Filozofski vestnik Letnik/Volume XXVII • Številka/Number 3 • 2006 • 121–135

FILOZOFIJA MATEMATIKE ERNSTA CASSIRERJA

Maja Lovrenov

Uvod

Članek obravnava specifično pozicijo Cassirerjeve filozofije matematike po eni strani glede na empiristične in psihologistične teorije matematike, ki matematične objekte razlagajo kot abstrakcije empiričnih ali psiholoških bitnosti, in po drugi strani glede na tri glavne smeri filozofije matematike, ki so se razvile konec 19. in začetek 20. stoletja, namreč logicizem, intuicionizem in formalizem. Vse tri so odgovor na krizo osnov matematike, ki je nastopila s paradoksi teorije množic. Frege, ki mu Russellov paradoks pravzaprav uniči projekt, se hoče s svojim logicizmom, tj. zvajanjem matematike na logiko, postaviti nasproti empirističnim in psihologističnim teorijam matematike, pokazati hoče, da je matematika analitično apriorno vedenje. Russell in Whitehead nadaljujeta Fregejevo delo in se v svoji *Principia Mathematica* skušata izogniti paradoksom s teorijo tipov. V nasprotju z logicizmom, intuicionizem z Brouwerjem na čelu matematiki pripisuje avtonomno področje vednosti, še več, logiko izpeljuje iz matematike, osnova matematičnega spoznanja je intuicija in v tej mora biti dano oziroma konstruirano vse, kar naj bo pripuščeno v matematiko. Posledica take zastavitve je zavračanje logičnega aksioma izključenega tretjega, kar obenem pomeni tudi odrekanje velikemu delu klasične matematike. Ravno nasprotno skuša Hilbert s formalizmom zagotoviti trdne temelje celotnemu področju klasične matematike in sicer tako, da bi transfinitno matematiko dokazal s finitnimi sredstvi. Namreč Hilbert matematiko najprej omeji na opisovanje konkretnih objektov in logičnih odnosov med njimi, kjer ne more priti do paradoksov, toda njegov cilj je to matematiko razširiti z idejo neskončnega in pokazati, da taka razširitev matematike ne vodi v protislovje. V ta namen mora Hilbert formalizirati celotno aritmetiko in v tem formalnem sistemu na končen način dokazati neprotislovnost. (glej Körner 1968; Becker 1998; Benacerraf&Putnam 1983)

Zgoraj našteti predstavniki svojih smeri so bili vsi tudi matematiki, ki so k svojemu področju pristopali tako rekoč normativno, s tem ko so reševali določena epistemološka vprašanja, so hkrati določali, kaj naj bi bila sprejemljiva matematika, kakšne postopke, metode in dokaze lahko upravičeno uporablja. Cassirer pa nasprotno vzame matematiko tako kot je, kot nekaj danega, kar moramo razložiti. Omenjene tri smeri obravnava po eni strani glede na to, kako dobro razložijo to dano materijo, in po drugi strani glede na širši epistemološki okvir. Cassirer odločno nasprotuje zvajanju matematike na logiko in posledično njeni analitičnosti, hkrati kritizira Fregejev realizem in dedukcijo kardinalnih števil s pomočjo pojma razreda. Skupno predpostavko logicizma in empirizma vidi v tem, da matematične bitnosti še vedno povezujejo z nekim realnim substratom, eni z empiričnim drugi s pojmovnim, medtem ko Cassirer zagovarja ravno nasprotno, da mišljenje iz samega sebe, iz izvornih relacij, ustvari matematične objekte. Zdi se, da se tako Cassirer približa Brouwerju, ki matematiko poveže s čisto intuicijo časa, toda Cassirer kot neokantovec zavrača čisti intuiciji prostora in časa, matematiki pa pripiše čisto logično naravo in jo poveže s čisto razumsko zmožnostjo duha. Tako se oddalji tudi od Hilberta, ki za objekte matematike razglasi zaznavne objekte – vidne znake; ne strinja pa se tudi z njegovim formalizmom, ki bi vse napredovanje v matematiki zvedel na golo kombinacijo znakov in ji s tem odrekel vsak pomen. Za Cassirerja je matematika sintetična, napredujoča znanost, ista zmožnost razuma, ki ustvari matematične pojme, je na delu v fiziki in še prej v intuiciji, tako da matematika dobi svoj pomen s svojo umeščenostjo v sistem spoznanja. Posebnost Cassirerjevih odgovorov na določena klasična vprašanja filozofije matematike izvirajo iz vloge, ki jo pripiše sintetični zmožnosti čistega razuma:

> Proti vsem tem trem usmeritvam mišljenja – empirizmu, intuicionizmu in stavčni logiki – Cassirer naperi uničujočo kritiko podprto z ogromnim zgodovinskim dokaznim gradivom [...]
> Ostane edina prava alternativa, namreč postavitev ustvarjalne sinteze čistega razuma kot absolutno nujnega epistemološkega in logičnega temelja, od katerega mora biti v splošnem odvisna sama možnost matematike. (Smart, 243)

