

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 17 (1989/1990)

Številka 5

Strani 290–292

Marijan Prosen:

ENA NALOGA RODI DRUGO

Ključne besede: naloge, razvedrilo.

Elektronska verzija:

<http://www.presek.si/17/1001-Prosen-naloga.pdf>

© 1990 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ENA NALOGA RODI DRUGO

Prispevek *Triktrat o neki nalogi* (Presek 16, 351) me je spodbudil, da tudi sam pristavim lonček in posredujem še eno zanimivo nalogo o dveh ladjah. Do nje sem prišel po naključju.

V tretjem letniku smo pri sinusnem izreku reševali tole nalogo: Ladji A in B sta v razdalji r . Vsaka zase se giblje s stalno hitrostjo, prva pod ostrim kotom α , druga pa pod ostrim kotom β glede na r (slika 1). Srečata se po času t . Izračunaj hitrost posamezne ladje.

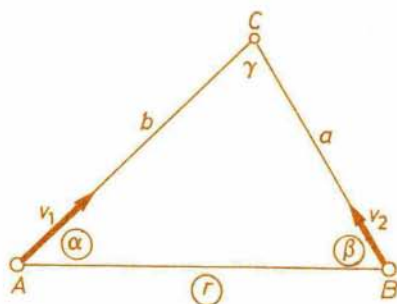
Rešitev te naloge je preprosta:

$$v_1 = r \sin \beta / t \sin(\alpha + \beta) \text{ in } v_2 = r \sin \alpha / t \sin(\alpha + \beta)$$

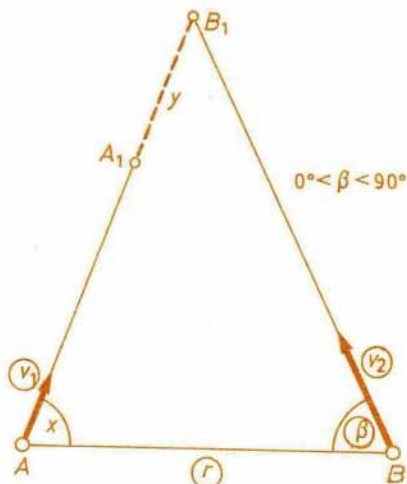
Iz nagajive, a hkrati domiselne pripombe v razredu, ali sinusni izrek "odpove", če je $v_2 > v_1$ (ladja B uide ladji A), pa je nastala naslednja naloga, ki je v razredu nismo reševali.

Ladji A in B sta v medsebojni razdalji r . Prva se giblje s hitrostjo v_1 , druga pa z v_2 ($v_2 > v_1$). Koliko časa in pod kolikšnim kotom glede na r naj plove ladja A , da se ladji B , ki plove pod ostrim kotom β glede na r , najbolj približa?

Slika 1. Ladji se srečata v točki C . Iz sinusnega izreka $a/\sin \alpha = b/\sin \beta = r/\sin \gamma$ ni težko iz danih podatkov izračunati hitrost v_1 in v_2 .



Slika 2. K računanju najmanjše razdalje ladje A od ladje B . V času t pride ladja iz A v A_1 , prepluje razdaljo $|AA_1| = v_1 t$, ladja B pa prepluje $|BB_1| = v_2 t$; y - razdalja med ladjama po času t .



Kot, pod katerim naj plove ladja A, označimo z x ($0^\circ < x < 180^\circ$), razdaljo med ladjama z y , čas pa s t (slika 2). S slike 2 z uporabo sinusnega izreka izpeljemo enačbi:

$$(v_1 t + y)/r = \sin \beta / \sin(\beta + x) \quad \text{in} \quad v_2 t / r = \sin x / \sin(\beta + x)$$

Iz obeh enačb sestavimo zvezo med y in x :

