = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, in $n = 6s + 5$; iz $(*)$ se vidi, da so ta števila odvržena pri drugem sejanju. To pomeni, da število oblike $3t + 2$, $t = 0, 1, 2, \ldots$, nikoli ni srečno. Srečna so tako lahko le števila, ki so deljiva s 3 ali pa puščajo pri delitvi s 3 ostanek 1. Seveda je tudi med temi mnogo takih, ki niso srečna.

Literatura

S. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*. 1960.

Članek M. Gardnerja v *Math. Intell.* **19** (1997), 2, str. 26–29.

Naloga

Poišči srečna števila a) do 200, b) do 500, c) do 1000.

Jože Grasselli

ZA IZNAJDLJIVE

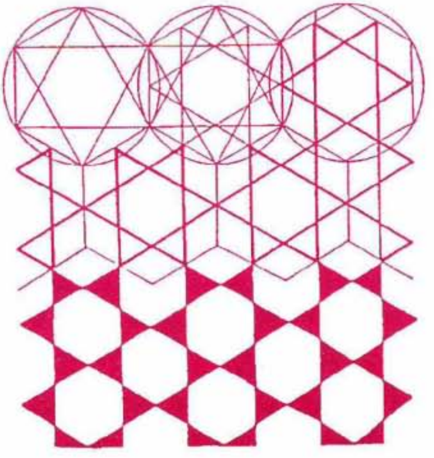
Na kupu gradbenega materiala leži nekaj povsem enakih kosov opeke oblike kvadra.

Kako bi, brez uporabe Pitagorovega izreka, določili razdaljo med najbolj oddaljenima točkama opeke?

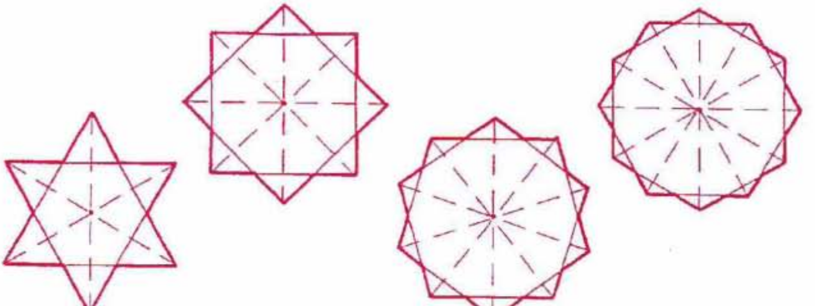
Dragoljub M. Milošević

ARABSKI VZORCI

Arabska likovna umetnost je znana po tem, da svoje likovne kompozicije gradi tudi na čistih geometrijskih zasnovah. Eden izmed pogostih motivov je preplet dveh ali več pravilnih večkotnikov s skupnim središčem. Na desni risbi so prikazane razvojne faze preprostega tovrstnega vzorca, ki je zasnovan na paru koncentričnih enakostraničnih trikotnikov.



Pozorno poglejmo predvsem pare koncentričnih večkotnikov, ki služijo tem vzorcem za osnovo. Ob njih se nam ponuja zanimiva naloga.



Denimo, da meri stranica pravilnega n–kotnika a. Izračunaj obseg lika, sestavljenega iz para koncentričnih n–kotnikov tako, kakor kaže zgornja risba, za:

a) $n = 3,\ 4,\ 6$,
b) $n = 5,\ 8$,
c) za poljuben n.

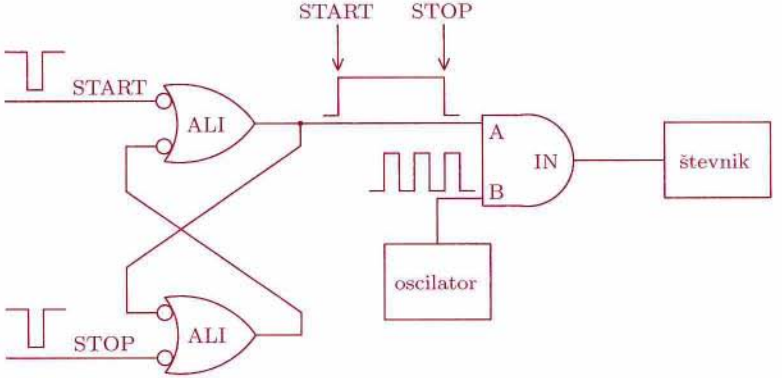
Naloga a) je lahka in je primerna tudi za osnovnošolce, naloga c) pa je le za zahtevnejše reševalce.

Vilko Domajnko

MERJENJE ČASOVNIH INTERVALOV

Želeli bi meriti čas Δt, ki poteče med dvema dogodkoma, recimo jima START in STOP. V ta namen uporabimo stoparico: ko se zgodi START, stoparico sprožimo, ustavimo pa jo, ko se zgodi STOP. Tako merijo čas, ki ga porabi smučar na progi ali kolesar pri dirki na kronometer. Primerjava časov Δt po tekmi razvrsti tekmovalce. START je tu trenutek, ko smučar ali kolesar prekineta stikalo v startnih vraticah, STOP pa, ko pripeljeta skozi vrata na cilju.

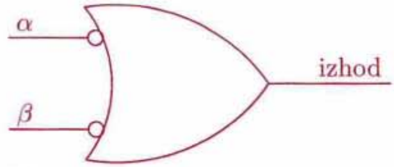
Stoparica je na poseben način prirejena ura. Na sliki 1 je shematično prikazano vezje pri stoparici. Sunke iz električnega nihala, imenujemo ga oscilator, pripeljemo na vhod B vezja IN. Na izhodu iz vezja dobimo sunke le tedaj, ko je na vhodu A napetost, denimo 5 V. Takrat pravimo, da je na vhodu logična enka, kar označimo z "1". Dve križno spojeni ALI vezji z negiranimi vhodi skrbita, da je na vhodu A napetost le med sunkoma START in STOP. Ta sta invertirana, kar pomeni, da označuje sunek stanje "0", večino časa je na vhodih stanje "1". Sunke iz vezja IN preštejemo, njihovo število je sorazmerno z Δt.



Slika 1. Stoparica z elektronskim proženjem in ustavljanjem. Sunek START preklopi flip-flop, da se pojavi na vhodu B vrat IN napetost, zato spustijo sunke iz oscilatorja na števno napravo.

Vezji ALI tvorita elektronski sklop, ki mu pravimo flip-flop. Vezje ima dve stanji: pri prvem je na izhodu 1 "0", na izhodu 2 pa "1", pri drugem stanju pa je obratno. Ker moramo začeti meritev s prvim stanjem, preklopimo flip-flop tako, da na vhod STOP pripeljemo sunek. Potem vezje pravilno deluje tudi pri ponovnih meritvah. O tem se bralec najlaže prepriča sam, če upošteva preglednico stanj vezja ALI z negiranima vhodoma α in β (slika 2).

α	β	izhod
"1"	"1"	"0"
"1"	"0"	"1"
"0"	"1"	"1"
"0"	"0"	"1"



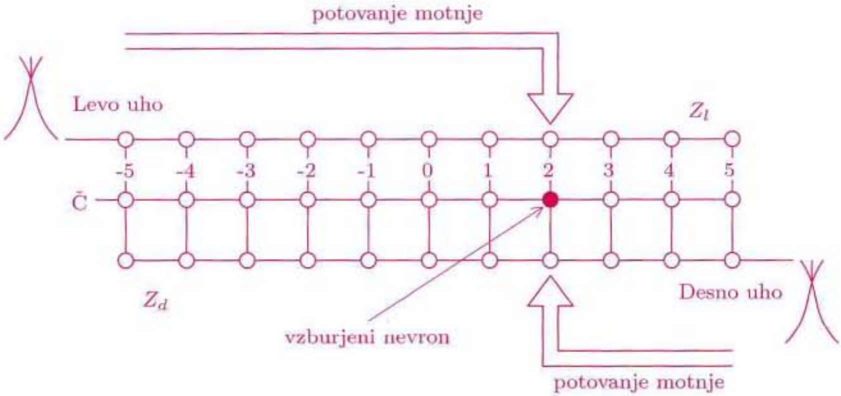
Slika 2. Vrata ALI z negiranima vhodoma.

Pri oscilatorju s frekvenco 500 MHz že s to preprosto različico dosežemo, da je Δt natančen na 2 ns. S stoparico merimo tudi zelo kratke časovne intervale. V eksperimentalni fiziki jedra in osnovnih delcev uporabljajo posebne stoparice, ki zmorejo zaznati tudi nekaj pikosekund dolge intervale. Tako med seboj ločimo različno hitre delce ali pa delce, ki smo jih detektirali na različnih mestih. S stoparico, na primer, merimo kinetično energijo nevtronov. V trenutku, ko se nevtron sprosti, se ura sproži, ko pa ga oddaljeni detektor zazna, stoparico ustavimo. Hitri nevtroni imajo hitrosti, ki so blizu svetlobni, ta pa za 1 meter poti porabi 3 ns. Ker je razdalja, ki jo nevtroni preletijo v laboratoriju, le kakih 10 metrov, mora biti stoparica zelo hitra, najmanjši drobec časa, ki ga še zazna, pa okrog 10 ps.

Merjenje kratkih časovnih razmikov je pomembno tudi v živem svetu. Znano je, da npr. netopirji in neka vrsta rac z oddajanjem zvoka in prestrezanjem odbitega valovanja opazujejo okolico. Razdaljo določajo z merjenjem časa, ki preteče med oddajo in sprejemom. Sove med letom s poslušanjem šumov izsledijo plen, ker zvok s strani ne pride v obe ušesi istočasno. Z določanjem časovne razlike lahko sova ugotovi smer, iz katere prihaja šum. V laboratoriju so ugotovili, da je pri tem presenetljivo natančna. Pri določanju lege plena ji pomagajo še nesimetrično nameščena ušesa: eno uho je obrnjeno navzdol in tako bolje sliši šume s tal, drugo pa je obrnjeno navzgor.

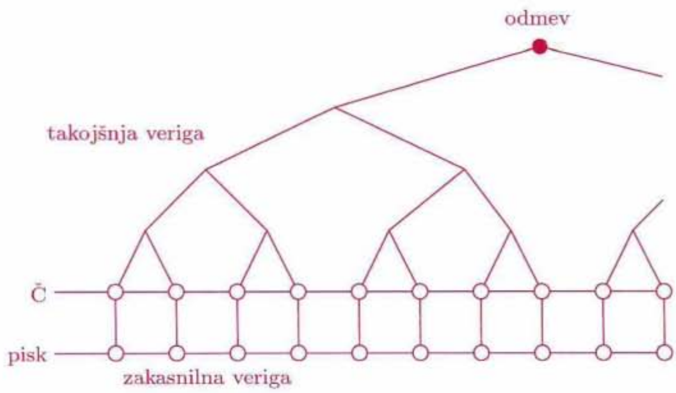
Časovni razmiki, ki jih meri sova, so zelo majhni. Ker je razdalja med ušesoma le nekaj centimetrov, zvok pa ima v zraku hitrost 340 ms^{-1}, so krajši od sto mikrosekund. Biologi so odkrili, kako deluje ta živa stoparica, nameščena v ptičjih možganih.

Osnovo stoparice tvorita zakasnilni verigi nevronov, ki sta na nasprotnih krajiščih priključeni na ušesi. Nevron je celica, ki je povezana z drugimi nevroni in se vzbudi, če so vzbujeni nevroni, s katerimi je povezana. Obe zakasnilni verigi sta neposredno v stiku s čutilno verigo nevronov (glej



Slika 3. Splet nevronov v predelu sovinih možganov, ki služi kot stoparica. Zakasnilni verigi Z_l in Z_d sta v stiku s čutilno verigo Č. Na enem koncu sta zakasnilni verigi povezani z ušesnimi nevroni.

sliko 3). V trenutku, ko dospe zvok do ušesa, se začne po zakasnilni verigi motnja enakomerno širiti od nevrona do nevrona. Motnjo čutijo tudi čutilni nevroni, vendar se zelo šibko odzivajo. Motnja pa potuje tudi po drugi zakasnilni verigi v nasprotni smeri, saj prispe zvok tudi v drugo uho. Na nekem mestu se motnji srečata. Tu je čutilni nevron vzbujen hkrati z dveh strani, zato se zelo močno vzburi. Lega vzburjenega nevrona pove živali zakasnitev. Če pride zvok v obe ušesi hkrati, se bo vzburil nevron na sredi, sicer pa se bo vzburil nevron na levi ali desni strani. Čim večja je zakasnitev, tem dlje od srednjega so vzburjeni nevroni. Vsakemu nevronu lahko pripišemo celoštevilčni naslov, ki je pozitiven, če leži nevron desno od srednjega, in negativen, če leži levo. Prav tako naslovimo nevrone v čutilni verigi. Ker potuje motnja enakomerno po zakasnilni verigi, je v času t, ki ga merimo od trenutka, ko levo uho zazna zvok, vzbujen n_l-ti nevron po enačbi $n_l = ct/a - n_0$. Tu je c hitrost motnje, ki jo merimo v ms^{-1}, a razdalja med nevroni, n_0 pa je naslov prvega nevrona v verigi. Izberemo ga tako, da dobi srednji nevron naslov 0. Motnja v desnem ušesu praviloma ne nastane istočasno, pač pa s časovno zakasnitvijo Δt. Po času t je zato vzbujen n_d-ti nevron: $n_d = n_0 - c(t - \Delta t)/a$. Motnji se srečata, ko velja $n_d = n_l$, ali $n_l = \frac{c}{2a}\Delta t$. Naslov vzburjenega nevrona je torej sorazmeren z razliko časov Δt. Hitrost širjenja motnje ocenimo iz podatka, da prepotuje razdaljo a v eni mikrosekundi. Ker so nevroni zelo blizu skupaj, $a \approx 1\ \mu\mathrm{m}$, je hitrost motnje $\approx 1\ \mathrm{ms}^{-1}$. Seveda stoparica ni umerjena na enoto, ki smo je vajeni. Te žival tudi ne potrebuje, saj izmerkov nikomur ne posreduje.



Slika 4. Splet nevronov pri netopirju. Ena od zakasnilnih verig je zamenjana s takojšnjo, ki ob prestreženem odmevu hkrati vzbudi čutilne nevrone.

Podobno je zgrajen del možganov pri netopirju. V trenutku, ko netopir odda pisk, začne po zakasnilni verigi potovati motnja. Ko ušesa prestrežejo odmev, se motnja v hipu po posebnem spletu, ki mu pravimo takojšnja veriga, prenese do vseh nevronov v čutilni verigi. Močno se vzburi le nevron, ki je hkrati vzbujen preko zakasnilne in takojšnje verige. Naslov tega nevrona pove ostalim delom možganov razdaljo do telesa, ki je zvok odbilo (glej sliko 4).

Andrej Likar

KROGI, KROGI

V logu narišemo krog z ukazom `CIRCLE`. V MSWlogu ima ukaz en parameter, ki določa polmer kroga. Središče narisanega kroga je v točki, v kateri se ob klicu nahaja želva. Poskusite ugotoviti, kakšne slike narišejo naslednja zaporedja ukazov:

(a) `CS REPEAT 5 [CIRCLE 30*REPCOUNT]`
(b) `CS REPEAT 5 [CIRCLE 180-30*REPCOUNT PU FD 30 PD]`
(c) `CS RT 90 PU BK 280 PD`
`REPEAT 5 [CIRCLE 20*REPCOUNT PU FD 20+40*REPCOUNT PD]`

Ukaz `REPCOUNT`, uporabljen znotraj zanke `REPEAT`, vrne število, ki pove, katera ponovitev zanke se trenutno izvaja.

Martin Juvan

RAZLIKA MED SINODSKIM IN SIDERSKIM MESECEM

Za merjenje časa lahko uporabimo katerikoli enakomerno ponavljajoči se pojav v naravi. Taka sta na primer kroženje Zemlje okrog Sonca in Lune okrog Zemlje. Obhodnemu času Zemlje okrog Sonca rečemo leto, obhodnemu času Lune okrog Zemlje pa mesec. Sprva so mislili, da obstaja preprosta zveza med trajanjem leta in meseca, saj se enake Lunine mene pojavljajo približno vsakih 30 dni, dvanajst takih obdobij pa naj bi pomenilo leto. Kasneje so z meritvami ugotovili, da se enake zaporedne mene Lune ponavljajo vsakih $29\frac{1}{2}$ dneva in da leto traja $365\frac{1}{4}$ dneva. Torej leta ni mogoče razdeliti na enako dolge mesece s celim številom dni. Ta neizmerljivost med trajanjem leta in trajanjem meseca povzroča velike težave pri sestavljanju koledarja, ki ga zato ni mogoče urediti enkrat za vselej.

Čas $29\frac{1}{2}$ dneva med dvema enakima zaporednima Luninima menama (npr.: od polne lune do prve naslednje) imenujemo *sinodski mesec*. Temu času še najbolj ustrezajo meseci našega koledarja.

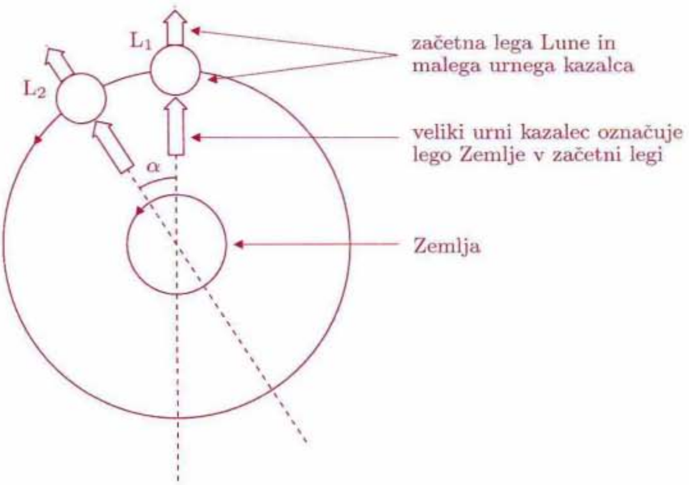
Luna sveti z odbito sončno svetlobo. Pri svojem gibanju okrog Zemlje pride glede na Sonce v različne lege. Za opazovalca na Zemlji se zato spreminja od Sonca osvetljeni del Luninega površja. Ta naravni pojav poznamo pod imenom Lunine mene. Tir Luninega gibanja je razmeroma zapleten. Za naš namen zadostuje, da gibanje Lune obravnavamo kot sestavljeno gibanje iz vrtenja okrog njene vrtilne osi, gibanja okrog Zemlje in gibanja skupaj z Zemljo okrog Sonca.

Že s preprostim opazovanjem lahko ugotovimo, da se Luna vsak dan navidezno giblje od vzhoda proti zahodu (zaradi vrtenja Zemlje), hkrati pa se pomika še glede na zvezde, in to od zahoda proti vzhodu (zaradi kroženja okrog Zemlje). O slednjem se lahko prepričamo takole: Zvečer si ob določenem času zapomnimo lego Lune glede na kak predmet na obzorju (npr. vaški zvonik, tovarniški dimnik). Ko jo z istega opazovališča in ob enakem času spet opazujemo naslednji večer, ugotovimo, da je še ni ob izbranem objektu. Skoraj uro (včasih več, včasih manj) moramo počakati, da se spet pojavi tam kot prejšnji dan. To dokazuje, da Luna kroži okrog Zemlje od zahoda proti vzhodu (torej v isti smeri, kot se Zemlja vrti okrog svoje osi in kroži okrog Sonca). Ta obhodni čas traja približno 27,32 dni; enak je času med dvema zaporednima prehodoma Lune glede na isto točko, ki leži na zveznici med našim opazovališčem in kako določeno zvezdo. Ta čas zato imenujemo *zvezdni* ali *siderski* mesec. Siderski mesec je torej krajši od sinodskega. Naš namen je, da z določenimi poenostavitvami in preprostimi računi pojasnimo razliko med obema mesecema.

Da Luna kroži okrog Zemlje in Zemlja okrog Sonca, vemo. Kadar rečemo, da kroži, si predstavljamo, da je tir gibanja krožnica. Navadno mislimo na enakomerno kroženje. Opazovanja pa kažejo, da se Luna in Zemlja gibljeta po različno sploščenih elipsah in neenakomerno. Ravnini Zemljinega in Luninega tira tudi ne sovpadata (oklepata kot približno 5°). Tako zapletena gibanja matematično težko natančno opišemo. Ob določenih predpostavkah in poenostavitvah pa lahko tudi s preprostim računom dobimo rezultate, ki so včasih zelo blizu natančne vrednosti.

Vzemimo najpreprostejši primer. Tira gibanja Lune in Zemlje naj bosta krožnici in obe telesi naj se enakomerno gibljeta v isti ravnini. Po krožnem tiru naj se giblje tudi naše opazovališče zaradi vrtenja Zemlje okrog njene osi. (*Opomba*: Ker oklepa zemeljska os z navpičnico na ravnino ekliptike kot 23,5°, se največji višinski kot Lune na zemljepisni širini 45° spreminja v mejah med 16,5° in 73,5°. Če opazujemo gibanje Lune krajši čas, npr. v časovnem presledku enega dne, ko se Luna navidezno pomakne proti vzhodu za 13°, se njen največji višinski kot le malo spremeni. Na tem odseku gibanja je tir Lune približno vzporeden s tirom našega opazovališča.)

S temi privzetki lahko primerjamo gibanje Lune in našega opazovališča s premikanjem malega in velikega urnega kazalca v obratni smeri kot pri uri. Veliki kazalec naj ponazarja vrtenje Zemlje, mali pa kroženje Lune. Premikanje urnih kazalcev med dvema zaporednima prekrivanjima prikazuje slika 1.