V članku se bomo omejili na primere iz aritmetike, kjer se že dovolj dobro pokažejo bistvene značilnosti matematičnega spoznanja, pa tudi kriza osnov matematike izbruhne ravno pri definiciji naravnega števila, glede na katero potem tudi že lahko pokažemo na osnovne razlike med tremi smermi filozofije matematike. Cassirerjev odnos do logicizma si bomo ogledali v luči spora med kardinalno in ordinalno teorijo števila, hkrati pa bo ta del vključeval tudi kritiko empiristične teorije števila. Problem te teorije in vseh podobnih, ki matematične objekte razlagajo kot abstrakcijo iz danega substrata, se še posebej pokaže pri vpeljavi »idealnih« elementov v matematiko. Tu se navežemo na Hilbertov program, ki naj bi čisto formalno dokazal, da vpeljava idealnih elementov ne povzroči protislovja v starem sistemu. Cassirer tu postavi vprašanje, ali zadostuje zgolj ta formalna neprotislovnost ali ne bi morali dokazati tudi resnične notranje povezave in homogenosti logične strukture matematike. Nadaljnje vprašanje, ki se poraja ob tem, je, ali je matematika zgolj igra s praznimi znaki, kar je glavni očitek Hilbertovi zastavitvi, ali pa ima matematika vseeno nek svoj pomen. V tem je tudi jedro spora med intuicionizmom in formalizmom, ki ga skuša Cassirer razrešiti z vidika epistemologije. Potrebujemo namreč oboje: Hilbertov formalizem, ki zagotovi neprotislovnost sistema, in neke vrste intuicionizem, ki razloži pomen matematične vsebine in matematičnega odkritja. Ta razrešitev se dotika tudi Cassirerjevega razmisleka o sintetični oziroma analitični naravi matematike, kjer Cassirer zagovarja prvo.

Logicizem in zavrnitev empiristične teorije matematike

Za Cassirerja logicizem predstavlja pomemben korak naprej v filozofiji matematike, saj se odločno postavi nasproti empirističnim razlagam matematičnega spoznanja, sam v svoji kritiki velikokrat navaja Fregejeve argumente, toda nikakor se ne more strinjati z enačenjem logike in matematike in posledično z njeno analitično naravo. Hkrati pa Fregeju tudi očita, da ravno tako kot empiristi, število zvaja na nek substrat, čeprav v tem primeru sicer idealni oziroma pojmovni.

Logicizem se postavi ostro nasproti empiristični teoriji števil, po kateri naj bi števila izražala določeno lastnost predmetov, vse izjave o številih in njihovih medsebojnih odnosih naj bi zadevale določene fizične lastnosti stvari. Primer take razlage je J. S. Millova interpretacija aritmetike kot empirične znanosti. Stavek, da je $1 + 2 = 3$, ni nikakršna definicija, povezana s pomenom pojmov dva in tri, ampak je zgolj poročilo o empiričnem dejstvu, ki ga je do zdaj naša prostorska zaznava predstavljala vedno na enak način. S tako dedukcijo število izgubi svojo logično strukturo in tisto določenost, ki mu daje njegovo vrednost in pomen. Od tod tudi izvirajo vse težave Millove teorije. Zelo velika števila, ki so med seboj sicer jasno ločena, je nemogoče razločevati v čutni intuiciji. Problematična je tudi vsesplošna aplikacija števila, saj bi bilo malo čudno, če bi lastnost, ki jo abstrahiramo iz zunanjih stvari, kar prenesli na notranja izkustva, predstave in pojme. Cassirer uporabi tole Fregejevo prispodobo: »To bi bilo natanko tako, kot če bi govorili o taljivem izkustvu, modri predstavi, slanem pojmu ali lepljivi sodbi.« (Cassirer 1953, 30)

Te probleme je empiristična razlaga skušala rešiti tako, da je namesto zunanjih stvari za izvor števil vzela samo zavest. Ker je število proglasila za predstavo, ga je s tem rešila vseh omejitev, ki mu jih je nalagala povezava z materialnimi stvarmi, in zdi se, da je hkrati tudi razložila njegovo univerzalnost in obseg. Toda problem zdaj predstavlja sama narava predstave, ki je trenutna, različna v različnih individuih in se nikoli ne pojavi v isti obliki dvakrat, kar pa je v popolnem nasprotju z idealno in nespremenljivo logično naravo števila. Če potemtakem ni neka posebna psihološka vsebina izvor števila, potem bi pa to lahko bila akta diferenciacije in povezovanja, ki to vsebino proizvedeta. Tako razumljeno število je univerzalno zato, ker predstavlja stalen pogoj sodb o individuih kot individuih. Vseeno pa tudi ta razlaga ne reši logičnega problema števila, saj so ti čisti akti mišljenja še vedno zgolj psihološki pojavi, ki pridejo in grejo.

Logicistična razlaga se od empiristične razlikuje v tem, da osnove numeričnih trditev ne išče več v čutnih, fizičnih rečeh, ampak v pojmu stvari. Vsaka sodba o številskih razmerjih pripiše določeno lastnost, ne objektom, ampak njihovim pojmom. S tem je rešen problem univerzalne aplikacije števila, ki zdaj pokriva tako materialno kot nematerialno, zunanje in notranje pojave, stvari in izkustva, saj štetje zdaj ne zadeva med seboj heterogenih vsebin, ampak vedno le njihove pojme, in tako ostaja na isti logični ravni.

