

O ENAČBI KORTEWEG-DE VRIES

TIMOTEJ LEMUT

Fakulteta za matematiko in fiziko,
Univerza v Ljubljani

PACS: 47.35.Fg

V članku opišemo izpeljavo enačbe KdV iz osnovnih hidrodinamskih enačb in prikazemo reševanje enačbe ob predpostavki potujočega vala, najprej za lokalizirano, nato pa še za periodično rešitev.

ON THE KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

We derive the KdV equation from the basic equations of hydrodynamics and solve the equation under the assumption of a traveling wave, first in the case of localized solution and then in the case of periodical solution.

Uvod

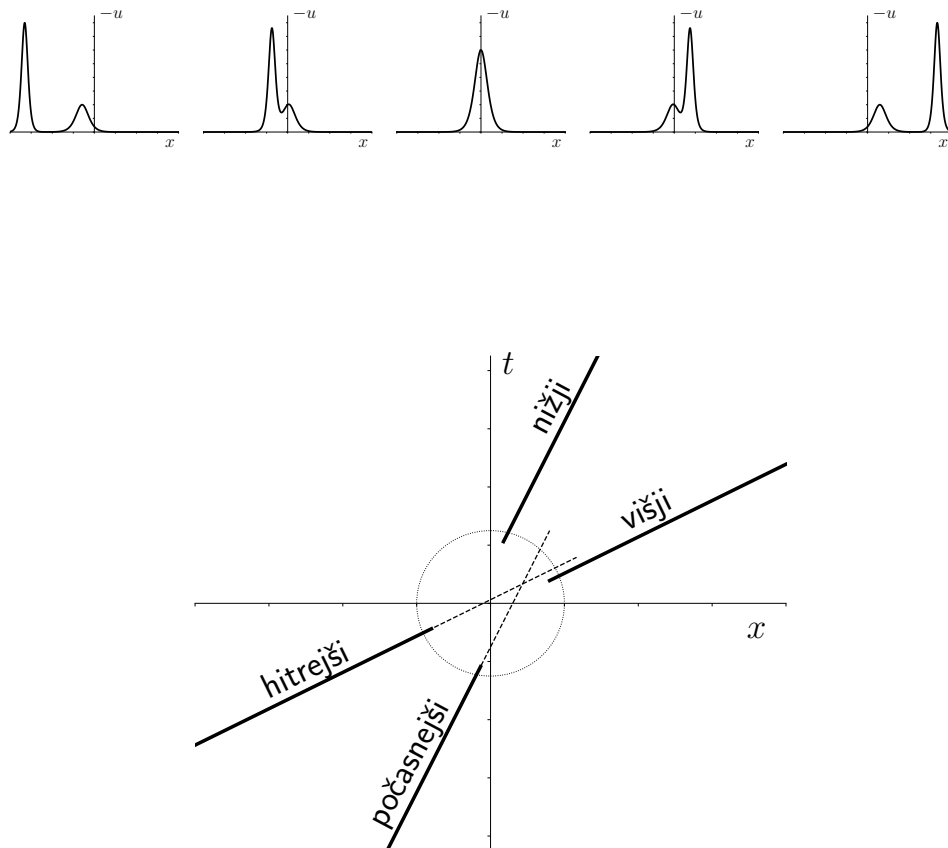
Enačbo Korteweg-de Vries (KdV) za neznano funkcijo u , spremenljivk x in t , zapišemo kot

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

kjer podpisana koordinata predstavlja parcialni odvod. Zgornjo enačbo je leta 1877 prvi zapisal Joseph Valentin Boussinesq, 1895 pa še Diederik Korteweg in Gustav de Vries. Vsi trije so študirali valove v plitvi vodi, pojasniti pa so hoteli zanimiv pojav potujočega vala na vodni površini, ki ob potovanju po kanalu/rečni strugi ohranja svojo obliko, za razliko od običajnega vala, katerega oblika se sčasoma razleze ali pa se zlomi.

