Niko Prijatelj

KARAKTERIZACIJA HILBERTOVEGA PROSTORA Z INVOLUCIJO ADJUNGIRANIH OPERATORJEV

Ljubljana 1961

V splošni teoriji vektorskih topoloških prostorov pripada posebno mesto normiranim vektorskim prostorom, katerih topologija je določena z metriko na preprost in naraven način. Izmed teh prostorov sta zdaj že skoraj klasična Hilbertov in Banachov prostor. Prvi je tesno povezan s teorijo linearnih integralnih enačb in je pognal neposredno iz ustrezne Hilbertove[1] teorije kvadratnih form $\sum a_{ij}x_ix_j$ s števno neskončno spremenljivkami $x_1, x_2, \ldots$, za katere je $\sum |x_i|^2 < \infty$. Svojo današnjo abstraktno in aksiomatično obliko pa je dobil šele po zaslugi J. von Neumanna[2] in v delih F. Riesza[3] ter M.H. Stone-a[4]. Genezo drugega, Banachovega prostora, je treba iskati v raziskavah M. Frécheta, F. Hausdorffa, F. Riesza in še nekaterih drugih matematikov, dokler ne dobi svoje dokončne podobe v slovitem Banachovem delu[5] o linearnih transformacijah. Kakor je dobro znano, je Banachov prostor poln normiran vektorski prostor z običajnimi lastnostmi norme :

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0 \, .$$

Hilbertov prostor pa je vektorski prostor, v katerem je definiran tako imenovani skalarni produkt z lastnostmi :

$$(x_1 + x_2 , x_3) = (x_1 , x_3) + (x_2 , x_3)$$

$$(x_1 , x_2) = \overline{(x_2 , x_1)}$$

$$(\alpha x_1 , x_2) = \alpha (x_1 , x_2)$$

$$x \neq 0 \Rightarrow (x , x) > 0 ,$$

in dodatno zahtevo, da je poln v smislu norme, ki je definirana s skalarnim produktom

$$\|x\| = (x , x)^{1/2} .$$

Seveda ima skalarni produkt v kompleksnem Hilbertovem prostoru kompleksne vrednosti, v realnem Hilbertovem prostoru pa le realne vrednosti. Zato pišemo v realnem primeru enakost $(x_1 , x_2) = \overline{(x_2 , x_1)}$ kar $(x_1 , x_2) = (x_2 , x_1)$.

Zaradi Schwarzove neenačbe

$$|(x_1 , x_2)| \leq \|x_1\| . \|x_2\| ,$$

ki velja za poljubna dva vektorja v Hilbertovem prostoru, je vsak Hilbertov prostor hkrati Banachov prostor z isto normo. Obratna trditev pa gotovo ni vselej resnična. Za normo, ki je v Hilbertovem prostoru definirana s skalarnim produktom, velja namreč dodatna lastnost, da je

$$\|x_1 + x_2\|^2 + \|x_1 - x_2\|^2 = 2 \|x_1\|^2 + 2 \|x_2\|^2 .$$

Ta "paralelogramska" lastnost pa nikakor ni obvezna za normo v poljubnem Banachovem prostoru. Tako na primer že ne velja v posebnih Banachovih prostorih L^p, če je $p \neq 2$. Toda Jordan in von Neumann sta pokazala[6], da je "paralelogramska" lastnost ne samo potreben ampak tudi zadosten pogoj za to, da je ustrezni Banachov prostor Hilbertov prostor z isto normo. Če ima namreč norma nekega Banachovega prostora tudi to lastnost, potem lahko definiramo v tem prostoru realno oziroma kompleksno funkcijo, pač glede na to če je prostor realen ali kompleksen,

$$(x_1 , x_2) = \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|^2$$

oziroma

$$(x_1 , x_2) = \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|^2 + i \left\| \frac{x_1 + ix_2}{2} \right\|^2 - i \left\| \frac{x_1 - ix_2}{2} \right\|^2 ,$$

ki ima res vse predpisane lastnosti skalarnega produkta.

Zaradi dobro poznanih, važnih lastnosti, ki veljajo v Hilbertovem, v poljubnem Banachovem prostoru pa ne, je bilo povsem naravno, da so se mnogi avtorji lotili raziskav, ki so imele za cilj določitev raznovrstnih potrebnih in zadostnih pogojev, pod katerimi je Banachov prostor Hilbertov prostor. S tem v zvezi je treba posebej omeniti delo Lorcha[7] in Day-a[8]. Vendar je problem karakterizacije Hilbertovega prostora, kljub mnogim že znanim rešitvam, še vedno mikavna tarča nekaterim matematikom[9]. Temu problemu je namenjeno tudi pričujoče delo. Ker bo vodila naša pot preko algebre vseh omejenih linearnih operatorjev, ki dejstvujejo nad danim prostorom, si oglejmo razliko med Banachovim in Hilbertovim prostorom prav s te plati.

Naj bo $\mathcal{B}$ poljuben Banachov prostor in $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) algebra vseh omejenih linearnih operatorjev tega prostora. Če je $A \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$ in $f \in \mathcal{B}^*$, kjer pomeni $\mathcal{B}^*$ k $\mathcal{B}$ dualni Banachov prostor vseh omejenih linearnih funkcionalov, potem je za vsak $x \in \mathcal{B}$ definirana funkcija

$$(*) \qquad g(x) = f(Ax) ,$$

ki je očitno zopet omejen in linearen funkcional, torej element prostora $\mathcal{B}^*$. Zlahka se prepričamo, da je s preslikavo $f \to g$ določeni operator v prostoru $\mathcal{B}^*$ linearen in omejen, z normo, ki je enaka normi operatorja A. Če označimo ta, k operatorju A dualni, operator z A', potem je

$$g = A'f$$

in njegova definicija je razvidna iz formule

$$(A'f)(x) = f(Ax) ,$$

ki jo pišemo bolj simetrično tudi

$$\langle x , A'f \rangle = \langle Ax , f \rangle .$$

Lahko je pokazati, da se pokorava preslikava $A \to A'$ algebre $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) v algebro $\mathcal{A}(\mathcal{B}^*)$ naslednjim pravilom :

$$(\alpha A + \beta B)' = \alpha A' + \beta B'$$

$$(AB)' = B'A'$$

$$\|A'\| = \|A\| .$$

V primeru Hilbertovega prostora pa lahko te odnose močno poenostavimo. Ker se po znanem Rieszovem teoremu vsak Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ izometrično in povratno enolično preslika na svoj dualni prostor $\mathcal{H}^*$, smemo namreč ta dva prostora identificirati, s tem da enačimo vsak element $f \in \mathcal{H}^*$ s tistim elementom $z \in \mathcal{H}$, ki je enolično določen z enačbo

$$(**) \qquad f(x) = (x\,,\,z)\,,$$

pri čemer je $\|f\| = \|z\|$. Ako je torej v primeru Hilbertovega prostora $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$ in $f \in \mathcal{H}^{\times}$, potem lahko zapišemo zgornjo definicijsko enačbo$(*)$ za vsak $x \in \mathcal{H}$ v obliki

$$(x\,,\,u) = (Ax\,,\,z)\,,$$

kjer sta z in u tista elementa prostora $\mathcal{H}$, s katerima enačimo na osnovi enačbe$(**)$ ustrezna elementa f in g prostora $\mathcal{H}^{\times}$. Preslikavo $f \to g$ v $\mathcal{H}^{\times}$ enačimo torej v tem primeru s preslikavo $z \to u$ ustreznih elementov v $\mathcal{H}$. Če označimo ustrezni operator z $A^{\times}$, potem je

$$u = A^{\times} z\,,$$

in njegova definicija je razvidna iz formule

$$(x\,,\,A^{\times} z) = (Ax\,,\,z)\,,$$

ki ni nič drugega, kot definicijska formula adjungiranega operatorja $A^{\times}$, k danemu operatorju A v Hilbertovem prostoru.

Preslikavi $A \to A'$ algebre $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$ v algebro $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B}^{\times})$ v primeru splošnega Banachovega prostora, ustreza potemtakem v primeru Hilbertovega prostora preslikava $A \to A^{\times}$ algebre $\mathcal{A}$ $(\mathcal{H})$ s a m e v a s e, pri čemer se preslika vsak operator A v njemu adjungirani operator $A^{\times}$. Za to preslikavo pa veljajo naslednje znane lastnosti :

$$(1) \qquad (\alpha A + \beta B)^{\times} = \bar{\alpha} A^{\times} + \bar{\beta} B^{\times}$$

$$(2) \qquad (A^{\times})^{\times} \equiv A^{\times\times} = A$$

$$(3) \qquad (AB)^{\times} = B^{\times} A^{\times}$$

$$(4) \qquad \|A^{\times} A\| = \|A\|^2 = \|A^{\times}\|^2\,.$$

Preslikava operatorja A v njemu adjungirani operator A^* ustvarja torej v algebri $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ involucijo. Zaradi lastnosti (4) pravimo, da je ta involutivna algebra polnoregularna.