Bistveni del logicističnega projekta je zvesti pojem števila na logične konstante, pri čemer za nujno in zadostno predpostavko vzamejo pojem razreda in na osnovi te izvedejo dedukcijo kardinalnih števil. Pri tej dedukciji logicisti ne analizirajo števila v enostavnejše dele, ampak se vprašajo, kaj pomeni enakost števil. Takoj ko ugotovimo, pod kakšnimi pogoji bomo obravnavali dve množici kot enakoštevni, je s tem posredno določena posebna lastnost, ki je pri obeh identična. Kriterij enakoštevnosti dveh množic pa podamo z relacijo, ki naj elemente ene množice bijektivno preslika na elemente druge. Izmed neskončno mnogo možnih razredov objektov zberemo skupaj tiste, med katerimi velja ta relacija. Če zdaj abstrahiramo skupno relacijo, ki velja med vsemi razredi te zbrane celote, dobimo pojem števila te celote.

Kardinalna : ordinalna teorija števila

V čemer pa logicisti nadaljujejo empiristično teorijo, je to, da število razumejo kot skupno lastnost določenih vsebin in skupin vsebin. Še vedno, vsaj za Fregeja, število potrebuje nek objektivni substrat, v tem primeru pojmovno bitnost razreda, če naj ne izgubi svoje podpore v realnosti in s tem vso veljavnost. V nasprotju s tem Cassirer zagovarja neko drugo možnost, namreč da števil ne utemeljujemo na nobenem substratu, ampak jih razlagamo preko relacij, kot mesta v zaporedju, kakor to naredi ordinalna teorija števil. Na tej točki se Cassirer naveže na Dedekinda in njegovo dedukcijo števil, ki je v celoti utemeljena na splošni logiki relacij. Cassirer Dedekindovo dedukcijo razloži takole: Če vzamemo zaporedje, v katerem obstaja prvi člen in za katero velja pravilo sledenja, ki vsakemu členu priredi naslednika, tako da med njima velja nedvoumna tranzitivna in asimetrična relacija, ki je ista za celotno zaporedje, potem smo v tem »sledenju« že dojeli osnovni tip, ki ga aritmetika obravnava. Vse trditve aritmetike in operacije, ki jih definira, zadevajo le splošne lastnosti tega sledenja in tako niso naravnane na stvari, ampak na ordinalno relacijo. Vsa gotovost števil temelji na teh relacijah, ki se kažejo v njih samih, in ne na kaki relaciji z zunanjo objektivno realnostjo. Števila so glede na to razlago sistem idealnih objektov in njihovo bistvo je izčrpano v njihovih medsebojnih relacijah, bistvo števila je popolnoma določeno z njegovim mestom v sistemu.[1](Cassirer 1953, 38)

Ravno to daje ordinalni teoriji metodološko prednost pred kardinalno. Namreč, kot priznajo sami logicisti, za matematiko pride v poštev le število, ki se ga da čisto in popolnoma razviti v obliki zaporedja, zanimajo jo le lastnosti, ki temeljijo na urejenosti njihovih mest. Ordinalna teorija lahko zadosti takim zahtevam, saj zanjo posamezno število ne pomeni ničesar, svoj pomen dobi le z mestom v celotnem sistemu. Definicija posameznega števila neposredno določa relacijo, ki ga veže z ostalimi člani sistema. V splošni dedukciji kardinalnih števil pa je ta relacija eliminirana, člani so določeni kot skupne lastnosti razredov, še preden je karkoli določeno glede njihovega zaporedja.

> Preučevanje množic, kjer vsakemu članu ene lahko priredimo natanko en član druge, lahko vodi le do izločitve nekega identičnega 'znamenja' v obeh, toda to 'znamenje' samo po sebi še ni število, ampak je le logič-

[1] Tu gremo lahko še korak naprej in deduciramo tudi kardinalna števila. Nov pomen se nam odpre, ko števila ne dojamemo več le kot zaporedja, ampak ga razumemo in uporabljamo kot izraz mnoštva. Kardinalna števila pomenijo novo logično funkcijo, saj zdaj zaporedja ne dojamemo zgolj v njegovih soslednih členih, ampak kot idealno celoto. Naslednik naj ne bi le pustil ob strani predhodnika, ampak ga povzame vase, tako da zadnji korak vsebuje v sebi vse prejšnje skupaj z zakonom njihove medsebojne povezave. S tem se golo zaporedje ordinalnih števil razvije v enoten, samo-zadosten sistem, kjer noben člen ne obstaja sam zase, ampak predstavlja strukturo in formalni princip celotnega zaporedja.

> na lastnost, ki ni natančneje definirana. Taka lastnost postane število šele, ko se loči od drugih 'znamenj' iste logične narave, tako da stopi z njimi v relacijo 'prej-potem' ali 'več – manj'. (Cassirer 1953, 49)

Kardinalna definicija števila sama po sebi torej ne zadostuje zahtevam matematike ravno zato, ker število še vedno pojmuje kot abstrakcijo skupne lastnosti. Kar pa kardinalno teorijo povezuje z ordinalno, je logika relacij. Namreč značilno za logiciste je, da vzamejo enakost števil za konstitutivno lastnost celotne vsebine pojma števila. Če običajno vzamemo števila kot dana in se potem odločamo o njihovi enakosti in neenakosti, pa je tu ravno obratno, relacija enakosti je tista, ki je dana in ki šele določa svoje člene – števila. Tukaj Cassirer opozori na neko tendenco, ki je osnovna za vsako konstrukcijo matematičnih pojmov, kjer se konstrukt vzpostavi šele iz relacij, v katerih se nahaja. Vprašanje je le, ali je ta relacija enakosti razredov res logično enostavnejša od vseh funkcij, ki jih uporabi ordinalna teorija za svojo definicijo števila.

