PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **12** (1984/1985)
Številka 4
Strani 201–203

Izidor Hafner:

REŠEVANJE ENAČB IN NEENAČB, V KATERIH NASTOPA ABSOLUTNA VREDNOST

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/12/731-Hafner.pdf

REŠEVANJE ENAČB IN NEENAČB, V KATERIH NASTOPA ABSOLUTNA VREDNOST – naloge so objavljene na str. 220

V zadnjem času na tekmovanjih srednješolcev vse pogosteje srečamo naloge, v katerih nastopa absolutna vrednost. Take naloge rešujemo tako, da absolutno vrednost odpravimo, pri tem pa nalogo rešujemo na dveh tujih si podpodročjih. Če je treba poiskati množico realnih števil x, za katere je izpolnjen pogoj $F(\ldots| f(x) | \ldots)$, potem se nam naloga razcepi na dva dela glede na to, ali je $f(x) \geqslant 0$ ali $f(x) < 0$. V enem primeru iščemo števila x, za katera je $f(x) \geqslant 0$ in $F(\ldots f(x) \ldots)$, v drugem primeru pa x-e, za katere je $f(x) < 0$ in $F(\ldots -f(x) \ldots)$. Po definiciji absolutne vrednosti:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{če je } a \geqslant 0 \\ a, & \text{če je } a < 0 \end{cases}$$

velja

$$F(\ldots | f(x) | \ldots) \text{ natanko tedaj, ko je } (f(x) \geqslant 0 \text{ in } F(\ldots f(x) \ldots)) \text{ ali}$$
$$(f(x) < 0 \text{ in } F(\ldots -f(x) \ldots))$$

Nalogo bomo sistematično reševali takole:

$$F(\ldots | f(x) | \ldots) \quad \surd$$

$f(x) \geqslant 0$	$f(x) < 0$
$F(\ldots f(x) \ldots)$	$F(\ldots -f(x) \ldots)$

Črta nam pomeni, da imamo dva podprimera, ki ju ločeno obravnavamo. Glavnega pogoja, to je $F(\ldots | f(x) | \ldots)$, nam ni treba več upoštevati (zato ga okljukamo), ker je pri pogoju $f(x) \geqslant 0$ ekvivalenten pogoju $F(\ldots f(x) \ldots)$, pri pogoju $f(x) < 0$ pa je ekvivalenten $F(\ldots -f(x) \ldots)$. Zapisu, ki ga na ta način dobimo, bomo rekli *drevo*.

Če v nalogi nastopa več absolutnih vrednosti, se podprimeri še naprej delijo na podprimere. Pri tem pa se najprej znebimo *notranjih* absolutnih vrednosti.

Za zgled rešimo naslednje enačbe in neenačbo:

a) $| 2x + 7 | = 5$

b) $| x + 2 | + | x + 7 | = 7$

c) $| 2 | x | + 4 | = 5$

č) $|| 2x - 6 | - 5 | > 1$

a)

$$|2x+7|=5 \quad \surd$$

$2x+7\geqslant 0$ $\quad\surd$	$2x+7<0$ $\quad\surd$
$x\geqslant -7/2$	$x<-7/2$
$2x+7=5$ $\quad\surd$	$-(2x+7)=5$ $\quad\surd$
$x=-1$	$-2x-7=5$ $\quad\surd$
	$x=-6$

Množica rešitev je enaka $\{-1, -6\}$.

Kadar pogoj, ki nastopa v drevesu, nadomestimo na vseh vejah z ekvivalentnimi pogoji, ga lahko odkljukamo, kar pomeni, da ga ni treba več upoštevati. Če imamo na neki veji med seboj protislovne pogoje (npr. $x\leqslant 0$ in $x>2$), to vejo označimo z znakom $\perp$ (ki spominja na znak za slepo ulico, v logiki pa se pogosto uporablja za neresnično izjavo, npr. $0=1$). Taki veji rečemo *mrtva* veja.

Na koncu moramo upoštevati vse neodkljukane pogoje. Tako dobimo množico rešitev na posameznih vejah, ki je lahko tudi prazna. Celotna množica rešitev je unija množic rešitev po posameznih vejah.

b)

$$|x+2|+|x+5|=7 \quad \surd$$

$x+2\geqslant 0$ $\quad\surd$		$x+2<0$ $\quad\surd$	
$x\geqslant -2$		$x<-2$	
$x+5\geqslant 0$ $\quad\surd$	$x+5<0$ $\quad\surd$	$x\geqslant -5$	$x<-5$
$x\geqslant -5$	$x<-5$	$-(x+2)+(x+5)=7$ $\quad\surd$	$-(x+2)+(x+5)=7$ $\quad\surd$
$x+2+x+5=7$ $\quad\surd$	$\perp$	$3=7$	$-2x=14$ $\quad\surd$
$2x=0$ $\quad\surd$		$\perp$	$x=-7$
$x=0$			

