

Elektromagnetno polje v bližini napake v materialu

UDK: 621.191:620.179.6
ASM/SLA: S13h, X8k

Božidar Brudar

UVOD

Osnovni princip odkrivanja napak s pomočjo elektromagnetnega polja je v tem, da preiskovani predmet namagnetimo in potem merimo, kako se magnetno polje v njem porazdeljuje¹. Na porazdelitev polja namreč pomembno vplivajo tudi napake v materialu.

Vpliv radialnih razpok v kovinskih palicah in ceveh na izmenično magnetno polje je določil dr. F. Förster že leta 1954 s poskusi na modelih². Rezultate njegovih eksperimentov so več kot 20 let navajali v najrazličnejših člankih s tega področja³.

Tudi v jeseniški železarni pregledujemo površino kovinskih palic s tem, da merimo spremembe v impedanci tuljave, skozi katero preiskovane palice potujejo (Defectomat 2.189, izdelan v Inštitutu dr. Förster).

Praksa pa je pokazala¹, da pri tem delu lahko nekatere napake zgrešimo, če se faze signalov zelo močno razlikujejo od faze, ki jo je povzročila napaka, ki jo ravno še dopuščamo. To je še posebno problematično pri feromagnetnih materialih, kjer skušamo z močnim dodatnim enosmernim magnetnim poljem doseči magnetno nasičenje. Meritve in teoretični izračuni so pokazali, da nikdar ne vemo, s kolikšno vrednostjo relativne diferencialne permeabilnosti imamo opravi-

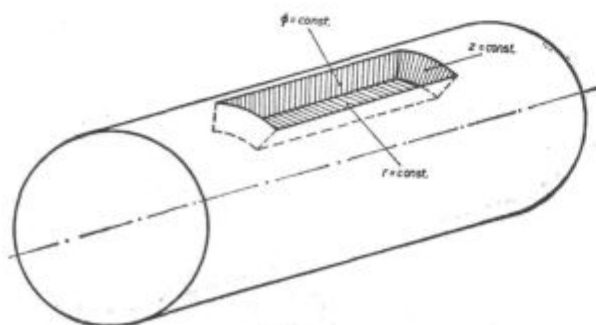
viti. Zato je skoraj nemogoče napovedovati, kolikšna je fazna razlika med signali, ki ustrezajo zelo tankim radialnim razpokam in napakam drugih oblik.

Vsi ti problemi so nas silili, da smo sami začeli natančneje raziskovati princip delovanja aparatov, kjer ugotavljamo defekte s pomočjo elektromagnetnih polj. Takšna raziskava je koristna predvsem za praktično delo, saj omogoča ne le, da kritično preverimo, kaj aparat zmore registrirati, ampak tudi česa ne more. Tega podatka navadno v trgovskih prospektih ni.

Pri svojem delu nismo eksperimentirali z živosrebrnimi modeli, ampak smo simulirali napake s pomočjo matematičnih modelov. Poiskali smo splošno metodo, po kateri lahko simuliramo različne napake v palicah ali ceveh in prideemo do podobnih rezultatov, kot jih je izmeril dr. F. Förster.

Študirali pa smo tudi vpliv enosmernega magnetnega polja na možnost odkrivanja napak v feromagnetnem materialu z znanimi magnetnimi karakteristikami.

V prvem delu tega sestavka so opisane izhodne enačbe za izračunavanje polja, v nadaljevanju pa bo opisan postopek za izračunavanje polja v palicah z radialno razpoko in rezultati pri simuliranju podpovršinskih in površinskih razpok v ceveh.



Slika 1

Splošna oblika površinske razpoke v palici

Fig. 1

General case of a surface crack in a bar.