Da bi Cassirer pokazal, kako so relacije ordinalne teorije res enostavnejše od tistih kardinalne, vzame za primer konkretnega predstavnika logicistov – Russella – in mu očita krožnost njegove definicije števila. (glej v Cassirer 1953: poglavje II, odsek IV) Namreč če vzamemo definicijo števila ena, ugotovimo, da je že od samega začetka predpostavljeno, da vemo, kaj pomeni dojeti objekt kot en, saj je enakoštevnost množic definirana s preslikavo, ki slika en element prve množice v natančno en element druge. Logicisti temu ugovarjajo tako, da se sklicujejo na razliko med matematičnim pomenom enke in pomenom nedoločnega člena; in le ta zadnji pomen naj bi bil predpostavljen. Pojem enke ni predpostavljen pojmu individua, prej je individuum osnovni pojem, iz katerega izpeljemo število ena.

Cassirer za trenutek sprejme ta ugovor in posledično tudi logicistično definicijo enke: razred u vsebuje en element, če u ni nič in če sta x in y u, potem je x identičen y. Cassirerjev ugovor tej definiciji pa je zdaj ta, da v tem primeru logična funkcija števila ni toliko deducirana, kolikor je opisana z določenim tehničnim ovinkom. Namreč, da bi razumeli to definicijo, moramo dojeti x kot identičen sam s sabo, ga povezati z y in pogledati, če sta ista ali različna. Toda, če vzamemo ta proces postavljanja in diferenciacije za osnovo, smo le predpostavili število v smislu ordinalne teorije.

Krožnost logicistične dedukcije števila Cassirer na koncu premisli še v povezavi z najbolj splošno logicistično določitvijo števila, tj. v povezavi z enakostjo razredov. Enakost razredov predpostavlja, da so sami ti razredi dani kot mnoštvo. Podobnost razredov zahteva vsaj dve celoti povezani z določeno relacijo, torej zahteva, da postavimo ta razreda nasproti drug proti drugemu in ju tako razumemo kot dve različni enoti. Logicisti se tu lahko sklicujejo na neposredno dano logično razliko med pojmi razredov, ki ne potrebuje in nima nadaljnje upravičitve. Toda to bi nas vodilo le nazaj od pojma razreda do njegove generirajoče relacije. Razlika med sistematičnimi celotami bi se reducirala na razliko med pojmovnimi zakoni, ki jih producirajo. V povezavi s tem prednost ordinalnih števil Cassirer opiše takole:

> […] čista ordinalna števila lahko izpeljemo neposredno in brez ovinka v pojem razreda, saj nam za to ni treba predpostaviti ničesar razen možnosti, da diferenciramo zaporedje čistih miselnih konstrukcij s pomočjo različnih relacij z določenim osnovnim elementom, ki služi kot izhodišče. Teorija ordinalnih števil tako predstavlja bistveni minimum, ki se mu ne izogne nobena logična dedukcija števila. (Cassirer 1953, 53)

V *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit* Cassirer ta isti spor med ordinalno in kardinalno teorijo obravnava v bolj splošno epistemološkem okviru. Njegova osnovna predpostavka je, da za čisto matematiko ni pomembno, s katero definicijo števila začnemo, saj mora vsaka dedukcija števila upoštevati obe strani, ker je število tako glavno kot vrstno obenem. Ta spor torej ni notranji čisti matematiki, ampak je le del širšega problema in splošnega vprašanja, kako se naše spoznanje nanaša na objekte in katerim pogojem mora zadostovati, da bi imelo objektivni pomen.

Prvi odgovor na to vprašanje pravi, da se spoznanje ravna po bivajočem in zato svojo nalogo opravi toliko bolje, kolikor bližje pride njegovi pravi naravi in bistvu. Resničnost pojma dokažemo tako, da podamo objektivni substrat, ki mu ustreza, kajti drugače bi bil le subjektivna iluzija. Najvišji postulat je torej *adequatio rei et intellectus*, ki mora biti izpolnjen v vsakem primeru, pa naj gre za empirične ali matematične pojme. Ti se razlikujejo zgolj po svojem izvoru in vsebini, ne pa v svoji odvisnosti od stvari.

Temu nasproten odgovor ponuja tako imenovani funkcionalni pogled na spoznanje, ki objekt spoznanja ne vzame za že v naprej dan, ampak je ta šele cilj spoznanja. Vprašanje, ki si ga ta pogled postavlja ni, kaj so razni objekti v svoji pravi naravi in biti, ampak kako je spoznanje sploh možno.

Prvi odgovor lahko povežemo s kardinalno teorijo števil, saj je za njene zastopnike (Cantor, Frege, Russell) pojem objektivno veljaven le, če ustreza nečemu realnemu. To podlago, ta logični in stvarni *prius* števila, najdejo v pojmu množice.

> V množici, v mnoštvu obstoječih predmetov – obstoj, ki pa je v resnici čisto bistvo, saj je določen pojmovno in ne čutno – pridobi število prvič svojo substancialno podporo in s tem svoj pomen in resničnost. Kardinalno število označuje določeno lastnost, ki se drži množic in ki jo lahko z abstrakcijo iz le-teh tudi izločimo. (Cassirer 1994, 71)

Nasprotno stališče zastopa ordinalna teorija, ki v urejenosti števil ne vidi le neke lastnosti in dodatka številu, ampak to urejenost vzame za njihov utemeljujoči in konstitutivni princip. Števila niso nekaj samo po sebi danega, ampak označujejo neko mesto v zaporedju. Kar daje številu njegovo bistvo in kar ga privede do obstoja, so relacije, v katerih se nahaja. V teh najpoprej najdemo momenta postavitve in razlikovanja, h katerima se pridružita še momenta zaporedja in njegove urejenosti. Na teh momentih, ne pa na sistemih stvari, temelji celotna aritmetika.