S tem v zvezi mi je profesor dr. Ivan Vidav dal naslednjo nalogo :

Č e i m a a l g e b r a v s e h o m e j e n i h l i n e a r n i h o p e r a t o r j e v $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ k a k e g a p o l j u b n e g a B a n a c h o v e g a p r o s t o r a $\mathcal{B}$ i n v o l u c i j o i n p o l n o r e g u l a r n o n o r m o , če torej eksistira v tej algebri preslikava $A \rightarrow A^*$, ki ustreza vsem zgoraj naštetim lastnostim (1), (2), (3) in (4), p o t e m j e t r e b a d o k a z a t i , d a j e t a B a n a c h o v p r o s t o r H i l b e r t o v p r o s t o r z i s t o n o r m o .

Pravilnost te trditve bi torej pomenila novo karakterizacijo Hilbertovega prostora, ki bi bila tokrat izražena z involucijo adjungiranih operatorjev.

Kolikor mi je bilo v ta namen literature na dosegu, sem zasledil le dva članka, ki sta v ožji zvezi z navedenim problemom. Avtorja obeh člankov sta Kakutani in Mackey. V prvem članku[10] obravnavata realni, v drugem[11] pa kompleksni Hilbertov prostor. V obeh primerih karakterizirata avtorja Hilbertov prostor najprej z m r e ž o zaprtih podprostorov in nato še s k o l o b a r j e m vseh omejenih linearnih operatorjev, s tem, da drugo karakterizacijo prevedeta na prvo. Njun rezultat je v kratkem naslednji :

Če eksistira v mreži $\mathcal{M}$ ($\mathcal{B}$) vseh zaprtih podprostorov oziroma v kolobarju $\mathcal{R}$ ($\mathcal{B}$) vseh omejenih linearnih operatorjev kakega Banachovega prostora $\mathcal{B}$ preslikava $M \rightarrow M'$ oziroma $A \rightarrow A'$, ki ima naslednje lastnosti :

(a) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow M_2' \subseteq M_1'$

(b) $M'' = M$

(c) $M' \cap M = \emptyset$

oziroma

(a') $(A + B)' = A' + B'$

(b') $A'' = A$

(c') $(AB)' = B'A'$

(d') $A'A = 0 \Rightarrow A = 0$,

potem je prostor $\mathcal{B}$ izomorfen nekemu Hilbertovemu prostoru. V danih pogojih moremo v prostoru $\mathcal{B}$ definirati skalarni produkt in sicer tako, da je nova norma, ki je določena s tem skalarnim produktom, e k v i v a l e n t n a prvotni normi.

Ker se ne bom pri obravnavanju svoje naloge poslužil niti dokazovalnih metod niti rezultata obeh avtorjev, sem navedel le njun končni izsledek, ki je očitno zelo blizu trditve, katero moram dokazati.

Pri naši raziskavi se bomo omejili na primer kompleksnega Banachovega prostora. Naj bo torej $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) kompleksna Banachova algebra z enoto, involucijo in polnoregularno normo. Kakor je znano, so v taki algebri hermitski elementi, za katere velja enakost $A^* = A$, vedno prisotni. Saj je pri poljubnem $X \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) element X^*X gotovo hermitski pa tudi enota, ki je v našem primeru identični operator I, je hermitski element. Toda taka algebra vsebuje tudi elemente, za katere velja enakost

$$U^*U = UU^* = I ,$$

in ki jih bomo zato imenovali unitarne operatorje. O eksistenci unitarnih operatorjev se prepričamo takole :

Bodi A hermitski operator, katerega norma ni večja od 1, torej $A^* = A$ in $\|A\| \leq 1$. Zahtevi glede norme vedno lahko ustrežemo. Če je namreč prvotna norma operatorja A večja od 1, vzamemo namesto njega operator kA, ki je za realne k tudi hermitski. Z dobro izbiro realnega k pa vedno lahko dosežemo, da je $\|kA\| = |k|\,\|A\| \leq 1$. Naj bo torej kar A hermitski operator z normo ne večjo od 1. Potem je tudi operator $A^2 = A^*A$ hermitski z normo, ki ni večja od 1. Ker je algebra $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) polna in ima enoto in polnoregularno normo, je tudi polnosimetrična. V polnosimetričnih algebrah pa velja, da ima vsak hermitski element realen, vsak element oblike A^*A pa realen nenegativen spekter. Zato ima torej operator A^2 realen nenegativen spekter, ki je ujet v interval med 0 in 1, če upoštevamo dejstvo, da pridejo za spekter v račun le vrednosti, ki absolutno ne presegajo norme ustreznega operatorja. Operator $I - A^2$ je seveda tudi hermitski s spektrom med 0 in 1. Zaradi tega eksistira hermitski operator B tako, da je $B^2 = I - A^2$. Če postavimo zdaj

$$U = A + iB ,$$

je

$$U^* = A - iB ,$$

in

$$U^*U = UU^* = I ,$$

kar smo hoteli dokazati.

Neposredno iz definicije unitarnega operatorja dobimo še naslednje njegove lastnosti :

Norma unitarnega operatorja in njegove slike je 1. Zaradi (4) namreč velja

$$1 = \|I\| = \|U^*U\| = \|U\|^2 = \|U^*\|^2 .$$

Unitarni operator preslika prostor $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B}$. To je očitno iz dejstva, da je slika unitarnega operatorja hkrati njemu inverzni operator

$$U^* = U^{-1} .$$

Preslikava z unitarnim operatorjem je izometrična. Ker je norma unitarnega operatorja in njegove slike enaka 1, velja

$$\|Ux\| \leq \|x\|$$

in

$$\|x\| = \|U^{\times}Ux\| \leqq \|Ux\| ,$$

kar nam da res

$$\|Ux\| = \|x\| .$$

Konstruirajmo zdaj primeren pozitiven funkcional algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$! Na osnovi Hahn - Banachovega teorema je mogoče prirediti vsakemu od nič različnemu elementu $a \in \mathcal{B}$ tak element $f \in \mathcal{B}^{*}$, da velja

$f(a) = \|a\|$ in $\|f\| = 1$, torej tudi $|f(x)| \leqq \|x\|$

za vsak $x \in \mathcal{B}$. Če izberemo element $a \in \mathcal{B}$ tako, da je njegova norma enaka 1, potem je seveda $f(a) = 1$.

Bodi to tako in definirajmo s tem funkcionalom f, ki dejstvuje na prostoru $\mathcal{B}$, funkcional g nad algebro $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ takole : za vsak $X \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$ naj bo

$$g(X) = f(Xa) .$$

Funkcional g je očitno linearen. Njegova norma pa je enaka 1 . Kajti

$$|g(X)| = |f(Xa)| \leqq \|X\| \text{ in } g(I) = f(a) = 1 .$$

Iz tega dejstva pa smemo zaključiti, da je $g(X)$ p o z i t i v e n funkcional algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ [12]. Potemtakem velja za vsak $X \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$

$$(5) \qquad g(X^{\times}X) \geqq 0 .$$

Toda vsak pozitiven funkcional nad algebro z enoto in involucijo je tudi realen. To se pravi, da zavzame za vsak hermitski element realno vrednost in da velja še posebej za vsak element X algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$

$$(6) \qquad g(X^{\times}) = \overline{g(X)} .$$

Zato moremo s funkcionalom g vpeljati, po znani metodi[13], v algebro $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ neko pozitivno hermitsko bilinearno formo, s tem da postavimo

(7) $$(X\,,\,Y) = g(Y^*X)\ .$$

Res je :

a) zaradi linearnosti funkcionala g

$$(X + Y,Z) = g\left[Z^*(X + Y)\right] = g(Z^*X + Z^*Y) = g(Z^*X) + g(Z^*Y) = $$
$$= (X,Z) + (Y,Z)$$

b) zaradi (3) in (6)

$$(X,Y) = g(Y^*X) = g\left[(X^*Y)^*\right] = \overline{g(X^*Y)} = \overline{(Y,X)}$$

c) zaradi linearnosti funkcionala g

$$(\alpha X,Y) = g(Y^*\alpha X) = g(\alpha Y^*X) = \alpha\, g(Y^*X) = \alpha\,(X,Y)$$

d) zaradi (5)

$$(X,X) = g(X^*X) \geqq 0\ .$$

Znano je tudi dejstvo, da tvorijo elementi algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, za katere je

(8) $$(X,X) = g(X^*X) = 0\ ,$$

neki levi ideal J_L te algebre.

Kajti :

a') množica J_L ni prazna, ker je

$$(0,0) = g(0^*0) = g(0) = 0$$

b') množica J_L ne obsega vse algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, kajti

$$(I,I) = g(I^*I) = g(I) = 1$$

c') množica J_L je vektorski podprostor v $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, ker

$$X \in J_L \text{ in } Y \in J_L \Longrightarrow \alpha X \in J_L \text{ in } X + Y \in J_L\ ,$$

saj velja

$$(\alpha X, \alpha X) = g(\overline{\alpha} X^{*} \alpha X) = |\alpha|^{2} g(X^{*}X) = 0 ,$$

in

$$(X + Y, X + Y) = g\left[(X + Y)^{*} (X + Y)\right] = g(X^{*}X + X^{*}Y + Y^{*}X + Y^{*}Y) =$$

$$= g(X^{*}X) + g(X^{*}Y) + g(Y^{*}X) + g(Y^{*}Y) = g(X^{*}Y) + g(Y^{*}X) .$$

Toda če ta dva člena ocenimo po Schwarzovi neenačbi za pozitivne funkcionale

$$\left|g(X^{*}Y)\right|^{2} \leqq g(X^{*}X) \cdot g(Y^{*}Y) ,$$

vidimo, da imata tudi vrednost nič.

d') $X \in J_L$ in $Y \in \mathcal{A}(\mathcal{B}) \Longrightarrow YX \in J_L$

Kajti

$$(YX, YX) = g\left[(YX)^{*} (YX)\right] = g(X^{*}Y^{*}YX) .$$

Toda po Schwarzovi neenačbi zopet lahko ocenimo

$$\left|g\left[(X^{*}Y^{*}Y)\, X\right]\right|^{2} \leqq g\left[(X^{*}Y^{*}Y)(X^{*}Y^{*}Y)^{*}\right] g(X^{*}X) = 0 .$$

Doslej smo se zanimali za razmere v algebri $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$. Zdaj pa poglejmo, kakšne nasledke lahko potegnemo iz vsega tega v prostoru $\mathcal{B}$!

