

Razvijanje algoritmičnega mišljenja preko pisnega deljenja

Developing Algorithmic Thinking Through Long Division

dr. Jasmina Ferme,^{1,2} dr. Barbara Arcet,^{1,2,3} dr. Alenka Lipovec^{1,2}

Pedagoška fakulteta¹, Fakulteta za naravoslovje in matematiko², Ekonomska fakulteta³ Univerze v Mariboru

Izvleček

Pisno deljenje odpira vrata v svet algoritmičnega in računalniškega mišljenja – dveh ključnih veščin za reševanje kompleksnih izzivov. Učenci se skozi ta proces učijo razčlenjevati naloge na obvladljive dele, prepoznati bistvene informacije, oblikovati natančne korake in popravljati morebitne napake. To niso le matematične spretnosti, temveč življenjske veščine, ki jih pripravljajo na tehnološko usmerjeno prihodnost. Raziskave poudarjajo, da algoritem dolgega načina deljenja omogoča večjo natančnost, sistematičnost ter preglednost korakov pa tudi posplošljivost, zato naj bo prednostna metoda poučevanja. Kratki način pa je odlična izbira za hitrejšo reševanje enostavnejših nalog ali izzive za naprednejše učence. Učitelji naj učencem predstavijo tudi alternativne pristope, kot je nizozemska metoda, ki spodbuja razumevanje mestne vrednosti in prilagodljivo reševanje. Pri učenju in poučevanju je pomembno, da učenci usvojijo različne metode pisnega deljenja in poznajo ter razumejo smisel izvedbe vsakega koraka v postopku pisnega deljenja, saj tako razvijajo tudi temelje za računalniško mišljenje. S temi spretnostmi bodo ne le uspešnejši pri matematiki, temveč tudi bolje pripravljeni na reševanje problemov v realnem svetu.

Ključne besede: pisno deljenje, tradicionalni algoritmi, algoritmično mišljenje

Abstract

Long division opens the door to the world of algorithmic and computational thinking - two critical skills for solving complex challenges. This process teaches students to break tasks into manageable chunks, identify essential information, formulate precise steps and correct mistakes. These are not only mathematical skills but also life skills that prepare them for a technology-driven future. According to research, the long-division algorithm improves precision, systematicity, transparency of steps, and generalisability and should, therefore, be the preferred teaching method. On the other hand, the short method is ideal for completing easy tasks fast or challenging more advanced learners. Teachers should also introduce students to alternative approaches, such as the Dutch method, which promotes an understanding of place value and adaptability in problem-solving. Students must learn the different methods of long division and grasp the meaning of how to carry out each step in the long division process to create the foundations for computational thinking. These skills will make them more successful in mathematics and better prepare them for real-world situations.

Keywords: long division, traditional algorithms, algorithmic thinking

Uvod

Glede na učni načrt za matematiko v osnovni šoli je obvladovanje pisnega deljenja z enomestnim oziroma dvomestnim deliteljem minimalni standard znanja učencev 4. oziroma 5. razreda. Učenci druge triade morajo tako poznati in obvladovati algoritem pisnega deljenja, čeprav se zdi, da ga v vsakdanjiku kasneje samostojno vedno redkeje izvajajo. Razlog za slednje predstavljajo pametni telefoni in druga tehnologija, ki nam skoraj na vsakem koraku omogoča rabo računalna. S tega vidika bi lahko rekli, da smisel obvladovanja pisnega deljenja blede, a treba se je zavedati, da imata poznavanje in obvladovanje omenjenega algoritma tudi druge funkcije.

Postopek pisnega deljenja je kompleksen, saj poleg pisnega deljenja samega, torej poznavanja postopka, zahteva tudi znanje številnih drugih matematičnih konceptov, na primer deljenje z ostankom, obvladovanje algoritmov pisnega odštevanja in pisnega množenja ter s tem avtomatizacijo poštevanka. Razumevanje in učinkovito izvajanje postopka pisnega deljenja dodatno zahteva tudi obvladovanje koncepta mestne vrednosti ter sposobnost ocenjevanja pri računanju. Tako lahko rečemo, da preko poučevanja pisnega deljenja razvijamo in utrjujemo tudi številne druge matematične koncepte.

