Silva Kmetič,
upokojena svetovalka Zavoda RS za šolstvo

Mag. Melita Gorše Pihler,
Zavod RS za šolstvo

Rešujmo matematične probleme – 1. del

IZVLEČEK: **Namen prispevka je predstaviti pomen zgodnjega razvoja problemskih znanj pri pouku matematike. Predstavljene so nekatere strategije oz. metode reševanja matematičnih problemov s ciljem razvoja različnih miselnih procesov ob podpori raznovrstnih reprezentacij. Ob tem se razvijajo metakognitivne veščine, poglablja se razumevanje matematičnih pojmov in spreminja odnos do matematike.**

Ključne besede: matematični problemi, metode reševanja problemov, miselni procesi

Let's solve mathematical problems – part 1

Abstract: The purpose of this article is to address the importance of early development of problem-solving knowledge in mathematics lessons. It presents certain strategies, i.e. methods for solving mathematical problems, aimed to develop different thinking processes, supported with different representations. Thus, metacognitive skills are developed, the understanding of mathematical concepts is deepened, and the attitude towards mathematics is changed.

Keywords: mathematical problems, problem-solving methods, thinking processes

V naši šolski praksi sta raziskovanje in reševanje problemov običajno ločeni od uvajanja in utrjevanja vsebinskih znanj in se izvajata občasno. Pogosto je tudi prepričanje, da je reševanje problemov namenjeno samo uspešnejšim učencem. Matematična vsebina in pravilni rezultati nalog in problemov se zdijo v primerjavi z miselnimi procesi bolj pomembni. Značilnost matematike je miselna aktivnost, ki jo učni načrt opredeljuje s problemskimi in procesnimi znanji. Nekateri učitelji in učenci so prepričani, da je treba dani problem rešiti hitro in da je hitrost odlika dobrega reševalca. Rešiti 10 nalog v eni šolski uri je bolj cenjeno kot rešiti en sam problem, zato je pogost sklep, da je reševanje in raziskovanje problemov izvedbeno nemogoče oziroma celo izguba časa, saj posledično ne bo mogoče predelati vsebine ali pa učenci ne bodo znali, ker ni bilo dovolj ponavljanja oziroma vaje (pojmovanje poučevanja in učenja).

Definicije in pojmovanja, kaj je matematični problem, so različna. Za nekatere so to besedilne naloge tudi v primeru, ko niso niti kompleksne ali pa so rešljive z zaporedjem rutinskih postopkov. Vsaka od besedilnih nalog (primeri 1 do 5) je za učence z ustreznim vsebinskim znanjem rutinska naloga in ne matematični problem.

Primer 1: Odštevanec je 13, razlika pa 9. Izračunaj zmanjševanec.

Primer 2: Izračunaj vsoto, če veš, da je drugi seštevanec 3 309 in prvi seštevanec 799 051.

Nalogi v bistvu preverjata matematično terminologijo. Če učitelj predvideva kot pravilen zapis aritmetičnega izraza samo zapis po besedilu, je to naloga s pastjo, ki ne meri smiselno matematičnih ciljev: *pozna matematično terminologijo, razume matematično besedilo, pozna osnovno sestavo besedilne naloge (podatki, vprašanje, ključne besede, ki določajo odnos med podatki).*

Primer 3: Načrtaj kvadrat s stranico 5 cm in imenuj oglišča. Nariši mu vse simetrale.

Z besedilom je podana geometrijska naloga, ki preverja osnovno geometrijsko znanje.

Primer 4: Za ogrevanje lahko uporabimo peč na lesne pelete. Za 1 tono lesnih peletov je treba odšteti 183 €. Nariši preglednico in vanjo vpiši podatke o zneskih, ki bi jih morali odšteti za 2, 3, 4 ali 5 ton lesnih peletov (Matematika 4, 2014, str. 433).

Naloga preverja povezanost količin, kar lahko predstavimo s preglednico.

Primer 5: Prodajalec balonov je v zadnjih treh mesecih prodal 2306 zelenih balonov, rdečih balonov 408 manj kot zelenih, oranžnih balonov pa 267 več kot zelenih. Izračunaj število vseh balonov, ki jih je prodajalec prodal v zadnjih treh mesecih (Matematika 4, 2014, str. 274).

Naloga je dvostopenjska (prva stopnja: število balonov posameznih barv, druga stopnja: število vseh balonov) z manjkajočo informacijo, da ta prodajalec prodaja balone le v treh barvah.

Na razredni stopnji, ko se učenci še učijo brati, se zamenjujejo težave pri reševanju problemov, ki nastajajo zaradi tekočnosti branja in branja z razumevanjem ter težave z razumevanjem matematičnega problema. Dejanske razloge za morebitno neuspešnost je treba razmejiti. Povsem mogoče je, da slab bralec dobro rešuje matematične probleme, če jih ne posredujemo samo v pisni besedni obliki. V primerih prostorsko vizualnih učencev obstajajo pozni bralci[1] (Kreger Silverman, 2002, str. 7), ki jih verjetno ne identificiramo kot zmožne reševalce matematičnih problemov.

Spreminjanje poučevalne prakse in načina učenja je dolg proces. Uspešneje bi razvijali miselne aktivnosti in doživljanje matematike kot izziva, če bi se z njimi srečevali že v prvem stiku z matematiko.

O matematičnih problemih in reševanju

Učni načrt za matematiko z vključevanjem reševanja problemov sporoča, naj matematične probleme

1 Late reader - pozni bralec je tisti učenec, ki ne izkazuje tekočnosti in razumevanja branja v pričakovanem starostnem obdobju. Po nekaterih tujih raziskavah je obdobje od zgodnjega do poznega bralca razpeto od starosti 4 do 14 let.

Preglednica 1: Nekateri cilji in standardi, ki jih pokrivamo z reševanjem matematičnih problemov (Učni načrt. Matematika, 2011).

	PRVO VZGOJNO-IZOBRAŽEVALNO OBDOBJE	DRUGO VZGOJNO-IZOBRAŽEVALNO OBDOBJE	TRETJE VZGOJNO-IZOBRAŽEVALNO OBDOBJE
NEKATERI CILJI IN STANDARDI ZNANJA	→ Razvijajo problemsko občutljivost oz. zaznavo problema v matematičnih okoliščinah in vsakdanjem življenju, → predstavijo problemsko situacijo z različnimi didaktičnimi ponazorili, → uporabljajo različne strategije reševanja problemov.	→ Razvijajo občutljivost za zaznavo problema v matematičnih in drugih kontekstih, → opišejo problemsko situacijo z matematičnim jezikom, → predstavijo problemsko situacijo z različnimi ponazorili, → spoznavajo, razvijajo in uporabljajo različne strategije pri reševanju problemov, → razvijajo ustvarjalnost ob reševanju problemov z več rešitvami in pri iskanju ter uporabi različnih poti do rešitev, → pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišljajo o potrebnih in zadostnih podatkih.	→ Rešujejo odprte in zaprte probleme: berejo besedilo, oblikujejo vprašanja, analizirajo podatke, matematično zapišejo postopek reševanja, grafično predstavijo podatke, kritično vrednotijo rešitev, oblikujejo odgovor, → razvijajo ustvarjalnost in samoiniciativnost, → raziskujejo, razumejo in interpretirajo različne življenjske situacije in povezujejo znanja različnih predmetnih področij in matematičnih vsebin, → pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišljajo o potrebnih in zadostnih podatkih.

razumemo kot rdečo nit, ki povezuje na videz nepovezane teme, saj so problemska in procesna znanja splošna. Matematika je predmet, pri katerem se problemskost ponuja na vsakem koraku. Kako naj postane raziskovanje in reševanje problemov integralni del pouka matematike? Učni načrt da odgovor, da z vključevanjem reševanja problemov v vse vsebinske sklope (Učni načrt. Matematika, 2011, str. 20). Matematične probleme lahko razumemo kot povezovanje znanja znotraj matematike in med predmeti. Nekateri teoretiki vidijo povezovanje med disciplinami v reševanju problemov kot kroskurikularno temo.