Osnovna zveza, iz katere smo izhajali, je bila dana s formulo

$$g(X) = f(Xa) .$$

V tej relaciji je očitno vsebovana preslikava algebre $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$ v prostor $\mathcal{B}$, namreč

$$X \to Xa ,$$

pri čemer je a fiksen element prostora $\mathcal{B}$ z normo 1. Oglejmo si zdaj to preslikavo malo natančneje! Označimo operator te preslikave z W, tako da je

$$W(X) = Xa \ .$$

Operator W je seveda očitno linearen. Njegova norma je 1, kajti

$$\|W(X)\| = \|Xa\| \leq \|X\| \quad \text{in} \quad \|W(I)\| = \|a\| = 1 \ .$$

Naj bo $\mathcal{N}(W)$ ničelni prostor operatorja W. Takoj se lahko prepričamo, da je $\mathcal{N}(W)$ levi ideal algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Res

a") množica $\mathcal{N}(W)$ ni prazna, ker je

$$W(0) = 0$$

b") množica $\mathcal{N}(W)$ ne obsega vse algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, kajti

$$W(I) = a \neq 0$$

c") množica $\mathcal{N}(W)$ je vektorski podprostor v $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ po definiciji pojma ničelnega prostora operatorja

d") $X \in \mathcal{N}(W)$ in $Y \in \mathcal{A}(\mathcal{B}) \Rightarrow YX \in \mathcal{N}(W)$,

saj velja

$$W(YX) = (YX)\,a = Y(Xa) = Y(0) = 0 \ .$$

Očitno se nam zdaj vsiljuje primerjava levega ideala $\mathcal{N}(W)$ z levim idealom J_L, ki druži vse elemente algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, za katere velja enačba (8). Za naše namene je potrebno pokazati, da sta ta dva leva ideala identična, da je torej

$$(9) \qquad \mathcal{N}(W) = J_L \ .$$

En del te trditve lahko kaj hitro preverimo. Skoraj neposredno je namreč razvidno, da je

$$\mathcal{N}(W) \subset J_L \ .$$

Če namreč upoštevamo definicije obeh idealov, operatorja W in pozitivnega funkcionala g , dobimo takoj

$$X \in \mathcal{N}(W) \Rightarrow Xa = 0 \Rightarrow X^* Xa = 0 \Rightarrow f(X^* Xa) = 0 \Rightarrow g(X^* X) = 0 \Rightarrow X \in J_L.$$

Dokaz drugega dela, da je tudi

(10) $$J_L \subset \mathcal{N}(W) ,$$

pa ni tako pri vrhu. Da bomo v njem uspeli, bomo poklicali na pomoč unitarne operatorje, katerih eksistenco in poglavitne lastnosti smo ugotovili že na začetku tega pisanja. Zdaj pa bomo z dodatno hipotezo zahtevali, da vsebuje naša algebra $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ dovolj unitarnih operatorjev. Precizen pomen te zahteve bomo formulirali takole :

Naj bo a poljubno izbran element iz prostora $\mathcal{B}$, z normo enako 1. Če je x poljuben element iz $\mathcal{B}$, ki ima tudi normo 1, potem eksistira v algebri $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ vsaj en unitarni operator U tako, da je $x = Ua$.

Očitno bi lahko tudi rekli :

Če sta x in y poljubna elementa iz $\mathcal{B}$ in imata oba normi enaki 1, potem vedno eksistira v algebri $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ tak unitarni operator U, da je

$$y = Ux \quad \text{in} \quad x = U^{*}y .$$

Saj če je

$$y = Ux ,$$

je res tudi

$$U^{*}y = U^{*}Ux = Ix = x .$$

O pravilnosti te dodatne hipoteze se bomo prepričali kasneje. Za zdaj se hočemo z njo samo okoristiti.

Upoštevaje to hipotezo takoj vidimo, da je zaloga vrednosti operatorja W ves prostor $\mathcal{B}$.

Če je namreč x poljuben od nič različen element prostora $\mathcal{B}$, je $x/\|x\|$ element z normo 1. Torej eksistira po tej hipotezi vsaj en unitarni operator U tako, da je

$$x/\|x\| = Ua \qquad \text{oziroma} \qquad x = \|x\|\, Ua \ .$$

Seveda je $\|x\|\, U$ tudi element algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ in če ga pišemo na kratko z X, je res

$$W(X) = Xa = \|x\|\, Ua = x \ .$$

Pa dokažimo naposled še drugi del enakosti (9), torej relacijo (10) ! Dokazali bomo logično ekvivalentno relacijo

$$C\mathcal{N}(W) \subset C J_L \ ,$$

kjer pomenita $C\mathcal{N}(W)$ in $C J_L$ komplementa ustreznih podprostorov $\mathcal{N}(W)$ in J_L glede na algebro $\mathcal{A}(\mathcal{B})$.

Če je torej

$$X \in C\mathcal{N}(W) \ ,$$

potem je

$$W(X) = Xa = x \neq 0 \ .$$

Po hipotezi eksistira vsaj en unitarni operator U tako, da je

$$x/\|x\| = Ua \qquad \text{oziroma} \qquad Xa = x = \|x\|\, Ua \ ,$$

kar lahko pišemo

$$(X - \|x\| U)\, a = 0 \ .$$

Operator $(X - \|x\| U)$ je potemtakem element levega ideala $\mathcal{N}(W)$. Ker pa smo že dokazali, da J_L vsebuje $\mathcal{N}(W)$, pripada ta operator tudi levemu idealu J_L, torej

$$(X - \|x\|U) \in J_L .$$

Brž pa se lahko prepričamo, da velja za poljubna dva elementa X in Y algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, naslednja logična implikacija

$$(11) \qquad X - Y \in J_L \Longrightarrow g(X^*X) = g(Y^*Y) .$$

Kajti

$$|g(X^*X) - g(Y^*Y)| = |g[X^*(X - Y)] + g[(X - Y)^* Y]| \leq$$
$$\leq |g[X^*(X - Y)]| + |g[(X - Y)^* Y]| = 0 ,$$

ker je po Schwarzovi neenačbi, upoštevaje dejstvo $X - Y \in J_L$,

$$|g[X^*(X - Y)]|^2 \leq g(X^*X) \cdot g[(X - Y)^*(X - Y)] = 0$$
$$|g[(X - Y)^* Y]|^2 \leq g[(X - Y)^*(X - Y)] \cdot g(Y^*Y) = 0 .$$

V našem primeru torej velja

$$(12) \qquad g(X^*X) = g(\|x\|U^*\|x\|U) = \|x\|^2 g(U^*U) = \|x\|^2 g(I) = \|x\|^2 .$$

No, in ker $x \neq 0$, tudi $\|x\|^2 = g(X^*X) \neq 0$, kar pomeni, da je

$$X \in \mathcal{C} J_L .$$

Prišli smo torej do naslednjega rezultata :

Ničelni prostor operatorja W , ki preslika algebro $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ n a prostor $\mathcal{B}$, je tisti levi ideal algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, katerega elementi so določeni z enačbo (8) :

$$(X,X) = g(X^*X) = 0 .$$

Potemtakem velja naslednja logična ekvivalenca :

$$(13) \qquad W(X) = W(Y) \Longleftrightarrow W(X - Y) = 0 \Longleftrightarrow X - Y \in J_L .$$

Toda relacija (13) je e k v i v a l e n č n a relacija v algebri $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$, saj je J_L linearni podprostor v $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Če tvorimo torej f a k t o r s k i prostor po modulu J_L, je ta faktorski prostor $\mathcal{A}(\mathcal{B})/J_L$ i z o m o r f e n s prostorom $\mathcal{B}$, upoštevaje seveda dejstvo, da je zaloga vrednosti operatorja W v e s prostor $\mathcal{B}$. Zato smemo ekvivalenčne razrede, ki so elementi tega faktorskega prostora, identificirati z ustreznimi elementi prostora $\mathcal{B}$. Ker je $X \in J_L \Leftrightarrow W(X) = 0$, enačimo torej levi ideal J_L z ničelnim elementom prostora $\mathcal{B}$.