SEZNAM UPORABLJENIH SIMBOLOV

- | | |
|-----------|--|
| a | polmer palice |
| a_1 | notranji polmer cevi |
| A, A, A | amplituda vektorskega potenciala |
| B, B, B | amplituda gostote magnetnega pretoka |
| b | oddaljenost od osi, kjer je vpliv napake zanemarljiv |
| E | električna poljska jakost |
| f, F | frekvenca |
| H, H, H | magnetna poljska jakost |
| i | imaginarna enota |

I	jakost električnega toka v tuljavi
j, j	gostota toka
L_0	induktivnost prazne tuljave
n	število ovojev na enoto dolžine tuljave
P	magnetni pretok
r, r	polmer
t	čas
V	vektorski potencial
W	amplituda vektorskega potenciala
x, y, z	pravokotne koordinate
Z, Z	impedanca
σ	električna prevodnost
μ_0	permeabilnost praznega prostora
μ	relativna permeabilnost
$\mu' = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{dB}{dH}$	relativna diferencialna permeabilnost
$\omega = 2\pi f$	
φ	koordinata v smeri φ

II. MATEMATIČNA FORMULACIJA

A. Osnovne enačbe

Magnetno polje v materialu in zunaj njega lahko opišemo na več načinov. Največkrat uporabljamo izhodne enačbe za vektorski potencial, skalarni potencial ali enačbe za gostoto magnetnega pretoka. Izbira je odvisna od narave problema.

1. Vektorski potencial

Izhajamo iz enačbe:

$$\nabla^2 \mathbf{V} - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mu \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Predpostavljamo, da gre za sinusno nihanje polja:

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \cdot e^{i\omega t}.$$

Namesto enačbe (1) zapišemo:

$$\nabla^2 \mathbf{W} - i\omega \mu \mu_0 \sigma \mathbf{W} + \mu \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \mathbf{W} = 0. \quad (2)$$

Pri neporušnih preiskavah delamo navadno z razmeroma nizkimi frekvencami, tako da tretji člen v enačbi (2) lahko zanemarimo. Iščemo rešitev enačbe:

$$\nabla^2 \mathbf{W} - i\omega \mu \mu_0 \sigma \mathbf{W} = 0. \quad (3)$$

Vpeljemo nove spremenljivke:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A} + i\mathbf{A}^*$$

in zapišemo enačbo (3) za realno in imaginarno komponento:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega \mu \mu_0 \sigma \mathbf{A}^* = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}^* - \omega \mu \mu_0 \sigma \mathbf{A} = 0. \quad (5)$$

Če študiramo razmere v cevah ali palicah krožnega prereza, je ugodno vpeljati cilindrični

koordinatni sistem. Enačbi (4) in (5) nadomestimo s sistemom enačb za posamezne komponente A_r, A_φ, A_z , oziroma $A_r^*, A_\varphi^*, A_z^*$:

$$\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} - \frac{A_r}{r^2} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + F \cdot A_r^* = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + F \cdot A_\varphi^* = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + F \cdot A_z^* = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 A_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_r^*}{\partial \varphi^2} - \frac{A_r^*}{r^2} + \frac{\partial^2 A_r^*}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_\varphi^*}{\partial \varphi} - F \cdot A_r = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 A_\varphi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_\varphi^*}{\partial \varphi^2} - \frac{A_\varphi^*}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi^*}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial A_r^*}{\partial \varphi} - F \cdot A_\varphi = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 A_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial z^2} - F \cdot A_z = 0. \quad (11)$$

Enačbe (6) do (11) so zapisane v brezdimenzijski obliki, kjer pomeni:

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{A_r}{A_0}, & A_r^* &= \frac{A_r^*}{A_0}, & r &= \frac{r}{a}, \\ A_\varphi &= \frac{A_\varphi}{A_0}, & A_\varphi^* &= \frac{A_\varphi^*}{A_0}, & z &= \frac{z}{a}, \\ A_z &= \frac{A_z}{A_0}, & A_z^* &= \frac{A_z^*}{A_0}, & F &= a^2 \omega \mu \mu_0 \sigma. \end{aligned}$$

Pri tem je a referenčna dolžina (na primer polmer palice), A_0 neka izbrana vrednost vektorskega potenciala in F brezdimenzijska frekvenca. Gostoto magnetnega pretoka pa izračunamo iz relacije:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{W}$$

V cilindričnih koordinatah to zapišemo za realno komponento na primer takole:

$$B_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

$$B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (13)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}. \quad (14)$$

Pri tem so B_r , B_φ in B_z komponente vektorja $\frac{\mathbf{B}}{B_0}$, pri čemer je $B_0 = \frac{A_0}{a}$.