V najširšem pomenu je *problem* (notranji) občutek nelagodja ali celo zaskrbljenosti, ker si ne znamo pojasniti nekega dejstva, ne moremo doseči želenega cilja ali se težko sprijaznimo z nekim stanjem. Okoliščinam, ki v človeku povzročijo taka občutja, pravimo *problemska situacija*, sam problem pa je človekovo subjektivno doživljanje te situacije (Magajna, 2003, str. 130). Problemska situacija je lahko za reševalca povsem neproblematična in se nanjo odziva po načelu: problemi so zato, da jih rešujemo. Tako naj bi matematične probleme doživljali učenci. Učenec doživi nalogo kot problem, če naloga v njem vzbudi željo, da jo reši. **Šolske problemske situacije naj bi bile za učence zanimivi izzivi.**

Če reševanje problema zbudi *zanimanje* in sproži *iznajditeljske sposobnosti*, potem po umskem naporu doživiš *veselje* nad odkritjem (Polya, 1989). Takšne izkušnje pustijo pečat v učenčevem mišljenju, spreminjajo njegov interes, stališča in vrednote. Zato mnogi (Schoenfeld, Wittmann, Frobisher, Freudental ...) menijo, naj se pri pouku manj posveča učenju dejstev in bolj temu, kako naj se učenci sami dokopljejo do novih spoznanj in znanje uporabijo v novih situacijah (Magajna, 2003). Učenje naj bi bilo v ravnovesju med aktivnim in pasivnim. Raziskave govorijo v prid učenčevemu aktivnemu učenju. Matematika, ki jo uporabljajo učenci pri raziskovanju in reševanju problemov, je za učence koristnejša.

Reševanje problemov je sposobnost uporabe matematičnega znanja v okviru matematike in izven nje, tudi v vsakdanjem življenju. Pri matematičnih problemih v matematičnem kontekstu gre za direktno uporabo pridobljenih matematičnih znanj, situacija reševanja problemov iz vsakdanjega življenja pa je kompleksnejša, ker je treba poznati in razumeti tudi kontekst.

Med različnimi definicijami matematičnega problema povzemimo naslednjo, ki opredeli reševanje problemov kot rdečo nit med vsebinami v procesu učenja od usvajanja pojmov, utrjevanja in vadenja postopkov do razvoja problemskih znanj, kar je tudi poudarek v učnem načrtu.

Reševanje problemov je:

1. Proces, kjer se učimo novih pojmov, odkrivamo novo znanje.
2. Način, s katerim lahko na neutrudljiv in smiseln način utrjujemo pojme in pridobivamo računske in *druge spretnosti.*
3. Priložnost, kjer pride do uporabe in transfera pojmov in spretnosti v okviru novih matematičnih ali avtentičnih situacij.
4. Učna situacija, v kateri vzpodbujamo vedoželjnost in radovednost.

(Prirejeno po Johnson in Rising v Orton in Frobisher, 1996, str. 22.)

K prejšnjemu seznamu bi dodali, da ‚*druge spretnosti*' vključujejo miselne procese, metode in strategije. Vsekakor pa je zaključek, kaj je za nekoga matematični problem ali problemska situacija, odvisen tudi od učenčevega znanja in procesa pouka. Za nekoga je lahko izbrana situacija problemska, za drugega pa je lahko ista situacija že rutinska.

Poglejmo nekaj preprostih problemov:

1. Koliko parov naravnih števil da vsoto 475?
2. Koliko stane potovanje iz Maribora v Koper?
3. Koliko kovancev po 1 evro in 2 evra potrebuješ za znesek 20 evrov?
4. Razišči poštevanko števila 9.

Prvi problem ima prepoznavne cilje z vidika matematične vsebine. Če učenec ne zna poiskati odgovora za podatek 475 ali pa problema sploh ne razume, naj poskuša z manjšim številom; npr. 10. Če je ta *odločitev* učenčeva, že sodi k strategijam reševanja. Ko rešuje primer za podatek 10, lahko uvidi, kako si lahko pomaga pri iskanju odgovora za večje število. Pomembno je tudi, da se učenec npr. v primeru števila 10 *odloči*, kako bo štel vsoti 3+7 in 7+3, kot eno ali kot dve. Pravilna sta torej 2 odgovora: 9 parov (naravnih) števil da vsoto 10, če ne upoštevamo zakona o zamenjavi števil. Če upoštevamo zakon o zamenjavi števil, potem da vsoto 10 pet parov naravnih števil in ti so 1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5. *Dogovorimo* se lahko, da bomo upoštevali tudi vsoto s številom 0.

Morda bo že en primer za nekatere učence dovolj, da bodo *napovedali* rezultat za večje število, svojo napoved *preverili* in poskusili *sklepati* o rezultatu izhodiščnega primera. Učenci bodo svojo rešitev predstavili (*ubesedenje*) in zapisali, kako so se odločili glede vsote z 0 oz. zakona o zamenjavi.

V besedilu so poševno pisani glagoli miselnih dejavnosti: odločati, napovedati, preveriti, sklepati, ki sodijo k ciljem za doseganje procesnih in problemskih znanj. Poleg tega pa učenec razvija konceptualno razumevanje naravnih števil in operacije seštevanje. Razvija komunikacijske zmožnosti, poročanje, ubesedenje, ozaveščanje in zapis dogovorov.

S spreminjanjem podatkov lahko vzpodbudimo učence, da pridejo do splošne rešitve vsaj z besednim opisom. Podatke spreminjamo zato, da se učenec lahko osredotoči na proces.

Drugi problem nima ene same rešitve. Učenci morajo natančneje opredeliti potovanje, zbrati potrebne podatke, potovanje načrtovati in izostriti cilj raziskave. Pri pouku matematike se pretežno pojavljajo enolično rešljive naloge, zato so problemi z več rešitvami nujno potrebni.

S kontekstom **tretjega problema** imajo učenci izkušnjo. Ugotovitev, da je več rešitev in učenčev sklep, da je našel vse rešitve, oziroma zavedanje, da je o tem treba razmišljati in ugotovitve zapisati, sprožijo matematično razmišljanje na višjih ravneh.

Zadnji problem nima vprašanja in nima danega cilja, ker ga glagol razišči ne opredeli. Prvi korak takšnega raziskovanja je iskanje ciljev, kot je npr. opisano v viru Matematični problemi v osnovni šoli: Teoretična zasnova in njegova didaktična izpeljava (Cotič, 1999). Do ugotovitve, kaj bi lahko raziskovali, se sproži več miselnih procesov, med njimi tudi *procesi odločanja* na osnovi nekaterih opažanj. Kako pričeti? Učenec mora najprej poštevanko zapisati, opazovati zapise in v naslednjem koraku bo morda jasno, kaj naj opazuje. Učenci, ki imajo manj izkušenj in manj matematičnega znanja, morda vidijo manj kot sovrstniki, vendar vsak odkrije najmanj eno lastnost. Opazujejo števila na levi in na desni strani enakosti, jih primerjajo, iščejo enakosti in razlike ...