Vpeljava idealnih elementov in formalizem

Prednost drugega pristopa se še posebej pokaže pri vpeljavi negativnih števil, ulomkov, iracionalnih in imaginarnih števil. Očitno ta števila ne referirajo več na kake čutne oziroma pojmovne skupine objektov in tako postanejo problematična za teorijo abstrakcije. Če pa jih razumemo kot sisteme relacij, nova števila postanejo le izraz iste logične funkcije, ki je prisotna že v naravnih številih. Npr., če negativna števila razumemo substancialno, nastopijo problemi, ko skušamo neki negativni substanci pripisati bit, če pa jih razumemo relacijsko, jih dobimo tako, da obrnemo relacijo sledenja, ki velja že za zaporedje naravnih števil.

Kot primer, kjer se zgornje trditve najbolj jasno pokažejo, Cassirer navaja vpeljavo iracionalnih števil z Dedekindovimi rezi. Postopek je naslednji: Če vzamemo množico vseh racionalnih števil in izberemo neko racionalno število a, potem to število razdeli celoto na dva razreda, kjer so v enem vsa števila manjša od a in v drugem vsa števila večja od a. Toda obratno ne velja, če vzamemo neko strogo določeno, nedvoumno razdelitev, ni nujno, da ta ustreza nekemu določenemu racionalnemu številu. Npr. vzamemo pozitivno celo število D, ki ni koren celega števila, potem obstaja tako naravno število Λ, da je $\Lambda^2 < D < (\Lambda+1)^2$. Naj bo $\mathcal{A}$ množica vseh števil, katerih kvadrati so manjši od D, in $\mathcal{B}$ množica tistih, katerih kvadrati so večji od D. Potem vsako racionalno število pripada eni od teh množic, ni pa nobenega racionalnega števila, ki bi povzročilo to delitev. Tako lahko uvedemo iracionalno število, ki nima druge funkcije in pomena, kot da pojmovno predstavlja to določenost razdelitve same. To novo število ni arbitrarno postavljeno niti ni vpeljano kot goli simbol, ampak je izraz celote relacij, ki smo jih najprej strogo logično deducirali. »Od začetka predstavlja natančno določen logični sistem relacij in v le-tega ga lahko ponovno tudi razstavimo.« (Cassirer 1953, 59)

Ti rezi so hkrati tudi urejeni v zaporedje, kar sledi iz njihove izvorne konstrukcije. Namreč za reza $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ in $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ rečemo, da je prvi večji od drugega, če obstaja element a, ki pripada $\mathcal{A}$ in $\mathcal{D}$. S tem smo podali splošno pravilo, ki določa zaporedje rezov, s čimer ti rezi dobijo lastnost čistih števil.

> Število namreč v svojem izvornem pomenu nima nobene posebne značilnosti, ampak je zgolj najsplošnejši izraz forme urejenosti in zaporedja na sploh; zato kjerkoli taka forma obstaja, tam število najde svojo uporabo. Za reze lahko rečemo, da so števila, saj med seboj tvorijo strogo urejeno mnogoterost, kjer je relativno mesto elementov določeno glede na določeno pojmovno pravilo. (Cassirer 1953, 61)

Pri vpeljavi iracionalnih števil torej ne gre za to, da bi med znane elemente sistema nekako vrinili nove, oziroma predpostavili njihov obstoj, ampak se na osnovi izvorne dane celote pojavi drug, bolj kompleksen sistem določitev zaporedja. Ta sistem vsebuje prejšnjega in ga povzame vase, saj tudi racionalna števila lahko predstavimo kot reze in na množici rezov definiramo običajne številske operacije.

Nova števila so torej v bistvu le bolj kompleksen sistem relacij, sistem, ki ga sestavlja razred starih števil. Ta njihova lastnost pa se zabriše, ko z namenom, da bi lažje raziskovali to novo področje, za te kompleksne sisteme relacij uvedemo nove simbole, s temi pa potem operiramo, kot smo prej z enostavnejšimi elementi. Tako se zdi, da so npr. iracionalna števila prav tako enostavna kot naravna in da jih moramo razložiti na enak način.

Videli smo, kako z logiko relacij uspešno razložimo naravo novih števil, preostane pa še, da bolj natančno osvetlimo samo vpeljavo teh števil, tj. odnose, ki se vzpostavijo med starim in novim sistemom števil. Probleme z vpeljavo novih oziroma idealnih elementov Cassirer poveže s Hilbertom in njegovim programom. Za Hilberta je pridružitev idealnih elementov končnim trditvam matematike upravičeno, če lahko pokažemo, da novi objekti zadoščajo istim formalnim pravilom kot stari in da ne povzročajo protislovja v starem sistemu. Toda Cassirerju se zdi to premalo, saj s tem dokažemo le, da ti elementi lahko stojijo drug poleg drugega in se povezujejo brez protislovja, ne pa resnične notranje povezave in homogenosti logične strukture matematike. Pokazati moramo, da novi elementi niso pridruženi le kot elementi druge vrste ali izvora, ampak da so nujno sistematično nadaljevanje starih. Ti novi elementi ne spreminjajo pomena starih, ampak šele do popolne jasnosti razvijejo to, kar je bilo prej le implicitno prisotno. Tako problem zdaj ni več reducirati nove elemente na stare in jih razlagati skozi prizmo starih, ampak ravno skozi nove dojeti resničen pomen starih in s tem spoznati njihovo pravo univerzalnost in globino.