Pozitivno hermitsko bilinearno formo, ki smo jo definirali v algebri $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$, moremo sedaj vpeljati tudi v prostor $\mathcal{B}$ takole : Če sta x in y elementa prostora $\mathcal{B}$ in je $x = W(X)$ ter $y = W(Y)$, naj bo

$$(x,y) = (X,Y) = g(Y^*X) .$$

Ta definicija je povsem smiselna, ker je neodvisna od posebne izbire reprezentantov ustreznih ekvivalenčnih razredov x in y. Če je namreč tudi $x = W(X_1)$ in $y = W(Y_1)$, se lahko takoj uverimo, da je

$$(X , Y) = (X_1,Y_1) .$$

Zaradi (13) je namreč

$$X - X_1 \in J_L \text{ in } Y - Y_1 \in J_L .$$

Zdaj pa imamo naslednjo oceno :

$$\begin{aligned} \left|(X,Y) - (X_1,Y_1)\right| &= \left|g(Y^*X) - g(Y_1^* X_1)\right| = \\ &= \left|g\left[Y^*(X - X_1)\right] + g\left[(Y - Y_1)^* X_1\right]\right| \leq \\ &\leq \left|g\left[Y^*(X - X_1)\right]\right| + \left|g\left[(Y - Y_1)^* X_1\right]\right| = 0 , \end{aligned}$$

saj je zopet po Schwarzovi neenačbi

$$\left|g\left[Y^{*}(X - X_1)\right]\right|^{2} \leq g(Y^{*}Y) \cdot g\left[(X-X_1)^{*}(X-X_1)\right] = 0$$

$$\left|g\left[(Y-Y_1)^{*} X_1\right]\right|^{2} \leq g\left[(Y-Y_1)^{*}(Y-Y_1)\right] \cdot g(X_1^{*} X_1) = 0 .$$

Toda v prostoru $\mathcal{B}$ postane ta forma s k a l a r n i p r o d u k t . Če je namreč

$$(x , x) = 0 ,$$

to pomeni, da je za vsak reprezentant X razreda x

$$g(X^{*}X) = 0 .$$

Razred x je torej levi ideal J_L oziroma ničelni element prostora $\mathcal{B}$, torej res

$$x = 0 .$$

Treba nam je le še pokazati, da je nova norma, ki jo določa v prostoru $\mathcal{B}$ tako vpeljani skalarni produkt, tudi e n a k a prvotni normi tega prostora. To pa je neposredno razvidno iz enačbe (12). Če namreč zaznamujemo novo normo z $|||x|||$, velja zaradi (12) :

$$|||x|||^{2} = (x,x) = (X,X) = g(X^{*}X) = \|x\|^{2} ,$$

pri čemer je seveda $x = W(X)$.

S tem je začetna trditev o prostoru $\mathcal{B}$ dokazana. Seveda pri pogoju, da je dodatna hipoteza o unitarnih operatorjih pravilna. Naša nadaljnja pozornost bo torej veljala tej hipotezi. Preden se je lotimo, naj pripomnimo še naslednje :

1.) Postavljeno trditev smo dokazali direktno. To se pravi, da smo v prostoru $\mathcal{B}$ res konstruirali skalarni produkt in pokazali, da je z njim definirana norma enaka prvotni normi. V ta namen smo morali ugotoviti identičnost obeh levih idealov $\mathcal{N}(W)$ in J_L, kar je samo po sebi gotovo zanimivo dejstvo. Vendar se temu lahko izognemo, če izberemo indirektno pot tako, da se naslonimo na paralelogramsko lastnost, ki je karakteristična za norme v Hilbertovem prostoru. Oglejmo si še to pot, ki je nekoliko krajša!

Naj bosta x in y poljubna elementa prostora $\mathcal{B}$. Pri veljavnosti dodatne hipoteze lahko zapišemo

$x = \|x\|Ua$, $y = \|y\|Va$, $x + y = \|x+y\|Sa$, $x - y = \|x-y\|Ta$,

kjer so U, V, S in T ustrezni unitarni operatorji.

Potem velja

$\left[\|x+y\|S - (\|x\|U + \|y\|V)\right]a = 0$ in $\left[\|x-y\|T - (\|x\|U - \|y\|V)\right]a = 0$.

Torej je

$\|x+y\|S - (\|x\|U+\|y\|V) \in J_L$ in $\|x-y\|T - (\|x\|U-\|y\|V) \in J_L$.

Če se okoristimo z logično implikacijo (11) in upoštevamo dejstvo, da velja za unitarne operatorje $g(U^*U) = g(I) = 1$, dobimo z lahkim računom

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|x\|.\|y\|\left[g(V^*U) + g(U^*V)\right] + \|y\|^2$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|x\|.\|y\|\left[g(V^*U) + g(U^*V)\right] + \|y\|^2 .$$

In če obe ti dve enačbi seštejemo vidimo, da se norma prostora $\mathcal{B}$ res pokorava paralelogramskemu zakonu

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

2.) Kakor je razvidno iz dokazovalnega postopka, tudi ni potrebno zahtevati, da je definirana involucija s polnoregularno normo v v s e j algebri $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Očitno je povsem dovolj, če eksistira taka involutorična preslikava le na kaki z a p r t i d e l n i algebri algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, seveda pri pogoju, da vsebuje ta delna algebra d o v o l j unitarnih operatorjev v smislu dodatne hipoteze.

Lotimo se torej dokazovanja dodatne hipoteze! V ta namen si hočemo najprej ogledati razmere v dvodimenzionalnem kompleksnem Banachovem prostoru, ki ga bomo označili z $\mathcal{B}_2$. Izberimo v prostoru $\mathcal{B}_2$ "pametno" bazo! Vzemimo za prvi bazični vektor e_1 poljuben vektor tega prostora, ki ima normo 1. Naj bo nadalje f tisti element dualnega prostora $\mathcal{B}_2^*$, za katerega velja

$$f(e_1) = \|e_1\| = 1 \quad \text{in} \quad |f(x)| \leq \|x\| ,$$

za vsak $x \in \mathcal{B}_2$. Postavimo zdaj drugi bazični vektor e_2 na "premico", ki je določena z enačbo $f(x) = 0$ in ga hkrati normirajmo, tako da je

$$f(e_2) = 0 \quad \text{in} \quad \|e_2\| = 1 .$$

Tako izbrana in normirana vektorja e_1 in e_2 sta očitno linearno neodvisna in tvorita torej res bazo prostora $\mathcal{B}_2$. Vsak $x \in \mathcal{B}_2$ lahko tedaj zapišemo v obliki

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2 .$$

Naj bo zdaj A poljuben omejen in linearen operator nad prostorom $\mathcal{B}_2$, torej element algebre $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B}_2)$, in naj se reprezentira glede na izbrano bazo e_1, e_2 z matriko

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} , & a_{12} \\ a_{21} , & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Pri tem vemo, da je

$$Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$$

$$Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 ,$$

in če je

$$y = v_1e_1 + v_2e_2 = Ax = A(u_1e_1 + u_2e_2) ,$$

je

$$v_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2$$

$$v_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 .$$

Postavimo torej, da je kompleksna Banachova algebra $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$ algebra z involucijo in polnoregularno normo, in poglejmo, kako se izraža ta involutorična preslikava v matrikah, ki reprezentirajo ustrezne operatorje.

Naj bo operator $A^{\times}$, ki je involutorična slika operatorja A, reprezentiran glede na isto bazo z matriko

$$A^{\times} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\times} , & a_{12}^{\times} \\ a_{21}^{\times} , & a_{22}^{\times} \end{pmatrix} .$$

Zaradi lastnosti (1) involucije je očitno, da morajo biti elementi $a_{ik}^{\times}$ "preslikane" matrike $A^{\times}$ l i n e a r n e k o m b i n a c i j e k o n j u g i r a n i h v r e d n o s t i elementov a_{jl} matrike A. Torej

$$\text{(T)}\quad \begin{aligned} a_{11}^{\times} &= \alpha_{11}^{11}\bar{a}_{11} + \alpha_{12}^{11}\bar{a}_{12} + \alpha_{21}^{11}\bar{a}_{21} + \alpha_{22}^{11}\bar{a}_{22} \\ a_{12}^{\times} &= \alpha_{11}^{12}\bar{a}_{11} + \alpha_{12}^{12}\bar{a}_{12} + \alpha_{21}^{12}\bar{a}_{21} + \alpha_{22}^{12}\bar{a}_{22} \\ a_{21}^{\times} &= \alpha_{11}^{21}\bar{a}_{11} + \alpha_{12}^{21}\bar{a}_{12} + \alpha_{21}^{21}\bar{a}_{21} + \alpha_{22}^{21}\bar{a}_{22} \\ a_{22}^{\times} &= \alpha_{11}^{22}\bar{a}_{11} + \alpha_{12}^{22}\bar{a}_{12} + \alpha_{21}^{22}\bar{a}_{21} + \alpha_{22}^{22}\bar{a}_{22} , \end{aligned}$$

pri čemer so koeficienti α_{jl}^{ik} kompleksna števila.

Zdaj pa je treba seveda poskrbeti za to, da bo ta transformacija v skladu tudi z drugimi lastnostmi involucije. V ta namen se bomo naslonili na hermitske elemente naše algebre.