Pojav je pred tem v kanalu Union med Falkirkom in Edinburghom leta 1834 prvi opazil škotski inženir John Scott Russell in ga potem tudi poustvaril v za to zgrajenem kanalu. Val, ki ohranja obliko, je imenoval translacijski val, poleg tega pa je izmeril, da je hitrost vala sorazmerna njegovi višini. Dodatna presenečenja so sledila pri eksperimentih z več translacijskimi valovi. Translacijski valovi ne interagirajo, temveč v nespremenjeni obliki zapustijo trk. Interakcija med valovi se razkrije le z zamikom glede na položaj, ki bi ga val imel, če bi se gibal s konstantno hitrostjo. Kasneje se je takih in podobnih valov prijel tudi ime solitonski valovi oziroma krajše solitoni.

Na spodnji sliki je prikazan primer trka dveh solitonskih valov v primeru, ko hitrejši (večji) dohiti počasnejšega (manjšega), kjer lepo vidimo zamik v položajih po trku.

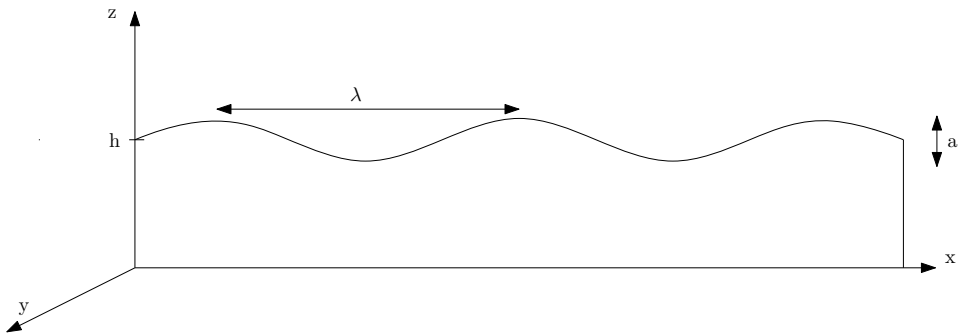


Slika 1. Primer trka dveh solitonskih valov. Na zgornjih slikah sta prikazana solitonska vala ob nekaj različnih časih pred trkom in po njem, na spodnjem delu pa položaj obeh valov v odvisnosti od časa.

V članku si ogledamo izpeljavo in osnovne rešitve enačbe KdV. V drugem poglavju opišemo izpeljavo iz osnovnih enačb hidrodinamike, v tretjem poglavju pa izpeljemo rešitev za solitonski val in opišemo njemu sorodno periodično rešitev, t. i. cnoidni val.

Izpeljava enačbe KdV

Obravnavamo ravninski val z valovno dolžino λ , ki je veliko večja od globine mirujoče tekočine h . Poleg $\lambda \gg h$ naj velja še $a \ll h$, kjer je a amplituda valovanja. Val z označenimi količinami in koordinatnimi osmi je prikazan na spodnji sliki. Če majhne parametre, ki se bodo pojavili pri opisu dolgovalovnih valov v plitvi vodi, povsem zanemarimo, dobimo za odmik gladine od ravnovesne višine valovno enačbo. Izkaže se, da je enačba KdV naslednja v razvoju po malih količinah, ki jih srečamo pri opisu takih valov. Začnemo



Slika 2. Obravnavan ravninski val z označenimi osmi in relevantnimi parametri h , λ in a .

z osnovnimi enačbami hidrodinamike. Veljata ohranitvi mase in gibalne količine,

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

$$\rho (\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{f}, \quad (3)$$

kjer je ρ gostota tekočine, $\mathbf{v}$ hitrost, p tlak, $\mathbf{f}$ pa označuje zunanje sile. Dalje predpostavimo, da je tekočina nestisljiva in brezvrtinčna,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Druga predpostavka nam dovoli, da hitrost opišemo s potencialom ϕ , tako da je $\mathbf{v} = \nabla \phi$. Skupaj z zahtevo po nestisljivosti iz enačbe (2) sledi

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (4)$$

V tem približku določa hitrostni potencial samo robni pogoj, hkrati pa mora rešitev ustrezati še enačbi (3). Robni pogoj za hitrostni potencial sledi iz zahteve, da je na meji med tekočino in dnem hitrost tekočine lahko samo tangentna na mejo. Tako pri $z = 0$ velja $\phi_z = 0$. Površino vala opišemo s funkcijo $z = h + \eta(x, t)$, tako da na površju velja $\phi_z = \eta_t + \eta_x \phi_x$.