Iz zveze

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

lahko poiščemo tudi izraz za gostoto vrtilnih tokov:

$$\mathbf{j} = \sigma \cdot \mathbf{E},$$

oziroma:

$$j_r = A_r^* - i A_r, \quad (15)$$

$$j_\varphi = A_\varphi^* - i A_\varphi, \quad (16)$$

$$j_z = A_z^* - i A_z. \quad (17)$$

Pri tem so j_r , j_φ in j_z komponente vektorja $\frac{\mathbf{j}}{j_0}$, kjer je $j_0 = \sigma \omega A_0$.

2. Gostota magnetnega pretoka

Izhajamo iz Maxwellovih enačb in predpostavljamo sinusno nihanje polja. Enačbo za amplitudo gostote magnetnega pretoka zapišemo v obliki:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - i \omega \mu \mu_0 \sigma \mathbf{B} = 0 \quad (18)$$

Ce vpijemo nove spremenljivke:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{B_r}{B_0}, & B_\varphi &= \frac{B_\varphi}{B_0}, & B_z &= \frac{B_z}{B_0}, \\ B_r^* &= \frac{B_r^*}{B_0}, & B_\varphi^* &= \frac{B_\varphi^*}{B_0}, & B_z^* &= \frac{B_z^*}{B_0}, \end{aligned}$$

lahko za posamezne komponente B_r , B_φ in B_z zapišemo prav takšne enačbe, kot smo jih zapisali za komponente vektorskega potenciala A_r , A_φ in A_z . V enačbah (6) do (11) bi bilo treba črke A zamenjati z B.

Na podoben način kot pri vektorskem potencialu lahko zapišemo izraz za gostoto vrtilnih tokov:

$$\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$$

oziroma na primer:

$$\text{Re } j_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}, \quad (19)$$

$$\text{Re } j_\varphi = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (20)$$

$$\text{Re } j_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}. \quad (21)$$

3. Robni pogoji

S sistemom diferencialnih enačb (6) do (11) opisujemo vektorski potencial $\mathbf{V}$, oziroma gostoto magnetnega pretoka $\mathbf{B}$ v snovi, kjer je električna prevodnost končna.

V praznem prostoru veljajo podobne enačbe. Upoštevati je treba le, da je v zraku na primer $\sigma = 0$, oziroma $F = 0$. Zato bi zadnji členi v enačbah (6) do (11) odpadli.

Razmere na meji med palico in zrakom pa določa robni pogoj, ki pravi, da se tangencialna komponenta jakosti magnetnega polja pri prehodu

iz ene snovi v drugo ohranja. Prav tako se ohranja tudi normalna komponenta gostote magnetnega pretoka.

Upoštevamo pa tudi, da velja v vsaki snovi:

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (22)$$

in

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (23)$$

4. Impedanca

Impedanca Z na enoto dolžine tuljave, po kateri teče tok I , je definirana kot:

$$Z = -\frac{U_i n^2}{I}$$

Pri tem je n število ovojev na enoto dolžine, U_i pa napetost, ki se inducira v enem ovoju:

$$U_i = -\frac{dP}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Gostoto pretoka integriramo po celotnem prerezu tuljave. Kadar pa imamo opraviti z vektorskim potencialom, pa uporabimo Stokesovo formulo in zapišemo:

$$U_i = -\frac{d}{dt} \int \text{rot } \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

Pri tem pa integriramo po obodu tuljave. Očitno je, da je pomemben le prispevek komponente vektorskega potenciala v smeri φ .

Običajno pa zapišemo impedanco v brezdimenzijski obliki:

$$Z = \frac{Z}{Z_0},$$

pri čemer je Z_0 absolutna vrednost impedance prazne tuljave. V vsem prerezu prazne tuljave je namreč gostota magnetnega pretoka enaka B_0 in $|Z_0| = \omega L_0$.

Če je tuljava tesno navita na preiskovano palico ali cev, je polmer tuljave enak polmeru palice a .

V takem primeru dobimo za realno in imaginarno komponento impedance naslednje izraze:

$$\text{Im } Z = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} B_z \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi,$$

$$\text{Re } Z = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} B_z^* \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi, \quad (24)$$

oziroma

$$\text{Im } Z = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A_\varphi \cdot d\varphi, \quad \text{Re } Z = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A_\varphi^* \cdot d\varphi.$$

B. Primeri razpok

Oglejmo si nekaj primerov. Neferomagnetno palico okroglega prereza postavimo v homogeno izmenično magnetno polje. Palica naj bo zelo dolga in položena v smeri polja. Zapisali bomo robne pogoje za nekaj posebnih oblik napak.