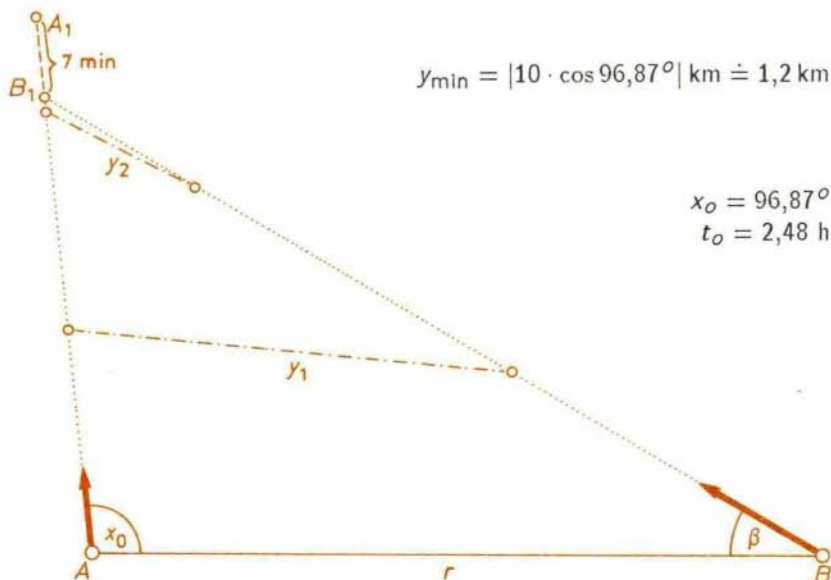
$$y = r(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x) / \sin(\beta + x)$$

Da dobimo najmanjšo vrednost razdalje y , mora biti prvi odvod gornje funkcije enak nič, torej $y' = 0$. Iz

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -r \left(\frac{v_1}{v_2} \cos x \sin(\beta + x) + \left(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x \right) \cos(\beta + x) \right) / \sin^2(\beta + x) = \\ &= -r \sin \beta \left(\frac{v_1}{v_2} + \cos(\beta + x) \right) / \sin^2(\beta + x) = 0 \end{aligned}$$

$$y_{\min} = |10 \cdot \cos 96,87^\circ| \text{ km} \doteq 1,2 \text{ km}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= 96,87^\circ \\ t_0 &= 2,48 \text{ h} \end{aligned}$$



Slika 3. Najmanjša razdalja med ladjama za primer $r = 10$ km, $v_1 = 3$ km/h, $v_2 = 5$ km/h in $\beta = 30^\circ$. S slike razbereš še medsebojno razdaljo med ladjama po prvi uri (y_1) in po drugi uri (y_2).

sledi, da nastopi ekstrem za tak kot x_0 , za katerega velja enačba

$$\cos(\beta + x_0) = -\frac{v_1}{v_2} \rightarrow x_0 \quad (1)$$

Izračunajmo še drugi odvod. Za vrednost kota x_0 je drugi odvod enak $r \sin \beta / \sin(\beta + x_0)$ in je pozitiven (prepričaj se o tem: še enkrat odvajaj prvi odvod in upoštevaj (1)), kar pomeni, da gre za minimum.

Torej mora ladja *A* pluti pod takim kotom x_0 , ki ustreza enačbi (1), da se približa ladji *B* na najmanjšo razdaljo

$$\begin{aligned} y_{min} &= r(\sin \beta - \frac{v_1}{v_2} \sin x_0) / \sin(\beta + x_0) = \\ &= r(\sin \beta + \cos(\beta + x_0) \sin x_0) / \sin(\beta + x_0) = r \cos x_0 \end{aligned}$$

Iskani čas je $t_0 = r \sin x_0 / v_2 \sin(\beta + x_0)$.

Naredimo še numerični zgled. Naj bo $r = 10$ km, $v_1 = 3$ km/h, $v_2 = 5$ km/h, $\beta = 60^\circ$. Vstavimo podatke in dobimo:

$$\begin{aligned} \cos(60^\circ + x_0) &= -\frac{3}{5} \rightarrow x_0 = 66,87^\circ \\ y_{min} &= 10 \cos 66,87^\circ = 3,928 \text{ km} \\ t_0 &= 10 \sin 66,87^\circ / 5 \sin 126,87^\circ = 2,3 \text{ h} \end{aligned}$$

Ladja *A* mora pluti pod kotom $66^\circ 52'$ glede na začetno medsebojno razdaljo, da se po 2 h in 18 min najbolj približa ladji *B* na razdaljo 3 km in 928 m.

Naloga skriva v sebi še mnogo zanimivosti. Poskušaj jih odkriti. Eno kaže slika 3. Morda bi za Presek še kdo poslal kako raziskovalno nalogo o dveh ladjah?

Marijan Prosén