> Vsak korak, ki je povečal obseg matematike in njenih objektov, je s seboj prinesel globlje razumevanje njenih temeljev [...] stalno naraščanje elementov matematike ne ogroža njene notranje logične povezave, ampak jo vedno le še jasneje in strožje potrdi. Saj vsaka nova razširitev pomeni logično okrepitev. (Cassirer 1973, 392)

Ključ do razumevanja idealnih elementov leži v dejstvu, da tako imenovana idealnost ni lastnost le teh elementov, ampak da v njih le pride do popolnega izraza. Saj noben resnično matematični objekt ne referira na zgolj dane in pričujoče objekte; da bi bil matematičen mora objekt vsebovati princip »sintetične produkcije«. To pomeni, da najprej postavimo univerzalno relacijo in šele z njeno vsestransko aplikacijo se razvije področje matematičnih objektov. Zato vpeljava novih idealnih elementov le nadaljuje proces, ki je bil prisoten že pri osnovnih elementih matematike. Še več, idealni elementi predstavljajo cilj vsake matematične konstrukcije pojmov, saj se z njimi osvobodi začetnih omejitev in pride do svoje polne veljave.

Pomen matematičnih znakov, spor med intuicionizmom in formalizmom

Nadalje je problem Hilbertovega programa ta, da v tem ko se omeji zgolj na formalni dokaz neprotislovnosti, tvega nominalizem matematičnih znakov. Namreč za Hilberta so predmeti matematike čutni znaki in relacije med njimi, funkcija intuicije je le v tem, da priskrbi določene zunaj logične diskretne objekte, ki so neposredni doživljaji pred mišljenjem. Njegov program je pripeljati formalizacijo do tega, da bo vsako protislovje v mišljenju takoj opazno v določeni konstelaciji znakov. Ko je teorija dokaza razvita do te mere, se mišljenju ni več treba ukvarjati z vsebino. Toda na ta način se zdi, da je celotna čista matematika zgolj igra z znaki. Prav na tej točki je Hilbertova filozofija matematike dobila veliko ugovorov. Namreč, četudi bi Hilbert tako zagotovil resnico matematike, pa bi se ta spremenila v eno samo veliko tavtologijo, saj je njena veljavnost zdaj zgolj veljavnost konvencionalnega pravila ne pa objektivnega spoznanja.

V povezavi z zgornjim vprašanjem se Cassirer naveže na spor med intuicionizmom in formalizmom, kjer prvi trdi, da je matematika neodvisna in avtonomna znanost s sebi lastnim območjem predmetov, ki temeljijo na posebni zmožnosti duha, namreč na čisti intuiciji časa, in od te tudi dobijo svoj pomen, medtem ko drugi trdi, da lahko vse izjave matematike prevedemo v čisto formalen sistem znakov in da lahko potem te izjave dokažemo zgolj s pravilno kombinacijo le-teh, kar pomeni, da lahko popolnoma odmislimo kakršenkoli pomen matematičnih pojmov in izjav. Cassirer v tem vidi naslednjo metodološko kontroverzo v moderni matematiki:

> Ali vzamemo matematične znake, kot da so sami sebi namen, kot dejanske objekte matematičnega spoznanja, ali pa moramo vanje vdihniti neke vrste intelektualnega življenja; in zdi se, da to lahko storimo le, če jih navežemo na nekaj drugega, nekaj izven njih samih, in jih razumemo kot simbolično reprezentacijo tega drugega. Ampak ko gremo enkrat po tej poti, ko je enkrat matematičnim figuram pripisan prehoden pomen, se zdi, da mišljenju ni naložena več nobena meja: od prehodnega pomena je neizbežno gnano k transcendentnemu pomenu. (Cassirer 1973, 383)

Vprašanje, ki ga skuša Cassirer razrešiti je torej: Če so matematični simboli le produkt našega mišljenja, so potem res le goli izmislek in je matematika zgolj igra z znaki ali pa imajo ti znaki vseeno kak globlji pomen, ki seže preko njih samih, toda hkrati tak, ki ne vodi do nekega transcendentnega pomena, ki ga lahko doseže le metafizična ali religiozna vera. Tu ima Cassirer v mislih Weyla, ki objektivnost matematičnih simbolov poskuša zagotoviti na dva načina, po eni strani jih veže na uporabo v fiziki, po drugi strani pa transfinitne elemente, ki gredo čez potrebe fizike, povezuje z metafiziko, s področjem, ki ga ne moremo več videti, ampak vanj samo verjamemo.