Pri tem izhajamo iz predpostavke, da napaka vpliva le na polje v njeni neposredni bližini. To pomeni, da je v veliki oddaljenosti ($r \rightarrow \infty$) polje homogeno in usmerjeno vzdolž palice. Če nismo preveč natančni, se namesto z neskončnostjo zadovoljimo z neko zadosti veliko oddaljenostjo $r = b$.

Cilindrični koordinatni sistem položimo tako, da se os z ujema s smerjo polja.

1. Površinska razpoka končnih dimenzij

Na sliki 1 je prikazana razpoka, ki jo omejujejo ploskve $r = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$, in $z = \text{konst.}$. V razdalji $r = b$ polje ni moteno.

1.1. Pogoji za vektorski potencial

1.1.1. Robni pogoj pri $r = b$

Tu je polje homogeno in v smeri osi z . Edina komponenta gostote magnetnega pretoka, ki je različna od nič, je $B_z = B_0$, oziroma $B_z = 1$, $B_z^* = 0$. Iz izrazov (12) — (14) zapišemo enačbe, ki ustrezajo posameznim komponentam vektorskega potenciala na robu.

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 1, \quad (25)$$

$$\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} + \frac{A_\varphi^*}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r^*}{\partial \varphi} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_z^*}{\partial \varphi} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial A_r^*}{\partial z} - \frac{\partial A_z^*}{\partial r} = 0. \quad (30)$$

1.1.2. Robni pogoji na mejnih ploskvah $r = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$

Upoštevamo, da je normalna komponenta gostote tokov enaka nič in da se pri prehodu preko mejne ploskve tangencialna komponenta jakosti magnetnega polja ohranja. Ker ne obravnavamo feromagnetnih palic, velja ta trditev tudi za gostoto magnetnega pretoka.

S pomočjo enačb (12) do (14) in (15) do (17) zapišemo izraze, ki ustrezajo tem zahtevam na posameznih mejnih ploskvah, na primer za realne komponente vektorskega potenciala.

Na ploskvi $r = \text{konst.}$:

$$A_r = 0, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial r} \right)_{\text{out}}, \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{\text{out}}. \quad (33)$$

Na ploskvi $\varphi = \text{konst.}$:

$$A_\varphi = 0, \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} \right)_{\text{out}}, \quad (35)$$

$$\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} \right)_{\text{out}}, \quad (36)$$

in na ploskvi $z = \text{konst.}$:

$$A_z = 0, \quad (37)$$

$$\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right)_{\text{out}}, \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} \right)_{\text{in}} = \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} \right)_{\text{out}}. \quad (39)$$

Pri tem pomeni indeks »in« znotraj palice, »out« pa zunaj nje. Za imaginarne komponente bi dobili podobne izraze.

1.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

Robni pogoj pri $r = b$ zapišemo takole:

$$B_r = B_r^* = 0,$$

$$B_\varphi = B_\varphi^* = 0,$$

$$B_z = 1,$$

$$B_z^* = 0.$$

Poleg tega je v vsem področju zunaj palice gostota tokov enaka nič. To seveda velja tudi na mejnih ploskvah $r = \text{konst.}$, $\varphi = \text{konst.}$, $z = \text{konst.}$. Iz enačb (19) do (21) sledi:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} = 0, \quad (40)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} = 0. \quad (42)$$

Enako velja tudi za imaginarne komponente polja B^* .

2. Poseben primer napake, kjer je $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$.

Problem je rotacijsko simetričen. Napaka take vrste bi bila na primer nenadna sprememba v premeru palice in bo natančneje opisana v nadaljevanju.