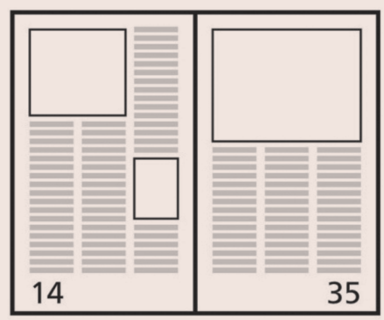
V nadaljevanju se bomo ukvarjali z zaprtimi, tradicionalnimi primeri reševanja matematičnih problemov. Pomembno izhodišče za ukvarjanje s temi problemi je poleg ustreznega vsebinskega znanja še bralna zmožnost učenca, ki je za starost od 9. do 14. leta opredeljena kot branje s pomenom oz. je branje že sredstvo učenja. To velja pri predpostavki, da so v besedilu učencu poznani pojmi in besede. Nove ali neznane besede pa so dekodirane. (Pečjak, 1999, str. 70). Če učenec ne pozna pojmov v neznanem kontekstu, torej pomena vseh besed, to ne pomeni, da ima težave v bralni zmožnosti. Zmožnost branja poljubnega besedila z razumevanjem in zmožnost matematičnega mišljenja nista nujno »premo sorazmerno« povezani zmožnosti (Kreger Silverman, 2002).

V fazi učenja je učenec lahko postavljen v nov kontekst, saj ima priložnost spoznati kontekst in nove pojme. Če pa učitelj ocenjuje problemska znanja, mora biti problemska situacija za učenca nova, vendar v kontekstu, ki ga pozna.

Poglejmo primer enostavnega konteksta, ki ga lahko ponazorimo s konkretno dejavnostjo.

Časopis **Šolarček** sestavljajo listi papirja, ki so prepognjeni po sredini in zloženi skupaj.

Iz časopisa je izpadel list na sliki. Koliko strani ima **Šolarček**?



Razloži bolnemu sošolcu, kako si razmišljal, ko si reševal ta problem.

Vloga učitelja

Učitelj mora vzdrževati svojo intelektualno kondicijo tako, da se občasno znajde v vlogi aktivnega učenca. Potem se lažje vživlja v procese učečih se, ko začuti negotovost ali izziv ob zastavljenem problemu, poskuša, eksperimentira, vztraja pri iskanju primerne strategije. Za učitelja mora biti izhodiščna problemska situacija nepoznana. Ko problem reši, menja svojo vlogo iz učenca v učitelja in išče možna problemska učna izhodišča iz učnega načrta, ki so za učitelja rutina, za učence pa problemska situacija. V pripravi ene ali zaporedja učnih ur načrtuje dejavnosti učenca, učne pripomočke, organizacijo razreda, učinkovite učne oblike in metode ... Pri izvedbi učne ure postane nevidni strokovnjak, ki usmerja in moderira delo svojih učencev. Ob tem je opazovalec razreda in posameznikov, rezultati opažanj pa so podlaga za pripravo nadaljnjih učnih aktivnosti.

Koraki reševanja matematičnih problemov

V poučevalni praksi lahko pri reševanju matematičnih problemov uporabimo katerega od znanih seznamov napotkov (Dewey, Polya, Faccione ...). Korake priredimo in oblikujemo glede na razvojno stopnjo otrok, njihovo predznanje, ki vključuje tudi izkušnje v reševanju problemov ter specifičnost problema. V nadaljevanju predstavljamo enega od možnih načinov, kako učencem predstavimo korake reševanja problemov.

Učencem na lističih, ki so med seboj pomešani, razdelimo korake reševanja matematičnih problemov (slika 1). Učenci lističe razvrstijo v smiselni vrstni red.

> Preberem problem.
>
> Označim pomembne besede in podatke.
>
> Izpišem podatke oz. narišem skico.
>
> Razmislim, kako bom rešil problem. (Postavljam si vprašanja: Kaj vem? Ali je kak podatek skrit? Kaj lahko izračunam?)
>
> Rešim problem.
>
> Uredim zapis in preverim pravilnost sklepanja in rezultatov.
>
> Ponovno preberem vprašanje in zapišem odgovor.
>
> Ponovno preberem problem in preverim pravilnost oz. smiselnost rešitve.

Ob izvajanju opisane dejavnosti učenci zapise preberejo in o njih razmišljajo. Priporočljivo je, da dejavnost izvajajo v dvojicah ali skupinah, s čimer učence spodbudimo k diskusiji o korakih reševanja matematičnih problemov. Če ima katera skupina učencev pri razvrščanju lističev težave, jim pri razmišljanju pomagamo z vprašanji. Ko z dejavnostjo zaključijo, poskrbimo, da imajo korake reševanja matematičnih problemov na razpolago ves čas, dokler jih ne ponotranjijo (npr. razvrščene lističe prilepijo v zvezek in se h korakom vračajo, dokler je to potrebno). Poglejmo si ob problemu.

> **Naloga: Zbiranje sličic (2.–5. razred)**
>
> Prijateljici Ana in Ema zbirata sličice. Do sedaj sta zbrali 22 sličic. Ema je zbrala 6 sličic več kot Ana. Koliko sličic je zbrala Ana? Koliko sličic je zbrala Ema?

Ob reševanju problemov učence usmerjamo, naj preverijo, ali so res izvedli vse smiselne korake. Če učenčeva rešitev ni pravilna, mu tega ne povemo, temveč ga spodbudimo z vprašanji, ki mu bodo pomagala odkriti napako, npr.: »Si ponovno prebral problem in preveril svojo rešitev?« oz. v skladu z vrsto napake. V primeru, da je napačna strategija reševanja oz. napačno sklepanje, preverimo, kako učenec razume problem in ga usmerimo v skladu z našo ugotovitvijo. Tako ima učenec možnost sam ugotoviti, da njegova rešitev ni pravilna, in ponovno premisliti o svojem reševanju oz. o tem, zakaj je razumel problem drugače.

Slika 1: Dejavnost s koraki reševanja matematičnih problemov.

STROKOVNA IZHODIŠČA

Preberem problem. Označim pomembne besede in podatke.	Prijateljici Ana in Ema zbirata sličice. Do sedaj sta zbrali 22 sličic. Ema je zbrala 6 sličic več kot Ana. Koliko sličic je zbrala Ana? Koliko sličic je zbrala Ema?
Izpišem podatke oz. narišem skico.	Skupno število sličic: 22. Ema ima 6 sličic več. ali Ana Ema 
Razmislim, kako bom rešil problem. (Postavljam si vprašanja: Kaj vem? Ali je kak podatek skrit? Kaj lahko izračunam?) Rešim problem.	Obe imata sodo število sličic. Poskusim: Ana: 12, 10, 8 Ema: 18, 16, 14 ali Kaj znam izračunati? 22 – 6 = 16 Kaj pomeni število 16? 8 + 8, enak delež sličic. 8 8 6 ali koraki metod slepega poskušanja in druge metode
Uredim zapis in preverjam pravilnost sklepanja in rezultatov.	Ana ima 8 sličic in Ema 14. 8 + 6 = 14, Ema ima 6 sličic več. 8 + 14 = 22, Skupaj imata 22 sličic.
Ponovno preberem vprašanje in zapišem odgovor.	Ana ima 8 sličic in Ema 14.
Ponovno preberem problem in preverim pravilnost oz. smiselnost rešitve.	V tem primeru zaradi enostavnosti problema in podatkov ni smiselno.