Izkoristimo najprej dejstvo, da je identični operator I, ki je reprezentiran z matriko

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix};$$

hermitski element. To nam da takoj tele enačbe

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} 1 &= \alpha_{11}^{11} + \alpha_{22}^{11} \\ 0 &= \alpha_{11}^{12} + \alpha_{22}^{12} \\ 0 &= \alpha_{11}^{21} + \alpha_{22}^{21} \\ 1 &= \alpha_{11}^{22} + \alpha_{22}^{22} \end{aligned}$$

Nadalje vzemimo operator, ki je definiran takole

$$Px = f(x)e_1 ,$$

pri čemer je f že na začetku izbrani element iz $\mathcal{B}_2^*$. Operator P je očitno linearen. Njegova norma pa je enaka 1, kajti

$$\|Px\| = |f(x)| \leq \|x\| \quad \text{in} \quad \|Pe_1\| = |f(e_1)| = 1 .$$

Toda operator P je hkrati tudi projektor, ki projicira prostor $\mathcal{B}_2$ na enodimenzionalni prostor, določen z bazičnim vektorjem e_1. Kajti za vsak $x \in \mathcal{B}_2$ velja

$$P^2x = P(Px) = P(f(x)e_1) = f(x)\, Pe_1 = f(x)e_1 = Px .$$

Znano dejstvo pa je, da je vsak projektor z normo 1 hermitski element. Ker je matrična reprezentacija operatorja P

$$P = \begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 0 \end{pmatrix} ,$$

in se le-ta torej preslika sam vase, dobimo za koeficiente α^{ik}_{jl} naše transformacije še naslednje enačbe

$$(P) \qquad \begin{aligned} 1 &= \alpha^{11}_{11} \\ 0 &= \alpha^{12}_{11} \\ 0 &= \alpha^{21}_{11} \\ 0 &= \alpha^{22}_{11} \end{aligned}$$

Iz enačb (I) in (P) pa odčitamo

$$\alpha^{11}_{11} = \alpha^{22}_{22} = 1 , \alpha^{12}_{11} = \alpha^{21}_{11} = \alpha^{11}_{22} = \alpha^{22}_{11} = \alpha^{12}_{22} = \alpha^{21}_{22} = 0 .$$

Naša izhodna transformacija (T) je dobila zdaj takole podobo

$$(T_1) \qquad \begin{aligned} a^{\times}_{11} &= \bar{a}_{11} + \alpha^{11}_{12} \bar{a}_{12} + \alpha^{11}_{21} \bar{a}_{21} \\ a^{\times}_{12} &= \alpha^{12}_{12} \bar{a}_{12} + \alpha^{12}_{21} \bar{a}_{21} \\ a^{\times}_{21} &= \alpha^{21}_{12} \bar{a}_{12} + \alpha^{21}_{21} \bar{a}_{21} \\ a^{\times}_{22} &= \alpha^{22}_{12} \bar{a}_{12} + \alpha^{22}_{21} \bar{a}_{21} + \bar{a}_{22} \end{aligned}$$

Da opredelimo še nadaljnje koeficiente transformacije, upoštevajmo tudi dejstvo, da je za vsak operator A produkt $A^{\times}A$ hermitski element.

Če je torej

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} , & a_{12} \\ a_{21} , & a_{22} \end{pmatrix} ,$$

potem je

$$A^{\times} = \begin{pmatrix} \bar a_{11} + \alpha^{11}_{12}\bar a_{12} + \alpha^{11}_{21}\bar a_{21} , & \alpha^{12}_{12}\bar a_{12} + \alpha^{12}_{21}\bar a_{21} \\ \alpha^{21}_{12}\bar a_{12} + \alpha^{21}_{21}\bar a_{21} , & \alpha^{22}_{12}\bar a_{12} + \alpha^{22}_{21}\bar a_{21} + \bar a_{22} \end{pmatrix} ;$$

in produkt $A^{\times}A$ je

$$\begin{pmatrix} a_{11}\bar a_{11} + \alpha^{11}_{12}a_{11}\bar a_{12} + \alpha^{11}_{21}a_{11}\bar a_{21} + \alpha^{12}_{12}a_{21}\bar a_{12} + \alpha^{12}_{21}a_{21}\bar a_{21} , \\ \qquad a_{12}\bar a_{11} + \alpha^{11}_{12}a_{12}\bar a_{12} + \alpha^{11}_{21}a_{12}\bar a_{21} + \alpha^{12}_{12}a_{22}\bar a_{12} + \alpha^{12}_{21}a_{22}\bar a_{21} \\ \alpha^{21}_{12}a_{11}\bar a_{12} + \alpha^{21}_{21}a_{11}\bar a_{21} + \alpha^{22}_{12}a_{21}\bar a_{12} + \alpha^{22}_{21}a_{21}\bar a_{21} + a_{21}\bar a_{22} ; \\ \qquad \alpha^{21}_{12}a_{12}\bar a_{12} + \alpha^{21}_{21}a_{12}\bar a_{21} + \alpha^{22}_{12}a_{22}\bar a_{12} + \alpha^{22}_{21}a_{22}\bar a_{21} + a_{22}\bar a_{22} \end{pmatrix}$$

Ker pa preide ta matrika pri transformaciji (T_1) sama vase, dobimo najprej

$$\begin{aligned} & a_{11}\bar a_{11} + \alpha^{11}_{12}a_{11}\bar a_{12} + \alpha^{11}_{21}a_{11}\bar a_{21} + \alpha^{12}_{12}a_{21}\bar a_{12} + \alpha^{12}_{21}a_{21}\bar a_{21} = \\ & \quad = a_{11}\bar a_{11} + \bar\alpha^{11}_{12}a_{12}\bar a_{11} + \bar\alpha^{11}_{21}a_{21}\bar a_{11} + \bar\alpha^{12}_{12}a_{12}\bar a_{21} + \bar\alpha^{12}_{21}a_{21}\bar a_{21} + \\ & \quad + \alpha^{11}_{12}(a_{11}\bar a_{12} + \bar\alpha^{11}_{12}a_{12}\bar a_{12} + \bar\alpha^{11}_{21}a_{21}\bar a_{12} + \bar\alpha^{12}_{12}a_{12}\bar a_{22} + \bar\alpha^{12}_{21}a_{21}\bar a_{22}) + \\ & \quad + \alpha^{11}_{21}(\bar\alpha^{21}_{12}a_{12}\bar a_{11} + \bar\alpha^{21}_{21}a_{21}\bar a_{11} + \bar\alpha^{22}_{12}a_{12}\bar a_{21} + \bar\alpha^{22}_{21}a_{21}\bar a_{21} + a_{22}\bar a_{21}) , \end{aligned}$$

in odtod takoj

$$\alpha^{11}_{21} = \alpha^{12}_{12} = \alpha^{11}_{12} = 0 , \quad \alpha^{12}_{21} = \bar\alpha^{12}_{21} = \rho ,$$

pri čemer je ρ še poljubno, toda r e a l n o število.

Če kar takoj upoštevamo te vrednosti, dobimo pri nadaljnjem primerjanju obeh matrik

$$\begin{aligned} a_{12}\bar a_{11} + \rho a_{22}\bar a_{21} = \rho(\bar\alpha^{21}_{12}a_{12}\bar a_{11} + \bar\alpha^{21}_{21}a_{21}\bar a_{11} + \bar\alpha^{22}_{12}a_{12}\bar a_{21} + \bar\alpha^{22}_{21}a_{21}\bar a_{21} + \\ + a_{22}\bar a_{21}) \end{aligned}$$

še naprej

$$1 = \rho\,\bar{\alpha}_{12}^{21}\ , \qquad \alpha_{21}^{21} = \alpha_{12}^{22} = \alpha_{21}^{22} = 0$$

Iz prve enačbe sklepamo, da je

$$\alpha_{12}^{21} = \frac{1}{\rho}\ ,$$

tako, da moramo zahtevati $\rho \neq 0$.

Transformacija (T) se je po vsem tem prikazala v tejle enostavni obliki

$$(T_2) \qquad \begin{aligned} a_{11}^{x} &= \bar{a}_{11} \\ a_{12}^{x} &= \rho\,\bar{a}_{21} \\ a_{21}^{x} &= \frac{1}{\rho}\,\bar{a}_{12} \\ a_{22}^{x} &= \bar{a}_{22}\ , \end{aligned}$$

pri čemer je ρ poljubno od nič različno realno število.

Brez vseh težav se zdaj tudi lahko prepričamo, da je ta transformacija v skladu s preostalima dvema lastnostima involucije (2) in (3).

Če je namreč

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ , & a_{12} \\ a_{21}\ , & a_{22} \end{pmatrix},$$

je

$$A^{x} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}\ , & \rho\,\bar{a}_{21} \\ \frac{1}{\rho}\,\bar{a}_{12}\ , & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}$$

in

$$(A^{x})^{x} \equiv A^{xx} = \begin{pmatrix} a_{11}\ , & a_{12} \\ a_{21}\ , & a_{22} \end{pmatrix} = A\ .$$

In če sta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{pmatrix},$$

potem je

$$A^{\times} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}, & \rho\,\bar{a}_{21} \\ \frac{1}{\rho}\bar{a}_{12}, & \bar{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad B^{\times} = \begin{pmatrix} \bar{b}_{11}, & \rho\,\bar{b}_{21} \\ \frac{1}{\rho}\bar{b}_{12}, & \bar{b}_{22} \end{pmatrix}$$

in $$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

tako, da je res

$$(AB)^{\times} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}\bar{b}_{11}+\bar{a}_{12}\bar{b}_{21}, & \rho(\bar{a}_{21}\bar{b}_{11}+\bar{a}_{22}\bar{b}_{21}) \\ \frac{1}{\rho}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12}+\bar{a}_{12}\bar{b}_{22}), & \bar{a}_{21}\bar{b}_{12}+\bar{a}_{22}\bar{b}_{22} \end{pmatrix} = B^{\times}A^{\times}.$$

Toda naša involutivna algebra $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$ je tudi polnoregularna. To se pravi, da velja v njej tudi metrična lastnost (4). Seveda mora transformacija (T) ustrezati tudi tej lastnosti oziroma vsem njenim posledicam. Kakor je razvidno iz prvega dela pa smo rabili lastnost (4) v zvezi z unitarnimi operatorji. Zato poglejmo, če nam unitarni operatorji dajejo še kakšno nadaljnjo zahtevo v zvezi s transformacijo (T).