Slika 1. Model, ki prikazuje medsebojno gibanje Zemlje in Lune; mali urni kazalec ponazarja kroženje Lune, veliki pa kroženje Zemlje.

Čas med dvema zaporednima legama Lune nad izbrano točko na Zemlji določimo podobno kot čas, v katerem se prvič po dvanajsti uri prekrijeta veliki in mali urni kazalec. Poti Lune in točke na Zemlji, iz katere opazujemo, sta krožna loka. Zaradi preprostega računanja uvedemo loku pripadajoči središčni kot. Vrtenje Zemlje okrog vrtilne osi je enakomerno, po naši predpostavki je tako tudi kroženje Lune. Zato so loki, ki jih opišeta telesi ali urna kazalca pri gibanju, oziroma lokom pripadajoči koti, sorazmerni s časom. Če označimo s t čas, ko se Luna ponovno pojavi nad našim zvonikom, in z α kot, ki pripada loku, ki ga opiše Luna v tem času, je razmerje med kotom α in polnim kotom enako razmerju pripadajočih časov $\frac{\alpha}{360°} = \frac{t}{27{,}32t_0}$. Upoštevali smo, da pri enkratnem obhodu Luna opiše lok s pripadajočim kotom 360° v 27,32 dneh, oziroma $27{,}32t_0$, če pomeni t_0 en dan.

Podobno sorazmerje lahko zapišemo tudi za opazovališče na Zemlji. Opazovališče oziroma zvonik opiše v času t_0 lok s pripadajočim kotom 360°; v času t, ko se pojavi Luna nad zvonikom, pa lok, ki mu pripada središčni kot $360° + \alpha$; torej je $\frac{360°+\alpha}{360°} = \frac{t}{t_0}$.

Količnik $\frac{t}{t_0}$ označimo z x in za $\frac{\alpha}{360°}$ upoštevamo desno stran prvega sorazmerja. Tako dobimo enačbo $1 + \frac{x}{27{,}3} = x$, katere rešitev je $x = 1{,}038$. Časovna razlika med t in t_0 je 54,7 minut. Po našem modelu torej kasni Luna dnevno približno 55 minut. V dneh okoli ščipa lahko Luna vzide od 15 do 90 minut kasneje kot prejšnji večer (glej članek *Gibanje Lune*, Presek **15**, 207). Zato ne smemo biti razočarani, če se opazovanja vedno ne ujemajo z računom.

Povrnimo se k opazovanju Lune. S sklepanjem smo pojasnili dnevno pomikanje Lune proti vzhodu. Upoštevali smo samo sistem Zemlja – Luna in gibanje Lune obravnavali tako, kot da Zemlja miruje. Z gibanjem Lune so povezane tudi njene mene. Štiri glavne Lunine mene (mlaj, prvi krajec, ščip ali polna luna in zadnji krajec) si sledijo v časovnem presledku okoli 7 dni in 9 ur. Vse pa se zvrste v enem sinodskem mesecu.

Slika 2 na naslednji strani prikazuje tri medsebojne lege Zemlje, Lune in Sonca. V legi 1 je polna luna; središča Sonca, Zemlje in Lune ležijo na isti premici. V času, ko Luna obkroži Zemljo, se Zemlja premakne v lego 2. Luna pride v enako lego glede na oddaljeno zvezdo, vendar še ni polna luna, ker središča vseh treh vesoljskih teles ne ležijo na isti premici. Za nastop polne lune do lege 3 se morata Zemlja in Luna še dodatno premakniti.

V sinodskem času t_s med obema polnima lunama je Zemlja opisala lok s pripadajočim kotom α, Luna pa lok, ki mu ustreza kot $360° + \alpha$. Po sliki 2 lahko zapišemo ustrezno sorazmerje za Zemljo in Luno.

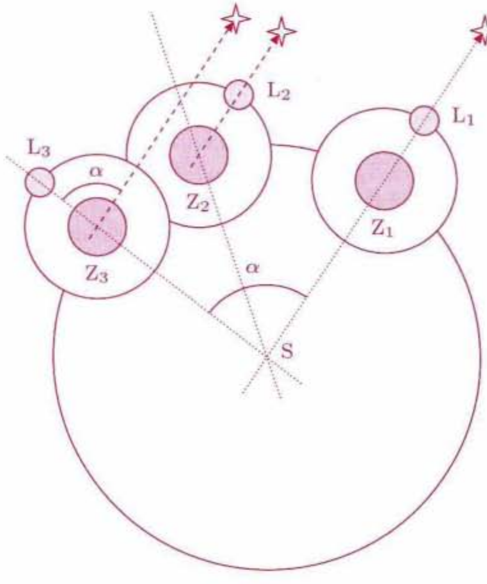
Za Luno velja

$$\frac{360^\circ + \alpha}{360^\circ} = \frac{t_s}{27{,}32 t_0}\,,$$

za Zemljo pa

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{t_s}{365{,}25 t_0}\,.$$

Iz obeh enačb izračunamo $t_s = 29{,}5$ dni.



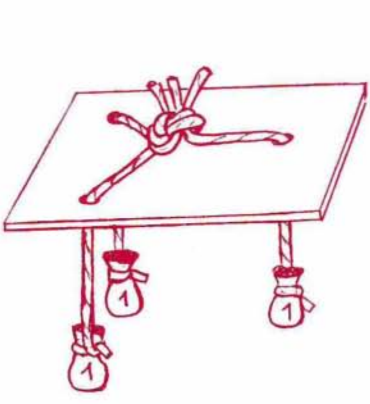
Slika 2.

Sinodski oziroma siderski mesec predstavljata vsak zase časovno enoto, povezano s ponavljajočim se gibanjem Lune. S podobnimi ponavljajočimi se gibanji Lune, vendar z drugačnimi izhodišči merjenja časa, lahko definiramo še druge mesece, npr. zmajskega, tropskega. Vendar je matematično še najlažje pojasniti zvezo med sinodskim in siderskim mesecem.

Karel Šmigoc

KJE OBMIRUJE VOZEL?

V trdnó podprto vodoravno desko (ploščo mize) izvrtamo tri luknjice in v vsako vdenemo po eno vrvico. Na spodnje konce vrvic obesimo enako težke uteži, zgornje konce pa zvežemo v skupen vozel. Kje je ravnovesni položaj vozla, če je deska dovolj visoko, da uteži prosto visijo?



Marija Vencelj

SONČEVE MELODIJE

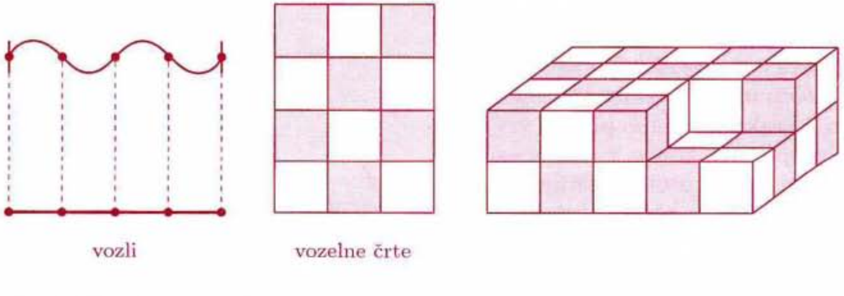
Če bi nam na ulici kdo dejal, da ravnokar posluša, kako poje Sonce, bi ga razglasili za posebneža. Vseeno bi morali biti pri tej izjavi previdnejši.

V primeru, da med Zemljo in Soncem ne bi bilo praznega prostora in da bi zaznali dovolj nizke tone, bi Soncu lahko prisluhnili. Tipični ton na Soncu je približno 12.5 oktav nižji od zvoka s frekvenco 20 Hz, ki ga človek ravno še zazna. V črtastem spektru zvoka ima največjo moč akustično valovanje z nihajnim časom okoli 5 minut (frekvenca 0.003 Hz).

Izvir zvoka s črtastim spektrom je telo, ki niha le z določenimi lastnimi frekvencami. Poznamo mnogo primerov iz glasbe: strune, opne in piščali. Nihanje zraka v piščali vzbujamo s pihanjem. Piščal ima v ta namen ob strani luknjico. Ko pihamo mimo luknjice, nastanejo vrtinci, ki vzbudijo nihanje zraka. Amplituda zvočnih valov je ponavadi majhna v primerjavi z valovno dolžino. Za tlak tako v kartezičnih koordinatah zapišemo

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \delta p(x, y, z, t)\,,$$

kjer je p_0 ravnovesna vrednost tlaka in δp majhen odmik okoli p_0. Zaradi odbojev na stenah piščali se v notranjosti pojavijo stoječi zvočni valovi. Če so stene razporejene v obliki kvadra, se stoječe valovanje vzpostavi, ko so razdalje med stenami v smereh x, y in z večkratniki polovične valovne dolžine tona, ki ga daje piščal. Posamezen nihajni način torej opišemo s tremi števili n_x, n_y in n_z. Pri struni zadostuje le število n_x, če koordinatni sistem izberemo tako, da struna leži v smeri osi x. Število n_x šteje vozle na struni. Pri opni se vozli združijo v vozelne črte. Slika 1 kaže stoječe valove na struni, pravokotni opni in v posodi z obliko kvadra.



Slika 1. Nihanje strune ($n_x = 5$), pravokotne opne ($n_x = 4$, $n_y = 5$) in plina v posodi z obliko kvadra ($n_x = 6$, $n_y = 5$, $n_z = 3$). Razlika v predznaku odmika od ravnovesne vrednosti je ponazorjena s svetlimi in temnimi predeli. Pri piščali velja za temne predele $\delta p > 0$ in za svetle predele $\delta p < 0$.

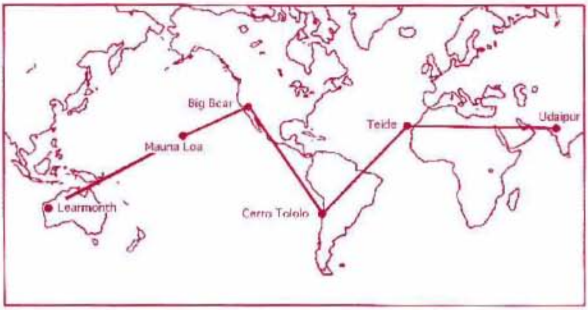
Sonce si lahko predstavljamo kot mehko posodo polno tekočine. Pri piščali povzročijo nihanje zračni vrtinci, izvor nihanja v Soncu pa so vrtinci plina v konvekcijski plasti. Zvočni valovi se širijo po notranjosti Sonca. Ob površini se odbojna meja za valove pojavi zaradi velikega zmanjšanja gostote tekočine, v notranjosti pa zaradi povečanja zvočne hitrosti, tako da se val lomi nazaj proti površini. Pri standardnem fizikalnem modelu obravnavamo Sonce kot sferno simetrično, kar pomeni, da je ravnovesni tlak p_0 odvisen le od radialne koordinate. Velja torej:

$$p(r,\theta,\phi,t) = p_0(r) + \delta p(r,\theta,\phi,t)\,.$$

Podobno kot pri piščali je v Soncu ujeto stoječe akustično valovanje (slika 2a na II. strani ovitka). Ker gre za tridimenzionalni primer, potrebujemo za opis nihajnega načina tri števila n_r, n_θ in n_ϕ. Bolj ustaljene oznake so po vrsti n za število radialnih vozlov (vozelnih krogel), l za število vzporedniških vozlov in m za število poldnevniških vozlov. Ker površina Sonca ni trdna, se premika zaradi valovanja v notranjosti. To spominja na potrese, zato opazovanje premikov Sončeve površine imenujemo helioseizmologija.

Periodično gibanje površine opazujemo na različne načine. V sedemdesetih letih so astronomi odkrili, da rob Sonca niha, ko so merili njegovo lego. Kasneje so te meritve potrdili tudi z merjenji Dopplerjevih premikov spektralnih črt. Premiki nastanejo zato, ker se plin v fotosferi med oddajanjem svetlobe giblje. Gibanje je superpozicija okoli 10^7 lastnih nihanj (slika 2c na II. strani ovitka). Širina spektralne črte Ni I pri 676.8 nm je okoli 10 pm, hitrostna razlika zaradi nihanja tekočine v fotosferi, ki znaša okoli 0.1 m/s, pa premakne črto za 0.0002 pm. Premik je izredno majhen. Zato je potrebno uporabiti poseben merilni instrument, ki deluje kot interferometer.

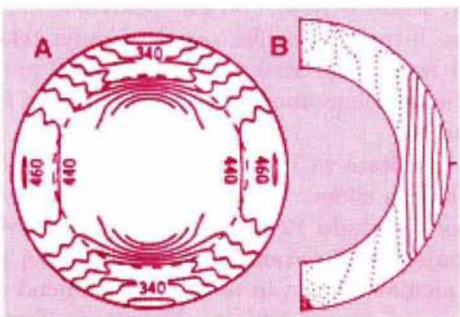
Natančne rezultate za lastne frekvence nihanja dobimo z meritvami preko večih nihajnih ciklov. To še posebej velja pri valovanju z nizko frekvenco. Valove s periodo 12 minut moramo opazovati 20 ur, če želimo slediti 100 nihajem. Za natančne meritve je torej potrebno premostiti težave zaradi menjave dneva in noči. Neprekinjeno opazovanje Sonca je postalo možno pred dvema letoma. Najprej je oktobra 1995 začela delovati mreža observatorijev imenovana GONG (The **G**lobal **O**scillation **N**etwork **G**roup). Šest enakih opazovalnic je razporejenih okoli Zemlje (slika 3) tako, da je Sonce ob primernem vremenu vidno 24 ur na dan. Novejši je opazovalni projekt SOHO (The **SO**lar **H**eliospheric **O**bservatory). Observatorij v vesolju kroži od decembra 1995 okoli Lagrangeove točke L_1 med Zemljo in Soncem, od koder je pogled na Sonce nemoten.



Slika 3. Lege observatorijev v sistemu GONG.

Na Soncu lahko pričakujemo dve vrsti valovanj. Kaže, da so prisotni zvočni in težni valovi. Večina opazovanih nihajnih načinov zvočnih valov ima periode med 3 in 12 minutami. Prisotnost težnih valov (periode 1 ure in več) je eksperimentalno teže potrditi. Širijo se po plasteh globoko v notranjosti Sonca in po površini.

Pred pojavom helioseizmologije in pred začetkom meritev toka nevtrinov so o stanju notranjosti Sonca sklepali le s teoretičnim modeliranjem. Helioseizmološke meritve predstavljajo veliko pridobitev, saj je njihova natančnost presenetljiva. Tako sedaj poznamo zvočno hitrost (in s tem temperaturo) od površine do središča na 0.1 %, tlak in gostoto pa na 1 % natančno. Vse te količine lahko merimo zato, ker so lastne frekvence odvisne od njih.



Slika 4. Globinski hitrostni profil vrtenja skozi navpični prerez Sonca. Frekvenčna skala na sliki je v nHz. Pri ekvatorju je frekvenca $4.6 \cdot 10^{-7}$ Hz in pri polu $3.4 \cdot 10^{-7}$ Hz.

Lastne frekvence so odvisne tudi od hitrosti vrtenja Sonca na določenem mestu. To dejstvo je zanimivo zato, ker se Sonce ne vrti kot togo telo. Kotne hitrosti različnih delov Sonca niso enake, čemur pravimo diferencialno vrtenje. Nenavadno vrtenje so pri Soncu odkrili že leta 1630 z opazovanjem obhodnega časa Sončevih peg. Obhodni čas je na površini pri ekvatorju krajši (25 dni) in pri polu daljši (36 dni). S helioseizmologijo so sedaj precej natančno določili celoten globinski hitrostni profil (slika 4). Vrtenje povzroči, da se osnovna frekvenca nihajnega načina razcepi na družino tesno zloženih frekvenc. Valovom, ki potujejo v nasprotni smeri vrtenja, se namreč frekvenca navidez zmanjša, tistim valovom, ki potujejo v smeri vrtenja, pa se frekvenca poveča.

Pri opazovanju vrtenja se je pojavil zanimiv problem, saj se jedro Sonca vrti počasneje, kot so napovedovali znanstveniki z različnimi modeli. To spoznanje odpira nova vprašanja o tem, kako zvezde izgubljajo vrtilno količino.

— — —

Na koncu lahko predstavimo še nekaj poskusov, za katere ne potrebujete zapletenih naprav in jih lahko naredite doma. Poskusi so v pomoč pri razumevanju lastnosti zvoka v odvisnosti od oblike, sestave in velikosti fizikalnega objekta, v katerem je zvok ujet.

Poskus 1.
Vzemite veliko steklenico (naša piščal). Pihajte mimo ustja steklenice in opazujte, kako se spreminja zvok, če je v steklenici več ali manj vode. (Odg.: Višji toni, ko je več vode.)

Poskus 2.
Vzemite steklenice različnih oblik in velikosti. V čem se razlikuje zvok? (Odg.: Nižji toni pri večjih steklenicah.)

Poskus 3.
Na vrvico obesite triangel ali kakšen drug zveneč predmet. Poslušajte razliko med zvokom mirujočega zvočila in zvokom, če se zvočilo hitro vrti. (Odg.: Mirujoče zvočilo oddaja isti ton, vrtečemu se ton zavijajoče spreminja, tako kot zvok sirene na intervencijskih vozilih.)

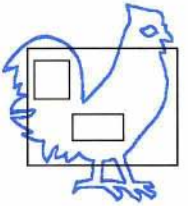
Zoran Arsov

DVA SATELITA

Okoli Zemlje krožita v skupni ravnini satelita na različnih višinah od površja Zemlje. S prvega satelita je pri enem obhodu vidnega 12–krat toliko Zemljinega površja kot v posameznem trenutku. Z drugega satelita vidimo naenkrat šestino tistega dela Zemljinega površja, ki je vidno ob enem obhodu. Kolikšna je največja in kolikšna je najmanjša razdalja med satelitoma? (Polmer Zemlje je 6730 km.)

Majda Lavrič

MALA ŠOLA TOPOLOGIJE – 5. del



Bralcem Male šole topologije dolgujemo odgovora na dve zanimivi vprašanji, zastavljeni v prejšnjih dveh številkah Preseka.

V tretji številki smo vam zastavili nalogo, da odkrijete zakonitost, ki velja za število izhodišč I, število lokov L in število parcel P poljubne ravninske risbe. Tisti, ki ste opazili, da za vsako risbo velja enakost

$$I - L + P = 2,$$

imate prav. Z uporabo te enakosti lahko uženemo marsikatero zanimivo nalogo. Za vajo poskusite z njo rešiti 2. nalogo, ki jo je v prejšnji številki v pogovoru za Presek zastavil prof. Repovš (drugačno rešitev te naloge najdete v tej številki Preseka na str. 300).

V četrti številki smo vas s problemom königsberških mostov povabili k razmišljanju, kdaj neke povezane krivulje ne bo moč narisati z eno samo potezo. Premislimo skupaj! Z izjemo začetne točke, v kateri potezo s svinčnikom začnemo, in končne točke, v kateri potezo zaključimo, morajo biti vsa izhodišča na risbi sode stopnje. Res: V tako točko pri risanju po nekem loku pridemo in po drugem (še neuporabljenem) odidemo. To pa je možno le, če izhaja iz izhodišča sodo mnogo poti. V primeru, da risanje začnemo in končamo v isti točki, mora biti tudi ta točka izhodišče sode stopnje.

To pomeni, da krivulje zanesljivo ne bo moč narisati z eno samo potezo, če bo imela več kakor dve izhodišči lihe stopnje. Očitno tudi ne more imeti enega samega izhodišča lihe stopnje. Če začetna in končna točka risanja ne sovpadata, morata biti obe točki izhodišči lihe stopnje. Natančneje velja:

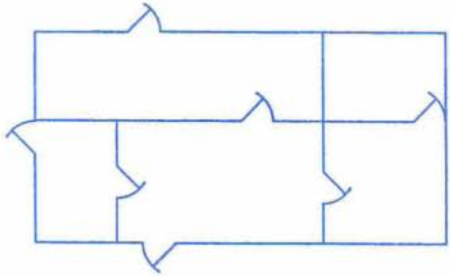
Risbo lahko narišemo z eno samo potezo v naslednjih dveh primerih:

1. **krivulja ima dve izhodišči lihe stopnje;**
2. **krivulja nima izhodišč lihe stopnje.**

V vsakem primeru ima lahko krivulja poljubno število izhodišč sode stopnje.

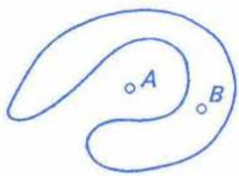
Ker ima krivulja, s katero je Euler nadomestil zemljevid königsberških mostov, štiri izhodišča lihe stopnje, je ne moremo narisati z eno potezo. **Königsberški sprehod torej ni možen.**

Zaključimo z nalogo. Slika prikazuje tloris počitniške hišice. Ali lahko izberemo obhod po hišici tako, da gremo skozi vsaka vrata natanko enkrat? Je za rešitev pomembno, kje svoj obhod začnemo?



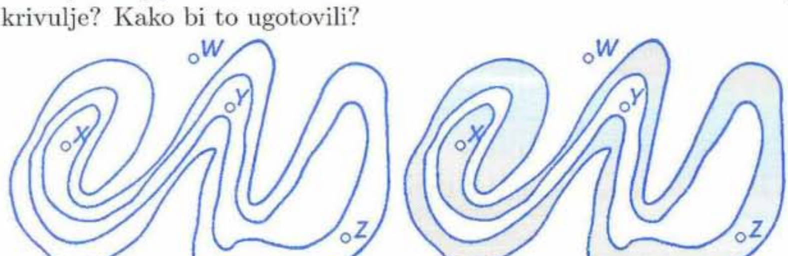
Znotraj in zunaj

1. Na desni sliki je narisana enostavno sklenjena krivulja (tako smo rekli krivulji, ki je topološko enakovredna krožnici). Vrisani sta tudi dve točki A in B. Pravimo, da leži točka A zunaj narisane krivulje in B znotraj te krivulje. Očitno v ravnini risbe ne moremo priti iz točke A v točko B, ne da bi krivuljo prečkali.