Bistvo učiteljeve pomoči je v vprašanjih in napotkih, ki učenca, ki problema ne razume, pripeljejo do »pristnega« razumevanja: »Aha, sedaj pa razumem!« Ta vprašanja so odvisna od problema. Zavedati se moramo tudi, da so za učence najtežji primeri, ko ni znano »začetno stanje«, torej ko ima na neki način učenec rezultat. V jeziku razredne stopnje so to naloge tipa neznani člen računske operacije.

Za vsako reševanje je najpomembnejši odnos enakost oz. njen zapis. Do enakosti pridemo s sklepanjem, ki temelji na razumevanju problema. Iz različnih metod reševanja bomo videli, da so nekatere enakosti ‚prikrite'.

Možni zapisi z eno enakostjo:

x + x + 6 = 22 (predmetna stopnja)

☐ + ☐ + 6 = 22 (že na razredni stopnji)

Zapis z dvema enakostima:

☐ + 6 = △

☐ + △ = 22

Če učenci ne znajo zapisovati enakosti, lahko pridejo do rešitve z drugačnimi strategijami reševanja, kar predvideva tudi učni načrt (Učni načrt. Matematika, 2011, str. 18, 19, 20, 37, 39, 73).

Primeri vprašanj, ki spodbujajo in usmerjajo razmišljanje v procesu reševanja problema

Na začetku

a) Ali razumeš problem? Poznaš vse pojme, besede?
b) Opiši problem s svojimi besedami.
c) Nariši sliko, diagram, uredi podatke ...
d) Kaj lahko izračunaš?
e) Kaj moraš izračunati?
f) Kaj se lahko vprašaš?
g) Kateri pripomoček lahko uporabiš?
h) Poskusi drugače.
i) Ali lahko napoveš rezultat?
j) Oceni rezultat.
k) Kako lahko to zapišeš?
l) Katere podatke imaš? Ali imaš dovolj podatkov? Kaj želiš izvedeti?
m) Poišči ‚skrite' podatke in odnose med njimi.
n) ...

Za tiste, ki so obtičali

a) Kaj si naredil do sedaj?
b) Kaj bi ti lahko pomagalo rešiti problem?
c) Primerjajte svoje delo v skupini.
d) ...

Posredovanje učitelja med reševanjem

a) Kaj misliš s tem?
b) Zakaj si se odločil, da boš to napravil tako?
c) Razloži, kako si razmišljal?
d) Misliš, da to velja tudi za druga števila (podatke, like, količine ...)?
e) Misliš, da to velja splošno?
f) ...

Po koncu dejavnosti

a) Kako si prišel do odgovora?
b) Preveri svoje rezultate. Ali si našel vse rešitve?
c) Kako si preveril svoj rezultat?
d) Razloži svoj postopek.
e) Kaj je bistveno?
f) Kje lahko to uporabimo?
g) Kaj bi drugič napravil drugače?
h) Kaj pa, če bi začel tako?
i) ...

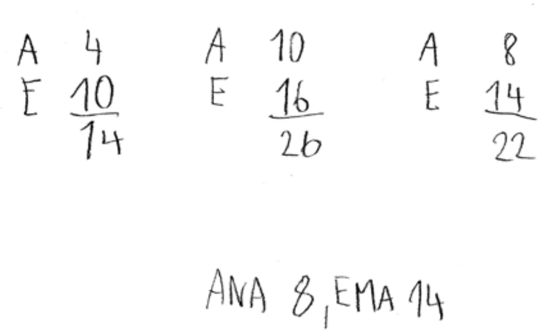
(Kmetič, 2015, str. 11, 12)

Primeri matematičnih problemov

Učni načrt eksplicitno navaja poskušanje in sistematično reševanje, na prikazanih primerih pa se bomo seznanili še z nekaterimi drugimi strategijami, ki jih v literaturi poimenujejo metoda postopnega približevanja, grafično-aritmetična metoda, aritmetična metoda, metoda predpostavke in metoda iskanja vzorcev.

V nadaljevanju bomo prikazali, katere strategije reševanja so uporabili nekateri učenci pri reševanju problema Zbiranje sličic. Več primerov reševanja matematičnih problemov bo v prihodnji številki revije.

Učenec A je problem rešil z metodo postopnega približevanja ali z metodo izboljšanih poskusov (slika 2). Preveril je, ali je Ana zbrala 4 sličice. Ugotovil je, da bi v tem primeru Ana in Ema skupaj zbrali premalo sličic. Zato je preveril, ali je število Aninih sličic 10. Ugotovil je, da bi v tem primeru Ana in Ema skupaj zbrali preveč sličic. Zato je preveril, ali je število Aninih sličic 8 (manjše od 10 in večje od 4). Ugotovil je, da v tem primeru skupno število sličic ustreza besedilu problema.

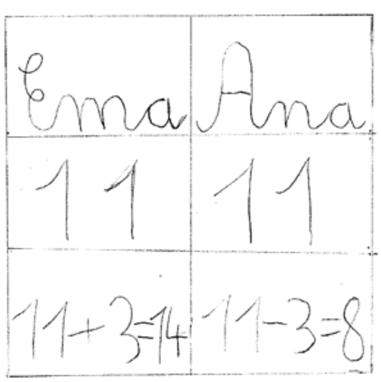


Slika 2: Reševanje problema Zbiranje sličic (izdelek učenca A).

Zapis postopka reševanja je tudi v tem primeru nenatančen, zlahka pa sledimo razmišljanju in računanju učenca, čeprav zapis seštevanja ni nakazan. Seštevanje ni bilo izvedeno po algoritmu za pisno seštevanje, kar bi morda sklepali iz zapisa glede na črto, ki nadomešča znak »je enako« v algoritmu pisnega seštevanja.

Učenec B je problem rešil z metodo predpostavke (slika 3). Značilnost te metode je, da predpostavimo rešitev in preverimo, ali drži. Na osnovi ugotovljenega sklepamo o pravilni rešitvi (Sirnik, 2015, str. 15).

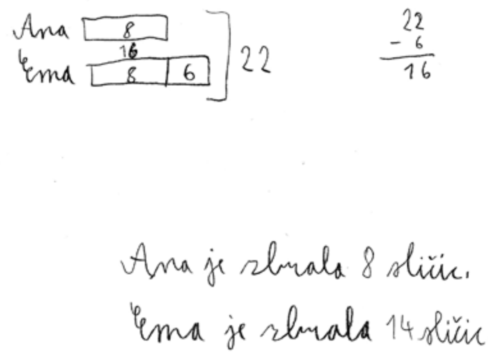
Za razliko od učenca A je učenec B na začetku predpostavil, da sta Ana in Ema zbrali enako število sličic. Odločitev je v skladu z namenom, da problem spremenimo tako, da znamo kaj izračunati. V naslednjem koraku se učenec vpraša, kaj morata storiti s sličicami, da jih bo imela Ema več? Koliko sličic mora dati Ana Emi? Učenec B spreminja obe predpostavljeni vrednosti z hkratnim dodajanjem in odvzemanjem polovične razlike med številoma sličic. Lahko bi učenec sklepal tudi narobe in dal Emi 6, kar je pogosta odločitev. Po preizkusu bi se prepričal, da je sklepal narobe.
V primeru opisanega reševanja gre za kombinirani metodi: metoda s predpostavko in metoda postopnega približevanja.



Slika 3: Reševanje problema Zbiranje sličic (izdelek učenca B).