Množica rešitev je enaka $\{0, -7\}$.

c)

$$|2|x|+4|=5 \quad \surd$$

$x\geqslant 0$		$x<0$	
$\vert 2x+4\vert=5$ $\quad\surd$		$\vert -2x+4\vert=5$ $\quad\surd$	
$2x+4\geqslant 0$ $\quad\surd$	$2x+4<0$ $\quad\surd$	$-2x+4\geqslant 0$ $\quad\surd$	$-2x+4<0$ $\quad\surd$
$x\geqslant -2$	$x<-2$	$x\leqslant 2$	$x>2$
$2x+4=5$ $\quad\surd$	$\perp$	$-2x+4=5$ $\quad\surd$	$\perp$
$x=1/2$		$-2x=1$ $\quad\surd$	
		$x=-1/2$	

Rešitvi sta 1/2 in −1/2.

č)

$$
\begin{array}{cc|cc}
\multicolumn{4}{c}{\lvert\,\lvert 2x-6\rvert -5\,\rvert > 1} \\
\multicolumn{2}{c|}{2x-6 \geqslant 0 \quad \surd} & \multicolumn{2}{c}{2x-6<0 \quad \surd} \\
\multicolumn{2}{c|}{x \geqslant 3} & \multicolumn{2}{c}{x<3} \\
\multicolumn{2}{c|}{\lvert 2x-6-5\rvert > 1 \quad \surd} & \multicolumn{2}{c}{\lvert -(2x-6)-5\rvert > 1 \quad \surd} \\
\multicolumn{2}{c|}{\lvert 2x-11\rvert > 1 \quad \surd} & \multicolumn{2}{c}{\lvert -2x+1\rvert > 1} \\
2x-11 \geqslant 0 \quad \surd & 2x-11<0 \quad \surd & -2x+1 \geqslant 0 \quad \surd & -2x+1<0 \quad \surd \\
x \geqslant 11/2 & x<11/2 & x \leqslant 1/2 & x>1/2 \\
2x-11>1 \quad \surd & -(2x-11)>1 \quad \surd & -2x+1>1 \quad \surd & -(-2x+1)>1 \quad \surd \\
x>6 & -2x+11>1 \quad \surd & -2x>0 \quad \surd & 2x-1>1 \quad \surd \\
 & x<5 & x<0 & x>1
\end{array}
$$

Na prvi veji so neodkljukani pogoji $x \geqslant 3$, $x \geqslant 11/2$, $x>6$. To da za množico rešitev interval $(6,\infty)$. Na drugi veji je množica rešitev interval $[3, 5)$. Na tretji veji so neodkljukani pogoji $x<3$, $x \leqslant 1/2$, $x<0$. Množica rešitev je $(-\infty,0)$. Na četrti veji je množica rešitev $(1,3)$. Ker je $(1,3) \cup [3,5) = (1,5)$, velja

$$\{x; \lvert\,\lvert 2x-6\rvert -5\rvert > 1\} = (-\infty,0) \cup (1,5) \cup (6,\infty)$$

Seveda pa bi lahko na vejah napravili še en korak: na tretji veji bi zapisali pogoj $x \in (-\infty,0)$, ki upošteva vse druge pogoje, ki so ostali neodkljukani, in nato te odkljukali. Podobno bi naredili za druge veje. Pri končni rešitvi bi nato upoštevali na vsaki veji le zadnjo vrstico.

Kadar rešujemo nalogo, v kateri nastopa več absolutnih vrednosti tako, da niso ena znotraj druge, lahko odpravimo vse naenkrat. Če moramo rešiti neenačbo

$$\lvert 2x-1\rvert < \lvert x-1\rvert$$

razbijemo množico realnih števil s točkama $x = 1/2$ in $x = 1$ na tri dele, ki jih podajajo pogoji $x \leqslant 1/2$, $1/2 < x \leqslant 1$, $1 < x$. Reševanje zdaj poteka takole:

$$
\begin{array}{c|c|c}
\multicolumn{3}{c}{\lvert 2x-1\rvert < \lvert x-1\rvert \quad \surd} \\
x \leqslant 1/2 \quad \surd & 1/2<x \leqslant 1 \quad \surd & 1<x \\
-(2x-1) < -(x-1) \quad \surd & 2x-1 < -(x-1) \quad \surd & 2x-1<x-1 \\
-2x+1 < -x+1 \quad \surd & 3x<2 \quad \surd & x<0 \\
0<x \quad \surd & x<2/3 \quad \surd & \perp \\
x \in (0,1/2] & x \in (1/2,2/3) &
\end{array}
$$

Rezultat: $\{x; \lvert 2x-1\rvert < \lvert x-1\rvert\} = (0,2/3)$

Izidor Hafner