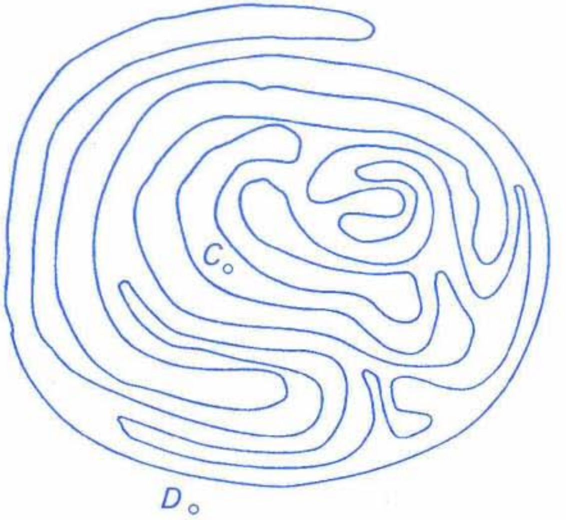
   Podobna trditev velja za vsako enostavno sklenjeno krivuljo. Iz točke zunaj krivulje lahko pridemo v točko znotraj krivulje (ali obratno) le, če krivuljo prečkamo.

2. Tudi na spodnji levi sliki je narisana enostavno sklenjena krivulja in štiri točke X, Y, Z in W. Ni težko opaziti, da leži točka W zunaj krivulje. Kaj pa ostale tri? Ali leži tudi katera od teh treh točk zunaj krivulje? Kako bi to ugotovili?



   Gotovo je ena od poti, da najdemo odgovor na to vprašanje, da notranjost krivulje obarvamo, kot smo to storili na desni od zgornjih slik. Z obarvane slike zlahka razberemo, da ležita X in Z znotraj, Y pa zunaj krivulje.

3. Pred nami je nova risba enostavno sklenjene krivulje. Narišite jih še nekaj in poskusite najti kakšno preprosto pravilo, s katerim bi hitro ugotovili, ali neka točka leži zunaj ali znotraj krivulje.



Ni težko premisliti pravilnost naslednje trditve:

Daljica, ki ima eno krajišče v točki zunaj enostavno sklenjene krivulje in drugo krajišče v točki znotraj te krivulje, seka krivuljo v liho mnogo točkah.

Na zadnji sliki leži točka D očitno zunaj krivulje. Če jo povežemo s točko C, se izkaže, da seka daljica CD krivuljo v desetih točkah. Ker je deset sodo število, sledi, da tudi C leži zunaj krivulje.

Marija Vencelj

ENAKOSTRANIČNI TRIKOTNIK NA RDEČE–MODRI RAVNINI[1]

Lansko leto je profesor pri matematiki mimogrede omenil naslednjo nalogo: Ali obstaja na ravnini, na kateri je vsaka točka ali rdeča ali modra, enakostranični trikotnik z oglišči enake barve?

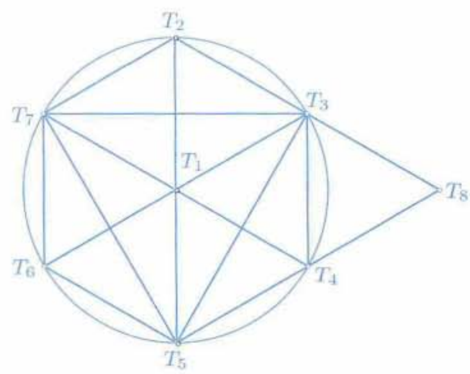
---

[1] Objavljamo nekoliko skrajšano pismo dijaka Srednje šole za elektrotehniko in računalništvo v Ljubljani.

Nekajkrat sem po malem razmišljal o tem. Letos pa sem prvi dan šolskega dežurstva ob opazovanju šestkotnega lestenca v šolski avli slučajno našel pritrdilni odgovor. Kako?

Mislimo si, da takega trikotnika ni. Izberimo na opisani ravnini dve rdeči točki, kar se vedno da. Če bi to ne bilo mogoče, bi bila na ravnini največ ena rdeča točka, vse ostale pa modre. Torej bi bil iskani trikotnik vsak modri trikotnik, ki ne bi imel tiste edine (če ta sploh je na ravnini) rdeče točke za oglišče. To pa naši predpostavki nasprotuje, zato je dve rdeči točki vedno možno najti.

Zdaj pa narišimo krožnico, ki ima središče v eni od teh rdečih točk T_1, in poteka skozi drugo rdečo točko T_2. Od tu naprej razmislek spremljajmo na sliki 1. Krožnici včrtamo pravilni šetkotnik, ki ima za eno oglišče točko T_2. Ker na ravnini (po predpostavki) ni enakostraničnega trikotnika z oglišči enake barve, mora biti točka T_3 modra, drugače bi bil trikotnik $\triangle T_1T_2T_3$ že tak. Prav tak razmislek velja za trikotnik $\triangle T_1T_2T_7$, zato je tudi točka T_7 modra. Iz trikotnika $\triangle T_3T_5T_7$ sledi, da je točka T_5 rdeča. Omenjeni trikotnik je namreč tudi enakostranični, in ker sta oglišči T_3 in T_7 že obe modri, mora biti T_5 drugačne barve. Ne smemo namreč dopustiti, da bi dobili enakostranični trikotnik z enakobarvnimi oglišči, saj predpostavljamo, da takega na tej ravnini ni.



Slika 1.

Podobno ugotovimo, da sta točki T_4 in T_6 modri, kar sledi iz trikotnikov $\triangle T_1T_4T_5$ oziroma $\triangle T_1T_5T_6$. Zdaj ima že vsako oglišče in središče šestkotnika svojo barvo. V igro pritegnemo še točko T_8, ki je izbrana tako, da je trikotnik $\triangle T_3T_4T_8$ enakostranični. Brez težav ugotovimo, da je tak tudi trikotnik $\triangle T_2T_5T_8$. Glede barve točke T_8 pa je takole. Če je rdeča, smo prepovedani trikotnik (s samimi rdečimi oglišči) dobili v podobi $\triangle T_2T_5T_8$. Če pa je modra, se zlodej pojavi kot $\triangle T_3T_4T_8$, ki ima v tem primeru vsa oglišča modra. Zdaj pa ne moremo ničesar več.

Točki T_8 ne moremo določiti barve tako, da ne bi dobili enakostraničnega trikotnika s samimi enako obarvanimi oglišči. Torej tak trikotnik na rdeče–modri ravnini v vsakem primeru obstaja.

Ves vesel, da sem nalogo rešil, pa sem letos izvedel, da ima naloga nadaljevanje: Ali je možno na ravnini najti tak enakostranični trikotnik, ki ima *vse točke na vseh stranicah* enake barve. O tem pa morda kdo drug.

Martin Zadnik

PRAŠTEVILSKA DEŽELA

V Praštevilski deželi uporabljajo praštevilski številski sistem. V tem sistemu je vsako pozitivno celo število predstavljeno takole: Naj bo $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ naraščajoče zaporedje vseh praštevil. Vemo, da lahko vsako celo število $x > 1$ enolično predstavimo kot produkt potenc praštevil. To pomeni, da obstaja celo število k in enolično določena števila $e_k, e_{k-1}, \ldots, e_1$ $(e_k > 0)$, tako da velja $x = p_k^{e_k} \cdot p_{k-1}^{e_{k-1}} \cdot \ldots \cdot p_1^{e_1}$. Zaporedju $(e_k, e_{k-1}, \ldots, e_1)$ pravimo predstavitev števila x v praštevilskem sistemu.

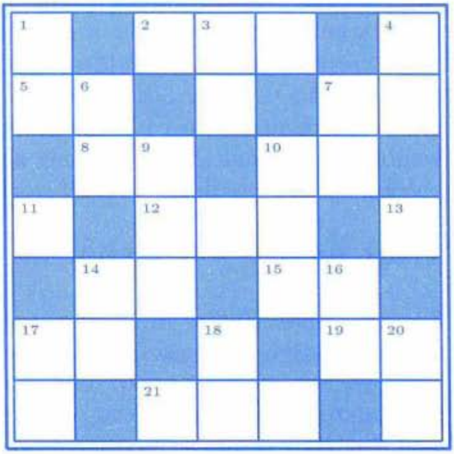
Res je, da je računanje v tem številskem sistemu za nas nenavadno ali celo težko. Prav tako je res, da se otroci v Praštevilski deželi učijo seštevati in odštevati več let. Po drugi strani pa sta množenje in deljenje zelo enostavni operaciji.

Pred kratkim je pomemben velmož iz Praštevilske dežele obiskal Računalniško deželo. Tam uporabljajo male pametne stvarce, ki jim pravijo računalniki. Ugotovil je, da bi računalnike lahko uporabili tudi zato, da bi bilo odštevanje in seštevanje v praštevilskem sistemu veliko lažje. Odločil se je, da naredi poskus in prepusti računalniku izvajanje operacije "minus ena". A programiranje mu nekako ne gre od rok. Pomagaj mu in napiši ustrezni program za to operacijo. Predpostaviš lahko, da je vhodni podatek praštevilska predstavitev pozitivnega celega števila, večjega od 2 in manjšega ali enakega 32767. Pri tem zaradi enostavnosti število predstavimo tako, da spustimo ničelne eksponente e_j in namesto tega raje zapišemo ustrezno število kot zaporedje praštevil in njihovih potenc. Pri tem so praštevila urejena po velikosti. Tako je število 17 predstavljeno z zaporedjem 17 1, število 60 s 5 1 3 1 2 2, število 10 pa s 5 1 2 1. Pravilni rezultat za prve podatke je seveda 2 4, za druge 59 1 in za tretje 3 2.

Matija Lokar

LAHKA ŠTEVILSKA KRIŽANKA

Vodoravno:



2. $7.3 : 0.01$.
5. Vsota prvih sedmih praštevil.
7. Vsota prafaktorjev števila 572.
8. $(-4)^2 + (-5)^1$.
10. Obseg pravilnega šestkotnika, včrtanega krožnici s polmerom 3.
11. Število simetrijskih ravnin pravilne šeststrane prizme.
12. Vrednost funkcije $f(a) = a(a+1)$ za $a = 12$.
13. $\frac{11}{12} \times \frac{12}{11}$.
14. 3^3.
15. Aritmetična sredina števil 83, 87, 106, 91, 118, 110, 99, 98.
17. $24 : \frac{3}{8}$.
19. Število kotnih stopinj v šestini pravega kota.
21. $150\,\%$ od 150.

Navpično:

1. Koliko kvadratov s stranico 2 cm potrebujemo, da bi natanko prekrili kvadrat s stranico 10 cm?
3. Vsota števil v šesti vrstici Pascalovega trikotnika.
4. Najmanjše število, ki je hkrati trikotniško in kvadratno število.
6. Deveto kvadratno število.
7. Dvomestni približek vrednosti izraza $2751 : 100$.
9. Zapiši število $163_{(10)}$ v številskem sistemu z osnovo 12.
10. Zapiši vrednost izraza $11_{(12)} \times 11_{(12)}$ v desetiškem sistemu.
11. Praštevilo.
14. Ploščina (v cm^2) trikotnika s stranicami 6 cm, 8 cm in 10 cm.
16. Večkratnik števila 7.
17. Vrednost izraza $a^2 + bc$ za $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.
18. Celi del produkta 2.8×4.3.
20. Koliko metrov je 0.05 km?

Marija Vencelj

DOMAČA NALOGA

Bliža se konec šolskega leta. V šoli vrvež. Vsi se nehote in nevede ukvarjajo s kombinatoriko ali celo z verjetnostnim računom. "Če pišem 4, me bo še vprašala, potem pa zaključila 3." Tudi na kranjski gimnaziji ni nič drugače. Čez nekaj ur pišemo zadnjo šolsko nalogo iz kombinatorike. Da bi bilo dijakom laže pri pisanju šolske naloge, so doma sestavili po dve kombinatorični nalogi, kot predlog za šolsko nalogo. Tony Štupar pa je poleg obveznih predlogov priložil še tole zanimivo nalogo.

Trust no one – Nikomur ne zaupaj!

Zvezna agenta Mulder in Scully sta se tiho plazila proti opuščenemu rudniškemu jašku. Pripravljalo se je k nevihti in mrzlo je bilo. Vstopila sta skozi črno zevajoč vhod. Od začudenja sta obstala. Doktor jima je povedal, da bo zadeva težavna, vendar pa tega nista pričakovala. V ravni, navpični vrsti se je rdečkasto svetilo 7 elektronskih ključavnic, ki so na temno sivih vratih, zažrtih v živo skalo, delovale kar nekako okrasno. Kot lučke na božičnem drevesu. "Ko je ena izmed ključavnic odprta, se rdeča barva tipkovnice spremeni v zeleno," so jima odzvanjale zadnje doktorjeve besede. Vse ključavnice so se morale odpreti, kajti ta rudnik je bil last "mogočne sedmerice", kjer drug drugemu niso zaupali. Tipkovnice so bile alfanumerične; številke od 0 do 9, črke od A do E. Mulder in Scully sta vedela, da zaporedje ne vsebuje več kot 7 znakov in ne manj kot pet, da se znaki lahko poljubno ponavljajo in da je med njimi 5, 6 ali 7 številk. Seveda pa je kombinacija vsake ključavnice različna od ostalih šestih.

Sprašujemo:

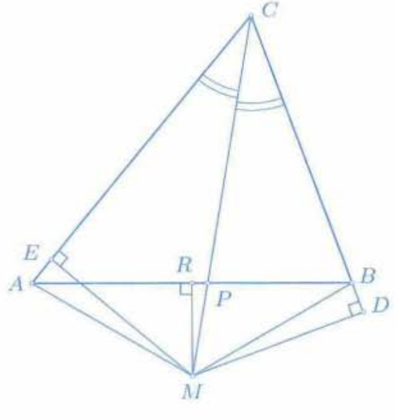
a) Koliko kombinacij je možnih?
b) Koliko časa bi jih Mulder in Scully vtipkovala, če tipka Scully eno kombinacijo zaradi dolgih nohtov 5 sekund, Mulder pa 4 sekunde in če imata agenta to smolo, da deluje vedno šele zadnja kombinacija, ki jo vtipkata, pa naj bo to pet, šest ali sedemmestna koda?
c) Ali bi brez ustavitve časa igralca David Duchovny in Gillian Anderson prekršila oziroma presegla določila pogodbe, ki določa, da bodo serijo snemali 7 let?
d) Koliko časa bi naša agenta potrebovala za vhod v podzemne arhive, če bi slučajno odkrila, da je ena izmed kod Napierova konstanta $C = 27828$?

e) Koliko časa bi potrebovala, če bi se Fox spomnil, da ima v avtu IBM–ov računalnik DeeperBlue, ki zmore 2 000 000 operacij na sekundo? (To je šahovski računalnik, torej nekakšna umetna inteligenca.) Kako hitro bi DeeperBlue odklenil vse ključavnice, če mu je omogočeno učenje in bi se po vsaki odklenjeni ključavnici njegova procesna moč eksponentno povečala?

Mojca Lokar

VSAK TRIKOTNIK JE ENAKOKRAK – Rešitev s str. 215

Napaka je v predpostavki, da se simetrala stranice in simetrala nasprotnega kota sekata v notranjosti trikotnika. Vemo, da seka simetrala notranjega kota pri C trikotnika $\triangle ABC$ nasprotno stranico v točki P tako, da je $AC : BC = AP : PB$. Nobena omejitev splošnosti ni, če privzamemo, da je $AC > BC$ (saj lahko oba podatka zamenjamo). V tem primeru leži točka C na isti strani simetrale stranice c kot točka B. Po drugi strani seka simetrala kota γ stranico AB nekje med R in B, zato je sečišče M obeh simetral vedno zunaj trikotnika, če le trikotnik ni enakokrak. Ustrezna slika je videti takole:



$$AC = AE + EC, \qquad BC = DC - BD$$

Primer ni le zanimiv, je tudi poučen. Opozori nas na dvoje:
- rišimo čimbolj natančno,
- sliki ne smemo slepo zaupati.

Olga Arnuš

ELEKTRIČNI TOK PO KOVINI

Električni tok je domač pojem, nanj naletimo velikokrat tudi zunaj fizike. Kljub temu smo v zadregi, ko si je električni tok treba predstavljati. Ne moremo ga namreč direktno opazovati, če se odpovemo neprijetni ali celo boleči možnosti, da bi ga zaznavali neposredno.

Opazujemo pa lahko učinke toka: vodnik s tokom deluje na drug vodnik s tokom ali na trajen magnet; tok iz raztopine kisline, baze ali soli izloči snovi; toplotno izoliran vodnik s tokom se segreje. Vsakega od učinkov lahko uporabimo za merjenje, a najpripravnejši je magnetni učinek.

Dokler niso poznali teh učinkov, so nekateri raziskovalci električni tok poskušali zaznati neposredno. Henry Cavendish je primerjal med seboj električne tokove po občutku, ki so ga povzročili, ko jih je speljal po roki. Alessandro Volta je z jezikom preskušal učinek svojih baterij in napeljal tok skozi ušesa in skozi oči.

Za zdaj se omejimo na električni tok po kovini, in to po bakrenem vodniku, s katerim imamo največ opraviti. Ime *tok* namiguje, da si predstavljamo nekakšno tekočino. Tudi učbeniki pogosto na začetku primerjajo tok po sklenjenem električnem krogu s tokom vode po sklenjenem krogu cevi. Primerjava močno šepa, kar uvidimo že po tem, da iz vtičnice ne pricurlja niti kaplja elektrike, dokler je ne "zapremo" z vodnikoma in porabnikom. Predstavljajte si, kaj bi se primerilo, če vodovodni cevi ne bi bili zaprti s pipama. Iz zadrege se izvijemo z zamislijo o dveh električnih "snoveh", ki nosita električni naboj različnih znakov. Naboj negativne "snovi" v vsakem majhnem delu vodnika izravna naboj pozitivne "snovi". Pozitivna "snov" sama zase ali negativna "snov" sama zase sploh ne bi mogli obstajati. Zaradi odbojne električne sile med deloma naboja enakega znaka bi nastala močna eksplozija, ki bi dele naelektrene "snovi" pognala, da bi se oddaljevali drug od drugega. Najmanjši deli naboja enega znaka v bakreni kroglici s čelnim presekom 1 mm^2 bi po eksploziji odleteli s tolikšno kinetično energijo, kot da bi jih pospešila napetost več kot 10^{14} voltov. To je približno tisočkrat več, kot zmore največji pospeševalnik. Le zato, ker sta "snovi" obeh znakov "premešani", odbojne sile med deloma naboja enakega znaka ne pridejo do izraza (slika 1 na II. strani ovitka).

Tok po kovini ne povzroča gibanja snovi. Bakreni vodnik se zaradi toka v kemijskem pogledu ne spremeni. Pri poskusih so staknili bakren in aluminijast vodnik in dolgo časa poganjali po njiju tok. Pod mikroskopom se v bakru ni pokazala niti sled aluminija in v aluminiju niti sled bakra. Smiselno je privzeti, da v kovini nastane tok samo zaradi potovanja ene od obeh "snovi". Druga "snov" miruje in ne prispeva k toku, s svojim nabojem izravna učinek nasprotnega naboja gibljive "snovi".

V tem pogledu nekateri primerjajo gibljivo in mirujočo električno "snov" v kovinskem vodniku z vodo in volno v mokri volneni niti, pa tudi z mokro mivko (z njo otroci gradijo gradove, medtem ko to ni mogoče niti s samo vodo niti s samo mivko).

Gibljivo "snov" je mogoče raziskati v kovinskem vodniku, ki se v vzdolžni smeri giblje enakomerno pojemajoče. V njem se gibljiva "snov" premakne proti sprednjemu delu, kot se v zavirajočem avtobusu premaknejo proti vozniku potniki, ki ne stojijo trdno. Vodnik naj se giblje v vzdolžni smeri pojemajoče s pospeškom a v nasprotni smeri gibanja. Na dele gibljive "snovi" deluje zato glede na drugo "snov" sila $F = ma$ v smeri gibanja. Deli gibjive "snovi" se gibljejo skupaj z deli druge "snovi", sicer bi prišlo do eksplozije, o kateri smo govorili. To pojasnimo z električno napetostjo, ki se pojavi zaradi premika gibljive "snovi" in ki povzroči silo nanjo v nasprotni smeri (slika 2 na II. strani ovitka).

Sili uravnovesita druga drugo, tako da velja zveza $\rho_s a = \rho_e U/l$. Pri tem je U napetost med sprednjim in zadnjim krajiščem vodnika z dolžino l, tako da je $E = U/l$ jakost električnega polja, ki deluje na naboj z gostoto $\rho_e = e/V$ gibljive "snovi" z gostoto mase $\rho_s = m_s/V$. V je prostornina vodnika. Merjenj ne izvajajo z vodnikom pri določenem pospešku, ampak izmerijo produkt napetosti U in časa njenega trajanja t, to je sunek napetosti Ut, ko se v času zaviranja t hitrost zmanjša od $v = at$ na 0. Pri tem smo privzeli, da sta pospešek in napetost ves čas konstantna. Iz zveze $\rho_s v = \rho_e Ut/l$ izhaja

$$\frac{e}{m_s} = \frac{\rho_e}{\rho_s} = \frac{vl}{Ut}\,.$$

Navedli smo absolutno vrednost naboja e in gostote naboja ρ_e. Ustrezna masa m_s in njena gostota ρ_s zadevata samo gibljivo električno "snov".