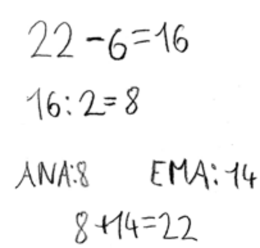
Učenec C je problem rešil z grafično-aritmetično metodo (slika 4). Število Aninih in število Eminih sličic je prikazal s pravokotnikoma. Ker je število Eminih sličic večje od števila Aninih, je pri Emi narisal daljši pravokotnik. Pravokotnik, ki predstavlja število Eminih sličic, je razdelil na dva pravokotnika, tako prvi del tega pravokotnika predstavlja enako število sličic kot pravokotnik, ki prestavlja število Aninih sličic.

Ema je zbrala 6 sličic več kot Ana, kar je zapisal v drugi del pravokotnika pri Emi. Ob strani je zapisal število vseh sličic (22). Od 22 sličic je odštel 6 sličic in ugotovil, da je v pravokotniku pri Ani in v prvem delu pravokotnika pri Emi skupaj 16 sličic. Ker prvi del pravokotnika pri Emi in pravokotnik pri Ani predstavljata enako število sličic, je število 16 delil z 2 in v vsak del zapisal 8. Tako je ugotovil, da je Ana zbrala 8 sličic in Ema 14 sličic.



Slika 4: Reševanje problema Zbiranje sličic (izdelek učenca C).

Učenec Č je problem rešil z aritmetično metodo (slika 5). Razmišljal je podobno kot učenec C, le da ni narisal skice. Od števila vseh sličic je odštel razliko med številom Aninih in številom Eminih sličic. Dobljeno število (16) je delil z 2 in s tem dobil število Aninih sličic (8). Ker je število Eminih sličic za 6 večje od števila Aninih sličic, je številu Aninih sličic prištel 6. Tako je dobil število Eminih sličic (14).



Slika 5: Reševanje problema Zbiranje sličic (izdelek učenca Č).

Iz zapisa postopka reševanja opazimo dvojen pomen uporabe simbola, enkrat kot simbol za operacijo deljenja, drugič pa označuje stanje »ima«.

Intervencije učitelja

Če se učenec ne zna samostojno lotiti reševanja problema, z vprašanji preverimo, ali razume problem, npr.:

a) Kaj veš?

b) Koliko sličic sta Ana in Ema zbrali skupaj?

c) Katera je zbrala več sličic?

d) Koliko več?

Če učenec obtiči, mu lahko pomagamo pri analizi problema z vprašanjem: »Koliko pa bi imela sličic vsaka, če bi jih imeli enako?« Učenec ugotovi, da bi jih imela vsaka 11. Nadaljujemo: »Koliko jih mora dati Ana Emi, da bo imela Ema 6 (1, 2 ...) sličic več kot Ana?« Če učenec sklepa napak, lahko svoj poskus preveri in popravi. Učitelj ga vodi: »Preveri. Nastavi si žetone, kartice ... Zaigrajta situacijo s sošolcem.«

Mlajši otroci rešujejo problem z manjšim številom sličic. Problem lahko rešujejo na simbolni ravni ali s konkretnim materialom (sličice, link kocke, žetoni). V tem primeru običajno računski operaciji seštevanja oz. odštevanja nadomesti preštevanje. V vsakem primeru pa rešujejo problem in primerjajo količine.

Se nadaljuje ...

Viri in literatura:

Cotič, M. (1999). *Matematični problemi v osnovni šoli: Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Kmetič, S. (2015). Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog. *Matematika v šoli*, 21 (1–2). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 5–13.

Kreger Silverman, L. (2002). The Power of Images. V *Upside-Down Brilliance: The Visual-Spatial Learners*. Denver: DeLeon Publishing. Dostopno na: http://www.visualspatial.org/files/power.pdf (24. 5. 2018).

Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, 10 (3–4). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 129–138.

Matematika 4. E-učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole. (2014). Dostopno na: http://eucbeniki.sio.si/mat4/index.html (24. 5. 2018).

Orton, A., Frobisher, L. (1996): *Insights into Teaching Mathmetatics*. London: Cassel.

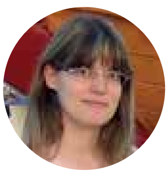
Pečjak, S. (1999): *Osnove psihologije branja.* Ljubljana: Filozofska fakulteta.

Polya, G. (1985): *Kako rešujemo matematične probleme*. Ljubljana: DMFA Slovenije.

Sirnik, M. (2015): Metoda napačne predpostavke. *Matematika v šoli*, 21 (1–2). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, str. 14–23.

Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. (2011). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Dostopno na: http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf (24. 5. 2018).

Silva Kmetič,
upokojena svetovalka
Zavoda RS za šolstvo



Mag. Melita Gorše Pihler,
Zavod RS za šolstvo

Rešujmo matematične probleme (2. del)

V prvem delu prispevka (Razredni pouk, št. 2/2018) smo predstavili pomen zgodnjega razvoja problemskih znanj pri pouku matematike, vlogo učitelja in korake reševanja matematičnih problemov, kar smo ilustrirali s primeri. Prikazali smo tudi različne strategije oz. metode reševanja izbranega matematičnega problema. V nadaljevanju opisujemo, katere strategije so izbrali učenci pri reševanju treh matematičnih problemov.

1. primer matematičnega problema

Pika Nogavička in zlatniki (5. razred)

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo razdelila Anici in Tomažu.

Pika je $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Anici;

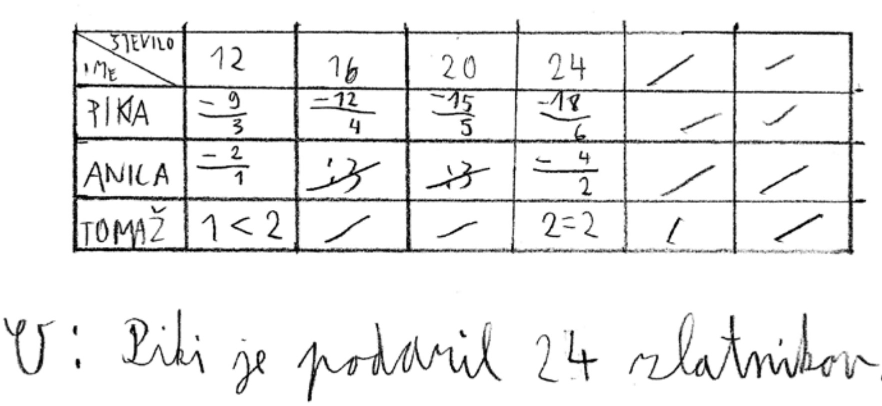
preostala 2 zlatnika je podarila Tomažu.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Učenec D je pri reševanju problema uporabil metodo postopnega približevanja (slika 1). Metoda postopnega približevanja ali metoda izboljšanih poskusov je niz poskusov, s katerimi pridemo do rešitve zastavljenega problema. V vsakem od poskusov se poskuša izboljšati približek. Pri vsakem naslednjem poskusu smo bliže pravilni rešitvi. Metoda je v našem primeru prikazana s preglednico, kamor se vpisujejo poskusi.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Učenci so se reševanja problema lotili na različne načine.



ŠTEVILO / IME	12	16	20	24	/	/
PIKA	$\frac{-9}{3}$	$\frac{-12}{4}$	$\frac{-15}{5}$	$\frac{-18}{6}$	/	/
ANICA	$\frac{-2}{1}$	~~3~~	~~3~~	$\frac{-4}{2}$	/	/
TOMAŽ	1 < 2	/	/	2 = 2	/	/

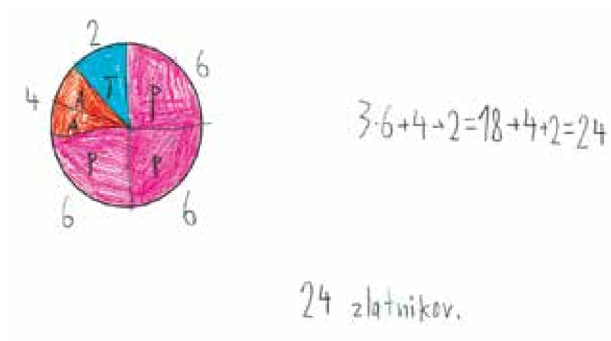
O: Piki je podaril 24 zlatnikov.