Poiščimo v ta namen najprej matrično reprezentacijo unitarnih operatorjev! Bodi torej U unitarni operator

$$U = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Potem je po definiciji unitarnih operatorjev

$$U^{\times}U = UU^{\times} = I \quad ,$$

kar nam da

$$\begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11}+\rho a_{21}\bar{a}_{21} \,, & a_{12}\bar{a}_{11}+\rho a_{22}\bar{a}_{21} \\ \frac{1}{\rho} a_{11}\bar{a}_{12}+ a_{21}\bar{a}_{22} \,, & \frac{1}{\rho}a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\bar{a}_{11}+ \frac{1}{\rho} a_{12}\bar{a}_{12} \,, & \rho a_{11}\bar{a}_{21}+a_{12}\bar{a}_{22} \\ a_{21}\bar{a}_{11}+ \frac{1}{\rho} a_{22}\bar{a}_{12} \,, & \rho a_{21}\bar{a}_{21}+a_{22}\bar{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \,, & 0 \\ 0 \,, & 1 \end{pmatrix} .$$

Odtod razberemo tele odnose :

(1) $a_{11}\bar{a}_{11}+\rho a_{21}\bar{a}_{21} = 1$, (5) $\frac{1}{\rho} a_{11}\bar{a}_{12}+a_{21}\bar{a}_{22} = 0$

(2) $a_{11}\bar{a}_{11}+ \frac{1}{\rho} a_{12}\bar{a}_{12} = 1$, (6) $a_{21}\bar{a}_{11}+ \frac{1}{\rho} a_{22}\bar{a}_{12} = 0$

(3) $a_{12}\bar{a}_{11}+\rho a_{22}\bar{a}_{21} = 0$, (7) $\frac{1}{\rho} a_{12}\bar{a}_{12}+a_{22}\bar{a}_{22} = 1$

(4) $\rho a_{11}\bar{a}_{21}+ a_{12}\bar{a}_{22} = 0$ (8) $\rho a_{21}\bar{a}_{21}+a_{22}\bar{a}_{22} = 1$.

Iz (1) in (8) sledi

$$(9) \qquad a_{22}\bar{a}_{22} = a_{11}\bar{a}_{11} \quad .$$

Zaradi tega lahko odpišemo enačbi (7) in (8), ker sta identični z enačbama (2) in (1). Enako je enačba (6) ekvivalentna enačbi (4) in enačba (5) enačbi (3). Iz (2) dobimo

$$(10) \qquad a_{12}\bar{a}_{12} = \rho(1 - a_{11}\bar{a}_{11}) \quad ,$$

iz (1) pa

$$(11) \qquad a_{21}\bar{a}_{21} = \frac{1}{\rho} (1 - a_{11}\bar{a}_{11}) \quad .$$

Tako dobljene enačbe (9), (10) in (11) nam očitno vsiljujejo, da zapišemo matrične elemente a_{ik} v obliki

$$a_{11} = \lambda e^{i\alpha}, \quad a_{22} = \lambda e^{i\beta}, \quad a_{12} = \sqrt{\rho(1-\lambda^2)}e^{i\gamma},$$

$$a_{21} = \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}}\, e^{i\delta},$$

pri čemer je λ norma elementov a_{11} oziroma a_{22}, torej neko realno pozitivno število. Zaradi norm elementov a_{12} in a_{21} mora veljati med ρ in λ tale zveza

$$\rho > 0 \Longrightarrow 0 \leqq \lambda \leqq 1$$
$$\rho < 0 \Longrightarrow \lambda \geqq 1 .$$

Za določitev argumentov α, β, γ in δ pa imamo na razpolago še preostali zahtevi (3) in (4), iz katerih dobimo

(3) $$e^{i(\gamma-\alpha)} + e^{i(\beta-\delta)} = 0$$

(4) $$e^{i(\alpha-\delta)} + e^{i(\gamma-\beta)} = 0 .$$

Temu sistemu je ustreženo, brž ko postavimo

$$\gamma-\alpha=\varphi, \quad \beta-\delta=\varphi+\pi, \quad \alpha-\delta=\psi, \quad \gamma-\beta=\psi-\pi,$$

pri čemer sta φ in ψ še na izbiro. To pa nam da tole rešitev

$$\alpha \text{ poljuben}, \quad \beta=\alpha-\psi+\varphi+\pi, \quad \gamma=\alpha+\varphi, \quad \delta=\alpha-\psi .$$

Vsak unitarni operator je torej reprezentiran z matriko naslednje oblike

$$U = \begin{pmatrix} \lambda e^{i\alpha}, & \sqrt{\rho(1-\lambda^2)}e^{i(\alpha+\varphi)} \\ \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}}\, e^{i(\alpha-\psi)}, & -\lambda e^{i(\alpha-\psi+\varphi)} \end{pmatrix},$$

kjer so argumenti α, φ in ψ še na izbiro.

Toda razčistimo še odnos med ρ in λ ! Kakor vemo, je vsak unitarni operator izometričen. Potemtakem bo vsak tak operator preslikal na primer naš bazični vektor e_1 v vektor, ki bo imel tudi normo 1. Ker je

$$Ue_1 = \lambda e^{i\alpha} e_1 + \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}} e^{i(\alpha-\psi)} e_2 ,$$

je absolutni iznos prve komponente tega enotskega vektorja kar λ. Za vsak vektor z normo 1 pa velja, da je absolutni iznos njegove prve komponente manjši, kvečjemu enak 1. Kajti če je

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2 \quad \text{in} \quad \|x\| = 1 ,$$

je, zaradi lastnosti funkcionala f, ki smo ga na začetku izbrali,

$$|f(x)| = |u_1| \leqq 1 .$$

To pa pomeni, da pride za λ v poštev le prva od zgornjih dveh možnosti

$$0 \leqq \lambda \leqq 1$$

in zato mora biti v transformaciji (T)

$$\rho > 0 .$$

Ker pa je za vsak unitarni operator U

$$\|Ue_1\| = 1 \quad \text{in} \quad \|Ue_2\| = 1 ,$$

morata veljati tudi naslednji neenačbi

$$1 = \left\| \lambda e^{i\alpha} e_1 + \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}} e^{i(\alpha-\psi)} e_2 \right\| \leqq \lambda + \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}}$$

$$1 = \left\| \sqrt{\rho(1-\lambda^2)} e^{i(\alpha+\varphi)} e_1 - \lambda e^{i(\alpha-\psi+\varphi)} e_2 \right\| \leqq \sqrt{\rho(1-\lambda^2)} + \lambda ,$$

oziroma

$$1-\lambda \leqq \sqrt{\frac{1-\lambda^2}{\rho}} \quad \text{in} \quad 1-\lambda \leqq \sqrt{\rho(1-\lambda^2)}\,.$$

Ker je $1-\lambda \geqq 0$, smemo obe neenačbi na obeh straneh kvadrirati

$$(1-\lambda)^2 \leqq \frac{1-\lambda^2}{\rho} \quad \text{in} \quad (1-\lambda)^2 \leqq \rho(1-\lambda^2)\,.$$

Za $\lambda = 1$ ustreza sicer vsak ρ. Če pa je $0 \leqq \lambda < 1$, lahko obe neenačbi poenostavimo v

$$1-\lambda \leqq \frac{1+\lambda}{\rho} \quad \text{in} \quad 1-\lambda \leqq \rho(1+\lambda)\,.$$

Ker morata veljati z a v s a k nenegativen λ, ki je manjši od 1, mora biti zaradi prve $\rho \leqq 1$, zaradi druge pa $\rho \geqq 1$, kar nam da torej

$$\rho = 1\,.$$

Potemtakem smemo zaključiti :

V algebri $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2)$ eksistira e n a s a m a involucija s polnoregularno normo. Če reprezentiramo, glede na izbrano bazo e_1, e_2 v prostoru $\mathcal{B}_2$, operatorje z matrikami, se ta involutorična preslikava izraža takole :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a}_{11}, & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12}, & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}.$$