Že Michael Faraday in za njim Heinrich Hertz sta poleg drugih z merjenjem poskušala razkriti vztrajnost delov snovi, ki prenašajo naboj. Njuna prizadevanja niso bila uspešna. Zahtevno merjenje je opravil med letoma 1916 in 1926 ameriški fizik in fizikalni kemik Richard Chace Tolman s sodelavci.

Dolgo valjasto tuljavo je hitro zavrtel okoli njene geometrijske osi in jo zavrl. Sunek napetosti je izmeril z voltmetrom, katerega nihajni čas je bil precej večji od časa, v katerem se je tuljava ustavila. Voltmeter je preko drsnikov priključil na krajišči tuljave. Deli vsakega ovoja so se zaustavljali v tangentni smeri in napetosti, ki so se pojavile na ovojih, so se seštele. Pri tuljavi s skupno dolžino $l = 10$ km se je pri zaustavljanju od hitrosti $v = 50$ m/s pojavil sunek napetosti $3,3\cdot 10^{-6}$ Vs. Zapisana enačba da $e/m_s = \rho_e/\rho_m = 50\ \mathrm{ms}^{-1}\cdot 10^4\ \mathrm{m}/3,3\cdot 10^{-6}\ \mathrm{Vs} = 1,5\cdot 10^{11}\ \mathrm{As/kg}$.

Zaradi neenakomernega segrevanja drsnih priključkov merjenje ni bilo zelo natančno. Navedli smo povprečno vrednost za več poskusov z bakrenimi, srebrnimi in drugimi vodniki. Pri poskusih je tok stekel od zadnjega krajišča k sprednjemu, tako da je bilo zadnje krajišče pozitivno in sprednje negativno. Gibljiva električna "snov" potemtakem nosi negativni naboj, "snov", ki ne potuje, pa pozitivnega. Po tem si smemo pozitivno "snov" v kovini predstavljati kot *pozitivno "trdnino"*, gibljivo "snov" pa kot *negativno "tekočino"*.

Raziskovanje elektrolize je pokazalo, da se skozi raztopino kisline, baze ali soli pretoči *Faradayev naboj* $e_F = 96 \cdot 10^6$ As, ko se na elektrodi izloči kilomol enovalentnega elementa. Tako lahko ugotovimo, da je masa kilomola negativne "tekočine" v bakru

$$M_s = \frac{e_F}{(e/m_s)} = \frac{96 \cdot 10^6}{1{,}5 \cdot 10^{11}} \text{ kg} = 6{,}4 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\,.$$

Kilomol negativne električne "tekočine" ima okoli 1600–krat manjšo maso kot najlažji element vodik in okoli $65 \cdot 1600 = 10^5$–krat manjšo maso kot baker. Kilomolska masa atomskega vodika meri namreč približno 1 kg in kilomolska masa bakra približno 65 kg. Gostota električne "tekočine" je potemtakem 10^5–krat manjša od gostote bakra, saj ima "tekočina" enako prostornino kot baker. Iz tega izhaja, da je gostota negativne "tekočine" enaka $\rho_s = 8{,}9 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}/10^5 = 0{,}09 \text{ kg/m}^3$, ker je gostota bakra $8{,}9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Tako majhna gostota je značilna za plin. Nekatere druge lastnosti "tekočine", na primer zelo majhna stisljivost, pa so bolj značilne za kapljevino, zato ostanimo pri "tekočini". Gostota naboja "tekočine" je $\rho_e = \rho_s e/m_s = 0{,}09 \text{ kg/m}^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ As/kg} = 1{,}4 \cdot 10^{10} \text{ As/m}^3$. Pri tem smo po prejšnjem dogovoru zapisali samo absolutno vrednost. Enako velika je gostota naboja pozitivne "trdnine".

Z gibljivo negativno "tekočino" in pozitivno "trdnino" v kovini pojasnimo *influenco*. Izoliranemu kosu kovine, tako imenovanemu *prevodniku*, približajmo pozitivno naelektreno telo. Naboj tega telesa pritegne negativno "tekočino" na bližnjem delu prevodnika, zato je nekaj zmanjka na oddaljenem delu. Na bližnjem delu prevodnika negativni naboj "tekočine" prevlada nad pozitivnim nabojem "trdnine", na oddaljenem delu pa pozitivni naboj "trdnine" prevlada nad negativnim nabojem "tekočine" (slika 3 na II. strani ovitka). Presežek ali primanjkljaj negativne "tekočine", ki je sicer gibljiva, lahko obmiruje le na površju prevodnika. Samo tam sila, ki veže "tekočino" na prevodnik, uravnovesi silo pozitivnega naboja telesa v bližini. Presežek in primanjkljaj naboja se pojavita samo na površju prevodnika. V notranjosti prevodnika sta naboja "tekočine" in "trdnine" izravnana, kot da naelektrenega telesa ne bi bilo v bližini. Pri influenci je pozitivni naboj prevodnika, to je presežek naboja "trdnine" nad nabojem "tekočine", enak absolutni vrednosti negativnega naboja prevodnika, to je presežku naboja "tekočine" nad nabojem "trdnine". Na to opozorimo s trditvijo, da se pri influenci naboja na prevodnika ločita; s tem mislimo na presežek in primanjkljaj naboja.

Z influenco pojasnimo tudi delovanje kondenzatorja. Mislimo si ploščati kondenzator, ki ga priključimo na napetost U. Na plošči, ki je zvezana s pozitivnim priključkom, se pojavi primanjkljaj negativnega naboja "tekočine", in na plošči, ki je zvezana z negativnim priključkom, enako velik presežek negativnega naboja "tekočine" (slika 4 na II. strani ovitka). Ne da bi se spuščali v podrobnosti, omenimo, da se na ploščah s ploščino po 100 cm^2 v razmiku 1 mm pri napetosti 1000 V nabereta naboja okoli 10^{-8} As in -10^{-8} As. Če vzamemo, da sta plošči debeli po $b = 0,1$ mm, je naboj negativne "tekočine" v vsaki od njiju $\rho_e bS = 1,4 \cdot 10^{10}\ \mathrm{As/m^3} \cdot \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m^2} \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m} = 1,4 \cdot 10^4$ As. Ta naboj je treba primerjati z bilijonkrat manjšim nabojem 10^{-8} As. Oceno smo naredili zato, da bi opozorili, kako majhen je presežek ali primanjkljaj naboja na kovini v primeri z nabojem negativne "tekočine" ali pozitivne "trdnine" v njej.

Leta 1734 je Francoz Charles-Francois de Cisternay du Fay razločil stekleno in smolnato elektriko. Prva se je nabrala na stekleni palčki, ko jo je podrgnil s krpo, in druga na smoleni. Štiri leta pozneje je njegov rojak Jean Theophile Desagulier ločil prevodnike od neprevodnikov, ki so dobili pozneje ime izolatorji. Tedaj so delali poskuse s telesi, ki so jih naelektrili z drgnjenjem. Poskusi z mirujočimi naboji in prvi poskusi s prevajanjem elektrike so sprožili razpravo, ali obstajata dve električni "snovi" – imenovali so ju *fluida* – ali ena. Po prvi možnosti bi izviral pozitivni naboj od pozitivne "snovi" in negativni od negativne "snovi", po drugi pa bi pozitivni naboj povzročal na primer primanjkljaj in negativnega presežek edine "snovi". V razpravo sta se vključila tudi Benjamin Franklin kot zagovornik teorije ene snovi ter Franz Ulrich Theodor Aepinus kot zagovornik teorije dveh snovi.

Naša slika z dvema "snovema", od katerih ena potuje in druga ne, ima poteze ene in druge zamisli. Omenimo še to, da so fluide šteli k snovem z nemerljivo majhno težo, ker niso mogli ugotoviti, da bi se teža telesa zaradi naboja kaj spremenila.

Kvadratni milimeter preseka v bakrenem vodniku prenese tok do 10 A. Predpis, da naj tok ne preseže 10 A na mm^2 preseka ali 10^7 A na m^2 preseka, velja za napeljave, ker bi se pri večjem toku in enakem preseku vodniki preveč greli. Glede na to je mogoče ugotoviti hitrost negativne "tekočine" v bakru. Za naboj, ki se pretoči skozi presek vodnika S, velja $e = \rho_e V = \rho_e Svt$, tako da je tok na enoto preseka $I/S = (e/t)/S = \rho_e v$ in hitrost

$$v = \frac{I}{S\rho_e} = \frac{10^7 \ \mathrm{Am^{-2}}}{1,4 \cdot 10^{10} \ \mathrm{As/m^3}} = 7 \cdot 10^{-4} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \, .$$

Hitrost okoli $\frac{3}{4}$ milimetra na sekundo je majhna, hitrost pri manjšem toku na enoto preseka je še manjša. V vodniku se giblje negativna "tekočina" s to hitrostjo od negativnega priključka proti pozitivnemu, to je v nasprotni smeri od dogovorjene smeri toka.

Kaj bi opazili, če bi se s to hitrostjo gibali vštric z negativno "tekočino"? Pozitivna "trdnina" bi se gibala z enako veliko hitrostjo v nasprotni smeri. Naboj nasprotnega znaka z enako gostoto ρ_e v nasprotni smeri bi dal enak tok. Tudi za opazovalca, ki se giblje ob vodniku s kako drugo hitrostjo, tok ni odvisen od velikosti te hitrosti, ker prispevata k toku negativna "tekočina" in pozitivna "trdnina", ki potujeta v nasprotnih smereh. Potemtakem pozitivna "trdnina" ne izravna samo naboja negativne "tekočine", ampak za opazovalca, ki se giblje glede na vodnik, tudi prispeva k toku.

Doslej smo mislili le na enosmerni tok. V omrežju pa uporabljamo izmenični tok s frekvenco $\nu = 50 \ \mathrm{s}^{-1}$. Izmenični tok z amplitudo I_0 ima enak učinek kot enosmerni tok $I_{ef} = I_0/\sqrt{2}$. Toku $I_{ef} = 10$ A pri vodniku s presekom 1 mm^2 ustreza potemtakem amplituda hitrosti $v_0 = \sqrt{2} \cdot 0,7 = 1$ mm/s. Za amplitudo hitrosti velja enačba $v_0 = 2\pi\nu s_0$, tako da je amplituda odmika

$$s_0 = \frac{v_0}{2\pi\nu} = 0,003 \ \mathrm{mm} \, .$$

Negativna "tekočina" v vodniku z izmeničnim tokom z majhno amplitudo niha sem in tja.

Odseku vodnika dovajamo električno delo, ki ga vodnik odda v obliki toplote, če ima konstantno temperaturo. Pojav ne more nastati drugače kot zaradi sodelovanja gibajoče se negativne "tekočine" z mirujočo pozitivno "trdnino". Primerjamo ga lahko s potiskanjem vode skozi luknjičasto plast žgane gline. Pri tem glina odda toploto, enako dovedenemu delu tlaka, če je njena temperatura konstantna.

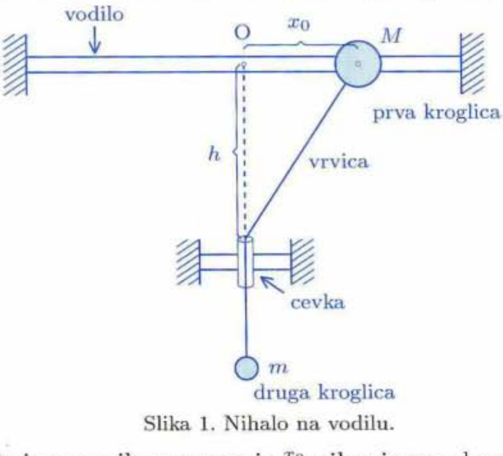
Iz zveze $Ue = Pt$ sledi za oddano toplotno moč $P = Ue/t = UI = RI^2 = \zeta(l/S)I^2 = \zeta lS(I/S)^2 = \zeta V(I/S)^2$. Uporabili smo Ohmov zakon $U = RI$ in enačbo za upor vodnika $R = \zeta l/S$. Specifični upor bakra je $\zeta = 0{,}017 \ \Omega\mathrm{mm^2/m} = 1{,}7 \cdot 10^{-8} \ \mathrm{Vm/A}$. Pri toku 10 A skozi vodnik s presekom 1 mm^2 vsak kubični centimeter bakrenega vodnika odda 1,7 joula v sekundi.

Model, v katerem električni tok po kovini pojasnimo z negativno "tekočino" in pozitivno "trdnino", ki ju obravnavamo kot zvezni "snovi", ima svoje meje. Tudi vodo, ki teče po cevi, velikokrat obravnavamo kot zvezno snov. Samo včasih se s tem opisom ne zadovoljimo in upoštevamo njeno zgradbo iz molekul. Podobno je pri toku po kovinah. Atomsko zgradbo bomo upoštevali v naslednjem koraku in razjasnili nekaj vprašanj, ki smo jih obšli.

Janez Strnad

NIHALO NA VODILU

Kroglica z maso M in izvrtino lahko brez trenja drsi po ravnem vodilu (slika 1). Na kroglico je pritrjena vrvica z zanemarljivo maso, ki je napeljana skozi navpično tanko cevko. Na prostem koncu vrvice je obešena druga kroglica z maso m, ki naj bo veliko manjša od mase M. Vrvica lahko drsi skozi cevko brez trenja. Razdalja med vodilom in zgornjim delom cevke je h. Ravnovesno lego prve kroglice na vodilu označimo z O. Kroglico odmaknemo iz ravnovesne lege za x_0 in spustimo. Trenje in zračni upor zanemarimo. Vodilo in cevka sta pritrjena in negibljiva.

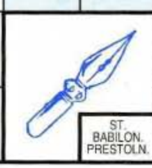


Slika 1. Nihalo na vodilu.

Pokaži, da je za majhno razmerje $\frac{x_0}{h}$ nihanje prve kroglice harmonično $x = x_0 \cos \omega t$. Pri tem pomeni x odmik kroglice iz lege O, $\omega = \sqrt{\frac{mg}{Mh}}$ je krožna frekvenca, g je težni pospešek in t čas. Pokaži, da niha druga kroglica z dvakrat večjo frekvenco.

Milan Ambrožič

KRIŽANKA "KAJ PA VREME?"

						AVTOR MARKO BOKALIČ	PISATELJ DOLENC	KLOVN POPOV	MAREC, APRIL IN MAJ	RAZPRŠEVANJE SVETLOBE V OZRAČJU	
						MAJHEN PES Z ZAVITIM REPOM			P		SEL
						AVSTRIJ. POLITIK MOCK			O		S
						MERA ZA MRAZ IN VROČINO / IZUMRLA PTICA	T	E	M	P	E
						M	E	G	L	A	VE JU SAD
	PODROČJE VISOKEGA ZRAČNEGA TLAKA	STAREJŠA IT. FILM. IGRALKA (ELSA)	ARKTIČNA PTICA, NJORKA	JUPITROVA LUNA / RIJEKA			METEOROLOGIJAI	ANCONA / DOLOČITEV VIŠINE DAVKA	A		LEAND LJU / NEM. (WEF
MESTO IZKOPANIN V SRED. EGIPTU							ODVZEM / NAJBOLJ POGOSTA PADAVINA		D		
MOČAN, KRATKOTRAJEN DEŽ	P	L	O			DANIEL DEFOE / DIAPOZITIV	D	D	ENAKOST (FRANCOSKO)		
DOTIK DVEH GIBAJOČIH SE TELES	T	R	K	OTEKLINA, NABREKLINA / GL. MESTO FRANCIJE			E		GORA V FRANC. ZEMLJEPISNIH IMENIH	MESTO V ZALEDJU ŠIBENIKA / VZDRŽNEŽ	
IVAN TAVČAR			ORODJE ZA ZAČASNO SPENJANJE / OTOK V IRS. MORJU				Ž				PRA CER PE KA
MEŠANICA ENCIMOV IZ GLIV KVASOVK							TEMPERAT. 100% VLAŽ. ZRAKA / ŽIVAL Z 8 NOGAMI				
VELIKO JEZERO NA SEVERU FINSKE						NEZAKON. OTROK (PSOVKA) / CUNJA					
PREBIVALKA AFRIŠKE DRŽAVE						K		VRH GLAVE / VELIKA PAPIGA	Č	E	
LOJZE LEBIČ	L	L	POJAV PO SONČNEM ZAHODU / TOMO ČESEN			R		A	VRTINČAST TROPSKI VIHAR / PREDLOG		
PRITOK DONAVE IZ ROMUNIJE			T			P	E	R	O	STISKAŠTVO	
NEVTRAL ZA SEŠTEVANJE	N	I	Č		ST. BABILON. PRESTOLN.	A		A		GL. MESTO BANGLADEŠA	

		METEOROLOG GREGORČIČ	PRVI LOTARINŠKI VLADAR	NEDOVZETNOST ZA BOLEZEN	POGLAVJE KORANA	UMETNIK IZ OBDOBJA ANTIKE						
EN		S	T	R	E	L						
	REMOV BRAT / BANGLAD. VODITELJ (MUDŽIBUR)	T										
	R	A	T	U	R	A						
IK ŽNI DEŽ	A	N	A	N	A	S						
ROVA BICA / SKLAD. INER)		E			IVAN HRIBAR / ALBERT EINSTEIN	I	H		POVZROČITEV ZAČETKA GORENJA	GIBANJE PO ZRAKU	VETROMER	NASLANJAČ ZA VEČ OSEB
		UBOJ ZLOČINCA BREZ SOJENJA	ALKOHOLNA PIJAČA IZ RIŽA / IVJE (KNJIŽ.)		A			JOK / KAN. HOKEJ. ZVEZDNIK (BOBBY)		L		
		L			E	FRANCOSKA POKRAJINA / SL. SKLAD. (FRANC)				E		
		I		VREMENOSLOVJE!	ŠIRJENJE / VITKOST					T		
VOSL. KVENA SEM V NONU	NACE JUNKAR / SL. JADRAL. (JURE)	N	J	PLOD IGLAVCEV						MIRAN ČERNE / ROPARSKA MOR. RIBA	M	Č
		Č		BAZA (V KEMIJI) / ANG. KRALJ. RODBINA				IGRALEC BAN	I	V	O	NOČNA PADAVINA, KI ZMRZNE
		ST. ENOTA ZA ZRAČNI TLAK (PO IT. FIZIKU) / TABORIŠČNI PAZNIK						GORSKA ŽIVAL / NIZ. NOGOM. TRENER (RUUD)				
L	O	GOBA ŠAMPINJON / ČUTILO ZA VOH							GERMANSKI NAV / BALKANSKO KOLO			
		N				MEJA MED RAZLIČNIMA ZRAČ. GMOTAMA / TANTAL						
		O				T	VRH NAD BOKO KOTORSKO					
	VRSTA (PRI SADJU)	S	O	R	T	A	NAJDALJŠA FRANCOSKA REKA					

ACM IN MEDNARODNO TEKMOVANJE IZ PROGRAMIRANJA

ACM – Association for Computing Machinery – je mednarodno znanstveno in izobraževalno združenje, katerega cilj je razvijanje uporabe informacijske tehnologije. Danes ima preko 80000 članov po vsem svetu.

ACM posveča precej pozornosti tudi vključevanju študentov v svoje vrste. Obstaja vrsta aktivnosti, namenjenih posebej njim. Ena najpomembnejših je vsekakor ACM International Collegiate Programming Contest. To je tekmovanje tričlanskih ekip študentov v programiranju. Ti v petih urah poskusijo rešiti čimveč problemov. Zmaga tista ekipa, ki ima na koncu največ rešenih problemov. Posebno draž dajejo tekmovanju njegova pravila. Tako ima vsaka ekipa na voljo le en računalnik, na katerem tekmovalci pripravijo rešitev. Kot rešitev štejejo le delujoči programi, torej taki, ki pravilno delujejo na neznanih testnih podatkih, ki jih pripravi tekmovalna komisija. Med ekipami, ki rešijo enako število problemov, odloča čas, v katerem so prišli do rešitev. Naloge so različno težke. Za večino nalog tekmovalci sicer hitro dobijo vsaj idejo, kako bi jih rešili. A kaj, ko je nalog veliko, časa pa malo. Tu je še zahteva, da morajo napisani programi tudi delovati in natančno izpolnjevati zahteve naloge. Naloga natančno opiše obliko vhodnih podatkov in zahteva pravilno oblikovan izpis rezultatov. Kakor hitro žirija sprejme rešitev, se nad računalnikom ekipe pojavi balon ali trak, ki z barvo označuje, katero nalogo je ekipa že uspešno rešila. Tako tekmovalci ves čas vedo, kako uspešne so pri reševanju ostale ekipe.

Letošnjega tekmovanja, že dvaindvajsetega po vrsti, sta se udeležili tudi ekipa študentov Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in ekipa z Univerze v Mariboru. V Preseku si bomo ogledali nekaj nalog, ki so jih reševali na tem tekmovanju. V tej številki vam na strani 278 v izziv zastavljamo *Praštevilsko deželo*. Naloga ni težka, saj jo je uspešno rešila večina ekip. Pa še s podrobnostmi okoli branja vhodnih podatkov in izpisa rezultatov vam bo prizanešeno!

Matija Lokar

REZANJE PALIC – Rešitev s str. 230

V eni uri in 45 minutah. Navodilo: Da dobi kose, dolge 25 cm, mora kovač opraviti 15 rezov, če je palica dolga 4 metre, in 35 rezov, če meri palica 9 metrov.

Dragoljub M. Milošević

NEKOLIKO DRUGAČNI KONSTRUKCIJSKI NALOGI – Rešitev 1. naloge s str. 209

Zaradi stiske s prostorom navajamo le rešitev prve naloge. Rešitev druge bomo objavili v naslednji številki.

