

Zveneči kozarci



EMA MLINAR

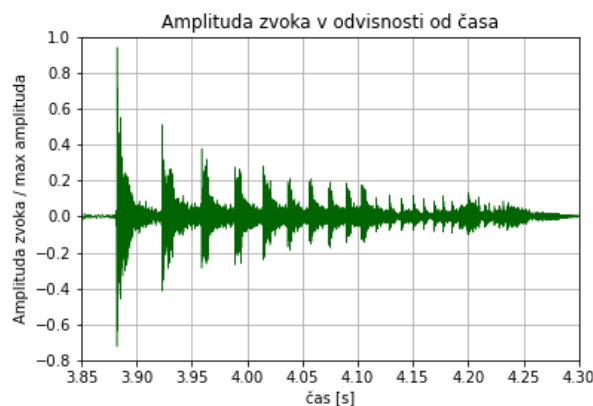
→ Vsi smo že kdaj z eno roko prijeli dva kozarca. Če ju stisnemo skupaj na prav poseben način (glej sliko 1) in hkrati dvignemo, se zasliši značilen zvok. Zanima nas, od kod ta zvok in splošen opis dogajanja. Tako se je glasila ena izmed nalog na mednarodnem IPT (International Physicists Tournament) tekmovanju študentov v reševanju fizikalnih problemov leta 2020. Poskus lahko brez težav izvedemo doma, potrebujemo le kozarce s čim bolj ravnim robom, velikost ni pomembna. Za bolj natančno opazovanje pa prav pridejo tudi mikrofoni, vmesnik za zajem zvoka ter program, ki omogoča analizo natančnega časovnega poteka (npr. Audacity).



SLIKA 1.

Kozarca primemo na vrhu in ju dvignemo. Zaslišimo zvok trkanja kozarcev.

Ob poslušanju zvoka trkanja kozarcev dobimo idejo, da bi lahko bili za pojav odgovorni trki med kozarcema in spreminjanje časa med njimi. Da bi to bolj videli, posnamemo zvok in ga prikažemo kot jakost zvoka (oz. bolj natančno zračni tlak) v odvisnosti od časa, glej krivuljo na sliki 2. Opazimo vrhove, ki predstavljajo trke med kozarcema, ti so



SLIKA 2.

Časovna odvisnost amplitude zvoka, ki jo dobimo s pomočjo zvočnega posnetka in obdelamo v programu Audacity. Konice na grafu predstavljajo trke, opazimo, da je razmik med njimi vedno krajši. To slišimo kot višanje frekvence. Opazimo lahko tudi, da se amplituda manjša, kar pomeni, da se očitno energija izgublja. Domnevamo, da gre za dušeno nihanje.

vedno manjši. Hkrati pa vidimo tudi soroden pojav krajšanja intervalov med trki, ki se na koncu zlijejo v enoten zven. Ugibamo, da bi to lahko bilo povezano z zvokom, ki ga slišimo. Opazimo pa tudi, da po vsakem trku kozarec zveni še s svojo lastno frekvenco, ki pa se zaduši po zelo kratkem času (že do naslednjega trka), zato ne prispeva bistveno k pojavu. Oblikujmo hipotezo: značilni zvok je posledica vedno krajših časovnih razmikov med trki, kar slišimo kot višanje frekvence trkov. Krivulja jakosti zvoka v odvisnosti od časa je na sliki 2.

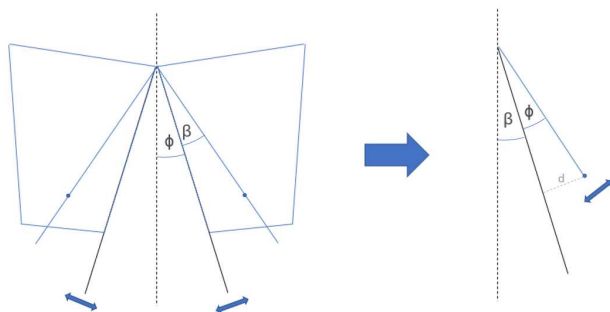
Najprej lahko opazimo, da če sta kozarca enaka, je gibanje drugega kozarca simetrično prvemu. Odbijanje med kozarcema lahko zaradi simetrije opišemo kot odbijanje enega kozarca od navpične stene. Ker težišče kozarca ni na robu kozarca, je gibanje ekvivalentno odbijanju točkaste mase od rahlo nagnjene stene. Pri tem gre v bistvu za nihanje okoli točke, kjer kozarca držimo. Ker pa vemo, da so v točki dr-





žanja in v točki odboja prisotne energijske izgube (npr. trenje, nepopolna prožnost), pričakujemo, da bo šlo za neko vrsto dušenega nihanja.