Slika 1: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca D).

Učenec D je najprej preveril, ali bi lahko bilo število vseh zlatnikov 12. Izračunal je, da je v tem primeru Pika obdržala zase 9 zlatnikov, torej so ostali 3 zlatniki. To je v preglednici prikazal z zapisom $\frac{-9}{3}$. Nato je izračunal, koliko zlatnikov je podarila Anici. V tem primeru je Anici podarila 2 zlatnika, torej je ostal za Tomaža 1 zlatnik. To je v preglednici prikazal z zapisom $\frac{-2}{1}$. Ker je v besedilu problema navedeno, da je Pika Tomažu podarila 2 zlatnika, je učenec D ugotovil, da je število vseh zlatnikov večje. Naslednje število, ki ga je preizkusil, je število 16. (Ker je Pika obdržala $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov, je učenec vedel, da je število vseh zlatnikov večkratnik števila 4.) Izračunal je, da Pika obdrži 12 zlatnikov. Ostanejo 4 zlatniki, torej Pika Anici ne bi mogla dati $\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov. Zato število vseh zlatnikov ni 16. Do podobne ugotovitve je prišel, ko je preizkusil, ali je začetno število zlatnikov 20. Zato je preizkusil, ali je število vseh zlatnikov 24, in ugotovil, da v tem primeru Pika obdrži 18 zlatnikov, 4 zlatnike podari Anici in 2 zlatnika Tomažu, kar se ujema s podatki naloge. Zato je učenec D sklepal, da je Kapitan Nogavička Piki podaril 24 zlatnikov. Iz zapisa (slika 1), ki je na prvi pogled nejasen, vidimo, da učenec zlahka sledi svoji ideji reševanja in ga pri odštevanju ne motijo črte tabele. V posameznem okenčku preglednice je del procesa odštevanja in ne samo rezultat. Učenec z vidika zapisa na nematematičen, spontan način »dokazuje«, da izbira števila ni oz. je rešitev. Pravilen zapis s procesom reševanja prikazuje preglednica 1.

Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Zakaj si poskušal z 12, 16, 20 in 24? Zakaj lahko delimo 12 in 24 s 3, 16 in 20 pa ne? Koliko zlatnikov je razdelila Pika? Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika? Kako pa bi na delitev zlatnikov vplivala sprememba podatka: Tomaž dobi 3 zlatnike?

Učenec E je problem rešil z grafično-aritmetično metodo (slika 2). Grafično-aritmetična metoda ponazori matematični problem s slikovnim gradivom, ki pomaga učencem pri razumevanju problema in jih vodi na poti do rešitve (Rajh, 2015, str. 43).



Slika 2: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca E).

Učenec E si je pri reševanju problema pomagal s krogom, ki predstavlja število vseh zlatnikov. Krog je razdelil na 4 enake dele. Pobarval je 3, ki predstavljajo delež zlatnikov, ki jih je Pika obdržala zase. Preostali del kroga je razdelil na 3 enake dele in ugotovil, da en od teh delov predstavlja 2 zlatnika, ki ju je Pika podarila Tomažu. Na osnovi tega je sklepal, da je Pika Anici podarila 4 zlatnike. Ugotovil je, da $\frac{1}{4}$ kroga predstavlja 6 zlatnikov, torej cel krog predstavlja 24 zlatnikov. Zato je število vseh zlatnikov 24. Na sliki opazimo domiselno simbolno sporočanje, pravilno zapisan številski izraz, ki dokazuje pravilnost sklepanja in računanja, ter kratek odgovor na vprašanje.

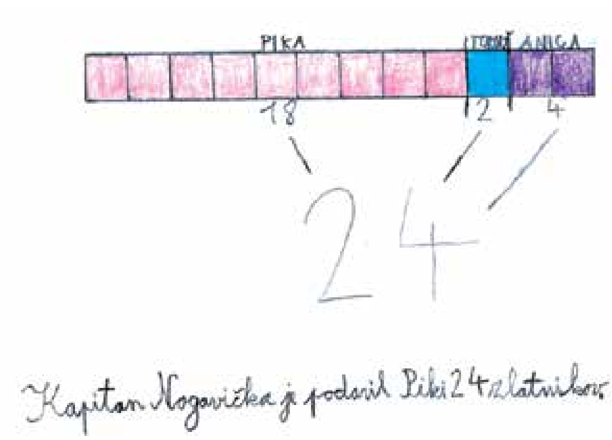
Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Preveri rešitev po besedilu problema. Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika?

Preglednica 1: Pravilen zapis procesa reševanja.

ŠTEVILO PODARJENIH ZLATNIKOV / IME	12	16	20	24	Opombe: Večkratniki števila 4 zaradi podatka.
Pika	9	12	15	18	$\frac{3}{4}$ podarjenih zlatnikov
Anica in Tomaž	$12 - 9 = 3$	$16 - 12 = 4$	$20 - 15 = 5$	$24 - 18 = 6$	Število zlatnikov za Anico in Tomaža
Anica	2	~~4 : 3~~	~~5 : 3~~	4	Število zlatnikov za Anico
Tomaž	$3 - 2 = 1$	/	/	$6 - 4 = 2$	Število zlatnikov za Tomaža
Preizkus	1 < 2	/	/	2 = 2 in 4 = 2 · 2	Rezultat mora ustrezati dvema pogojema: Tomaž ima 2 zlatnika, Anica pa dvakrat toliko.

Primerjaj z ulomki Aničin in Tomažev delež zlatnikov. Kateri podatek v problemu ti je razkril, koliko zlatnikov je dobila Anica?

Učenec F je pri reševanju problema uporabil podporo, to je pravokotnik, ki je bil že razdeljen na 12 enakih delov (slika 3). Pravokotnik predstavlja število vseh zlatnikov. Učenec je uspešno uporabil podporo in pobarval 9 kvadratkov (roza), ki predstavljajo del zlatnikov, ki jih je Pika obdržala zase. Od preostalih treh kvadratkov je pobarval 2 (vijolično), ki predstavljata delež zlatnikov, ki jih je Pika podarila Anici. Ugotovil je, da 1 kvadratek (moder) predstavlja del zlatnikov, ki jih je Pika podarila Tomažu. Zelo pomembna je implicitna ugotovitev učenca, da 1 kvadratek predstavlja 2 zlatnika. Torej 12 kvadratkov predstavlja 24 zlatnikov. Zato je število vseh zlatnikov 24.



Slika 3: Reševanje problema Pika Nogavička in zlatniki (izdelek učenca F).

Vprašanja učitelja, ki spodbujajo povezovanje znanja po rešenem problemu: Zakaj je pravokotnik razdeljen na 12 enakih delov? Koliko zlatnikov je razdelila Pika? Kolikšen delež zlatnikov je razdelila Pika? Preveri rešitev po besedilu problema.