Enačba (3) mora veljati tudi na površju, kjer je tlak enak nič. Za zunanjo silo $\mathbf{f}$ vstavimo gravitacijsko silo $\mathbf{f} = -\rho g \mathbf{e}_z$. Upoštevamo še identiteto $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla(\mathbf{v}^2) - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ in dobimo

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_z^2) + g\eta = 0, \quad \text{pri } z = h + \eta(x, t), \quad (5)$$

kjer smo irelevanten konstantni člen gh kar izpustili.

Enačbi (4) in (5) torej opisujeta gibanje nestisljive tekočine na brezvr-tinčen način. Upošteva, da je tako gibanje možno v dolгих plitvih valovih, lahko problem v nadaljnjem preoblikujemo v enačbo KdV. Vpeljemo brez-dimenzijske koordinate, čas in potencial:

$$x \rightarrow \frac{x}{\lambda}, \quad z \rightarrow \frac{z}{h}, \quad t \rightarrow \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda}, \quad \eta \rightarrow \frac{\eta}{a}, \quad \phi \rightarrow \frac{h\phi}{a\lambda\sqrt{gh}}.$$

Laplaceova enačba tako postane:

$$\delta\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0,$$

robni pogoji pa so:

$$\text{pri } z = 1 + \epsilon\eta : \quad \phi_z = \delta(\eta_t + \epsilon\eta_x \phi_x) \quad \text{in} \quad (6)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}\epsilon(\phi_x^2 + \frac{1}{\delta}\phi_z^2) + \eta = 0 \quad (7)$$

$$\text{pri } z = 0 : \quad \phi_z = 0. \quad (8)$$

V zgornjih enačbah se pojavita dva brezdimenzijska parametra

$$\delta = (h/\lambda)^2 \quad \text{in} \quad \epsilon = a/h,$$

ki sta po predpostavki oba majhna.

Hitrostni potencial razvijemo okoli $z = 0$ in ga z upoštevanjem Laplace-ove enačbe (4) zapišemo v obliki:

$$\phi(x, z, t) = f - \delta \frac{z^2}{2} f_{xx} + \delta^2 \frac{z^4}{24} f_{xxxx} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-\delta)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \partial_x^{2n} f, \quad (9)$$

kjer je $f(x, t) := \phi(x, 0, t)$ hitrostni potencial pri $z = 0$.

Prepričajmo se najprej, da v primeru, ko ϵ in δ povsem zanemarimo, res dobimo valovno enačbo. Razvoj (9) vstavimo v robna pogoja na gladini (6) in (7) ter ohranimo količine, v katerih ϵ in δ ne nastopata. Dobimo enačbi $f_{xx} + \eta_t = 0$ in $f_t + \eta = 0$, ki ju lahko preoblikujemo v valovno enačbo z enako brezdimenzijsko hitrostjo tako za f_x kot tudi η . Pri razvoju do ničtega reda v ϵ in δ torej velja

$$f_x = \eta \quad \text{in} \quad (10)$$

$$\eta_x + \eta_t = 0. \quad (11)$$

Za odmik gladine od ravnovesne višine η smo res dobili valovno enačbo (11). Zaradi (10) pri razvoju do naslednjega reda v ϵ oziroma δ uporabimo nastavek

$$f_x = \eta + \epsilon F(x, t) + \delta G(x, t), \quad (12)$$

za neki funkciji F in G . Iz razvoja do ničtega reda sledi še, da se odvoda po kraju in po času funkcije η oziroma f_x razlikujeta šele v prvem redu ϵ in δ . Tako za funkciji F in G , ki vedno nastopata skupaj z ϵ oziroma δ , v prvem redu velja $F_x = -F_t$ in $G_x = -G_t$.