1. naloga

Če naj trikotnik obstaja, mora biti razdalja $\overline{OI}$ manjša od razdalje $\overline{OA}$. Središče trikotniku včrtane krožnice leži namreč znotraj trikotniku očrtane krožnice, ki ima središče v točki O in polmer $\overline{OA}$. Iz konstrukcije same bo razvidno, da je to tudi edini pogoj za obstoj trikotnika z navedenimi podatki.

Ogledali si bomo dva načina konstrukcije iskanega trikotnika z ravnilom in šestilom.

1. način

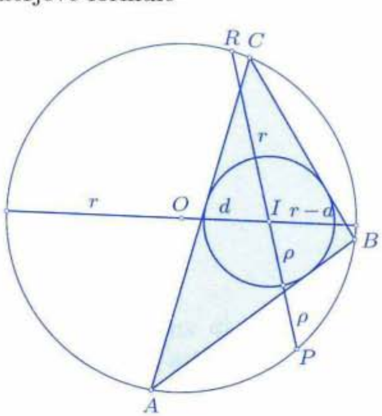
Označimo z r in ρ dolžini polmerov trikotniku ABC očrtane in včrtane krožnice ter z d razdaljo med središčema obeh krožnic. Iz znanih $r = \overline{OA}$ in $d = \overline{OI}$ lahko z uporabo Eulerjeve formule[1]

$$d^2 = r^2 - 2r\rho$$

konstruiramo polmer včrtane krožnice ρ. V preoblikovani formuli

$$(r+d)(r-d) = r \cdot 2\rho$$

je na levi strani enačaja produkt dolžin odsekov, ki jih točka I ustvarja na tisti tetivi očrtane krožnice, ki poteka skozi O in I (glej sliko 1).



Slika 1.

Po izreku o sekantah (ali o potenci točke na krožnico) je ta produkt odvisen le od očrtane krožnice in točke I, ni pa odvisen od izbrane tetive skozi I. Narišimo tetivo PR skozi I tako, da bo $\overline{IR} = r$ (slika 1). Potem iz desne strani preoblikovane Eulerjeve formule sledi, da bo dolžina drugega odseka te tetive $\overline{IP}$ enaka 2ρ.

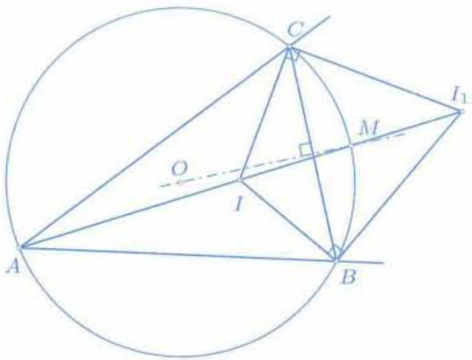
[1] Formula je eden od prispevkov velikega švicarskega matematika 18. stoletja Leonharda Eulerja k elementarni geometriji. Njen dokaz je v 5. številki 18. letnika Preseka opisal B. Lavrič v prispevku Obrat Eulerjevega izreka.

Daljico IP razpolovimo in narišemo včrtano krožnico s središčem v I ter s polmerom $\rho = \frac{1}{2}\overline{IP}$. Konstrukcijo zaključimo s tangentama iz točke A na včrtano krožnico. Tangenti sekata očrtano krožnico v ogliščih B in C iskanega trikotnika.

2. način

Nalogo lahko rešimo tudi po povsem geometrijski poti. V ta namen izluščimo s skice na sliki 2 nekaj potrebnih zvez.

V trikotniku ABC so AI, BI in CI simetrale notranjih kotov, BI_1 in CI_1 pa sta simetrali zunanjih kotov pri ogliščih B in C. Skozi njuno skupno točko I_1 poteka tudi notranja kotna simetrala AI, ki seka očrtano krožnico v točki, označeni z M. Ker sta obodna kota $\sphericalangle BAM$ in $\sphericalangle CAM$ enaka, točka M razpolavlja lok BC, torej leži na simetrali stranice BC.



Slika 2.

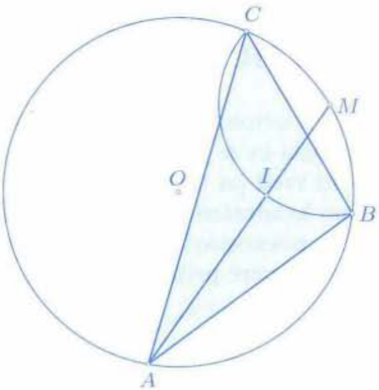
Notranja in zunanja kotna simetrala, ki izhajata iz istega oglišča trikotnika ABC, sta druga na drugo pravokotni. Zato sta trikotnika IBI_1 in ICI_1 pravokotna s skupno hipotenuzo I_1I. To pomeni, da je štirikotnik IBI_1C tetivni in da leži središče njemu očrtane krožnice na I_1I. Ker ima vsaka krožnica, ki poteka skozi B in C, središče na simetrali daljice BC, je središče štirikotniku IBI_1C očrtane krožnice presečišče I_1I in simetrale stranice BC. To pa je prav točka M.

Med drugim smo ugotovili:

Notranja kotna simetrala, ki izhaja iz poljubnega oglišča trikotnika, seka trikotniku očrtano krožnico v točki, ki je središče krožnice, na kateri ležita preostali trikotnikovi oglišči in središče trikotniku včrtane krožnice.

Rešitev naše naloge prikazuje slika 3. Narišemo krožnico s središčem v O in s polmerom $\overline{OA}$, to je iskanemu trikotniku očrtano krožnico. Kotna simetrala kota pri A je poltrak, ki ima izhodišče v A in poteka skozi I. Ta seka očrtano krožnico v točki M. Narišemo še krožnico, ki ima središče v M in poteka skozi I. Presečišči te krožnice z očrtano krožnico sta oglišči B in C iskanega trikotnika.

Opomba. Ne prezrimo, da smo v analizi naloge dokazali tudi naslednjo zelo uporabno lastnost trikotnika:

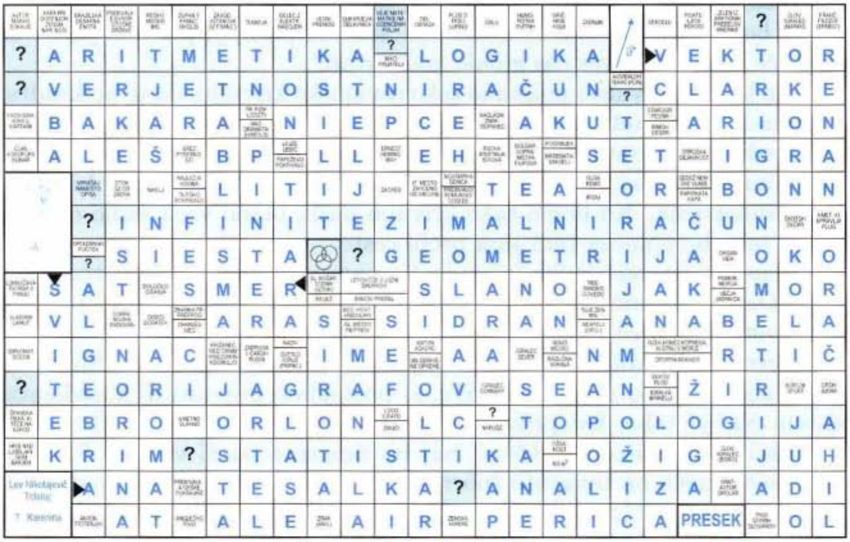


Slika 3.

Točka, v kateri seka simetrala poljubne trikotnikove stranice simetralo tej stranici nasprotnega kota, leži na krožnici, ki je trikotniku očrtana. V posebnem to pomeni, da se taki simetrali vedno sekata zunaj trikotnika.

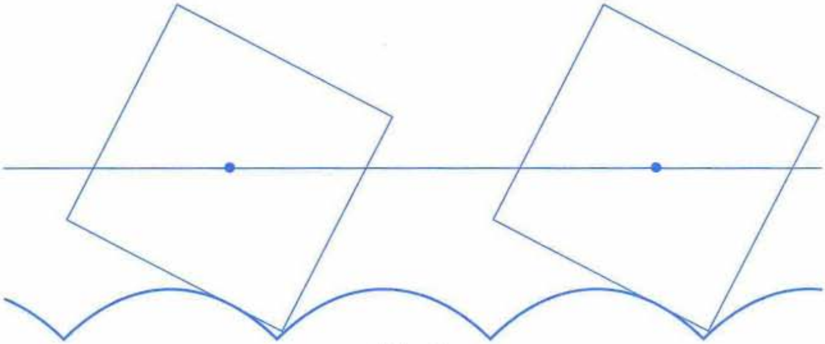
Marija Vencelj

KRIŽANKA "PODROČJA MATEMATIKE" – Rešitev s str. 224



KVADRATNO KOLO, VERIŽNICA IN TRAKTRISA

Vožnja z avtom ali kolesom po cestnih grbinah ni nič kaj prijetna. Kolesa so okrogla in se jim prilagajajo. Osi koles se pri tem dvigajo in spuščajo, z njimi vred pa tudi voznik. Ali ne bi nemara prešli na drugačna kolesa, recimo kvadratna? Pri iskanju odgovora na zastavljeno vprašanje, bomo zadevo poenostavili. Privzeli bomo, da so vse grbine enake. Poenostavljene razmere prikazuje slika 1.



Slika 1.

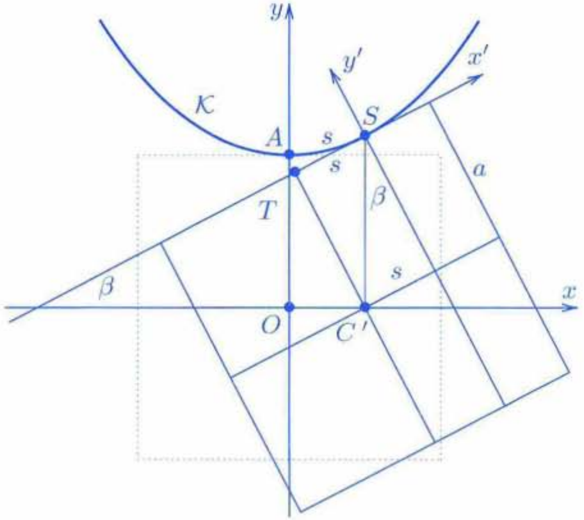
Postavimo vprašanje: *Kakšen naj bo vzdolžni profil vodoravne ceste, da se bo kvadratno kolo brez drsenja kotalilo po njej, pri tem pa se bo središče kolesa (os) ves čas gibalo vodoravno?*

Za lažjo obravnavo poiščimo tako ravninsko krivuljo, da se bo kvadrat s stranico $2a$ s spodnje strani lepo, brez drsenja, kotalil po njej. Pri tem naj središče kvadrata ves čas leži na vodoravni premici. Taka krivulja mora imeti dolžino $2a$, zaradi simetričnosti kvadrata pa mora biti tudi sama simetrična. Ko bomo tako krivuljo našli, bomo vzeli samo en njen del in tako bo določen tudi sam profil ceste.

Vzemimo torej gladko krivuljo $\mathcal{K}$ v pravokotnem koordinatnem sistemu Oxy. Tangenta na $\mathcal{K}$ v točki A naj bo vzporedna z osjo x. Točka A ima koordinati $(0, a)$.

Središče C' kotalečega se kvadrata naj bo stalno na osi x. Na krivulji $\mathcal{K}$ lahko v vsaki njeni točki $S(x, y)$ postavimo pravokotni koordinatni sistem $Sx'y'$ tako, kot prikazuje slika 2. Pri tem je $y = f(x)$, kjer je f funkcija, ki jo iščemo. Os x' naj bo tangenta na $\mathcal{K}$ v točki S, os y' pa pravokotnica na tangento (normala) v točki S. Ko točka S potuje po krivulji $\mathcal{K}$, se os x' ziblje na krivulji, os y' pa opleta po ravnini. Ko je S v A, je C' v O. Tedaj ima C' v sistemu $Sx'y'$ koordinati $(0, -a)$.

Zaradi simetrije glede na os y je dovolj, da krivuljo $\mathcal{K}$ obravnavamo le v prvem kvadrantu. Naj bo s dolžina krivulje od točke A do poljubne točke S na $\mathcal{K}$. Točka C' ima v sistemu $Sx'y'$ koordinati $(-s, -a)$. Kakšne koordinate ima C' v sistemu Oxy?



Slika 2.

Tangenta na $\mathcal{K}$ v točki S ima naklonski kot β.

V Preseku smo že večkrat brali, kako lahko uporabljamo kompleksna števila. Med drugim tudi to, da množenje danega kompleksnega števila s $\cos\beta + i\sin\beta$ pomeni zasuk točke, ki temu številu pripada v ravnini kompleksnih števil, okrog točke, ki ustreza številu 0, in sicer za kot β. Bodita

$$z(S) = x + iy \quad \text{in} \quad z(C') = \xi + i\eta \tag{1a}$$

kompleksni števili, ki ustrezata točkama $S(x, y)$ in $C'(\xi, \eta)$, potem ko smo ravnino Oxy poistovetili z ravnino kompleksnih števil.

Produkt $(-s - ia)(\cos\beta + i\sin\beta)$ predstavlja zasuk točke C' za kot β okrog točke S. Iz slike 2 sledi

$$z(C') = z(S) + (-s - ia)(\cos\beta + i\sin\beta)\,. \tag{1b}$$

Ko izenačimo realna in imaginarna dela na obeh straneh enačbe (1b), dobimo koordinati (ξ, η) točke C' v sistemu Oxy

$$\xi = x + a\sin\beta - s\cos\beta\,, \quad \eta = f(x) - a\cos\beta - s\sin\beta\,. \tag{2}$$

Naloga zahteva, da je $\eta = 0$ za vsak x. Torej

$$y(x) = a\cos\beta + s\sin\beta\,. \tag{3}$$

Označimo odvod funkcije $f\,'(x)$ s $p(x)$ in se spomnimo, da je odvod funkcije f v točki x enak tangensu naklonskega kota β tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $S(x, f(x))$. Torej velja $p(x) = \tan\beta$. Diferencial ds loka krivulje $y = f(x)$ lahko, kot je znano, izrazimo v obliki $ds = \sqrt{p^2(x)+1}\,dx$. Iz te enačbe dobimo $ds = \sqrt{\tan^2\beta + 1}\,dx = \frac{dx}{\cos\beta}$. Torej $dx = \cos\beta\,ds$ in $dy = f\,'(x)\,dx = \tan\beta\,\cos\beta\,ds = \sin\beta\,ds$.

Enačbo (3) na obeh straneh diferenciramo in pri tem upoštevamo prejšnje ugotovitve

$$\sin\beta\,ds = -a\sin\beta\,d\beta + \sin\beta\,ds + s\cos\beta\,d\beta\,. \tag{4}$$

Po poenostavitvi in krajšanju pridemo do enačbe

$$a\sin\beta = s\cos\beta\,. \tag{5}$$

Rezultat upoštevamo v enačbi (2) in dobimo $\xi = x$. To pa pomeni, da je točka $C\,'$ ravno pravokotna projekcija točke S na os x, tako kot kaže slika 2. Tedaj je

$$\tan\beta = \frac{s}{a} = \frac{1}{a}\,s\,. \tag{6}$$

Iskana krivulja ima torej lastnost:

Naklon tangente v katerikoli točki S krivulje je sorazmeren z dolžino krivulje od točke A, v kateri je tangenta na krivuljo vodoravna, do točke S.

Krivulja s to lastnostjo je verižnica. Tako obliko zavzame idealna verižica, ko se umiri, če jo obesimo v dveh točkah, ki nista na isti vertikali. Starejši bralci Preseka se bodo morda spomnili, da je o verižnici pisal Andrej Likar v članku *Veriga in oboki* (glej Presek, letnik 18, 1990/91, št. 3).

Ker ima krivulja $\mathcal{K}$ v točki $A(0, a)$ vodoravno tangento, mora funkcija f izpolnjevati začetna pogoja $f(0) = a$ in $f\,'(0) = 0$.

Kako zapisati enačbo verižnice? Računi potekajo precej preprosto, če uporabimo funkciji hiperbolični kosinus (cosh) in hiperbolični sinus (sinh), ki sta definirani za vsako realno spremenljivko x s formulama

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\,,\quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\,. \tag{7}$$

Prva funkcija je soda, zavzame pri 0 najmanjšo vrednost $\cosh 0 = 1$, vsako od 1 večjo vrednost pa natanko dvakrat. Druga funkcija je liha, pri 0 ima vrednost $\sinh 0 = 0$ in zavzame vsako realno vrednost natanko enkrat. Obe funkciji povezuje enakost $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Pa tudi odvoda sta preprosta

$$(\cosh x)' = \sinh x\,, \quad (\sinh x)' = \cosh x\,. \tag{8}$$

Funkcija sinh ima inverzno funkcijo, ki jo imenujemo area hiperbolični sinus (asinh). Zožitev funkcije cosh na poltrak $[0, +\infty)$ ima inverzno funkcijo, imenovano area hiperbolični kosinus (acosh). Obe se izražata z naravnim logaritmom takole

$$\operatorname{acosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\,, \quad \operatorname{asinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\,. \tag{9}$$

Za njuna odvoda pa velja

$$(\operatorname{acosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,, \quad (\operatorname{asinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\,. \tag{10}$$

Poiščimo sedaj enačbo verižnice iz enačbe (6). Dolžino loka s, ki se z absciso x točke S spreminja, izračunamo z integralom

$$s = s(x) = \int_0^x \sqrt{p^2(t) + 1}\, dt\,. \tag{11}$$

Torej je $s'(x) = \sqrt{p^2(x) + 1}$. Enačbo (6) prepišemo v obliko $p(x) = \frac{1}{a} s(x)$, nato obe strani odvajamo in dobimo preprosto diferencialno enačbo

$$p'(x) = \frac{1}{a}\sqrt{p^2(x) + 1}\,, \tag{12}$$

iz nje pa

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{p^2(x) + 1}} = \frac{1}{a}\,. \tag{13}$$

Leva stran enačbe (13) je ravno $(\operatorname{asinh} p(x))'$, desna pa $(\frac{x}{a})'$. Enakost odvodov pomeni, da se nastopajoči funkciji razlikujeta za konstanto c

$$\operatorname{asinh} p(x) = \frac{x}{a} + c\,. \tag{14}$$

Ker pa je $p(0) = f'(0) = 0$ in $\operatorname{asinh} 0 = 0$, dobimo $c = 0$ in $p(x) = \sinh \frac{x}{a}$.

Tako smo že korak bliže rešitvi

$$p(x) = f'(x) = \sinh \frac{x}{a}\,. \tag{15}$$

To pomeni, da je $f(x) = a\cosh\frac{x}{a} + d$, kjer je d neka konstanta. Ker je $\cosh 0 = 1$ in $f(0) = a$, dobimo $d = 0$, in enačba verižnice je

$$y = f(x) = a\cosh\frac{x}{a}\,. \tag{16}$$

Za kotaljenje kvadrata s stranico $2a$ pride v poštev samo tisti del verižnice (16), za katerega je $|f'(x)| \leq 1$. V krajiščih loka mora naklonski kot stranice kotalečega se kvadrata biti $\frac{\pi}{4}$ oziroma $\frac{3\pi}{4}$. Tako pridemo do zahteve $|\sinh xa| \leq 1$ oziroma $|\frac{x}{a}| \leq \operatorname{asinh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$. Dolžina tega dela je ravno dolžina stranice kvadrata. Po formuli (11) je

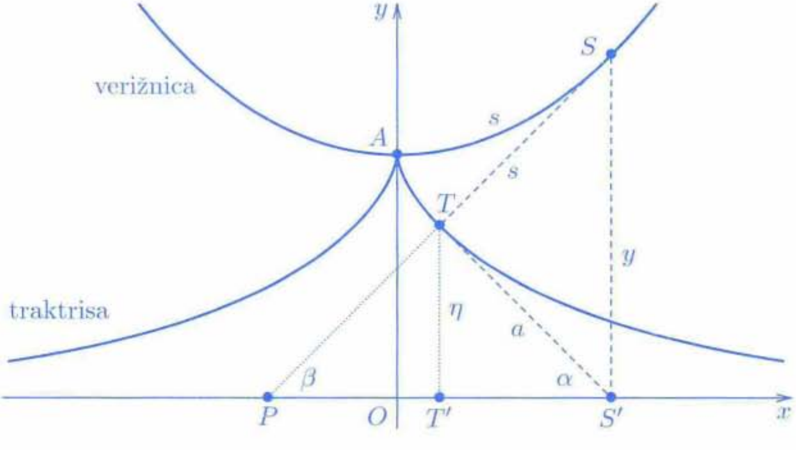
$$s = 2\int_0^{a\,\operatorname{asinh} 1} \sqrt{p^2(t)+1}\,dt = 2\int_0^{a\,\operatorname{asinh} 1} \sqrt{\sinh^2\frac{t}{a}+1}\,dt\,. \tag{17}$$

S poenostavitvijo in s substitucijo $u = \frac{t}{a}$ lahko ta integral izračunamo

$$s = 2a\int_0^{\operatorname{asinh} 1} \cosh u\,du = 2a\sinh u\,\Big|_0^{\operatorname{asinh} 1} = 2a\,. \tag{18}$$

Tako smo prišli do konca: Del krivulje, po kateri se brez drsenja kotali kvadrat s stranico $2a$, tako da pri tem njegovo središče ves čas potuje po osi x, je verižnica $y = a\cosh\frac{x}{a}$ nad intervalom $[-a\ln(1+\sqrt{2}), a\ln(1+\sqrt{2})]$. Take loke potem poljubno zvezno nadaljujemo levo in desno vzdolž osi x. Pri tem se verižnica povzpne od $y = a$ do $y = a\sqrt{2}$. Višina grbin je torej $a(\sqrt{2}-1)$.