2.1. Pogoji za vektorski potencial

Namesto enačb (25) do (30) zdaj pišemo:

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} = 1, \quad (43)$$

$$\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} + \frac{A_\varphi^*}{r} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = 0.$$

$$\frac{\partial A_r^*}{\partial z} - \frac{\partial A_z^*}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial z} = \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0,$$

Na robu $r = b$ je edina komponenta gostote magnetnega pretoka, ki je različna od nič, $B_z = B_0$, oziroma $B_z = 1$, $B_z^* = 0$. Ta vpliva le na komponento vektorskega potenciala A_φ in A_φ^* . Komponente A_r , A_r^* , A_z in A_z^* pa niso povezane z A_φ in A_φ^* . Zato nas ne zanimajo.

V rotacijsko simetričnih problemih je koristno vpeljati vektorski potencial, saj zadostuje, če rešimo enačbe le za eno komponento A_φ , oziroma A_φ^* .

Pri robnih pogojih na ploskvah $r = \text{konst.}$ in $z = \text{konst.}$ uporabimo enačbo (33), oziroma (38).

2.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

V področju zunaj palice in na mejnih ploskvah $r = \text{konst.}$ in $z = \text{konst.}$ pišemo namesto enačb (40) do (42):

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} &= 0, \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

V oddaljenosti $r = b$ je $B_z = B_0$ edina komponenta gostote magnetnega pretoka, ki je različna od nič. Zato je tam $B_z = 1$ in $B_z^* = 0$. Enačba (45) povezuje komponenti B_r in B_z . Komponenta B_φ pa z B_r in B_z ni povezana.

Zato bi v tem primeru morali reševati enačbi za B_r in B_z . Na mejnih ploskvah $r = \text{konst.}$, oziroma $z = \text{konst.}$ velja robni pogoj (45), oziroma:

$$\left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right)_{\text{out}} = 0.$$

Velja pa tudi izraz (23), oziroma:

$$\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad (46)$$

Podobno bi lahko zapisali tudi za imaginarne komponente B_r^* in B_z^* .

3. Poseben primer napake, kjer je $\frac{\partial}{\partial z} = 0$.

Napaka take oblike se enakomerno razteza vzdolž palice.

3.1. Pogoji za vektorski potencial

Namesto enačb (25) do (30) dobimo:

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} = 1, \quad (47)$$

$$\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} + \frac{A_\varphi^*}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_r^*}{\partial \varphi} = 0, \quad (48)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\partial A_z^*}{\partial r} = 0, \quad (49)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial A_z^*}{\partial \varphi} = 0. \quad (50)$$

Iz zadnjih dveh enačb sledi, da je $A_z = \text{konst.}$ Ta komponenta pa tudi preko enačb (6) do (11) ni povezana z A_r ali A_φ . Enačbi (47) in (48) pa povežeta samo komponenti A_r in A_φ ter A_r^* in A_φ^* . Zato rešujemo samo enačbe (6), (7), (9) in (10). Robna pogoja (47) in (48) dopolnimo še z izrazom (22), ki ga zapišemo takole:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial A_r^*}{\partial r} + \frac{A_r^*}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial A_\varphi^*}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Za robne pogoje na ploskvah $r = \text{konst.}$ in $\varphi = \text{konst.}$ pa uporabimo izraze (31), (33), (34) in (36).

3.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

Iz enačb (40) do (42) sledi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial B_z}{\partial r} &= 0. \end{aligned}$$

V področju zunaj palice in tudi na mejnih ploskvah $r = \text{konst.}$ in $\varphi = \text{konst.}$ je $B_z = B_0 = \text{konst.}$, oziroma:

$$B_z = 1, \quad (51)$$

$$B_z^* = 0. \quad (52)$$

Ostali dve komponenti nista povezani z B_z .

V dvodimenzionalnih primerih, ko je $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, je ugodno izhajati iz enačb za gostoto magnetnega pretoka, saj zadošča, če rešimo le enačbi za B_z in B_z^* .

4. Poseben primer $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0, \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \right)$.

Problem je enodimenzionalen.