Na zgornje vprašanje Cassirer odgovori tako, da namesto tega izključujočega ali-ali ponudi tretjo možnost, tj., da zavrne dualizem mišljenja in čutnosti. Namreč Cassirer ne ločuje strogo teorije in intuicije, vsako intuitivno izkustvo je prežeto s teoretičnimi funkcijami pomena in vsaka čista signifikacija najde pomen v intuitivnem. Tako naše simbolno spoznanje ne razpade na imanentno območje mišljenja in transcendentno območje čutnosti, ampak je oboje hkrati. Če to apliciramo na pomen matematičnih simbolov, ugotovimo:

> Bistvo tega pomena ne leži v tem, kar so sami po sebi, niti v tem, kar kopirajo, ampak v specifični smeri idealne formacije – ne v zunanjem

> objektu, na katerega merijo, ampak v določenem načinu objektivizacije. [...] Posledično, ne moremo določiti njene resnice tako, da znake, v katerih se predstavlja, oropamo njihovega signifikativnega pomena in ne pustimo ničesar, razen njihove realne fizične vsebine, niti tega ne moremo narediti tako, da razkrijemo kakeršenkoli obstoječ posamezen objekt, ki bi mu števila neposredno ustrezala. Le če matematiki dodelimo njeno mesto znotraj celotnega objektivizacijskega procesa spoznanja, lahko spoznamo posebno vrednost matematičnega in razkrijemo njen *quid juris.* (Cassirer 1973, 383)

Ta Cassirerjeva razlaga temelji na osnovnih predpostavkah njegove filozofije simbolnih form in še posebej na vlogi, ki jo znak zavzema znotraj te filozofije. Namreč vsaka od teh form (mit, religija, umetnost, jezik in znanost) si ustvari svoje lastne simbole, v katerih in s pomočjo katerih konstituira svoj pogled na »realnost«. Toda to ne pomeni, da so te forme načini, kako se realnost kaže človeku, ampak se šele skozi njih ta realnost vzpostavi. Zato nobena od teh form ne more razviti svojega posebnega načina dojemanja in konfiguracije, ne da bi si ustvarila določenega čutnega substrata v znaku.

To se lepo vidi v znanosti, kjer je vsak napredek v obravnavanju njenih vprašanj in ustvarjanju novih pojmov tekel vzporedno z vse večjo izčiščenostjo sistema znakov. Tu Cassirer navaja primer Galileijeve mehanike, ki je postala popolnoma razumljiva šele z odkritjem diferencialnega računa. Sklicujoč se na Leibniza, Cassirer sklepa, da potemtakem znak ni zgolj neka naključna preobleka ideje, ampak njeno nujno in bistveno orodje. Ni le sredstvo, ki posreduje celoto dane misli, ampak se šele z njim ta vsebina dokončno razvije in definira. »Pojmovna definicija določene vsebine gre z roko v roki z njeno ustalitvijo v nekem karakterističnem znaku.« (Cassirer 1957, 86)

Nadalje se Cassirer v sporu med intuicizmom in formalizmom osredotoči na njuno razlago matematičnega spoznanja oziroma na njuno določitev tistega temelja, ki naj zagotavlja veljavnost oziroma resničnost matematičnih izjav. Za intuicioniste je ta temelj izvorna matematična intuicija in veljavnost dokaza je zagotovljena šele s konstrukcijo v intuiciji, medtem ko pri formalistih intuicija odigra le pasivno vlogo, matematično spoznanje napreduje glede na formalna pravila. Čeprav se zdita ti stališči diametralno nasprotni, Cassirer ugotovi, da z epistemološkega stališča intuicionizem in formalizem nikakor nista nezdružljiva. Namreč, matematično spoznanje lahko razložimo tudi tako, da intuitivno spoznanje tvori temelje matematike, simbolno spoznanje pa zagotavlja, da lahko s pomočjo verige dokazov napredujemo od teh osnov do zaključkov. V tem procesu lahko shajamo samo z operacijami med znaki, ne da bi jim pripisovali kakršen koli pomen, toda vedno pridemo do točke, ko se vprašamo po pomenu teh znakov in zato potrebujemo intuitivno razlago. Ta zahteva je posledica tega, da matematično mišljenje temelji na osnovni in neodvisni funkciji razuma in uporablja simbolne znake le kot sredstvo.

Ti dve nalogi, intuitivno podajanje osnov in simbolno nadgradnjo, Cassirer pripiše različnima epistemološkima ravnema. Za Hilberta je namreč ključna naloga njegove teorije obvarovati matematiko pred protislovjem. Toda kar služi kot orožje proti zmoti, še ni popolni in primerni temelj resnice. Ta leži v določenih sintezah misli, ki nam omogočajo, da zgradimo določen objektivni svet in ga razumemo s pomočjo univerzalnih zakonov. Vzporedno z analitično logiko, ki pregleda najdeno in njegove sistematske povezave, se pojavi zahteva po logiki odkritja. Hilbertov formalizem zadostuje za analitično logiko, ne razloži pa pomena matematične vsebine in matematičnega odkritja.

Analitičnost : sintetičnost matematike

S tem pa preidemo na še eno klasično vprašanje filozofije matematike, namreč na vprašanje, ali je matematika sintetična ali analitična. Za Cassirerja je matematika sintetična napredujoča znanost, ki nima celotnega svojega področja pred sabo že od samega začetka, ampak napreduje na nova neodkrita področja. Matematika ni analitični razvoj že znanega, ampak je pristno odkritje. Iz zgornjega lahko razberemo, da Cassirer pojma analitično in sintetično ne razume v običajnem logičnem pomenu, ampak je matematika sintetična zato, ker sama konstruktivno zgradi področje svojih predmetov. Če se običajno razlaga pojem analitičnega kot možnost zvajanja na stavek protislovja ali pa s tem, da pojem že sam vsebuje vse svoje določitve, in se pri tem sklicuje na Kanta, pa Cassirer svoje razumevanje sintetičnega vzpostavi ravno v nasprotju s to tradicionalno interpretacijo:

> Za Kanta samega ta razlika ne spada niti na področje psihologije niti na področje formalne logike – gre tako daleč, da razlago možnosti sintetičnih sodb proglasi za nalogo, s katero naj bi celotna logika ne imela nobenega opravka [...] Kar hoče Kant s tem nakazati je, da pravi temeljni karakter matematične sinteze, na katerega meri, pride na dan ne toliko pri tvorbi pojmov oziroma sodb, kolikor v izgradnji matematičnega sveta objektov. (Cassirer 1994, 81)

V matematiki ne gre za to, da bi dani pojem razstavljali na njegove lastnosti, ampak da iz izhodiščnih relacij gradimo vedno bolj kompleksne in vsaki novi celoti takih relacij pripišemo novo območje predmetov. Ta postopek se lepo vidi na primeru števila. Ne moremo namreč reči, da pojem celega števila že vsebuje vse lastnosti, ki bi se potem razvile v racionalna, realna in kompleksna števila. Za prehod od celih števil k racionalnim moramo opustiti lastnost, da ima vsako celo število neposrednega predhodnika in naslednika, za prehod od realnih h kompleksnim številom pa se moramo odreči urejenosti z relacijo večje ali manjše. Kot smo že videli, nove vrste števil dobimo tako, da od enostavne relacije naravnih števil preidemo k bolj kompleksnim in za celoto teh relacij uvedemo nove simbole.

Argument za sintetičnost matematike lahko povežemo tudi s Cassirerjevo čisto splošno teorijo pojma; pojem namreč ni neka kopija ali abstrakcija lastnosti, ampak je pravilo, je funkcija iskanja poti, vsak nov pojem je poskus, začetek, problem. Tudi znak, ki pripada pojmu, ima podobne lastnosti, saj ne nudi zgolj simbolne okrajšave za že znano, ampak odpira nove poti v neznano. Pojem torej ne da fiksnega in pripravnega odgovora, ampak le vzpostavi smer raziskave. Če je ta postopek popolnoma jasen v primeru empiričnih znanosti, ki jih zato imenujemo sintetične, pa se v primeru matematike ta lastnost pojma zabriše.

Cassirer razlog za to vidi v tem, da empirične znanosti za razliko od matematike ne ustvarijo svojega predmeta, ampak jim je v nekem smislu dan, kar pomeni, da lahko odgovor na vprašanje, ki ga pojem zastavi, iščejo v empirično dani mnogoterosti. Pri tem iskanju pa lahko napredujejo le postopoma od zaznave do zaznave. Vedno sicer obstaja zahteva, da vse te posameznosti združimo v sistematično celoto, toda vsak nov korak empirične raziskave odpre nov pogled na njen predmet. Tu ne gre za to, da bi najprej dojeli neko celoto in kasneje razvili njene določitve, ampak poskušamo zgraditi to celoto košček za koščkom, tako da upoštevamo posamezne empirične podatke.

V primeru matematike pa se zdi, da če že sami neodvisno od izkustva ustvarimo pojem, potem vse njegove določitve ležijo že v njem samem in tako ne moremo govoriti o kakšnem pristnem odkritju. Toda kot smo videli, tudi matematika nima celotnega svojega področja že v naprej pred sabo, ampak napreduje na vedno nova območja, tudi v matematiki pojem ostaja začetek in problem. Toda to napredovanje ima neko posebno metodološko lastnost. Namreč pot ne vodi od enkrat za vselej določenih začetkov k vedno bolj razvejanim zaključkom, ampak vsako odkritje postavi v novo luč same te začetke. To značilnost matematike smo podrobneje obravnavali že pri razlagi vpeljave idealnih elementov, kjer ti ne predstavljajo zgolj nove-ga območja predmetov, ki bi stal nepovezano poleg starega, ampak ravno ti elementi šele globlje utemeljijo stare in jim dajo bolj univerzalni pomen. (Cassirer 1973, 398)

Če povzamemo in se še enkrat navežemo na Hilbertov program, ugotovimo, da v tem smislu zgolj formalni dokaz neprotislovnosti ne nudi nobenega vpogleda v naravo matematičnega spoznanja, ravno nasprotno, za Cassirerja so idealni elementi tisti, ki šele do konca razvijejo to, kar je prisotno v starih elementih, in so tisti, ki razkrivajo bistvo matematičnega mišljenja. Bistvo pa je v ustvarjalni sintezi čistega razuma, ki gradi čiste relacijske sisteme in jim daje njihov pomen.

Bibliografija:

Becker, O. (1998), *Veličina i granica matematičkog načina mišljenja*, Zagreb: Demetra.

Benacerraf, P. & Putnam, H., ur. (1983) *Philosophy of Mathematics, Selected Readings*, Cambridge: Cambridge University Press.

Cassirer, E. 1907 (1994) *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit,* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Cassirer, E. 1910 (1953) *Substance and Function*, Chicago: Open Court.

Cassirer, E. 1923 (1957) *The Philosophy of Symbolic Forms. Volume One: Language*, New Haven: Yale University Press.

Cassirer, E. 1929 (1973) *The Philosophy of Symbolic Forms. Volume Three: The Phenomenology of Knowledge*, New Haven: Yale University Press.

Körner, S. (1968) *Philosophie der Mathematik*, München: Nymphenburger Verlagshandlung.

Smart, H.R. (1973) »Theory of Mathematical Concepts«. V: Schlipp, P. (ur.), *The Philosophy of Ernst Cassirer*, La Salle: Open Court, str. 241-267.