Poznavanje in obvladovanje algoritma pisnega deljenja ima aplikativno vrednost pri kasnejši obravnavi drugih matematičnih

vsebin in konceptov, kot sta na primer krajšanje ulomkov (recimo pri krajšanju ulomka $\frac{165}{9}$ s številom 3 velikokrat mentalno izvedemo algoritem pisnega deljenja z enomestnim deliteljem) ali pretvorba ulomka v decimalno številko. Pomembna vloga pisnega deljenja se pokaže tudi pri deljenju polinomov, ki predstavlja posplošitev algoritma z vidika elementov, ki nastopijo v vlogi deljenca in delitelja.

Pri pisnem deljenju gre za izvedbo postopka, sestavljenega iz več zaporednih korakov, ki jih po potrebi večkrat ponovimo. Gre torej za izvedbo algoritma, kar implicira, da z izvajanjem pisnega deljenja razvijamo in krepimo algoritmčno mišljenje, eno izmed nepogrešljivih sposobnosti današnjega časa. Poučevanju pisnega deljenja v funkciji razvijanja algoritmčnega mišljenja se posvetimo v tem prispevku.

Algoritem in algoritmčno mišljenje

Algoritem je natančno določen nabor navodil, ki se izvajajo v končnem številu korakov za reševanje določenega problema (Baaquie in Kwek, 2023). Lahko bi torej rekli, da je algoritem navodilo za reševanje dane naloge oziroma problema. Z drugimi besedami, gre za zaporedje ukazov ali korakov, ki nas vodijo do rešitve problema.

Z algoritmi se zelo pogosto srečujemo v vsakdanjiku, že od zgodnjega otroštva, četudi se njihove prisotnosti ne zavedamo. Na primer zavezovanje vezalk, vožnja avtomobila, sledenje receptu pri kuhanju, umivanje zob, uporaba pomivalnega ali pralnega stroja, uporaba samopostrežne blagajne ali bankomata, sestavljanje pohištva ... vse to so primeri, pri katerih z izvedbo določene naloge, nam znanega ali podanega postopka opravimo dano nalogo.

Med osnovnošolskim matematičnim izobraževanjem izvajamo številne postopke, za katere vemo, da nas bodo privedli do rešitve naloge; sledimo postopkom oziroma izvajamo algoritme: rišemo krožnico z danim polmerom, pri čemer sledimo znanemu postopku konstrukcije; pri preverjanju, ali je dano število deljivo z 9, seštejemo vse številke števila in določimo, ali je ta vsota deljiva z 9; pri izračunu ploščine likov ali prostornine teles uporabimo znane obrazce, s pomočjo Eratostenovega sita določamo praštevila, algoritmom sledimo pri konstrukciji vzporednice ali pravokotnice na dano premico skozi določeno točko itd. Tudi v srednješolski matematiki se sledenje algoritmom ne konča, na primer uporaba Evklidovega in Hornerjevega algoritma, reševanje kvadratne enačbe ali iskanje enačbe tangente na graf funkcije skozi dano točko.

S pojmom algoritem je tesno povezan izraz algoritmčno mišljenje. Kot navajata Sadykova in Il'bahtin (2020), je algoritem glavno orodje obdelave podatkov in hkrati tudi končni rezultat algoritmčnega mišljenja. Sadykova in Il'bahtin (2020) po pregledu številnih definicij algoritmčnega mišljenja navajata, da večina raziskovalcev algoritmčno razmišljanje opredeljuje kot sistem diskretnih dejanj, ki jih imenujeta načini oz. poti razmišljanja. Omenjeni načini razmišljanja predstavljajo sistem, sestavljen iz dveh tipov komponent: 1) vmesne naloge in končna naloga oziroma cilj; 2) razumevanje operacij, ki naj bi vodile do zaporedja in izvedbe teh nalog. Pri algoritmčnem mišljenju gre torej za sistem miselnih metod oziroma načinov razmišljanja, ki ga potrebujemo za to, da lahko ustvarimo zaporedje oziroma vrstni red,

po katerem bomo pridobivali vmesne rezultate za rešitev dane naloge, načrtovali strukturo dejanj in izvajanje te, vse to pa nas bo vodilo do rešitve dane naloge.

Lehmann (2024) navaja naslednje kognitivne spretnosti, ki so združene v algoritmčnem mišljenju: dekompozicija, abstrakcija, ustvarjanje algoritma (algoritmizacija) in odpravljanje napak algoritma. Omenjene kognitivne spretnosti natančneje opišemo v nadaljevanju.