4.1. Pogoji za vektorski potencial

Robni pogoji pri $r = b$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\varphi}{r} &= 1, \\ \frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} + \frac{A_\varphi^*}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Robni pogoj pri $r = a$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{\text{out}} &= \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} \right)_{\text{in}}, \\ \left(\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} \right)_{\text{out}} &= \left(\frac{\partial A_\varphi^*}{\partial r} \right)_{\text{in}}. \end{aligned}$$

V središču:

$$A_\varphi = A_\varphi^* = 0.$$

4.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

Robni pogoj pri $r = b$ in $r = a$:

$$B_z = 1$$

$$B_z^* = 0.$$

5. Cev brez napake

5.1. Pogoji za vektorski potencial

Robni pogoji pri $r = b$ in $r = a$ so enaki kot pri palici. Tudi pogoji pri $r = a_1$ so enaki pogojem pri $r = a$. Enačbe za komponento vektorskega potenciala A_φ oziroma A_φ^* so pri $r < a_1$ prav takšne kot pri $r > a$.

5.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

V področju $a \leq r \leq b$ veljajo enaki pogoji kot pri palici. Tudi v področju $r \leq a_1$ velja $B_z = \text{konst.}$ Robni pogoj pri $r = a_1$ pa lahko poiščemo takole:

Na notranjem robu prereza velja:

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (53)$$

Enačbo (53) integriramo na obeh straneh po notranjem prerezu cevi:

$$\int \text{rot } (\mathbf{B} + i \mathbf{B}^*) \cdot d\mathbf{S} = \int \mu_0 \mu \sigma \omega (\mathbf{B}^* - i \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Uporabimo Stokesov stavek in ločeno zapišemo pogoja za realno in imaginarno komponento:

$$\oint \text{rot } B_z \cdot d\mathbf{s} = \int F \cdot B_z^* \cdot d\mathbf{S}, \quad (54)$$

$$\oint \text{rot } B_z^* \cdot d\mathbf{s} = - \int F \cdot B_z \cdot d\mathbf{S}. \quad (55)$$

Pri celi cevi dobimo:

$$-\left(\frac{\partial B_z}{\partial r}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot a_1 = F \cdot B_z^* \cdot \pi a_1^2, \quad (56)$$

$$-\left(\frac{\partial B_z^*}{\partial r}\right) \cdot 2 \cdot \pi \cdot a_1 = -F \cdot B_z \cdot \pi a_1^2. \quad (57)$$

6. Podpovršinske razpoke

6.1. Pogoji za vektorski potencial

Na notranjem robu podpovršinske razpoke so enaki robni pogoji kot pri palici pri $r = a$, saj gre za prehod iz kovine v prazen prostor.

6.2. Pogoji za gostoto magnetnega pretoka

Znotraj podpovršinske razpoke veljajo enaki pogoji kot pri cevi, saj je cev v nekem smislu palica s podpovršinsko razpoko posebne oblike.

Zato na notranjem robu uporabimo enačbe (54) in (55) in pri tem integriramo preko prereza raz-

poke, oziroma vzdolž zaključene poti, ki ta prerez omejuje. Če gre za zelo tanko podpovršinsko razpoko, je seveda desna stran v enačbah (54) in (55) enaka nič.

Lahko se prepričamo, da zelo tanka razpoka v azimutalni smeri ($r = \text{konst.}$) ne vpliva prav nič na porazdelitev polja in vrtničnih tokov. Prav tako ne vpliva na spremembo impedance in zato take napake na ta način ni mogoče odkriti.

Za površinske razpoke v zunanji steni pa veljajo enaki pogoji kot za površinske napake v palicah.

Zaključek

Opisane so teoretične osnove za izračunavanje porazdelitve izmeničnega magnetnega polja v bližini napake v palici ali v cevi okroglega prereza.

Izhajamo iz predpostavke, da je zunanje magnetno polje homogeno in usmerjeno vzdolž palice ali cevi.

V rotacijsko simetričnih primerih je koristno izhajati iz enačbe za vektorski potencial, ker je v tem primeru treba reševati diferencialno enačbo le za eno komponento. Podobno je v primerih napak, ki se enakomerno raztezajo po vsej dolžini palice. Enačbo za gostoto magnetnega pretoka je treba reševati le za eno komponento.

Opisani postopki, ki smo jih razvili na raziskovalnem odelku jeseniške železarnice, so bili tudi že uspešno uporabljeni v posebnih primerih (dvo-dimenzionalni in tridimenzionalni matematični modeli površinskih in podpovršinskih razpok).