Sedaj zapišemo enačbi robnega pogoja na gladini (6) in (7) do prvega reda v ϵ in δ . Drugo enačbo robnega pogoja (7) še odvajamo po x , tako da lahko uporabimo nastavek (12), s katerim se znebimo f_x . Dobimo dve enačbi

$$\eta_x + \epsilon F_x + \delta G_x + \eta_t = \frac{\delta}{6} \eta_{xxx} - 2\epsilon \eta \eta_x \quad (13)$$

$$\eta_x + \eta_t + \epsilon F_t + \delta G_t = \frac{\delta}{2} \eta_{xxt} - \epsilon \eta \eta_x, \quad (14)$$

kjer zapisujemo le člene do prvega reda v ϵ in δ . Zgornji enačbi odštejemo in ker parametra ϵ in δ nastopata neodvisno, dobimo dve enačbi, eno za F in eno za G . Upoštevamo še zvezo med odvodom po kraju in po času in tako dobimo izraza za vsako od funkcij: $F = -\frac{1}{4}\eta^2$ in $G = \frac{1}{3}\eta_{xx}$, ki ju uporabimo v eni od enačb (13) oziroma (14) in dobimo enačbo KdV za $\eta(x, t)$, odmik gladine od ravnovesne višine,

$$\eta_t + \eta_x + \frac{3\epsilon}{2} \eta \eta_x + \frac{\delta}{6} \eta_{xxx} = 0.$$

Zgornjo enačbo lahko preoblikujemo v (1), tako da se z $x \rightarrow x - t$ najprej premaknemo v drug koordinatni sistem in se s tem znebimo člena s prvim odvodom po x , nato pa še spremenimo koeficiente pred posameznimi členi s skaliranjem $\eta \rightarrow -\frac{2\delta}{3\epsilon}\eta$ in $t \rightarrow \frac{6}{\delta}t$.

Rešitve enačbe KdV

Nizozemska matematika sta v svojem članku zapisala tudi rešitev enačbe KdV, ki opisuje solitonski val, ter periodično rešitev, ki sta jo poimenovala cnoidni val.

Obe rešitvi dobimo z nastavkom za potujoči val, $u(x, t) = f(x - ct)$. Enačba KdV (1) tako postane

$$-cf' + f''' - 3(f^2)' = 0,$$

kjer opuščaj nakazuje na odvod po spremenljivki $\xi = x - ct$. Po enkratni integraciji po ξ ter nato še eni integraciji po ξ z integrirajočim faktorjem f' dobimo izraz

$$\frac{1}{2}(f')^2 = F(f), \quad (15)$$

kjer smo označili $F(f) = A + Bf + \frac{1}{2}cf^2 + f^3$.

V primeru, da iščemo lokalizirano rešitev, postavimo A in B na nič, saj morajo $f, f', f'' \rightarrow 0$ za $|\xi| \rightarrow \infty$. Zgornjo enačbo nato še enkrat integriramo po ξ in dobimo

$$f(\xi) = -\frac{c}{2 \cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(\xi - x_0)\right)}, \quad (16)$$

kjer je x_0 poljubna integracijska konstanta, predstavlja pa položaj vala ob času $t = 0$. Dobili smo izraz za solitonski val, ki ga je proučeval Russell. Kot vidimo, ima hitrejši val res večjo amplitudo. S takim nastavkom lahko opišemo le en lokaliziran val. Za rešitev, ki bi na primer opisala trk dveh takih valov, bi bilo treba že pri začetnem nastavku ubrati drugačen pristop.

V primeru, da pri zgornjem nastavku ne zahtevamo lokaliziranega potujočega vala, ampak le to, da je rešitev omejena, moramo natančneje proučiti funkcijo $F(f)$. Najprej opazimo, da vrednosti konstant A in B določata položaj ničel, neodvisno od njiju pa velja $F \rightarrow \pm\infty$, ko $f \rightarrow \pm\infty$. Glede na

število in relativen položaj ničel imamo tako 6 različnih možnosti za $F(f)$. Če si jih narišemo, lahko sklepamo, da mora imeti za periodično rešitev funkcija $F(f)$ tri realne ničle, ki jih označimo od največje do najmanjše s $f_1 > f_2 > f_3$. Zgornja enačba (15) je tako enaka

$$\frac{1}{2}(f')^2 = (f - f_1)(f - f_2)(f - f_3). \quad (17)$$

Za f uporabimo nastavek $f = f_3 + (f_2 - f_3) \sin^2 \theta$, enačba pa postane

$$(\theta')^2 = \frac{f_1 - f_3}{2} \left(1 - \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3} \sin^2 \theta \right).$$

