PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 3
Strani 131–132

Bojan Mohar:

VRTNARJEVA NALOGA – nagradna naloga

Ključne besede: naloge, matematika, teorija števil, porazdelitve, predalčno načelo.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1478-Mohar.pdf

VRTNARJEVA NALOGA – Nagradna naloga

V prvi letošnji številki Preseka je bila v prispevku Predalčno načelo Jožeta Grassellija zastavljena naslednja naloga:

(A) Na gredo, ki ima obliko kvadrata s stranico 1 m, je vrtnar posejal 301 seme. Dokaži, da obstaja krog s polmerom 8 cm, v katerem so posejana vsaj štiri semena. (Seme vzamemo kot točko.)

Dokaz te trditve je napravljen z uporabo predalčnega načela. Najprej predstavimo metrski kvadrat v ravnini, enota pa naj predstavlja 1 cm. Potem ima naš kvadrat oglišča (0,0), (0,100), (100,100) in (100,0). Zatem ugotovimo, da kvadrat s stranico 100 lahko pokrijemo s stotimi krogi polmera $5\sqrt{2} \approx 7{,}07$, ki imajo središča v točkah $S_{k,l} = (10k-5, 10l-5)$, kjer $k, l \in \{1, \ldots, 10\}$. Ker je v 100 krogih skupno 301 seme, morajo po predalčnem načelu v enem od krogov biti več kot tri, torej vsaj štiri semena.

Izurjen matematik takoj vidi, da smo pri tem dokazu napravili dokaj grobo oceno, saj potrebujemo le kroge polmera malenkost več kot sedem centimetrov. Naslednji sklep prinaša precej boljši rezultat, saj z njim pokažemo, da obstaja krog polmera 8, v katerem je vsaj pet semen.

Namesto stotih vzemimo raje $N = (115)^2 = 13225$ krogov polmera 8, ki imajo središča v točkah $P_{p,q} = (p, q)$, kjer p in q pretečeta množico celih števil od -7 do 107.

Preštejmo sedaj vse tiste pare (K, T), kjer je K eden izmed naših N krogov, T pa ena od $n = 301$ točk (semen), ki leži v krogu K. Število takih parov označimo s Q. Recimo, da vsak krog vsebuje kvečjemu k danih točk. Potem je

$$Q \leq Nk\,.$$

Po drugi strani pa poljubna dana točka T leži v vseh tistih krogih, katerih središče je od T oddaljeno za manj kot 8. Krajši račun (napravljen s pomočjo računalnika) me je prepričal, da je vsaka točka T vsebovana v vsaj $t = 193$ izmed obravnavanih krogov (najslabši primer 193 krogov dobimo le v primeru, ko sta koordinati točke T celoštevilski). Torej je

$$Q \geq tn.$$

Iz obeh neenakosti za Q sledi, da je $tn \leq Q \leq Nk$. Od tod dobimo

$$k \geq \frac{tn}{N} = \frac{193 \cdot 301}{13225} = 4{,}39266\ldots \tag{1}$$

Torej je k celo število, večje od 4,39. Od tod sledi, da je k vsaj 5. Zato mora obstajati krog, v katerem je vsaj 5 izmed danih točk.

Zdi se, da bi bilo mogoče dokazati še več. Zakaj? Če poskušamo najti n točk v kvadratu s stranico a tako, da bo v vsakem krogu polmera r kvečjemu k točk in bo k kar se da majhen, potem morajo biti točke dokaj enakomerno razporejene po notranjosti kvadrata. Karkoli poizkusimo, vidimo, da bo k večji od 5 (in celo večji od 6). Bralcem Preseka zato zastavljamo dve nagradni vprašanji:

(B) Dokažite, da v vrtnarjevi nalogi (A) vedno obstaja krog polmera 8, ki vsebuje vsaj 6 danih točk (semen). Ali morda enako velja tudi za 7 točk?

(C) Poiščite 301 takih točk, da bo maksimalno število točk v krogu polmera 8 čim manjše.

Najuspešnejšim reševalcem posameznih nalog obljubljamo knjižno nagrado. S posplošitvijo prikazanega dokaza lahko oceno (1) izboljšamo do neenakosti $k \geq 4{,}497595$. Izboljšave te ocene pa se zdijo bolj zapletene. Zato bomo priznali tudi vse ideje, ki bodo (1) izboljšale na spodnjo mejo, ki bo večja od 4,5. Obe nalogi lahko skušate rešiti tudi splošno, kjer imamo kvadrat s stranico dolžine a, n točk in kroge polmera r.

Nalogo (B) lahko tudi "obrnemo":

(D) Najmanj koliko točk v kvadratu s stranico a moramo izbrati, da bo zagotovo obstajal krog, v katerem bo vsaj k izmed danih točk?

Vrtnarjev najverjetneje takšne naloge ne zanimajo. Kaj lahko pa si zamislimo resnega znanstvenika, ki bo takšno nalogo uporabil pri svojem delu. Recimo, da fizik s tarčo kvadratne oblilke prestreže snop elementarnih delcev. Vemo, da bodo ti delci pustili sled le v primeru, če bo v isto tipalo na tarči (krog danega polmera) priletelo vsaj k delcev. Z rešitvijo naloge (D) lahko torej ugotovimo, koliko najmanj delcev potrebujemo, da jih bomo gotovo lahko zaznali, oz. največ koliko delcev je priletelo v tarčo, če delcev ni bilo zaznati.

Pri nagradah bomo seveda upoštevali tudi rešitve ali delne rešitve naloge (D). Rešitve pošljite najkasneje do 10. februarja na naslov:

Presek, Jadranska c. 19, 1001 Ljubljana, p.p. 2964.

Bojan Mohar