Dekompozicija je proces razčlenitve problema ali naloge na manjše, obvladljive enote – podprobleme, ki so funkcionalni elementi celotnega sistema (Shute idr., 2017). Ti podproblemi omogočajo obravnavo in reševanje posameznih delov neodvisno, s čimer se kompleksni problemi poenostavijo, nove situacije pa postanejo razumljivejše. Na primer, nalogo določanja prostornine sestavljenega telesa razbijemo na izračune prostornin posameznih teles, katerih formule že poznamo.

Abstrakcija je proces ustvarjanja modela problema ali sistema z izpostavitvijo bistvenih komponent ter opustitvijo nepomembnih podrobnosti (Shute idr., 2017). Tako se oblikuje poenostavljena predstavitev, ki omogoča razumevanje delovanja sistema in reševanje povezanih problemov. Ključni cilj abstrakcije je zmanjšanje kompleksnosti, pri čemer se ohrani vse, kar je potrebno za analizo in rešitev problema. Na primer, pri reševanju problemov največjega pretoka modeliramo sistem kot graf, ki vključuje vozlišča in povezave med njimi, pomembne za tok vode, medtem ko neupoštevane podrobnosti, kot so pešpoti, ne vplivajo na rešitev.

Algoritmizacija zajema oblikovanje natančnega zaporedja korakov, ki vodijo do rešitve določenega problema (Lehmann, 2024). Proces vključuje identifikacijo vhodnih podatkov, določitev pričakovanih izhodov in zasnovo ključnih korakov, ki povezujejo eno z drugim. Pri tem so ključni algoritmčni koncepti, kot so ponavljanje (zanke), uporaba vmesnih rezultatov in spremenljivk, ki omogočajo učinkovito izvedbo zapletenih nalog. Algoritmizacija tako omogoča prehod od abstraktnega modela do praktične rešitve, ki jo je mogoče implementirati in preveriti v različnih situacijah.

Odpravljanje napak ali razhroščevanje je postopek sistematičnega testiranja in prilagajanja algoritma, da bi zagotovili njegovo pravilnost in učinkovitost (Shute idr., 2017). To vključuje testiranje algoritma z različnimi vhodnimi podatki, vključno s standardnimi in robnimi primeri, da se preveri njegovo delovanje v vseh scenarijih. Ob odkritju napak sledi iterativno prilagajanje algoritma, dokler ne doseže želenega delovanja. Poleg tega proces vključuje razmislek o možnih izboljšavah, kar pripomore k večji zanesljivosti in optimizaciji algoritma. Tako odpravljanje napak ni zgolj zagotavljanje pravilnosti, temveč tudi priložnost za izboljšanje kakovosti rešitve.

Algoritmčno mišljenje, dekompozicija in abstrakcija pa so poleg prepoznavanja vzorcev tudi sestavni del računalniškega mišljenja (Li idr., 2020). Vloga računalniškega mišljenja je ključna v sodobnih poklicih, kot so programiranje, podatkovna analiza in umetna inteligenca, kar narekuje njegovo vključevanje v izobraževanje že na osnovno- in srednješolski ravni. Razvoj algoritmčnega mišljenja je še posebej pomemben v matematiki, saj podpira logično in ustvarjalno reševanje problemov ter spodbuja

prilagodljivost – lastnosti, ki so zelo cenjene na trgu dela. Nakazuje se tudi, da integracija računalniškega in algoritmičnega mišljenja v matematično izobraževanje izboljšuje razumevanje (Kovalchuk idr., 2020; Stephens in Kadijevich, 2020).

Pri poučevanju in učenju matematike je pomembno, da učenci razumejo in uporabljajo pisne algoritme, kot je deljenje, saj te metode pomembno prispevajo k razvoju algoritmičnega razmišljanja. Čeprav se deljenje v sodobni praksi, vključno z računalniškimi procesorji, uporablja manj pogosto, ostaja ta operacija nepogrešljiva na področjih, kot so grafični prikazi in umetna inteligenca (Zhang, 2020). Prav zato pisni algoritem deljenja predstavlja odlično izhodišče za poglobljen vpogled v uporabnost algoritmičnega mišljenja v učenem procesu.

Kako pisno delimo?

Učenci med izobraževanjem spoznajo različne strategije oziroma načine računanja. Ti se med drugim ločijo tudi po tem, kako operiramo s števili: ali pri tem konstantno upoštevamo koncept mestne vrednosti ali ne (Hickendorff idr., 2018, 2019).