Na področju neporušne kontrole s pulznimi in večfrekvenčnimi elektromagnetnimi polji pa predstavljajo opisane matematične metode popolnoma novo osnovo za raziskovalno delo.

Simuliranje pogojev s pomočjo računalnika je namreč mnogo cenejše in hitreje od praktičnega eksperimentiranja.

Literatura:

1. B. Brudar: Odkrivanje površinskih napak na paličastem jeklu s pomočjo vrtničnih tokov, *Železarski zbornik* 8, (1974), št. 1, stran 47–64.
2. F. Förster, H. Breithfeld: Theoretische und experimentelle Grundlagen der zerstörungsfreien Werkstoffprüfung von metallischen Werkstoffen mit der Durchlaufspule, *Z. Metallkunde*, Bd 45 (1954), Heft 4, stran 188
3. A. Aldeen, J. Blitz: Eddy current investigations of oblique longitudinal cracks in metal tubes using a mercury model, *NDT International*, 9 WCNDT, Special Conference Issue, 1979, Vol. 12, No 5, 211–223.

ZUSAMMENFASSUNG

Die theoretischen Grundlagen für die Berechnung der Verteilung eines Wechsellagnetfeldes in der Nähe eines Fehlers im Stab oder Rohr runden Querschnittes werden beschrieben.

Wir gehen aus der Voraussetzung aus, dass das äussere Magnetfeld homogen und längs des Stabes oder Rohres gerichtet ist.

In rotationssymmetrischen Beispielen ist es nützlich aus der Vektorpotenzialgleichung auszugehen, da in solchen Fällen die Differentialgleichung nur für eine Komponente gelöst werden soll. Ähnlich ist es bei den Fehlern welche sich über der ganzen Stablänge erstrecken. Die Gleichung für die magnetische Induktion soll nur für eine Komponente gelöst werden.

Die beschriebenen Verfahren welche in der Forschungsabteilung des Hüttenwerkes Jesenice entwickelt wurden, sind erfolgreich auch in besonderen Fällen (zweidimensionelle und dreidimensionelle mathematische Modelle der Oberflächen und Innenrisse) angewendet worden.

Auf dem Gebiet der zerstörungsfreien Prüfung durch Impuls-Wirbelstrom-Verfahren stellen die beschriebenen mathematischen Methoden eine völlig neue Grundlage für die Forschungsarbeit dar.

Das Simulieren der Bedingungen mit Hilfe des Rechners ist nämlich viel billiger und schneller als das praktische Experimentieren.

SUMMARY

There are theoretical principles given for calculation of the a.c. magnetic field in the neighbourhood of a defect in a rod or a tube with the circular cross-section.

It is assumed that the magnetic field outside is homogeneous and directed along the rod or a tube.

In cases with the rotational symmetry it is useful to start from the equation for the vector potential since it is necessary to solve the differential equation for one component only. A similar case we have with the defects extending uniformly all along the whole length of the bar.

The differential equation for the magnetic field density is to be solved just for one component again.

The procedures developed in the research department of the Iron and Steel Works Jesenice have been already applied in some special cases (mathematical models of two-dimensional and three-dimensional surface cracks).

In the field of nondestructive control with pulsed and multifrequency electromagnetic fields the described mathematical methods represent quite a new basis for the research work.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дано описание теоретического основания для выполнения распределения переменного магнитного поля вблизи погрешности в прутке или в трубе круглого сечения.

Выходим из предположения, что внешнее магнитное поле однородно и лежит в направлении прутка или трубы.

В ротационно-симметричных примерах полезно взять как исходное значение векторный потенциал потому, что в таком примере надо выполнить вычисление только для одной компоненты. То же самое имеет место в примерах пороков, которые равномерно растянуты по целой длине прутка. Уравнение для плотности магнитного поля надо вычислять только для одной компоненты.

Описанные способы, развитие которых выполнено в научно-исследовательском институте металлургического завода Железарна Есенице были применены также успешно на специальных примерах (двухмерные и трехмерные математические модели поверхностных и подповерхностных пороков).

В области контроля без разрушения с пульсирующим и многочастотным электромагнитным полем представляет описание математических методов совсем новую базу для экспериментальных работ. Моделирование условий при помощи счетчика гораздо дешевле и быстрее от практического экспериментирования. П. Бергер/Целье