Začnimo s preprostim opisom gibanja enega kozarca, natančneje z njegovim nihanjem. Ta niha kot enostavno fizično nihalo (to je posplošitev matematičnega, le da imamo namesto mase vztrajnostni moment, ki opisuje razporeditev mase v nihalu). Kot odmika v odvisnosti od časa lahko zapišemo kakor $\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$. Tukaj θ_0 predstavlja amplitudo odmika. Krožna frekvenca nihanja enega kozarca ω je odvisna od njegove velikosti - velikosti in položaja težišča, ki vplivata na vztrajnostni moment. Višji kozarci bodo nihali počasneje. To frekvenco bi lahko izmerili z ločenim eksperimentom, bolj nas pa zanima mehanizem, ki vodi v značilen zvok.



SLIKA 3.

Trkanje dveh kozarcev lahko opišemo z odbijanjem obeh »stene« na sredini. Če pogledamo še drugače, lahko kota ϕ in β zamenjamo, saj je pot težišča kozarca nespremenjena. Dobimo torej odbijanje točkastega telesa od nagnjene stene.

Nadaljujemo z opisom odbijanja točkaste mase od nagnjene stene. Vpeljimo kót β kot nagib navidezne stene oziroma kot med navpičnico in zveznico osišča in težišča v ravnovesju - glej sliko 3. Kót θ_0 lahko zapišemo kakor vsoto kotov $\phi_0 + \beta$, kót θ pa kakor $\phi + \beta$:

$$\phi + \beta = (\phi_0 + \beta) \cos(\omega t),$$

Sedaj lahko zapišemo zvezo ob trku, polovični razmik med kozarcema je v tem primeru β . Čas začnemo šteti, ko je razmik med kozarcema maksimalen. Kozarca trčita na polovici časa med dvema tr-

koma:

$$\beta = (\beta + \phi_0) \cos\left(\omega \frac{T}{2}\right), \quad (1)$$

kjer je T čas med dvema trkoma ob steno (glej sliko 3). Nadalje opazimo, da je kot ϕ zelo majhen v primerjavi s kotom β , še posebej na koncu pojava, ko slišimo značilen zvok. Trk se torej zgodi na začetku periode nihanja enega kozarca $\phi_0 + \beta$, z drugimi besedami, ob majhnem času T . Zato je tudi produkt $x = \omega \frac{T}{2}$ majhen in kosinus lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

S to zvezo lahko enačbo 1 poenostavimo:

$$\begin{aligned} \beta &= (\beta + \phi_0) \left(1 - \frac{\left(\omega \frac{T}{2}\right)^2}{2}\right) \\ \frac{\beta}{\beta + \phi_0} &= 1 - \frac{\omega^2 T^2}{8} \\ 1 - \frac{\phi_0}{\beta + \phi_0} &= 1 - \frac{\omega^2 T^2}{8} \\ \frac{\phi_0}{\beta + \phi_0} &= \frac{\omega^2 T^2}{8} \end{aligned}$$

Ker je β precej večji od ϕ_0 , lahko ϕ_0 v imenovalcu zanemarimo. Nato iz izraza izluščimo amplitudo nihanja ϕ_0 :

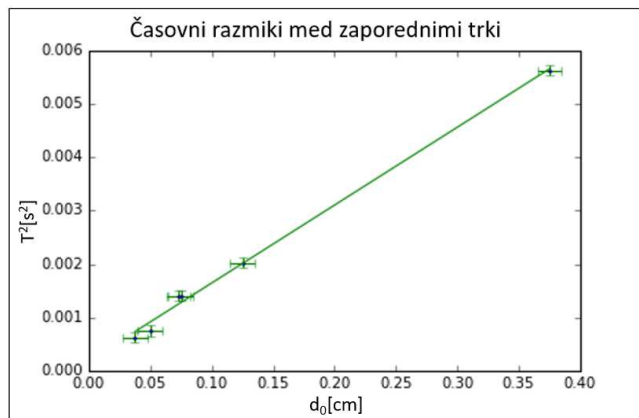
$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{\omega^2 T^2 \beta}{8} \\ \phi_0 &\propto T^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Kot vidimo, količini ϕ_0 in T nista neodvisni, med njima obstaja jasno določljiva zveza. To lahko razložimo s tem, da točkasto telo dlje časa pada do »stene«, če ga spustimo z večje višine (oz. večje amplitude ϕ_0) kot pa z manjše. Čas med dvema skrajnima legama pa je ravno polovica časa med trkoma.