Kakšna pa je povezava vsega tega s traktriso ali vlečnico? Opazujmo na sliki 2 gibanje točke T, ki je središče zgornje stranice kotalečega se kvadrata. Ko je ta stranica vzporedna z osjo x, je T v A. Pri kotaljenju kvadrata se točka T giblje po krivulji, kot kaže slika 3. Pri tem je razdalja med T in S' (središčem kvadrata), ki se giblje po osi x, stalno enaka a. To pa je značilno za traktriso. Bralci Preseka so jo najbrž že srečali (glej Boris Lavrič, *Traktrisa*, Presek, letnik 17, 1989/90, št. 5). Na vodoravni ravnini opisuje traktriso točkasta masa, ki je privezana na neraztegljivi niti, katere prosti konec počasi vlečemo po premici v tej ravnini. Ta premica je asimptota traktrise.



Slika 3.

Slika 3 pomaga, da določimo koordinati (ξ, η) točke T kot funkciji kota α. Iz pravokotnega trikotnika $TT'S'$ izračunamo $\eta = a \sin\alpha$. Nekoliko več dela je z absciso ξ. Kot doslej naj bo x abscisa točke S.

Na sliki 3 vidimo, da sta kota α in β komplementarna in da je $a = y \sin\alpha = a \cosh\frac{x}{a} \sin\alpha$. Iz te povezave sledi $x = a \operatorname{acosh}\frac{1}{\sin\alpha}$. Z uporabo enakosti (9) in nekaterih trigonometrijskih formul dobimo

$$\xi = x - a\cos\alpha = a(\ln\cot\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha)\,. \tag{19}$$

To velja za traktriso v prvem kvadrantu. Za celotno traktriso je ugodneje vpeljati kotu α suplementaren kot $t = \pi - \alpha$, to je naklonski kot tangente na traktriso. Koordinati poljubne točke $T(\xi, \eta)$ na traktrisi lahko izrazimo v obliki

$$\xi = a(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t)\,, \quad \eta = a\sin t\,. \tag{20}$$

To sta parametrični enačbi traktrise. Parameter t se spreminja od 0 do π. Ko t raste od 0 proti $\frac{\pi}{2}$, potuje točka T po drugem kvadrantu, se dviga od abscisne osi proti najvišji točki $A(0, a)$, ki jo doseže pri $t = \frac{\pi}{2}$. Ko t narašča od $\frac{\pi}{2}$ proti π, se T spušča v prvem kvadrantu proti abscisni osi. Abscisna os je asimptota traktrise, dane z enačbama (20).

Marko in Nada Razpet

REŠITVE NALOG, ZASTAVLJENIH V POGOVORU S PROF. DR. DUŠANOM REPOVŠEM – s str. 219

1. naloga

Najprej lokomotiva pripne voziček B in ga potisne na slepi tir. Nato gre skozi predor in potisne še voziček A na slepi tir. Nato potegne oba vozička skupaj nazaj in nato na mestu, kjer je stala na začetku naloge, odpne B, medtem ko A ponovno odpelje na slepi tir. Nato povleče B na končni položaj na levi strani in gre skozi predor po voziček A. Tega potisne na končni položaj na desni in se na koncu še sama postavi na svoje prvotno mesto.

2. naloga

Recimo, da je število dobljenih trikotnikov x. Ker je vsota notranjih kotov v trikotniku enaka π, je vsota vseh notranjih kotov v x trikotnikih enaka $x\pi$. Po drugi strani pa je ta vsota enaka tudi vsoti notranjih kotov v kvadratu in n polnih kotov (okrog vsake izmed n točk)

$$x\pi = 2\pi + 2n\pi \,.$$

Od tod po krajšanju s π sledi rešitev naloge:

$$x = 2(n+1)\,.$$

Vidimo, da število dobljenih trikotnikov ni odvisno od načina, kako naredimo povezave med točkami, marveč le od števila točk.

3. naloga

Ločimo 2 primera:

1. primer: Na kongresu obstaja vsaj en udeleženec, ki ne pozna nikogar. V tem primeru je možno število ljudi, ki jih pozna posamezni udeleženec lahko le $0, 1, 2, \ldots$, ali $n-2$. Torej je možnosti $n-1$. Ker pa je udeležencev n, sledi, da morata vsaj dva med njimi imeti enako število poznanih.

2. primer: Vsak udeleženec koga pozna. V tem primeru so možna števila poznanih ljudi lahko le $1, 2, \ldots$, ali $n-1$. Torej je tudi v tem primeru možnosti $n-1$, zato zopet obstajata vsaj dva udeleženca, ki imata isto število znancev na kongresu.

Timotej Žohar

33. DRŽAVNO TEKMOVANJE ZA ZLATO VEGOVO PRIZNANJE – Rešitve s str. 241

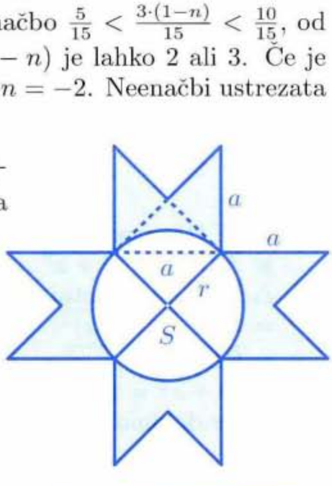
7. razred

1. $3^{1997} - 3^{1993} = 3^{1993} \cdot 3^4 - 3^{1993} = 3^{1993} \cdot (3^4 - 1) = 3^{1993} \cdot 80 = = 16 \cdot (5 \cdot 3^{1993})$.

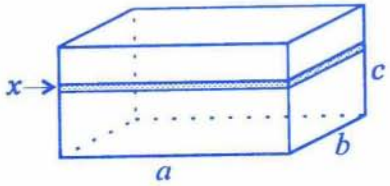
2. a) V 100 kg sliv je 90 kg vlage in 10 kg suhe snovi. V 50 kg delno osušenih sliv je 40 kg vlage, zato je stopnja vlažnosti teh sliv 80 odstotna.
   b) Osušenih sliv je bilo 20 kg, v njih je bilo 10 kg vlage. Stopnja vlažnosti ob koncu sušenja je bila 50 odstotna.
   c) Na koncu sušenja so slive vsebovale 10 kg suhe snovi.

3. Po krajšanju in razširjanju dobimo neenačbo $\frac{5}{15} < \frac{3\cdot(1-n)}{15} < \frac{10}{15}$, od tod pa $5 < 3 \cdot (1-n) < 10$. Faktor $(1-n)$ je lahko 2 ali 3. Če je $1-n=2$, je $n=-1$. Če je $1-n=3$, je $n=-2$. Neenačbi ustrezata celi števili -1 in -2.

4. $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, zato je obseg $o = 8a + 8r + + 2\pi r = 8a + 4a\sqrt{2} + \pi a\sqrt{2}$, ploščina pa $p = 4a^2 - \pi r^2 = 4a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$.



5. Iz $abx = V$ dobimo $60x = 6$ in $x = 0{,}1$. Če v akvarij dolijemo 6 litrov vode, se gladina dvigne za 0,1 dm. Pri tem se omoči $2 \cdot 12 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 5 \cdot 0{,}1 = 3{,}4\ \mathrm{dm}^2$ stene.

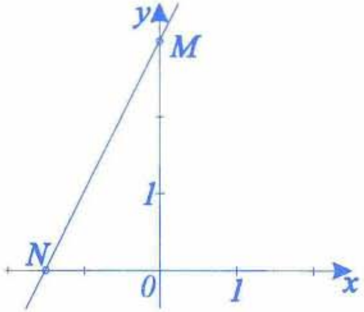


8. razred

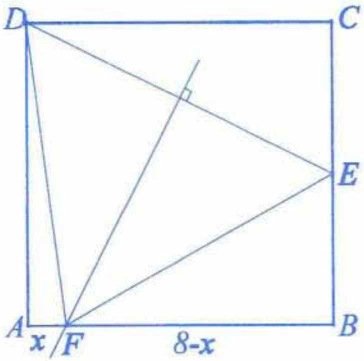
1. Najprej je $4 \cdot \left(\frac{3x^2}{4} + 2x - \frac{37}{4}\right) = 3 \cdot (x^2 + 8x + 9)$, od tod $x = -4$ in nato $b = -5$.

2. Označimo znesek za ureditev prvih treh parkov z x. Dobimo enačbo $x + \frac{2}{5}x = 105\,000$ in $x = 75\,000$. Za ureditev prvih treh parkov so porabili 75 000 SIT, za ureditev četrtega in petega pa 30 000 SIT. Ker je $3t + 4t + 5t = 75\,000$ in zato $t = 6\,250$, je ureditev prvega parka stala 18 750 SIT, drugega 25 000 SIT in tretjega 31 250 SIT. Nadalje je $2m + 3m = 30\,000$ in $m = 6\,000$, zato so za ureditev četrtega parka porabili 12 000 SIT, za ureditev petega pa 18 000 SIT.

3. Najprej je $7^{x+y} = 7^{3x+3}$, zato je $x + y = 3x + 3$ in $y = 2x + 3$.



4. $\triangle AFD$ je pravokotni trikotnik, zato je $\overline{FD} = \sqrt{8^2 + x^2}$. Prav tako je $\triangle FBE$ pravokotni, zato je $\overline{FE} = \sqrt{4^2 + (8-x)^2}$. Zaradi $\overline{FD} = \overline{FE}$ je $\sqrt{8^2 + x^2} = \sqrt{4^2 + (8-x)^2}$ in $64 + x^2 = 16 + 64 - 16x + x^2$, od koder dobimo $x = 1$.



5. Ker je obseg tuljave $o = 2\pi r = 3,14$ m, je bilo navitih 15 7000 : 3,14 = = 50 000 ovojev. Iz $V = a^2 v$ je $a^2 = \frac{628}{1\,570\,000}$, od tod pa $a = 2$ mm. Žica je kvadratnega prereza 2 mm $\times$ 2 mm. 50 000 ovojev take žice je $50\,000 \cdot 2$ mm $= 100$ m, število tuljav dolžine 2,5 m pa $100 : 2{,}5 = 40$. Navili so 40 tuljav.

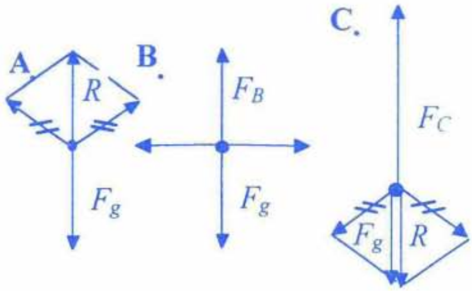
Aleksander Potočnik

16. DRŽAVNO TEKMOVANJE IZ FIZIKE ZA OSNOVNOŠOLCE – Rešitve nalog s str. 242

7. razred

1. a) Z R je označena rezultanta obeh stranskih sil.

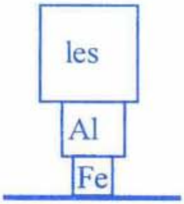
   b) Z merjenjem ali pa iz enakostraničnih trikotnikov ugotovimo: ko je vozel v točki A, sta R in F_g nasprotno enaki in je $F_A = 0$. V točki B je $F_B = F_g = 10$ N. V točki C je $F_C = F_g + R = 20$ N.



   c) Pri premiku vozla iz A v B se srednja utež dvigne za 0,5 m, stranski pa se spustita za $1{,}0\ \mathrm{m} - 1{,}73\ \mathrm{m}/2 = 0{,}135$ m. Sprememba potencialne energije je torej $\Delta W_p = 10\ \mathrm{N} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} - 2 \cdot 10\ \mathrm{N} \cdot 0{,}135\ \mathrm{m} = 2{,}3$ J. Pri premiku iz A v C sta stranski uteži na koncu enako visoko, premaknila se je le srednja utež: $\Delta W_p = 10\ \mathrm{N} \cdot 1{,}0\ \mathrm{m} = 10$ J.

2. a) Maso izračunamo z enačbo $m = \rho a^3$. Dobimo: $m_{\mathrm{Al}} = 2{,}7\ \mathrm{kg/dm^3} \cdot (0{,}72\ \mathrm{dm})^3 = 1{,}0$ kg, $m_{\mathrm{Fe}} = 1{,}0$ kg in $m_{\mathrm{les}} = 1{,}0$ kg.

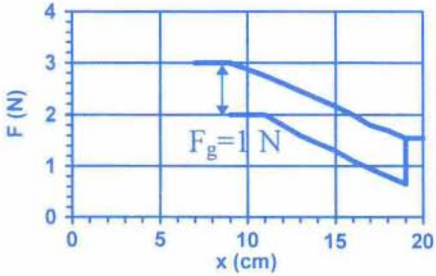
   b) Ker so mase kock enake, bo najmanjše delo pri najmanjši dvižni višini. Zato najmanjša kocka ostane na mizi, naslednja je aluminijasta in zgornja lesena.



   c) Aluminijasto kocko dvignemo na železno, $A_{\mathrm{Al}} = F_g h_{\mathrm{Fe}} = 10\ \mathrm{N} \cdot 0{,}0505\ \mathrm{m} = 0{,}50$ J. Leseno dvignemo na obe prejšnji, $A_{\mathrm{les}} = F_g(h_{\mathrm{Fe}} + h_{\mathrm{Al}}) = 10\ \mathrm{N} \cdot 0{,}122\ \mathrm{m} = 1{,}22$ J. Skupno delo je torej 1,72 J.

3. V brisači je bilo 150 g vode. V učbeniku preberemo podatek, da je izparilna toplota vode 2260 kJ/kg. Za izparitev 1 kg vode je torej potrebna toplota 2260 kJ, za 150 g pa $2260\ \mathrm{kJ} \cdot (0{,}15\ \mathrm{kg}/1\ \mathrm{kg}) = 340$ kJ.

4.



5. a) $p = p_o + \sigma h$, pri čemer je p_o normalni zračni tlak, kar je okrog 100 kPa, σ pa specifična teža vode.

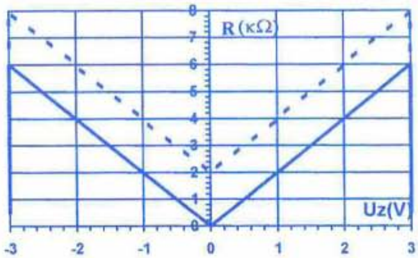
b) Rezultati lahko odstopajo od navedenih vrednosti do približno 5%.

V (cm^3)	24	23,3	22,6	21,9	21,3
p (kPa)	103	106	109	112	115
$p \cdot V$ (kPa·cm^3)	2470	2470	2460	2450	2450

c) Zmnožek tlaka in prostornine zraka v zaprti cevki je približno konstanten.

8. razred

1. Po odčitavanju točk (U_Z, I) in izračunavanju upora $R = U_Z/I$ dobimo diagram, kot kaže slika (polna črta). Pri zaporedni vezavi se vsi upori povečajo za 2,0 kΩ in dobimo črtkano krivuljo.



2. a) V učbeniku preberemo, da ima 1 m dolg železen vodnik s presekom 1 mm^2 upor 0,098 Ω. Upor debelejšega kosa je torej 0,098 Ω, tanjšega pa $4 \cdot 0{,}098\ \Omega = 0{,}392\ \Omega$, saj je presek štirikrat manjši in zato upor štirikrat večji. Ker sta vodnika povezana zaporedno, je njun skupni upor $R_s = 0{,}490\ \Omega$. Iz Ohmovega zakona izračunamo skupni tok: $I = U/R_s = 2{,}5\ \mathrm{V}/0{,}49\ \Omega = 5{,}1\ \mathrm{A}$. Debelejši vodnik sprejme električno delo $A_d = UIt = RI^2t = 0{,}098\ \Omega \cdot 26{,}0\ \mathrm{A}^2 \cdot 1{,}0\ \mathrm{s} = 2{,}55\ \mathrm{J}$, tanjši pa delo $A_t = 0{,}398\ \Omega \cdot 26{,}0\ \mathrm{A}^2 \cdot 1{,}0\ \mathrm{s} = 10{,}3\ \mathrm{J}$. Tanjši vodnik sprejme štirikrat več dela.

b) Sprejeto delo poveča notranjo energijo vodnika: $A = mc\Delta T$. S sklepanjem lahko hitro ugotovimo, da je masa tanjšega vodnika štirikrat manjša, iz prvega dela naloge pa vidimo, da je sprejel štirikrat več dela, zato je temperaturna razlika 16-krat večja, $\Delta T_\mathrm{t} = 16 \cdot 0{,}70\ \mathrm{K} = 11{,}2\ \mathrm{K}$. Lahko pa obe masi izračunamo: $m_\mathrm{d} = \rho S_\mathrm{d} l = 7{,}8\ \mathrm{g}$, $m_\mathrm{t} = \rho S_\mathrm{t} l = 1{,}95\ \mathrm{g}$, iz podatkov za debelejši vodnik določimo $c = A/m\Delta T = 2{,}55\ \mathrm{J}/(7{,}8\ \mathrm{g} \cdot 0{,}70\ \mathrm{K}) = 467\ \mathrm{J/kgK}$, to vrednost pa vstavimo v enačbo za tanjši vodnik in dobimo $\Delta T_\mathrm{t} = A_\mathrm{t}/mc = 10{,}3\ \mathrm{J}/(1{,}95\ \mathrm{g} \cdot 467\ \mathrm{J/kgK}) = 11{,}3\ \mathrm{K}$.

3. a) Ob sunku se je vagonček začel gibati, nato se je pričel ustavljati, se zaletel v pregrado in se začel gibati v nasprotno smer.

   b) Zgornja krivulja predstavlja hitrost, spodnja pa pospešek.

   c) Na vagonček so delovale sila roke v desno, sila trenja v levo, pravokotna komponenta sile podlage navzgor in teža navzdol.

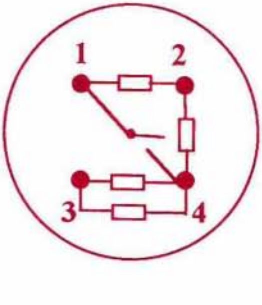
   d) Vagonček se je zaletel v pregrado in se odbil nazaj.

   e) $s = v_\mathrm{sr} \cdot (t_2 - t_1) \approx 0{,}2\ \mathrm{m/s} \cdot (2{,}4 - 1{,}2)\ \mathrm{s} = 0{,}24\ \mathrm{m}$

   f) $F_\mathrm{tr} = ma_\mathrm{zav} \approx 0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}1\ \mathrm{m/s^2} \approx 0{,}01\ \mathrm{N}$

   g) $F_\mathrm{r} \approx ma_\mathrm{maks} \approx 0{,}1\ \mathrm{kg} \cdot 1\ \mathrm{m/s^2} \approx 0{,}1\ \mathrm{N}$

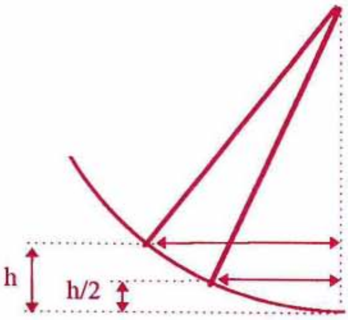
4. Najprej izmerimo upor priloženega upornika: $R = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$. Z merjenjem ugotovimo: $R_{12} = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$, $R_{24} = 1{,}0\ \mathrm{k\Omega}$, $R_{34} = 0{,}5\ \mathrm{k\Omega}$ in $R_{13} = 2{,}5\ \mathrm{k\Omega}$, vse pri izklopljenem stikalu. Torej je en upornik med 1 in 2, drugi med 2 in 4, tretji in četrti sta povezana vzporedno med 3 in 4. Ko stikalo vklopimo, je $R_{14} = 0$, kar pomeni, da je stikalo med priključkoma 1 in 4, kot kaže slika.



5. a) Rezultati lahko odstopajo od navedenih vrednosti do približno 5%. V našem primeru smo merili čase za pet nihajev.

kot α (°)	nihajni čas t_0 (s)
15	1,29
45	1,32
75	1,41

   b) Energija nihanja pri posameznem nihaju je enaka potencialni energiji, ko je nihalo v skrajni legi, če merimo potencialno energijo od točke, ko je utež v najnižji legi. Ugotoviti moramo torej, v kolikšnem času pade potencialna energija nihala v skrajni legi na polovico. Kot je predlagano v nalogi, bo meritev natančnejša, če merimo odmike x od navpičnice. Iz risbe v merilu $1 : 1$ vidimo, da je pri začetnem odklonu nihala $30°$ višina težišča nihala $h = 54$ mm nad izhodiščno lego, odmik x pa je takrat 20 cm, pri polovični višini $h/2 = 27$ mm pa je odmik nihala 14,5 cm. Izmeriti moramo torej, v kolikšnem času pade odmik iz 20 cm na 14,5 cm, za kar dobimo pri nekoliko različnih nihalih čase od 35 do 45 sekund. Možni so tudi drugačni postopki.