Intervencije učitelja na začetku in med reševanjem

Če se učenec ne zna samostojno lotiti reševanja problema, preverimo, kako razume problem, z vprašanji, npr.:

a) Kaj veš?

b) Kdo je dobil največ zlatnikov?

c) Kolikšen delež zlatnikov je Pika razdelila?

d) Koliko zlatnikov je dobil Tomaž?

e) Kolikšen delež preostanka predstavljata dva zlatnika?

f) Ali lahko iz podatkov sklepaš o lastnostih števila zlatnikov?

g) Izmisli si neko število zlatnikov in ga poskušaj razdeliti na enak način kot Pika.

h) Kaj predstavlja število vseh zlatnikov?

i) Ponazori način razdeljevanja zlatnikov.

Če se učenec kljub dodatnim vprašanjem ne zna lotiti problema, mu lahko ponudimo pripomoček, npr. krog ali pravokotnik, s katerim si pomaga pri reševanju. Če ima težave kljub pripomočku (krogu ali pravokotniku), mu je lahko v pomoč lik, razdeljen na smiselno število enakih delov.

Problem bi lahko diferencirali tudi tako, da bi odvzeli (primer A) ali dodali (primer B) podatek v besedilu problema. Poenostavljen problem (primer A) bi lahko reševali tudi učenci 4. razreda. Pripomoček bi v tem primeru lahko bil lik, razdeljen na 4 enake dele.

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo podarila Anici.

Pika je $\frac{3}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase in 2 zlatnika podarila Anici.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

Primer A: Poenostavljen problem.

Kapitan Nogavička je Piki podaril zlatnike. Odločila se je, da bo nekaj zlatnikov obdržala zase, vse ostale pa bo razdelila Anici, Tomažu in Ficku.

Pika je $\frac{1}{4}$ vseh zlatnikov obdržala zase;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Anici;

$\frac{2}{3}$ preostalih zlatnikov je podarila Ficku;

preostala 2 zlatnika je podarila Tomažu.

Koliko zlatnikov je kapitan Nogavička podaril Piki?

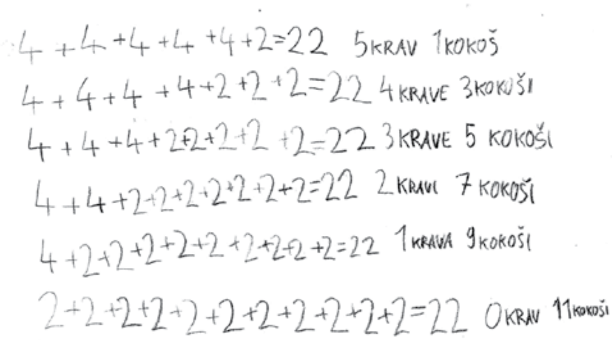
Primer B: Zahtevnejši problem.

2. primer matematičnega problema

Kokoši in krave (2.–5. razred)

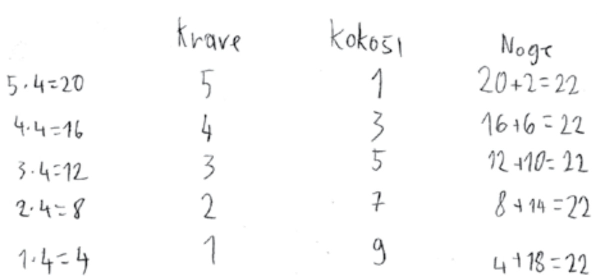
Na kmetiji imajo kokoši in krave. Vse kokoši in krave imajo skupaj 22 nog. Koliko je kokoši in koliko krav?

Učenec G je problem rešil z aritmetično metodo (slika 4). Navedel je matematično vse možne rešitve. Njegovi sošolci so spodbudili razmišljanje o tem, ali je tudi zadnja navedena možnost (0 krav, 11 kokoši) smiselna rešitev, saj je v besedilu naloge navedeno, da imajo na kmetiji kokoši **in** krave.



Slika 4: Reševanje problema Kokoši in krave (izdelek učenca G).

Učenec H je isti problem rešil z metodo iskanja vzorcev (Sambolić Beganović, 2015). Upošteval je: če število krav zmanjšamo za 1, se število kokoši poveča za 2, ker je $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$ (slika 5).



Slika 5: Reševanje problema Kokoši in krave (izdelek učenca H).

Učenec računske operacije, npr. $5 \cdot 4 + 2 = 20 + 2$, izvaja in zapisuje ločeno, kar ne vpliva na konsistenco njegovega sklepanja.

Intervencije učitelja

Učenci so reševali problem z več možnimi rešitvami. Nekateri so se zadovoljili takoj, ko so našli eno od možnih rešitev. Drugi so prenehali z reševanjem, ko so našli dve možni rešitvi. V taki situaciji učitelj učence spodbudi, npr.:

Primerjajte vaše ugotovitve.

Katera rešitev je pravilna?

Koliko rešitev ima problem?

Poiščite vse možne rešitve danega problema.

Analizirajmo nalogo:

Podatki

Skupno število nog je 22.

Skriti podatki

Vsaka kokoš ima 2 nogi.

Vsaka krava ima 4 noge.

Odnosi/povezave

Število nog je vedno sodo število.

Vprašanja

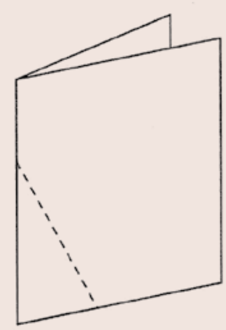
Koliko je kokoši in koliko krav?

Ali je več možnosti?

3. primer problemske naloge

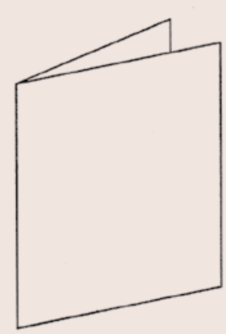
Izreži kvadrat (5. razred)

Petra je kos papirja v obliki pravokotnika prepognila na polovico, kot kaže simbolna slika 6. Ko je po črtkani črti odrezala košček in papir razprla, je dobila trikotnik. Kako naj reže drugi list, da bo dobila kvadrat z obsegom 24 cm? Pri reševanju uporabi predlogo za reševanje (slika 7). (Problem je prirejen po Timss 2011.)



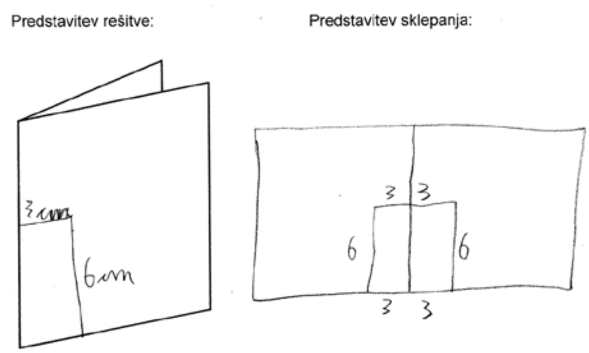
Slika 6: Prepognjen kos papirja

Predstavitev rešitve: Predstavitev sklepanja:



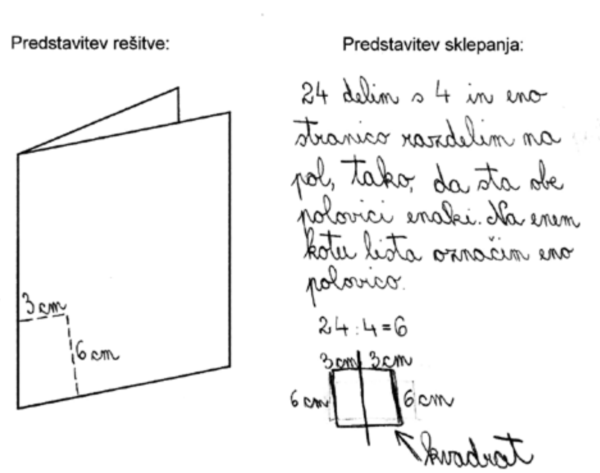
Slika 7: Predloga za reševanje problema Izreži kvadrat.