Sedaj ločimo spremenljivki in pointegriramo obe strani enačbe

$$\int_{\xi_3}^{\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{l}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta'}},$$

kjer smo označili $l = \frac{f_1 - f_3}{2}$ in $m = \frac{f_2 - f_3}{f_1 - f_3}$, število ξ_3 pa je določeno prek $f(\xi = \xi_3) = f(\theta = 0) = f_3$. Zgornji izraz po definiciji Jacobijeve eliptične funkcije sinus amplitudinis implicira, da je $\text{sn}((\xi - \xi_3)\sqrt{l}, m) = \sin \theta$, oziroma, končna rešitev je

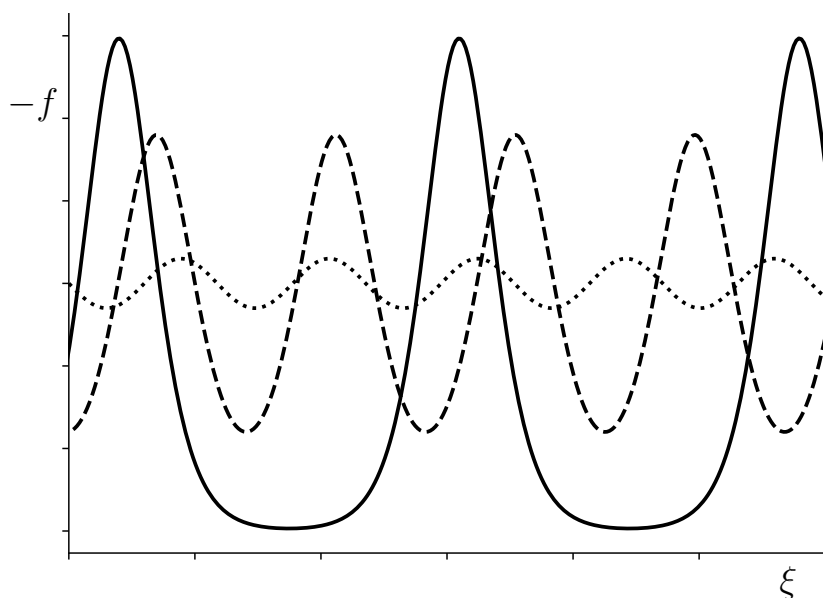
$$f(\xi) = f_3 + (f_2 - f_3) \text{sn}^2((\xi - \xi_3)\sqrt{l}, m).$$

Ker je $\text{sn}(u, m) \in [0, 1]$ za poljuben u , se rešitev giblje med f_3 in f_2 , tako da bi lahko za amplitudo vala vzeli količino $\frac{f_2 - f_3}{2}$, za ravnovesno globino pa $h = \frac{f_2 + f_3}{2}$. S primerjavo enačb (15) in (17) lahko izluščimo še hitrost valovanja c v odvisnosti od ničel funkcije F , in sicer dobimo $c = -2(f_1 + f_2 + f_3)$.

Na spodnji sliki so prikazane tri rešitve za različne m , pri istem l in isti globini h , kjer za $m \rightarrow 1$ dobimo ravno lokalizirano rešitev (16), medtem ko limita $m \rightarrow 0$ (oziroma $f_3 \rightarrow f_2$) predstavlja rešitev linearizirane enačbe KdV

$$u_t - 6f_2u_x + u_{xxx} = 0.$$

S pomočjo nastavka potujočega vala smo poiskali omejeno periodično rešitev in v posebnem tudi lokaliziran solitonski val, ki ohranja obliko pri



Slika 3. Periodične rešitve enačbe KdV izražene s funkcijo sn , pri isti globini h in istem l za vrednosti $m = 0,1,0,6$ in $0,99$ označene s pikčasto, črtkano in polno črto. Na grafu prikazujemo vrednost $-f$.

potovanju in katerega hitrost je res sorazmerna višini. Ostane nam le še pokazati, da dva taka vala ohranita obliko tudi po trku. Rešitev, ki opisuje trk dveh solitonov, pa ne ustreza nastavku potujočega vala, zato moramo za iskanje novih rešitev uporabiti kakšno bolj splošno metodo reševanja enačbe KdV.

LITERATURA

- [1] J. S. Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*, R. and J. Taylor, 1845.
- [2] R. S. Johnson, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] P. G. Drazin in R. S. Johnson, *Solitons: An introduction*, Cambridge university press, Cambridge, 1989.