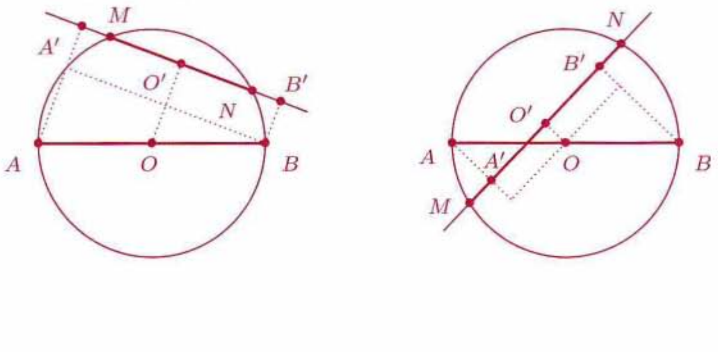
Zlatko Bradač, Mirko Cvahte

41. MATEMATIČNO TEKMOVANJE SREDNJEŠOLCEV SLOVENIJE – Rešitve nalog s str. 253

I/1. Število $2k + 1 = 2m + 4mn + 2n + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$ je očitno sestavljeno. Obratno: če je $2k + 1$ sestavljeno število, obstajata od 1 različni naravni števili a in b, za kateri velja $2k + 1 = ab$. Ker je $2k + 1$ liho število, morata biti tudi a in b lihi. Zato sta števili $m = \frac{a-1}{2}$ in $n = \frac{b-1}{2}$ naravni in zanju velja $m + 2mn + n = \frac{ab-1}{2} = k$.

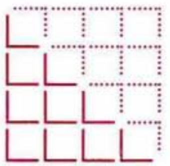
I/2. Iz pogojev naloge sledi, da je število $(5a - 1) - 5\,(a - 10) = 49$ deljivo s p. Torej je $p = 7$ in tudi število $(a - 10) + 7 = a - 3$ je zato deljivo s p.

I/3. Glede na lego tetive MN ločimo dve bistveno različni možnosti, ki ju prikazuje spodnja slika:



Središče krožnice označimo z O, pravokotno projekcijo točke O na tetivo MN pa z O'. Točka O' razpolavlja tetivo MN, zato je $|MO'| = |O'N|$. Enostavno je videti, da je $|A'O'| = |O'B'|$. Res: v prvem primeru si pomagamo s skladnima pravokotnikoma, v drugem pa s skladnima pravokotnima trikotnikoma. Za gornja primera torej velja $|A'M| = |NB'|$.

Če zamenjamo točki M in N med sabo, je dokaz enak. Primer, ko (vsaj) eno krajišče tetive MN sovpada s kakšnim krajiščem premera, je trivialen in ga prepustimo bralcu.



I/4. Naj ima mreža m vrstic in n stolpcev. Potem je v mreži $n(m+1)$ vodoravno ležečih in $m(n+1)$ navpično ležečih palic. Ker ima vsak gradnik po eno palico v vsaki smeri, mora biti $m(n+1) = n(m+1)$ oz. $m = n$. Zlahka vidimo, da se da mrežo $m \times m$ res sestaviti: najprej sestavimo polovico kvadrata, nato pa postopek zrcalno ponovimo.

II/1. Iz enakosti $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$ izpeljemo $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$ in po kvadriranju dobimo

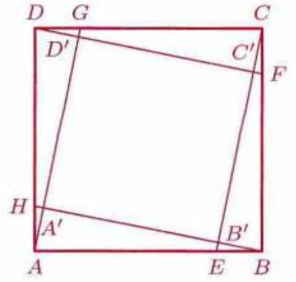
$$a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 = c^4 + d^4 + 2c^3d + 3c^2d^2 + 2cd^3\,.$$

Enakost še pomnožimo z 2

$$a^4+b^4+a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = c^4+d^4+c^4+4c^3d+6c^2d^2+4cd^3+d^4$$

in preoblikujemo

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4\,.$$



II/2. Privzemimo oznake s slike. Najprej je $|AH| = \frac{1}{n}|AB|$ in

$$|BH|^2 = |AB|^2 + |AH|^2 = |AB|^2(1 + \tfrac{1}{n^2})\,,$$

nato pa še $|A'H| = |B'E| = \frac{1}{n}|AA'|$. Zaradi podobnosti trikotnikov ABH in $A'AH$ je $\frac{|AA'|}{|AH|} = \frac{|AB|}{|BH|}$ oziroma

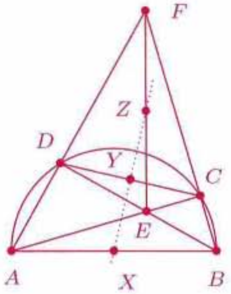
$$|AA'| = \frac{|AH|}{|BH|}|AB| = \frac{\frac{1}{n}|AB|}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}|AB|}|AB| = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}|AB|\,.$$

Stranica manjšega kvadrata je dolga

$$\begin{aligned}|A'B'| &= |BH| - (|A'H| + |BB'|) = |BH| - (|A'H| + |AA'|) = \\ &= |AB| \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \right) = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} |AB|\,,\end{aligned}$$

zato je razmerje ploščin $\left(\frac{|A'B'|}{|AB|}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$.

II/3. Ker je $ABCD$ tetivni štirikotnik in X središče njemu očrtane krožnice, sta daljici XY in CD pravokotni. Tudi $CFDE$ je tetivni štirikotnik. Središče njemu očrtane krožnice leži v Z, zato je tudi daljica ZY pravokotna na CD. Točke X, Y in Z so res kolinearane.



Pripomniti velja, da lahko točki C in D med sabo tudi zamenjamo. Točki E in F tedaj zamenjata vlogi, dokaz pa ostane enak.

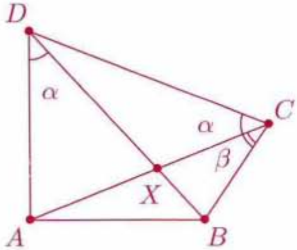
II/4. Oglejmo si naslednjo tabelo:

1	5	9	...	1989	1993	1997
2	6	10	...	1990	1994	
3	7	11	...	1991	1995	
4	8	12	...	1992	1996	

Ker je izbranih števil 1001, obstaja vsaj ena vrstica, ki vsebuje vsaj 251 izmed teh števil. Ker pa je stolpcev 500, morata biti vsaj dve števili izmed teh 251 števil sosednji. Torej je njuna razlika natančno 4.

III/1. Število $m+n-1$ deli $(m+n-1)(m+n+1) = m^2 + n^2 - 1 + 2mn$, zato $m+n-1$ deli $2mn$. Če bi bilo $m+n-1$ praštevilo, bi moralo deliti 2, m ali n. To pa je nemogoče, saj $m+n-1 > m, n, 2$.

III/2. Polinom p je oblike $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)+n$, kjer so števila $a, x_1, \ldots, x_n$ cela. Zaradi $p(0) = 0$ velja $n = -a(-1)^n x_1 \cdots x_n$. Ker so števila $x_1, \ldots, x_n$ različna, sta lahko kvečjemu dve po absolutni vrednosti enaki 1, zato je $n = |-a(-1)^n x_1 \cdots x_n| \geq 2^{n-2}$. Z indukcijo preverimo, da za $n \geq 5$ velja $n < 2^{n-2}$, zato mora biti $n \leq 4$. Polinomi $(x-1)+1$, $(x-1)(x+2)+2$, $(x-1)(x+1)(x+3)+3$ in $-(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)+4$ pa kažejo, da je n res lahko enak 1, 2, 3 ali 4.



III/3. Označimo

$$\sphericalangle BDA = \sphericalangle ACD = \alpha \quad \text{in} \quad \sphericalangle BCA = \beta\,.$$

Trikotnika BDC in ACD sta enakokraka, zato je

$$\sphericalangle BDC = \pi - 2(\alpha + \beta) = \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha) - \alpha$$

oziroma $\alpha + 4\beta = \pi$. Sledi $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\,(\pi - \alpha) = 2\beta$ in $\sphericalangle DBC = \pi - 3\beta$. Iz sinusnega izreka v trikotnikih BCX in AXD izpeljemo

$$\frac{|CX|}{|BX|} - \frac{|AX|}{|DX|} = \frac{\sin(\pi - 3\beta)}{\sin\beta} - \frac{\sin(\pi - 4\beta)}{\sin 2\beta} =$$
$$= (4\cos^2\beta - 1) - (4\cos^2\beta - 2) = 1\,.$$

III/4. Če bi bili v podjetju sami resnicoljubi, bi tisti, ki največ zasluži, v svoji drugi izjavi lagal. Če pa bi bili sami lažnivci, bi tisti, ki opravlja najbolj zahtevno delo, s svojo prvo izjavo povedal resnico. Torej je v podjetju zaposlen vsaj en resnicoljub in vsaj en lažnivec.

Oglejmo si resnicoljuba, ki ima med resnicoljubi najvišjo plačo. Zaradi njegove druge izjave je v podjetju vsaj še 30 lažnivcev, ki imajo višjo plačo od njega. Lažnivec z najnižjo plačo (med lažnivci) je v svoji drugi izjavi lagal in zato kvečjemu 29 lažnivcev prejema višjo plačo. Lažnivcev je zato največ 30 in po že dokazanem jih je natančno 30.

Lažnivec, ki opravlja najzahtevnejše delo (med lažnivci), je s svojo prvo izjavo povedal neresnico. Torej je vsaj 12 resnicoljubov, ki opravlja bolj zahtevno delo od njega. Resnicoljub, ki opravlja najmanj zahtevno delo (med resnicoljubi), je v svoji prvi izjavi govoril resnico in zato resnicoljubov ni več kot 12. Po že dokazanem jih je natančno 12.

V podjetju je torej zaposlenih 42 delavcev.

IV/1. Če bi bili števili a in b enomestni, bi veljalo $154 = \overline{ab} - a \cdot b < 100$, kar ni res. Če bi bili trimestni, bi veljalo $154 = \overline{ab} - a \cdot b = 1000a + b - a \cdot b > a(1000 - b) > 101 \cdot 3$, kar tudi ni res. Prav tako ugotovimo, da več kot trimestni števili ne prideta v poštev, a in b sta torej dvomestni. Enačba se torej glasi $154 = 100a + b - a \cdot b$. Iz enačbe izrazimo a: $a = \frac{154-b}{100-b}$. Sledi, da $100 - b \mid 154 - b$ oziroma $100 - b \mid 54$.

Ker je $100 - b$ pozitivno, je lahko enako le enemu izmed števil 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 in 54. Za b dobimo torej kandidate 46, 73, 82, 91, 94, 97, 98 in 99. Izmed teh sta praštevili le 73 in 97. Če velja $b = 73$, dobimo $a = \frac{154-b}{100-b} = \frac{81}{27} = 3$, kar ni dvomestno praštevilo. Za $b = 97$ dobimo $a = \frac{154-b}{100-b} = \frac{57}{3} = 19$ in tako je iskano število 1997.

IV/2. Da bi bilo število f_{1005} deljivo z 10, mora biti sodo in deljivo s 5. Izračunajmo nekaj členov Fibonaccijevega zaporedja

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Domnevamo lahko, da bo vsako tretje Fibonaccijevo število sodo in vsako peto Fibonaccijevo število deljivo s 5.

Število $f_3 = 2$ je sodo. Ker je

$$f_{n+3} = f_n + 2\, f_{n+1}\,,$$

sta števili f_{n+3} in f_n enake parnosti. Torej so vsa števila oblike f_{3k} soda. Število $f_5 = 5$ je deljivo s 5. Iz zveze

$$f_{n+5} = 3\, f_n + 5\, f_{n+1}$$

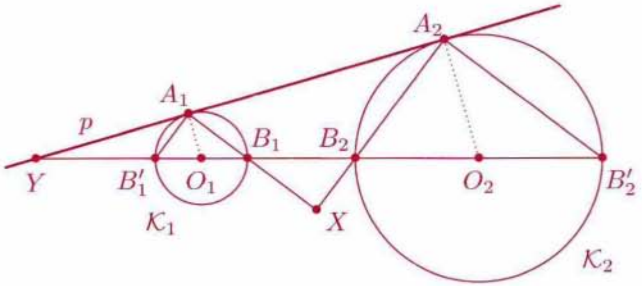
pa sledi, da je število f_{n+5} deljivo s 5, če je tako tudi število f_n. Vsa števila oblike f_{5k} so zato deljiva s 5. Torej so vsa števila oblike f_{15k} deljiva z 10. Ker je $1005 = 67 \cdot 15$, je prva trditev dokazana.

V drugem delu naloge pa bomo pokazali, da število f_{1005} ni deljivo s 4. Ker je $f_6 = 8$, je smiselno izraziti število f_{n+6} s pomočjo števil f_n in f_{n+1}

$$f_{n+6} = 5\, f_n + 8\, f_{n+1}\,.$$

Torej bo število f_{n+6} deljivo s 4 natanko tedaj, ko bo tako tudi število f_n. Ker pa je $1005 = 167 \cdot 6 + 3$ in $f_3 = 2$, število f_{1005} ni deljivo s 4.

IV/3. Privzemimo oznake s slike. Zadošča dokazati, da je trikotnik B_1B_2X pravokoten s pravim kotom pri X.



Pravokotna trikotnika YA_1O_1 in YA_2O_2 sta si podobna, zato je

$$\sphericalangle A_1B_1B_1' = \tfrac{1}{2}\sphericalangle A_1O_1B_1' = \tfrac{1}{2}\sphericalangle A_2O_2B_2 = \sphericalangle A_2B_2'B_2\,.$$

Sledi

$$\sphericalangle B_1B_1'A_1 = \tfrac{\pi}{2} - \sphericalangle A_1B_1B_1' = \tfrac{\pi}{2} - \sphericalangle A_2B_2'B_2 = \sphericalangle B_2'B_2A_2\,.$$

Torej sta si pravokotna trikotnika $B_1'A_1B_1$ in $B_2A_2B_2'$ podobna. Ker je

$$\sphericalangle A_1B_1B_1' = \sphericalangle B_2B_1X \quad \text{in} \quad \sphericalangle A_2B_2B_2' = \sphericalangle B_1B_2X\,,$$

je tudi trikotnik B_1B_2X pravokoten s pravim kotom pri X.

IV/4. Opazimo, da je $3^3+1=4\cdot 7$, in razdelimo člene v 3 skupine: $\{1,3^3\}$, $\{3,3^4\}$, $\{3^2,3^5\}$. Ko Alenka izbere predznak pri členu iz neke skupine, izbere Barbara enak predznak pri drugem členu te skupine. Vrednost izraza bo potem očitno deljiva s 7.

Matjaž Željko

REŠITVE NALOG Z DRŽAVNEGA TEKMOVANJA SREDNJEŠOLCEV IZ FIZIKE V ŠOLSKEM LETU 1996/97 – s str. 247

Skupina A

1. *Podatki:* $l_a = 15$ m, $l_v = 10$ m, $a = 2$ m/s^2, $v = 72$ km/h.

   Ko avtobus v času $t = v/a$ doseže končno hitrost, napravi pot $s_a = = \frac{1}{2}at^2 = v^2/2a$, avtomobil pa v enakem času $s = vt = v^2/a$; razlika poti je $s - s_a = v^2/2a = 100$ m. Najmanjšo razdaljo med avtomobili dobimo tako, da tej poti prištejemo še dolžino avtobusa in dvojno zavorno pot; iskana razdalja je torej 135 m.

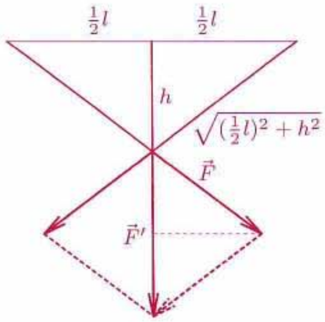
2. *Podatki:* $l = 3{,}0$ m, $h = 0{,}5$ m, $d = 10$ cm, $F_1 = 700$ N, $k = 23$ N/cm.

Ponjavo si mislimo sestavljeno iz $N = l/d = 30$ trakov. Če se središče ponjave dotakne tal, je sila, ki napenja polovico ponjave, enaka

$$F = Nk\Delta l = Nk\left[\sqrt{(\tfrac{1}{2}l)^2 + h^2} - \tfrac{1}{2}l\right]$$

(glej sliko 1), rezultanta pa

$$F' = 2F\frac{h}{\sqrt{(\frac{1}{2}l)^2 + h^2}} = 3540\ \text{N}\,.$$



Slika 1.

Torej se na ponjavo lahko postavi 5 telovadcev, pa se ponjava še ne dotakne tal.

3. *Podatki:* $r_1 = 1{,}0$ cm, $r_2 = 2{,}0$ cm, $r = 5{,}0$ cm, $l = 3{,}0$ cm, $\sigma = 78$ kN/m^3, $\sigma_v = 10$ kN/m^3.

Navpična komponenta F_n sile vrvice je uravnotežena z razliko teže in vzgona

$$F_n = (\sigma - \sigma_v)\frac{4\pi r^3}{3} = 36\ \text{N}\,.$$

Ta komponenta, vodoravna komponenta in rezultanta tvorijo ravno polovico enakostraničnega trikotnika, zato je vodoravna komponenta enaka $F_v = F_n/\sqrt{3} = 10$ N. Teža leve uteži (glej sliko pri besedilu nalog) je potem $T_1 = r_1 F_n / r_2 = 18$ N, desne pa $T_2 = F_v = 25$ N.

Skupina B

1. *Podatki:* $v_0 = 20$ m/s, $h = 3{,}8$ m, $D = 10$ m.

Ko se kaskader z motorjem vozi po rampi, se ohranja vsota njegove kinetične in potencialne energije. Za hitrost tik pred skokom dobimo $v^2 = v_0^2 - 2gh$, $v = 18$ m/s. Iz zveze za domet pri poševnem metu potem sledi: $\sin 2\varphi = Dg/v^2 = 0{,}30$, torej je $\varphi = 0{,}15 = 9°$. Možna, a precej bolj nevarna, je rešitev pri komplementarnem kotu.

2. *Podatki:* $P = 400$ W, $k = 0{,}9$ Ns^2/m^2, $k_v = 4{,}5$ Ns^2/m^2.

Ker se čoln giblje s konstantno hitrostjo, je upor čolna, F_u, enak sili obeh vesel F_v: $kv^2 = 2k_v v_v^2$, pri čemer so vse hitrosti merjene glede na vodo. Moč veslača je

$$P = F_u v + 2F_v v_v = kv^3 \left[1 + \sqrt{\frac{k}{2k_v}}\right] .$$

Od tod dobimo za hitrost čolna $v = 7$ m/s.

3. *Podatki:* $N = 3$, $l = 3{,}0$ m, $h = 1{,}5$ m, $h' = 0{,}5$ m.

Hitrost otrok na koncu dobimo kar iz energijskega izreka

$$2mg(h - h') = 2\tfrac{1}{2}mv^2 , \qquad v = \sqrt{2g(h - h')} = 4{,}4 \text{ m/s} .$$

Do tal naredita ravno dva obrata na poti

$$s = \sqrt{(h - h')^2 + (2 \cdot 2\pi \tfrac{1}{2}l)^2} .$$

Navpična komponenta otrokove hitrosti $v_\perp$ je proti celotni hitrost v enakem razmerju kot višinska razlika proti celotni poti: $v_\perp = v(h - h')/s = 0{,}23$ m/s.

4. *Podatki:* $k = 0{,}3$, $l = 5{,}0$ m, $h = 0{,}5$ m.

Tik preden se balinček dotakne tal, je vodoravna komponenta njegove hitrosti enaka začetni hitrosti $v'_\| = v_0$, v navpični smeri pa dobi komponento hitrosti $v_\perp = \sqrt{2gh}$. V vodoravni smeri do tedaj naredi pot $s = v'_\| t$, $t = \sqrt{2h/g}$, $s = v_0\sqrt{2h/g}$. Ko prileti na tla, sunek sile podlage zmanjša vodoravno hitrost na vrednost $v_\|$, v navpični smeri pa hitrost pade na 0. Če komponento sile podlage v navpični smeri označimo s $F_\perp$, je vodoravna komponenta – trenje – enaka $kF_\perp$. Izrek o gibalni količini pove

$$m(v'_\| - v_\|) = kF_\perp \Delta t , \quad mv_\perp = F_\perp \Delta t .$$

Z Δt smo označili čas trajanja sunka sile podlage. (Ta čas je zelo kratek, zato pri ustavljanju napravi zanemarljivo majhno pot.) Iz obeh enačb dobimo $v_\| = v'_\| - kF_\perp \Delta t/m = v_0 - k\sqrt{2gh}$. Potem telo drsi in kinetična energija se mu zamanjša na 0 na račun trenja na poti $l - s$:

$$\left(l - v_0\sqrt{2h/g}\right) kmg = \tfrac{1}{2}m\left(v_0 - k\sqrt{2gh}\right)^2 .$$

Ko kvadriramo izraz na desni, hitro uvidimo, da se člena z v_0 pokrajšata, in enačbe ni težko rešiti:

$$v_0 = \sqrt{2kg(l - kh)} = 5{,}3 \text{ m/s}\,.$$

Skupina C

1. *Podatki:* $U = 3{,}0$ V, $R = 100\ \Omega$.

   Zaradi simetrije je napetost na srednjem, na sliki (glej besedilo nalog) vodoravno ležečem uporniku enaka 0. Ker skozenj ne teče tok, ga lahko odmislimo. Tako je vezje sestavljeno iz upornika, vzporedno vezanega s tremi pari zaporedno vezanih upornikov. Za nadomestni upor vezja R' dobimo:

   $$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + 3 \cdot \frac{1}{2R} = \frac{5}{2R}$$

   in za iskani tok $I = 5U/2R = 0{,}075$ A.

2. *Podatki:* $V_0 = 0{,}3\ \text{m}^3$, $S = 1{,}0\ \text{m}^2$, $T_0 = 20°\text{C}$, $T_1 = 20°\text{C}$, $m_d =$ $= 5{,}0$ kg.