Zdaj pa lahko takoj pokažemo pravilnost dodatne hipoteze. Vzemimo v ta namen kar bazični vektor e_1 in naj bo

$$x = u_1 e_1 + u_2 e_2$$

poljuben drug vektor z normo 1. Ker je vsak unitarni operator glede na izbrano bazo reprezentiran z matriko

$$U = \begin{pmatrix} \lambda e^{i\alpha}, & \sqrt{1-\lambda^2}\, e^{i(\alpha+\varphi)} \\ \sqrt{1-\lambda^2}\, e^{i(\alpha-\psi)}, & -\lambda e^{i(\alpha-\psi+\varphi)} \end{pmatrix},$$

je treba torej določiti argumenta α, ψ in λ v dovoljenih mejah tako, da bo

$$U e_1 = \lambda e^{i\alpha} e_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\, e^{i(\alpha-\psi)}\, e_2 = u_1 e_1 + u_2 e_2 .$$

To pa je res vedno mogoče. Zapišimo namreč komponenti vektorja x v obliki

$$u_1 = |u_1|\, e^{i\gamma} \text{ in } u_2 = |u_2|\, e^{i\delta}.$$

Potem mora vsekakor biti

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{|u_2|}{|u_1|}\, e^{i(\delta-\gamma)} = \frac{\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}\, e^{-i\psi}.$$

Temu je lahko ustreči, če postavimo

$$\gamma - \delta = \psi \quad \text{in } \lambda = +\sqrt{\frac{|u_1|^2}{|u_1|^2 + |u_2|^2}} \leqq 1 .$$

Torej moremo vektor x pisati v obliki

$$x = C\left(\lambda e^{i\gamma} e_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\, e^{i(\gamma-\psi)}\, e_2\right),$$

kjer pomeni C pozitivno konstanto. Ker pa je norma vektorja x enaka 1, mora biti $C = 1$, kajti

$$1 = |C| \cdot \left\| \lambda e^{i\gamma} e_1 + \sqrt{1-\lambda^2}\, e^{i(\gamma-\psi)} e_2 \right\| = |C| \cdot 1 = C.$$

To pa pove, da je kar

$$\lambda = |u_1| \quad \text{in} \quad |u_2| = \sqrt{1 - |u_1|^2} ,$$

in iskani unitarni operator U je reprezentiran z matriko

$$U = \begin{pmatrix} |u_1|\, e^{i\gamma}, & \sqrt{1 - |u_1|^2}\, e^{i(\gamma+\varphi)} \\ \sqrt{1 - |u_1|^2}\, e^{i(\gamma-\psi)}, & -|u_1|\, e^{i(\gamma-\psi+\varphi)} \end{pmatrix},$$

kjer je $\psi = \gamma - \delta$, argument φ pa še na izbiro.

S tem je pravilnost dodatne hipoteze v dvodimenzionalnem prostoru $\mathcal{B}_2$ dokazana.

Preidimo zdaj še na splošni primer!

Ako sta a in b dva dana, sicer poljubna, enotska vektorja iz kompleksnega Banachovega prostora $\mathcal{B}$, katerega algebra omejenih linearnih operatorjev $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ ima involucijo s polnoregularno normo, potem je treba ugotoviti eksistenco takega unitarnega operatorja U, ki preslika vektor a v vektor b, torej

$$U^{x}U = UU^{x} = I \quad \text{in} \quad b = Ua \,.$$

Opravimo najprej s trivialnim primerom, v katerem sta vektorja a in b linearno odvisna! Iz $b = \lambda a$, sledi seveda $|\lambda| = 1$. Če postavimo $U = \lambda I$, imamo res

$$U^{x}U = UU^{x} = |\lambda|^2 I = I \quad \text{in} \quad b = \lambda a = \lambda Ia = Ua \,.$$

Naj bosta torej oba enotska vektorja a in b linearno neodvisna! Potem določata neki dvodimenzionalni Banachov podprostor $\mathcal{B}_2'$ prostora $\mathcal{B}$, za katerega velja

$$y \in \mathcal{B}_2' \iff y = \alpha a + \beta b \,.$$

Razstavimo zdaj prostor $\mathcal{B}$ v direktno vsoto dveh podprostorov

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_2' \oplus \mathcal{B}'' .$$

Kakor je znano, ustvarja tako dekompozicijo vsak projektor P iz algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$, ki preslika prostor $\mathcal{B}$ na podprostor $\mathcal{B}_2'$. V tem primeru lahko zapišemo vsak $x \in \mathcal{B}$ v obliki

$$x = y + z \quad ,$$

pri čemer je $y = Px \in \mathcal{B}_2'$ in $z = (I - P)\, x \in \mathcal{B}''$.

Operator A iz algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ pa je tedaj in le tedaj popolnoma reduciran na oba podprostora $\mathcal{B}_2'$ in $\mathcal{B}''$, ki jih določa dani projektor P, kadar je s tem projektorjem zamenljiv. To se pravi, da velja logična ekvivalenca
$AP = PA \iff (\forall y)(y \in \mathcal{B}_2' \Rightarrow Ay \in \mathcal{B}_2')$ in $(\forall z)(z \in \mathcal{B}_2'' \Rightarrow Az \in \mathcal{B}'')$.

Toda za naše namene je potrebno, da sledi iz popolne reducibilnosti operatorja A ista lastnost tudi za njegovo involutorično sliko $A^{\times}$, kajti le tako bo mogoče inducirati involucijo tudi v algebrah obeh podprostorov. To pa bo gotovo res, brž ko bo projektor P hermitski element. Kajti $AP = PA$ in $P = P^{\times} \Rightarrow (AP)^{\times} = (PA)^{\times} \Rightarrow PA^{\times} = A^{\times}P$.
Poiskati je torej treba h e r m i t s k i projektor, ki preslika prostor $\mathcal{B}$ na podprostor $\mathcal{B}_2'$. Tega pa najdemo takole :

Projicirajmo najprej prostor $\mathcal{B}$ na enodimenzionalni prostor, ki je določen z vektorjem a :

$$P_1 x = f(x)\, a \ ,$$

kjer je f tisti element iz dualnega prostora $\mathcal{B}^{\times}$, za katerega velja

$$f(a) = \|a\| = 1 \quad \text{in} \quad \|f\| = 1 \ , \ \text{torej tudi} \ |f(x)| \leq \|x\| \ ,$$

za vsak $x \in \mathcal{B}$. P_1 je očitno linearen z normo 1, pa tudi projektor je, saj je

$$P_1^2 x = P_1 f(x) a = f(x) P_1 a = f(x) a = P_1 x \ .$$

Zato je po znanem izreku hermitski projektor, torej

$$P_1 = P_1^{\times} \ .$$

Vsak vektor $x \in \mathcal{B}$ moremo zdaj zapisati v obliki

$$x = P_1 x + (I - P_1)\, x \,.$$

Pa zapišimo tako vektor b :

$$b = P_1 b + (I - P_1)\, b \,.$$

Ker sta a in b linearno neodvisna, vektor $(I - P_1)b$ gotovo ni nič. Očitno pa se nahaja v podprostoru $\mathcal{B}_2'$, saj je

$$(I - P_1)\, b = -P_1 b + b = - f(b)\, a + b \,.$$

Normirajmo ga in pišimo tako dobljeni enotski vektor na kratko s c

$$\frac{(I - P_1)\, b}{\|(I - P_1)\, b\|} = c \,.$$

Ker sta tudi a in c dva linearno neodvisna enotska vektorja v prostoru $\mathcal{B}_2'$, ju lahko vzamemo za bazi tega prostora, tako, da je

$$y \in \mathcal{B}_2' \iff y = \alpha a + \gamma c \,.$$

Zdaj pa projicirajmo še prostor $\mathcal{B}$ na enodimenzionalni podprostor, ki je določen z vektorjem c, takole

$$P_2 x = g(x)\, c \,,$$

kjer je to pot g tisti element iz $\mathcal{B}^*$, za katerega je

$$g(c) = \|c\| = 1 \quad \text{in} \quad \|g\| = 1 \,, \text{ torej tudi } |g(x)| \leq \|x\|,$$

za vsak $x \in \mathcal{B}$. Seveda je, iz istih razlogov kot prej P_1, tudi P_2 hermitski projektor, torej

$$P_2^2 = P_2 \quad \text{in} \quad P_2 = P_2^* \,.$$

Operator

$$P = P_1 + P_2$$

je gotovo hermitski, saj je vsota dveh hermitskih operatorjev. Zaloga vrednosti operatorja P je ujeta v podprostor $\mathcal{B}_2'$, kajti

$$Px = (P_1 + P_2)x = P_1x + P_2x = f(x)\, a + g(x)\, c\ .$$

Treba se je le še uveriti, da je operator P tudi projektor, da velja torej tudi

$$P^2 = P\ .$$

In res je

$$P^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1P_2 + P_2P_1 + P_2^2 = P_1+P_2+P_1P_2+P_2P_1 = P,$$

kajti

$$P_1P_2 = P_2P_1 = 0\ .$$

Za vsak $x \in \mathcal{B}$ je namreč

$$P_1P_2x = P_1g(x)\, c = g(x)\, P_1c\ .$$

Toda $P_1c = 0$, po definiciji vektorja c. Torej je res $P_1P_2 = 0$. Iz tega pa takoj sledi, da je tudi $P_2P_1 = 0$, saj je $P_2P_1 = (P_1P_2)^* = 0$. Zato je tudi $P_2a = P_2P_1a = 0$, torej $Py = y$ za vsak $y \in \mathcal{B}_2'$. Konstruirani hermitski operator P je potemtakem res projektor na podprostor $\mathcal{B}_2'$.