Učenec I je problem rešil, kot je prikazano na sliki 8. Svoje sklepanje je predstavil na razprtem listu papirja.



Slika 8: Reševanje problema Izreži kvadrat (izdelek učenca I).

Učenec J je problem rešil, kot je prikazano na sliki 9.



Slika 9: Reševanje problema Izreži kvadrat (izdelek učenca J).

Geometrijski problemi so nekoliko drugačni. V našem primeru sliko ponujamo, lahko pa predlagamo, da učenec izvede problem na konkretnem modelu, najprej uvodno, ki nas popelje v geometrijsko situacijo; v nadaljevanju mora vedeti, kaj je obseg kvadrata in upoštevati simetrijo po prepogibu lista. Problem lahko reši tudi s »konca«: Nariše kvadrat z obsegom 24 cm, ga prepogne po polovici ...

Intervencije učitelja

Če se učenec ne zna samostojno lotiti reševanja problema, z vprašanji preverimo, ali razume problem, npr.:

a) Kateri lik dobimo, če po črtkani črti odrežemo koščke in papir razpremo?

b) Kateri lik želimo dobiti?

c) Bomo lahko dobili lik v obliki kvadrata, če bomo naredili le en rez?

d) Koliko zarez moramo narediti, da bomo dobili lik v obliki kvadrata?

e) Kako morata potekati ti dve zarezi? Nariši ju.

f) Kateri lik dobimo, če list v obliki kvadrata preložimo na pol?

g) Kolikšen mora biti obseg dobljenega kvadrata?

Učenec lahko ima težave s predstavitvijo rešitve, ker je prepognjen list, na katerem mora predstaviti svojo rešitev, manjši od prepognjenega lista v naravni velikosti. Zato učencu povemo, naj ne meri. Rešitev naj le skicira: nariše naj, kako potekata črti, po katerih bi morali odrezati list, in ob njiju zapiše, koliko cm naj bosta dolgi.

Če učenec kljub intervencijam učitelja pri reševanju problema obtiči, mu ponudimo list papirja v obliki pravokotnika, s katerim si pomaga pri reševanju. Podobno naredimo, če učenec problem reši narobe: ponudimo mu list papirja v obliki pravokotnika in ga spodbudimo, naj preveri pravilnost svoje rešitve. Tako ima možnost sam ugotoviti, da njegova rešitev ni pravilna, in napako popraviti.

Sklep

Stopnja razrednega pouka je za razvoj matematičnega mišljenja zelo pomembna. Pripravljamo osnovo za pravilno razumevanje abstraktnih matematičnih pojmov in odnosov. Vemo, da je prehiter preskok faze konkretne ravni razlog, da nekateri otroci abstraktnih pojmov ne razumejo in jih uporabljajo le mehanično, na spominskem nivoju, dokler so ti pač dosegljivi. Z vpeljavo matematične vsebine naloga učitelja še ni končana, prav tako ne z reševanjem rutinskih matematičnih nalog. Ker otroci pri reševanju matematičnih problemov razvijajo matematično mišljenje in se veliko naučijo tudi o osnovnih pojmih in odnosih med njimi, naj se pogosto srečujejo z njimi. O reševanju problemov naj sproščeno razpravljajo, ne smejo se bati ali sramovati napačnih odgovorov. Ob tem se moramo zavedati, da otroci, ki imajo matematiko radi, uživajo pri reševanju problemov zaradi estetskih značilnosti matematike, kot so pravila, vzorci, red, ne pa zato, ker bi se zavedali, da so matematična znanja zanje koristna.

Učiteljeva naloga je učencem dati možnost razvoja problemskih in procesnih znanj ter ustvariti in pripraviti v razredu varno vzdušje. Naj bo učenje matematike učenje iz napak brez zadrege. Za učence naj bo njihov odgovor osebna last. Zato naj se zavedajo svojega mnenja, svoje rešitve, svojega znanja in svojih napak. To pa je za učitelja velik izziv.

Viri in literatura:

Cotič, M. (1999). Matematični problemi v osnovni šoli: Teoretična zasnova modela in njegova didaktična izpeljava. Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.

Japelj Pavešić, B. (2012). *Matematične naloge raziskave TIMSS*. Ljubljana: Pedagoški inštitut.

Kmetič, S. (2015). Metode reševanja besedilnih in problemskih nalog. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 5–13.

Kmetič, S. (2016). Od besed k pojmom in strategijam pri razvoju matematične pismenosti. V M. Suban in drugi (ur.), *3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2016: zbornik izbranih prispevkov* (str. 47–63). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 16. 5. 2018 s spletne strani: https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2016/.

Kmetič, S., Gorše Pihler, M. (2018). Rešujem matematične probleme, 1. del. *Razredni pouk*, let. 20, št. 2, str.

Kreger Silverman, L. (2002). The Power of Images. V *Upside-Down Brilliance: The Visual-Spatial Learners*. Denver: DeLeon Publishing. Pridobljeno 24. 5. 2018 s spletne strani: http://www.visualspatial.org/files/power.pdf.

Magajna, Z. (2003). Problemi, problemsko znanje in problemski pristop pri pouku matematike. *Matematika v šoli*, 10 (3-4), str. 129–138.

Matematika 4. E-učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole. (2014). Pridobljeno 24. 5. 2018 s spletne strani http://eucbeniki.sio.si/mat4/index.html.

Mršnik, S., Novak, L. (2015). Samorefleksivno mišljenje in formativno spremljanje pri reševanju matematičnih problemov. V S. Kmetič in drugi (ur.), *2. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2014: zbornik prispevkov* (str. 117–132). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 22. 5. 2018 s spletne strani: https://www.zrss.si/digitalnaknjiznica/zbornik-prispevkov-kupm2014/.

Orton, A., Frobisher, L. (1996): *Insights into Teaching Mathmetatics*. London: Cassel.

Pečjak, S. (1999): *Osnove psihologije branja*. Ljubljana: Filozofska fakulteta.

Polya, G. (1985): *Kako rešujemo matematične probleme*. Ljubljana: DMFA Slovenije.

Rajh, S. (2015): Grafično aritmetična metoda. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 42–49.

Rajh, S. (2015): Metoda reševanja nazaj. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 31–41.

Sambolić Beganović, A. (2015): Metoda iskanja vzorcev. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 50–55.

Schoenfeld, A. H. (1992): Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. V Grouws, D. (ur.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (str. 334–370), New York: MacMillan.

Sirnik, M. (2015): Metoda napačne predpostavke. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 14–23.

Suban, M. (2015): Metoda postopnega približevanja. *Matematika v šoli*, 21 (1-2), str. 24–30.

Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. (2011). Ljubljana: Ministrstvo za šolstvo in šport, Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 25. 5. 2018 s spletne strani: http://www.mizs.gov.si/fileadmin/mizs.gov.si/pageuploads/podrocje/os/prenovljeni_UN/UN_matematika.pdf.

Wittmann, E. C. (2012): Practicing basic skillls in a productive way. V S. Kmetič in drugi (ur.), *1. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike, KUPM 2012: zbornik prispevkov* (str. 658–666). Ljubljana: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno 12. 3. 2014 s spletne strani: http://www.zrss.si/pdf/zbornikpovzetkovkupm2012.pdf.