Ker so koti majhni, velja med maksimalno amplitudo kota ϕ_0 in maksimalnim fizičnim razmikom (tekoma enega nihaja) d_0 približna zveza $d_0 = l \sin \phi_0 \approx l \phi_0$. Razdalja l med osjo vrtenja in težiščem je konstanta, značilna za izbrani kozarec. Torej lahko enačbo 2 zapišemo tudi z maksimalnim fizičnim razmikom med kozarcema kakor:

$$d_0 \propto T^2 \quad (3)$$

To zvezo lahko preverimo tudi eksperimentalno. Eksperiment smo izvedli tako, da smo s pomočjo hitre kamere (uporabili smo kamero s 1200 sličic na sekundo, zadošča pa tudi manjša časovna ločljivost) posneli kozarca, ki trkata. Za vsak nihaj smo izmerili čas med sosednjima trkoma in maksimalni fizični razmik med robovoma kozarcev spodaj. Ujemanje z napovedano potenčno zvezo nakazuje, da smo z razlago na pravi poti, glej sliko 4.



SLIKA 4.

Eksperimentalna zveza med fizičnim razmikom d_0 in časovnim razmikom med dvema trkoma T . Med d_0 in T^2 je linearna odvisnost (polna črta), kar pomeni kvadratno odvisnost med d_0 in T , tako kot to napoveduje enačba 3.

Iz časovne odvisnosti amplitude zvoka na sliki 2 opazimo, da se amplituda nihanja s časom manjša;

ugotovimo, da gre za dušeno nihanje. Za dušeno nihanje je značilno, da amplituda (ϕ_0) pada eksponentno s časom. Do izgub energije oziroma dušenja lahko pride zaradi različnih pojavov – na primer zaradi zračnega upora, neprožnosti trkov med kozarcema, ter stika z našimi prsti v točki, kjer ju držimo (energija gre v toploto ali zvok). Zaradi zelo majhnih odmikov in hitrosti bomo zračni upor zanemarili. Za preostala dva pojava pa moramo poiskati matematični model, ki bo opisoval zmanjševanje amplitude. Predpostavimo, da stalno izgubljammo enak delež amplitude, kar opisuje eksponentna funkcija:

$$\Phi_0 = \phi_0 e^{-t/\tau}$$

kjer je t čas, τ pa neki karakteristični čas (konstanta). V tem primeru je dušenje prisotno ves čas, saj sta kozarca ves čas v kontaktu z roko. V drugem primeru, torej, če zanemarimo izgube v točki, kjer držimo, pa se energija izgublja diskretno (to pomeni, da dušenje »deluje« samo ob trkih, in ob vsakem trku izgubimo enak delež energije), zato dobimo odvisnost od števila trkov in ne od časa. Zapišemo diskretno odvisnost amplitude od števila trkov:

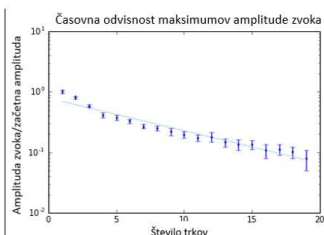
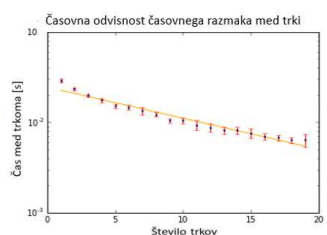
$$\Phi_0 = \phi_0 e^{-N/N_0}$$

Kjer je N število dosedanjih trkov, N_0 pa karakteristično število trkov (konstanta, ki je odvisna od energijskih izgub ob trku).

S pomočjo prilagajanja obeh krivulj na podatke določimo, ali je več dušenja v točki stika ali v točki trka (glej sliko 5). Ugotovimo, da je dušenje zaradi

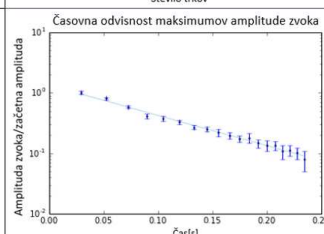
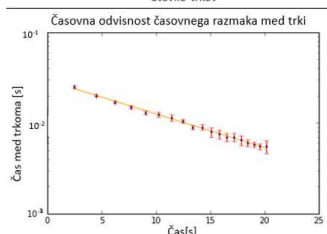
1. model:

Dušenje ob trkih



2. model:

Dušenje v stiku med kozarcema



SLIKA 5.

Primerjava prilagajanja teoretičnega modela meritvam v primeru dušenja v točki stika med kozarcema in dušenja zaradi energijskih izgub med trki. Nakloni premic so odvisni od jakosti dušenja. Ordinarna os je v logaritemski skali, da eksponentne oziroma geometrijske zveze ustrezajo premicam.



trenja v stiku med kozarcema precej večje od energijskih izgub med trki, saj je prileganje na spodnja grafa precej boljše.