   Začetno maso zraka v posodi dobimo iz splošne plinske enačbe

   $$m = p_0\,\frac{V_0 M}{RT_0} = \frac{m_d g}{S} \cdot \frac{V_0 M}{RT_0} = 1{,}8 \cdot 10^{-4} \text{ kg}\,.$$

   Ker je masa plina mnogo manjša od mase deske, odda deska plinu zelo malo toplote in sta končni temperaturi deske in plina kar enaki T_1. Masa zraka, ki uide iz posode, je

   $$\Delta m = \frac{m_d g V_0 M}{SR}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = 3{,}8 \cdot 10^{-5} \text{ kg}\,.$$

3. *Podatki:* $m_1 = 1{,}0$ g, $m_2 = 4{,}0$ g, $e' = 3 \cdot 10^{-8}$ As, $l = 1{,}0$ m.

   Ko kroglici staknemo, se naboj porazdeli v razmerju kapacitet; ker ima večja dvakrat večji radij kot manjša, je na manjši naboj $e = e'/3$, na večji pa $2e$. Sile, ki delujejo na kroglici, kaže slika 2:

   $$F_e = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0(x + y)^2}, \quad F_1 = m_1 g, \quad F_2 = 4F_1\,.$$

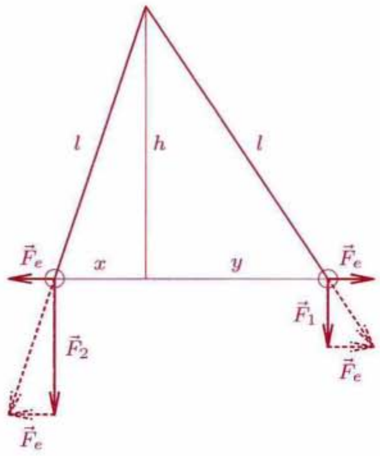
Po predpostavki sta $x, y \ll l$; zvezica med nabojema je potem praktično vodoravna in iz podobnih trikotnikov dobimo

$$\frac{F_e}{F_2} = \frac{x}{h}, \quad \frac{F_e}{F_1} = \frac{y}{h}.$$

Najprej eliminiramo F_e in hitro uvidimo $y = 4x$. Nato še v prvo enačbo vstavimo zgornja izraza za sili in dobimo

$$\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0(5x)^2\, 4m_1 g} = \frac{x}{h} \approx \frac{x}{l},$$

saj pri majhnih kotih lahko tangens nadomestimo s sinusom.



Slika 2.

Razdalja med kroglicama je

$$r = 5x = \sqrt[3]{\frac{5e'^2 l}{72\pi\varepsilon_0 m_1 g}} = 6 \text{ cm}.$$

Prepostavka o majhnih kotih je upravičena, saj je $r \ll l$.

4. *Podatki:* $B = 5{,}0$ T, $P_n = 80$ kW, $\zeta = 0{,}52\ \Omega$m, $v = 60$ m/s, $l = 50$ cm.

a) Ko teče elektrolit v magnetnem polju, deluje na ion v njem sila $F = evB$. Ta sila povzroči, da se na eni plošči začno nabirati ioni s pozitivnim nabojem, na drugi pa ioni z negativnim nabojem. Tako nastane med ploščama električno polje in se pojavi napetost U. Nabiranje nabojev teče toliko časa, dokler nastala električna sila ne uravnovesi magnetne: $eU/l = evB$. Torej velja $U = lvB$.

b) Notranji upor generatorja je $R_n = \zeta l/S$, skupni upor vseh potrošnikov v vasi pa naj bo R. Skozi generator teče tok $I = U/(R + R_n)$ in vas troši moč

$$P = RI^2 = \frac{U^2 R}{(R + R_n)^2}.$$

Iščemo tisti R_n (in prek njega S), da bo zapisana moč P kar največja.

Zapišimo raje

$$P = \frac{U^2}{R_n(\sqrt{\frac{R}{R_n}} + \sqrt{\frac{R_n}{R}})^2},$$

pa mora biti izraz v oklepaju v imenovalcu čim manjši. Če vpeljemo $x = \sqrt{\frac{R}{R_n}}$, mora izraz $x + 1/x$ zavzeti čim manjšo vrednost, kar se zgodi pri $x = 1$, ko je $R = R_n$. Vas lahko troši največjo moč

$$P_m = \frac{U^2 R_n}{4R_n^2} = \frac{U^2 S}{4\zeta l},$$

kjer je $U = lvB$. Dobimo torej $S = 4\zeta P_m / lv^2 B^2 = 3,7\ \mathrm{m}^2$. Med priključkoma generatorja je tedaj napetost $U' = U - R_n I = = UR/(R + R_n) = lvB/2 = 75$ V.

Skupina D

1. Denimo, da se bat premakne v levo za x, $x \ll a$. Gladina v levem delu se dvigne na $h_1 = a^2/(a - x)$, v desnem pa spusti za $h_2 = a^2/(a + x)$, saj se ohranjata prostornini vode v obeh delih posode. Potencialna energija vode, merjena glede na mirovno lego, je potem:

$$W_p = \rho a^2 bg \left[\frac{a^2}{2(a-x)} + \frac{a^2}{2(a+x)} - a\right] = \rho a^2 bg \frac{ax^2}{a^2 - x^2} \approx \rho abx^2 g,$$

če smo z b označili širino posode. Opazujmo gibanje težišča vode. Ko gre težišče skozi mirovno lego, je kinetična energija največja. Hitrost težišča v mirovni legi označimo z v_0; ker je nihanje harmonično, velja $v_0 = x\omega$. V aproksimaciji, ko vzamemo, da je vsa masa zbrana v težišču, dobimo za največjo kinetično energijo sistema

$$W_k = \tfrac{1}{2}\rho a^2 b\, v_0^2 = \tfrac{1}{2}\rho a^2 b\, x^2 \omega^2 .$$

Ker pri nihanju velja, da je največja potencialna energija enaka največji kinetični, dobimo za frekvenco

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2g}{a}} .$$

(Pri natančnejšem izračunu bi dobili $\omega = \sqrt{3g/2a}$).

2. *Podatki:* $\rho_0 = 11\ \mathrm{g/m^3}$, $T_0 = 30°\mathrm{C}$, $p_0 = 1{,}0$ bar, $M = 29$ kg, $\kappa = 7/5$.

a) Iz ohranitve vsote entalpije in potencialne energije, $mc_pT_0 = mc_pT(h) + mgh$, sledi

$$\frac{T_0 - T(h)}{h} = g/c_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{Mg}{R}\,.$$

b) Najprej ugotovimo, kako se gostota vodne pare spreminja z višino; ker je masa dela zraka, ki ga opazujemo, konstantna, velja

$$\frac{\rho(h)}{\rho_0} = \frac{V_{0(\mathrm{zraka})}}{V_{\mathrm{zraka}}(h)}\,.$$

Zrak se razpenja adiabatno

$$T(h)V(h)^{\kappa-1} = T_0V_0^{\kappa-1}$$

in dobimo

$$\rho(h) = \rho_0\left(\frac{T_0 - \Delta T}{T_0}\right)^{5/2}\,,$$

$\Delta T = T_0 - T(h)$. Izračunamo nekaj točk, ki ležijo skoraj na premici. Poiščemo presečišče te premice s krivuljo na grafu (glej besedilo naloge); to je pri temperaturi $T = 9{,}5°\mathrm{C}$, na višini $h = \kappa\Delta TR/(\kappa - 1)Mg = 2{,}0$ km.

3. Glej 4. nalogo skupine C.

Bojan Golli

IZBIRNI TESTI ZA MEDNARODNO MATEMATIČNO OLIMPIADO – Rešitve nalog s str. 255

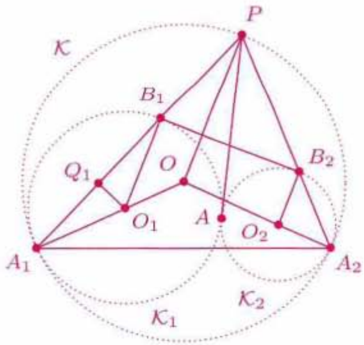
I/1. Označimo središča krožnic $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ z O, O_1 in O_2. Zadošča dokazati, da je

$$\sphericalangle B_2B_1O_1 = \sphericalangle B_1B_2O_2 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Po izreku o potenci točke na krožnico je

$$|PB_1| \cdot |PA_1| = |PA|^2 = |PB_2| \cdot |PA_2|\,,$$

od koder sledi $\frac{|PB_1|}{|PB_2|} = \frac{|PA_2|}{|PA_1|}$. Trikot-



nika PB_1B_2 in PA_2A_1 sta si tako podobna, zato je

$$\sphericalangle PB_1B_2 = \sphericalangle PA_2A_1 = \tfrac{1}{2}\sphericalangle POA_1\,.$$

Trikotnika $A_1O_1B_1$ in A_1OP sta si podobna, zato je $\sphericalangle A_1O_1B_1 = \sphericalangle A_1OP$. Torej je $\sphericalangle PB_1B_2 = \frac{1}{2}\sphericalangle B_1OA_1 = \sphericalangle B_1O_1Q_1$, kjer Q_1 označuje pravokotno projekcijo točke O_1 na premico A_1B_1. Ker je $\sphericalangle O_1B_1Q_1 = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle PB_1B_2$, je $\sphericalangle O_1B_1B_2 = \frac{\pi}{2}$. Enakost $\sphericalangle O_2B_2B_1 = \frac{\pi}{2}$ dokažemo podobno.

I/2. Ničelni polinom ne zadošča pogoju naloge.

Naj bo $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$. Če je $n = 0$, je $x\,p(x)\,p(1-x) + x^3 + 100 = x^3 + a_0^2x + 100$. Ker lahko zavzame ta polinom tudi negativne vrednosti, mora biti $n > 0$. Če je $n > 1$, je $a_n^2(-1)^nx^{2n+1}$ člen najvišje stopnje polinoma $x\,p(x)\,p(1-x) + x^3 + 100$. Ta polinom je torej lihe stopnje in ne more zavzeti samo pozitivnih vrednosti.

Ostane nam le še možnost $n = 1$. Poenostavimo oznake: $p(x) = ax + b$. Potem je

$$x\,p(x)\,p(1-x) + x^3 + 100 = (1-a^2)x^3 + a^2x^2 + (b^2+ab)x + 100\,.$$

Torej mora biti $a^2 = 1$ in $(b^2+ab)^2 - 400a^2 \leq 0$ oz. $|b^2+ab| \leq 20$. Ločimo dva primera: Če je $a = 1$, zadoščajo pogoju $|b^2+b| \leq 20$ vsa števila $-5 \leq b \leq 4$. Če pa je $a = -1$, zadoščajo pogoju $|b^2-b| \leq 20$ števila $-4 \leq b \leq 5$.

Povzemimo: Pogoju naloge zadoščajo vsi polinomi oblike $p(x) = x + b$, $b \in [-5, 4]$ in $p(x) = -x + b$, $b \in [-4, 5]$.

I/3. Označimo iskano število z a_n. Potem je $a_2 = p(p-1)$ in $a_3 = p(p-1)(p-2)$.

Naj bo sedaj $n \geq 4$. Določimo a_n: Točka A_{n-1} leži med točkama A_{n-2} in A_n. Če sta ti dve točki enako obarvani, lahko točki A_{n-2} in A_n identificiramo. Takih barvanj je tako $(p-1)a_{n-2}$, saj lahko točko A_{n-1} pobarvamo na $p-1$ načinov, točke $A_1, \ldots, A_{n-2}$ pa na a_{n-2} načinov. Če pa sta točki A_{n-2} in A_n različno obarvani, je barvanj $(p-2)a_{n-1}$, saj lahko točko A_{n-1} pobarvamo na $p-2$ načinov, točke $A_1, \ldots, A_{n-2}, A_n$ pa na a_{n-1} načinov. Torej je

$$a_n = (p-2)a_{n-1} + (p-1)a_{n-2}\,.$$

Rešimo diferenčno enačbo: Pripadajoči karakteristični polinom $t^2 - (p-2)t - (p-1)$ ima ničle $t = p-1$ in $t = -1$. Splošna rešitev je zato oblike $a_n = A(p-1)^n + B(-1)^n$. Nazadnje upoštevamo začetne vrednosti in dobimo $A = 1$, $B = p-1$. Točke lahko torej pobarvamo na $a_n = (p-1)^n + (-1)^n(p-1)$ načinov.

II/1. Uporabimo kosinusni izrek v trikotniku A_1B_1C in dobimo

$$|A_1B_1|^2 = |A_1C|^2 + |B_1C|^2 - |A_1C| \cdot |B_1C|\,,$$

saj je $\cos \sphericalangle A_1CB_1 = \frac{1}{2}$. Če upoštevamo neenakost $x^2 + y^2 - xy \geq xy$, dobimo oceno

$$|A_1B_1|^2 \geq |A_1C| \cdot |B_1C|\,.$$

Povsem analogno izpeljemo tudi neenakosti

$$|B_1C_1|^2 \geq |B_1A| \cdot |C_1A| \quad \text{in} \quad |C_1A_1|^2 \geq |C_1B| \cdot |A_1B|\,.$$

Ko dobljene neenakosti zmnožimo

$$(|A_1B_1| \cdot |B_1C_1| \cdot |C_1A_1|)^2 \geq |A_1C| \cdot |B_1C| \cdot |B_1A| \cdot |C_1A| \cdot |C_1B| \cdot |A_1B|\,,$$

upoštevamo Cevov izrek

$$|A_1B| \cdot |B_1C| \cdot |C_1A| = |A_1C| \cdot |C_1B| \cdot |B_1A|$$

in korenimo, je naloga rešena. Pripomnimo še, da velja enakost natanko tedaj, ko je $|A_1B| = |A_1C|$, $|B_1C| = |B_1A|$, $|C_1A| = |C_1B|$; tj. natanko tedaj, ko je P središče trikotnika ABC.

II/2. Oglejmo si najprej primer, ko je prva vrstica pobarvana alternirajoče (dve možnosti). Potem moramo tudi drugo vrstico pobarvati alternirajoče in obe alternirajoči barvanji sta dopustni. Torej lahko celotno mrežo pobarvamo na 2^n načinov.

V drugem primeru pa naj ima prva vrstica (vsaj) dve enako obarvani sosednji oglišči. Zaradi pogoja naloge je druga vrstica natančno določena: pobarvana je komplementarno. S ponavljanjem razmisleka ugotovimo, da so tudi ostale vrstice natančno določne. Nazadnje še preštejmo, koliko je barvanj prve vrstice, kjer sta (vsaj) dve sosednji oglišči enako obarvani: vseh barvanj je 2^n, in razen dveh alternirajočih barvanj imajo vsa barvanja to lastnost. Število barvanj je torej $2^n - 2$.

Skupno število barvanj mreže je torej $2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$.

II/3. Če je $p = 2$, je $2^p + 3^p = 13$, in v tem primeru je $n = 1$ res edina možnost. Naj bo sedaj $p > 2$ in naj bo $2^p + 3^p = a^n$ za neki $n > 1$. Ker je p liho število, lahko razstavimo

$$a^n = 2^p + 3^p = (2+3)(2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1}) = 5\,m\,,$$

zato $5 \mid a$. Število $5\,m$ je torej deljivo s 5^n. Ker pa je $n > 1$, je število $5\,m$ deljivo (vsaj) s 25, zato $5 \mid m$. Ker je $3 \equiv -2 \pmod 5$, je

$$m = 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \cdots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1} \equiv p\,2^{p-1} \pmod 5\,.$$

Torej $5 \mid p$ in je $p = 5$, saj je p praštevilo. Sedaj pa smo zašli v protislovje, saj število $2^5 + 3^5 = 275 = 5^2 \cdot 11$ ni oblike a^n za noben $a \in \mathbb{N}$ in $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$.

Matjaž Željko

PRESEK

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
25. letnik, šolsko leto 1997/98, številka 5, strani 257 – 320

Dopisi in naročnine: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – Podružnica Ljubljana – Komisija za tisk, Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964, tel. (061) 1232-460, št. ŽR 50106-678-47233. Naročnina za šolsko leto 1997/98 je za posamezne naročnike **1.620 SIT**, za skupinska naročila šol **1.350 SIT**, posamezna številka **324 SIT**, za tujino 30.000 LIT, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, val-27621-42961/9, Ajdovščina 4, Ljubljana.

List sofinancirata MZT in MŠŠ
Ofset tisk DELO – Tiskarna, Ljubljana

Po mnenju MZT št. 415-52/92 z dne 5.2.1992 šteje revija med proizvode iz 13. točke tarifne št. 3 zakona o prometnem davku, za katere se plačuje 5% davek od prometa proizvodov.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

PONOVNO SAM SEBE

V predlanskem letniku Preseka (Še enkrat sam sebe, Presek 23 (1995/96) št. 6, str. 367–368) je bil objavljen program v programskem jeziku C, ki brez uporabe datotek izpiše sam sebe (svojo izvorno kodo). Rešitev je bila kar zvita in ne preveč dolga. Objavljeni program je imel 34 vrstic, temeljil pa je na spretni uporabi tabele nizov, v katero je bil zapisan večji del kode programa. Pred časom pa sem v knjigi

S. P. Harbison, G. L. Steele Jr.: C, A Reference Manual (4. izdaja), Prentice Hall, 1995

na strani 378 našel še krajšo in še bolj zvito rešitev. Tule je, napisana nekoliko manj strnjeno kot v knjigi:

```
#include <stdio.h>
char b='\\',n='\n',q='"',
  *e="#include <stdio.h>%c%cchar b='%c%c',n='%cn',q='%c',%c  *e=%c%s%c,%c",
  *f="  *f=%c%s%c,%c  *g=%c%s%c,%c  *h=%c%s%c;%c%cint main(void)%c{%c  pr",
  *g="intf(e,n,n,b,b,b,q,n,q,e,q,n);%c  printf(f,q,f,q,n,q,g,q,n,q,h,q,n,",
  *h="n,n,n);%c  printf(g,n);%c  printf(h,n,n,n,n,n);%c  return 0;%c}%c";
int main(void)
{
  printf(e,n,n,b,b,b,q,n,q,e,q,n);
  printf(f,q,f,q,n,q,g,q,n,q,h,q,n,n,n,n);
  printf(g,n);
  printf(h,n,n,n,n,n);
  return 0;
}
```

Pravzaprav bi gornjo rešitev lahko napisali še precej krajše, recimo v treh (za Presek sicer predolgih) vrsticah. Prva bi vsebovala ukaz `#include`, druga definicije spremenljivk `b`, `n`, `q` in `e` (spremenljivk `f`, `g` in `h` ne bi potrebovali), tretja pa funkcijo `main`, v njenem telesu pa le (en) ukaz `printf` in klic `return`. Zapis take rešitve vam prepuščam za vajo.

In kako boste preverili, ali ste napisali dobro rešitev? Če delate z Microsoftovim operacijskim sistemom (DOS, Okna), potem to storite takole. Recimo, da imate izvorni program na datoteki `samsebe.c`, prevedenega pa na datoteki `samsebe.exe`. V ukazni vrstici napišete

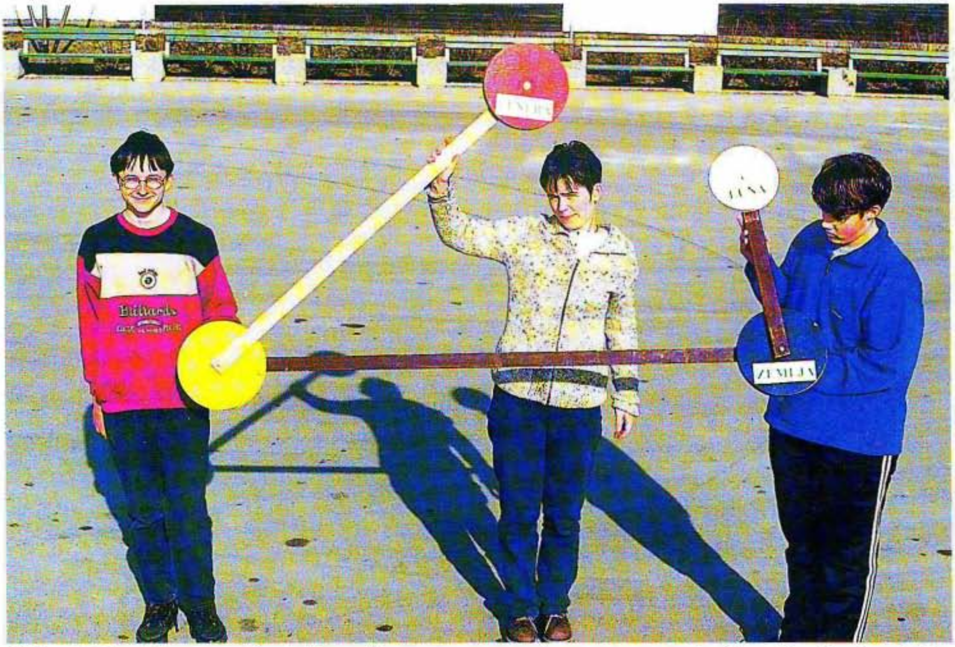
```
samsebe >izhod.txt
```

Program se bo izvedel, namesto na zaslon pa bo izpis preusmerjen na datoteko `izhod.txt`. Nato z vgrajenim ukazom `comp` (v Oknih 95 se enakovreden ukaz imenuje `fc`) primerjate vsebini datotek `samsebe.c` in `izhod.txt`:

```
comp samsebe.c izhod.txt
```

Če ste napisali dobro rešitev, bo ukaz javil, da sta datoteki enaki (`Files compare OK`).

Martin Juvan



Slika 3. Model, s katerim lahko učencem ponazorimo zvezo med siderskim in sinodskim mesecem. Z istim modelom lahko prikažemo še kroženje bližnjih planetov okrog Sonca in Lune okrog Zemlje.

Slika 4. Živahno razpravljanje učencev o medsebojnih legah planetov glede na Zemljo in Sonce (na slikah so učenci OŠ Šmarje pri Jelšah).