Naj bo zdaj direktna vsota

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_2' \oplus \mathcal{B}''$$

tista dekompozicija prostora $\mathcal{B}$, ki jo ustvarja hermitski projektor P. Seveda je potem tudi projektor $I - P$, ki projicira prostor $\mathcal{B}$ na komplementarni podprostor $\mathcal{B}''$, hermitski. Množica vseh s projektorjem P zamenljivih operatorjev algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ pa tvori polno podalgebro te algebre. To je razvidno iz naslednjih dejstev :

1. $AP = PA \Longrightarrow \lambda AP = \lambda PA = P\lambda A$
2. $AP = PA$ in $BP = PB \rightarrow (A+B)P = AP+BP = PA+PB = P(A+B)$

3. $AP = PA$ in $BP = PB \Longrightarrow ABP = APB = PAB$

4. če je za vsak n, $A_nP = PA_n$ in $\lim A_n = A \Rightarrow AP=PA$. Kajti za vsak $x \in \mathcal{B}$ velja $A_nx \rightarrow Ax$. Torej je tudi $A_nPx \rightarrow APx$ in $PA_nx \rightarrow PAx$, saj je P zvezen. Ker pa je $A_nPx = PA_nx$ po hipotezi, je tudi $APx = PAx$.

Ker pa je projektor P hermitski, velja tudi

5. $AP = PA \Longrightarrow A^{\times}P = PA^{\times}$.

To pomeni, da je ta podalgebra tudi zaprta glede na involucijo.

Naj bo zdaj A poljuben, s projektorjem P zamenljiv operator in ga zapišimo kot vsoto zamenljivih operatorjev AP in $A(I - P)$

$$A = AP + A\,(I - P)\,.$$

Ker je A popolnoma reduciran glede na oba podprostora $\mathcal{B}_2'$ in $\mathcal{B}''$, je seveda zaloga vrednosti operatorja AP oziroma operatorja $A\,(I - P)$ v prostoru $\mathcal{B}_2'$ oziroma v prostoru $\mathcal{B}''$. Če omejimo definicijsko območje operatorja AP le na podprostor $\mathcal{B}_2'$, dobimo potemtakem neki operator A_2', ki je element algebre $\mathcal{A}\,(\mathcal{B}_2')$. In podobno lahko priredimo operatorju $A\,(I - P)$, s tem da utesnimo njegovo definicijsko območje le na podprostor $\mathcal{B}''$, ustrezni operator A'' iz algebre $\mathcal{A}\,(\mathcal{B}'')$. Ker pa je prostor $\mathcal{B}$ direktna vsota podprostorov $\mathcal{B}_2'$ in $\mathcal{B}''$, lahko operator A zapišemo tudi kot "direktno vsoto" ustreznih operatorjev A_2' in A''

$$A = A_2' \oplus A''\,,$$

tako da je za vsak $x \in \mathcal{B}$, če ga pišemo v obliki

$$x = y + z\,,$$

kjer je $y \in \mathcal{B}_2'$ in $z \in \mathcal{B}''$,

$$Ax = A_2'y + A''z .$$

Seveda moremo tudi obratno vsak operator algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2')$ oziroma algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B}'')$ razširiti na ves prostor $\mathcal{B}$. V ta namen nam je treba tvoriti le "direktno vsoto" tega operatorja s poljubnim operatorjem, ki dejstvuje v komplementarnem podprostoru. Tako dobljeni operator nad celim prostorom bo tudi s projektorjem P zamenljiv, saj je popolnoma reduciran glede na oba podprostora $\mathcal{B}_2'$ in $\mathcal{B}''$.

Zaradi teh dejstev lahko zdaj induciramo involucijo tudi v algebrah obeh podprostorov $\mathcal{B}_2'$ in $\mathcal{B}''$. In sicer takole :

Bodi A_2' poljuben element algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B}_2')$. Razširimo ga s poljubnim elementom A'' iz algebre $\mathcal{A}(\mathcal{B}'')$ na ves prostor $\mathcal{B}$, tako, da je

$$A = A_2' \oplus A'' .$$

Dobljeni operator A zapišimo v obliki

$$A = AP + A(I - P) ,$$

in ga involutorično preslikajmo v

$$A^{\times} = A^{\times}P + A^{\times}(I - P) .$$

Potem naj bo $A_2'^{\times}$ operator, ki ga dobimo iz operatorja $A^{\times}P$, če omejimo njegovo definicijsko območje le na podprostor $\mathcal{B}_2'$. In analogno je $A''^{\times}$ operator, ki ga dobimo iz $A^{\times}(I - P)$, če omejimo njegovo definicijsko območje le na podprostor $\mathcal{B}''$. Potemtakem lahko zopet zapišemo

$$A^{\times} = A_2'^{\times} \oplus A''^{\times} .$$

Z opisanim postopkom dobljena slika $A_2'^{\times}$ operatorja A_2' je seveda enolično določena. Vzemimo namreč, da smo operator A_2' razširili na ves prostor na dva različna načina :

$A = A_2' \oplus A'' = AP + A(I - P)$ in $B = A_2' \oplus B'' = BP + B(I - P)$,

kjer sta A'' in B'' dva različna operatorja iz $\mathcal{A}\ (\mathcal{B}'')$. Če pišemo poljuben $x \in \mathcal{B}$ v obliki

$$x = y + z ,$$

kjer je $y \in \mathcal{B}_2'$ in $z \in \mathcal{B}''$, mora veljati

$$APx = APy = A_2'y = BPy = BPx ,$$

kar pomeni, da je

$$AP = BP , \text{ torej tudi } A^{\times}P = B^{\times}P .$$

Enako se moremo tudi prepričati, da se tako definirana preslikava v obeh algebrah $\mathcal{A}\ (\mathcal{B}_2')$ in $\mathcal{A}\ (\mathcal{B}'')$ res pokorava vsem lastnostim (1), (2), (3) in (4), ki karakterizirajo involucijo in polnoregularno normo.

Ker smo za dvodimenzionalni primer že dokazali, eksistira potemtakem v algebri $\mathcal{A}\ (\mathcal{B}_2')$ vsaj en unitarni operator U_2' tako, da velja

$$U_2'^{\times} U_2' = U_2' U_2'^{\times} = I_2' \text{ in } b = U_2' a .$$

Zdaj je torej le še vprašanje, če moremo ta unitarni operator U_2' razširiti v neki unitarni operator nad vsem prostorom $\mathcal{B}$.

Pa ga razširimo takole

$$U = U_2' \oplus I'' .$$

Potem je

$$U^{\times} = U_2'^{\times} \oplus I'' ,$$

in ker lahko izrazimo vsak vektor $x \in \mathcal{B}$ kot vsoto

$$x = y + z ,$$

kjer je $y \in \mathcal{B}_2'$ in $z \in \mathcal{B}''$, dobimo

$$U^{\times}Ux = U^{\times}U(y+z) = U^{\times}(U_2'y + I''z) = U_2'^{\times}U_2'y + I''I''z =$$

$$= I_2'y + I''z = y + z = x \,.$$

Odtod pa sklepamo, da je $U^{\times}U = I$ in podobno bi dobili, da je tudi $UU^{\times} = I$. Konstruirani operator U je torej res unitaren in dodatna hipoteza je dokazana tudi v splošnem primeru.

Pri naši raziskavi smo se omejili na primer kompleksnega Banachovega prostora. Vendar se lahko brž prepričamo, da je rezultat veljaven tudi za realen Banachov prostor. V ta namen je treba le ponoviti celotni premislek za realni primer, seveda z ustreznimi "realnimi" modifikacijami. Pri tem se pokaže, da je vsak unitarni operator v dvodimenzionalnem realnem Banachovem prostoru $\mathcal{B}_2$ reprezentiran z matriko oblike

$$U_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi , & \sin\varphi \\ -\sin\varphi , & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

ki predstavlja navadno rotacijo.

Literatura :

1.) D. Hilbert : Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Göttinger Nachrichten, 1906, 4. Mitt., 157-227, in 5. Mitt., 439-480.

2.) J.von Neumann : Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math.Annalen 102, 1929, 49-131.

3.) F. Riesz : več člankov v Acta Sci.Math.Szeged, 5, 1930, 6, 1933, 7, 1934.

4.) M.H. Stone : Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.

5.) S. Banach : Théorie des Opérations linéaires, Varšava, 1932.

6.) Jordan P. - J.von Neumann : On inner products in linear metric spaces, Annals of Math., 36, 1935, 719-723.

7.) E.R. Lorch : On certain implications which characterize Hilbert space, Annals of Math., 49, 1948, 523-532.

8.) M.M. Day : Normed Linear Spaces, 115 - 121, Springer Verlag, 1958.

9.) Lau, Leung - sun : On a characterization of Hilbert spaces, Advancement in Math., 4, 1958.

10.) Kakutani and Mackey : Two characterizations od real Hilbert space, Ann. of Math., 2, 45, 1944.

11.) Kakutani and Mackey : Ring and lattice characterizations of complex Hilbert space, Amer.Math.Soc., 52, 1946.

12.) I. Vidav : Eine metrische Kennzeichnung der selbstadjungierten Operatoren, Math.Zeitschrift, Bd.66, 1956, 121-128.

13.) M.A. Neumark : Normierte Algebren, Berlin, 1959.