Iz desnih dveh grafov na sliki 5 pa opazimo še eno posebno značilnost. Časovna odvisnost razmika med sosednjima trkoma se obnaša zelo podobno kot časovna odvisnost amplitude zvoka. Iz tega sklepamo, da bi lahko bili ti dve količini povezani.

Poskusimo torej teoretično pojasniti odvisnost med razmikom med sosednjima trkoma ter amplitudo zvoka (oz. bolj natančno zvočnega tlaka).

Za amplitudo zvočnega tlaka predpostavimo, da velja zveza:

$$\blacksquare W_{\text{nih}} \propto W_{\text{zvoka}} \propto A_{\text{zvoka}}^2$$

kjer je W_{nih} energija nihanja, W_{zvoka} energija zvoka (ki je izgubljena med trkom) in A_{zvoka} amplituda zvočnega tlaka, ki ga posname mikrofoni. Iz ohranitve energije nato sledi

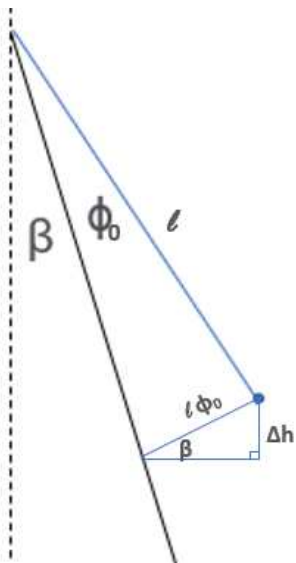
$$\blacksquare W_{\text{nih}} \propto mg\Delta h \propto \Delta h = l \phi_0 \sin \beta \propto \phi_0 \propto T^2,$$

glej sliko 6.

Dobimo torej

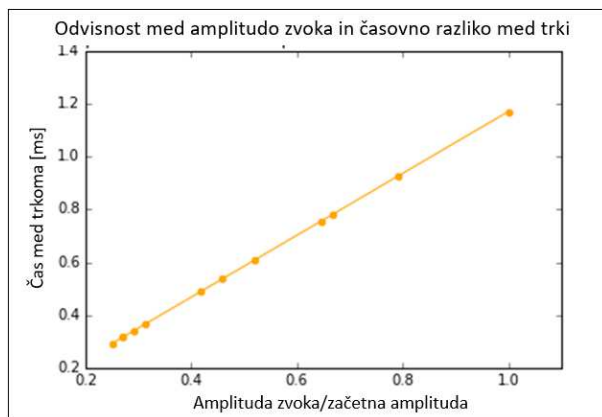
$$\blacksquare A_{\text{zvoka}} \propto T$$

(4)



SLIKA 6.

Skica količin, uporabljenih pri oceni odvisnosti energije zvoka. Tu smo uporabili dva približka, in sicer $\beta + \phi_0 \approx \beta$ ter $l \sin \phi_0 \approx l \phi_0$



SLIKA 7.

Eksperimentalna zveza med amplitudo zvoka in časovnim razmikom med sosednjima trkoma.

Sedaj preizkusimo, ali dobimo isto zvezo tudi s pomočjo eksperimenta. Zvok smo posneli z mikrofonom, nato smo s pomočjo programa Audacity obdelali zvočne posnetke. Dobili smo točno tako zvezo, ki smo jo izpeljali tudi teoretično (glej sliko 7).

Obravnavali smo pojav specifičnega zvoka, ki ga zaslišimo, ko kozarca dvignemo s prsti. Zvok, ki ga slišimo, je posledica trkov med kozarci. Med pojavom se izgublja energija, kar zaznamo kot nižanje amplitude zvoka ter višanje frekvence trkov. S pomočjo eksperimenta ter prilagajanja dveh modelov podatkom smo ugotovili, da se večina energije izgubi v točki stika med kozarcema, medtem ko je energija, izgubljena pri samem trku, zanemarljiva.

Ugotovili smo, da obstaja med časom med zaporednima trkoma in amplitudo zvoka povezava, še več, med njima velja korenska zveza, $T \propto \phi_0^{1/2}$, kjer je T časovni razmik med zaporednima trkoma, ϕ_0 pa amplituda kota med kozarcema. Z eksperimenti smo podprli teoretično vpeljano zvezo med amplitudo zvoka in časovnim razmikom, $A_{\text{zvoka}} \propto T$, kjer je A_{zvoka} amplituda zvoka.

Predstavili smo nekaj zanimivih zvez, seveda pa ste tudi sami povabljeni, da vzamete v roke kozarce ter še sami odkrijete kakšno zanimivo povezavo. Za eksperiment potrebujete le telefon, s katerim posnamete zvok, ter program, ki pokaže amplitudo zvoka v odvisnosti od časa, in seveda kozarce. Želimo vam veliko veselja!

× × ×