V prvem primeru gre za to, da pri računanju vseskozi neposredno upoštevamo dejstvo, da je naš številski sistem mestni oziroma pozicijski. Na vsakem koraku računanja torej ne uporabimo le izbrane števke števila, temveč vseskozi upoštevamo tudi njeno pozicijo oziroma mesto v številu. Tako neprenehoma operiramo s številom, ki ga števka skupaj z njeno pozicijo v številu predstavlja. Na primer, če imamo število 83 in ga obravnavamo na opisani način, v procesu računanja ne uporabimo le števila 8, temveč število 80. Pri seštevanju števil 83 in 12 tako v posameznem koraku seštevanja ne seštejemo števil 8 in 1 (kot posameznih števk števil), temveč $80 + 10$. Takšen način računanja običajno izvajamo, ko računamo ustno.

V nasprotnem primeru v nekaterih korakih računanja operiramo le s posameznimi števki števila, brez upoštevanja njihovih pozicij v številu in s tem zavedanja, katero število pravzaprav posamezna števka v številu predstavlja. Na primer, pri seštevanju števil 83 in 12 lahko tako v nekem koraku seštevanja seštejemo števili 8 in 1 (in pri tem ni nujno, da se zavedamo, da gre dejansko za vsoto $80 + 10$) ter rezultat, število 9 (lahko brez vedenja, da gre za število 90), zapišemo na ustrezno mesto števila, ki bo predstavljalo vsoto danih dveh števil. Omenjeni način računanja se kaže pri izvedbi tradicionalnih pisnih algoritmov seštevanja, odštevanja, množenja in deljenja, ki jih poučujemo v Sloveniji. V posameznih fazah izvedbe posameznega algoritma namreč operiramo le s posameznimi števki danih števil, pri čemer pa je razvijanje številskih predstav potisnjeno v ozadje.

Na Nizozemskem so tradicionalni algoritem za operacijo deljenja opustili kmalu po letu 2000 v korist nove standardizirane strategije: pristopa, ki temelji na celotnih številih (Hickendorff idr., 2018, 2019). Zapis lahko opazujemo na sliki 1.

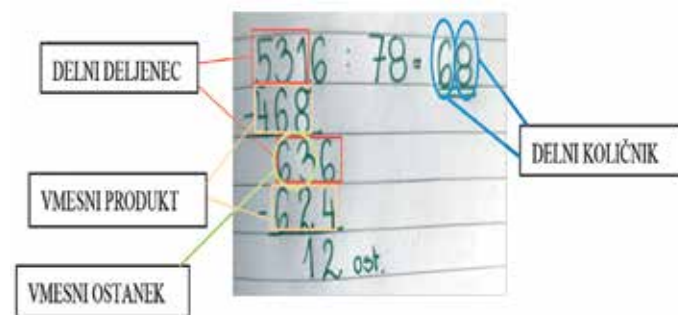
Na podlagi Slike 1 podrobneje razložimo postopek deljenja 544 s 34 z uporabo metode postopnega odštevanja večkratnikov delitelja. Najprej se od celotnega števila 544 odšteje desetkratni delitelj ($10 \cdot 34 = 340$). Tako se izračuna prvi delni ostanek 204 ($544 - 340 = 204$). Nato se od 204 odšteje trikratnik delitelja ($3 \cdot 34 = 102$) in dobi delni ostanek 102 ($204 - 102 = 102$). Postopek se ponovi. Od 102 se ponovno odšteje trikratni delitelj

$$\begin{array}{r} 544:34 = \\ \underline{340} - 10 \times \\ 204 \\ \underline{102} - 3 \times \\ 102 \\ \underline{102} - 3 \times + \\ 0 \quad 16 \times \end{array}$$

Slika 1: Kako zapisujejo algoritem deljenja na Nizozemskem (vir: Fagginger Auer idr., 2018).

($3 \cdot 34 = 102$). Tokrat ostane 0, kar pomeni, da smo zaključili deljenje brez ostanka. Na koncu seštejemo, kolikokrat je bil delitelj 34 odštet od deljenca 544. Prvič je bil odštet desetkrat, nato trikrat in še enkrat trikrat. Skupaj torej šestnajstkrat, zato je količnik 16. Ta postopek poudarja postopno odštevanje večkratnikov delitelja, kar omogoča učencem, da razumejo logiko deljenja in prilagodljivo poiščejo delne količnike. Hkrati metoda krepi zavedanje mestne vrednosti. Osnovna razlika med algoritmom, ki ga uporabljamo v Sloveniji, in tistim, ki ga uporabljajo na Nizozemskem, je v tem, ali se vrednost mesta števk v številu upošteva ali ignorira.

Temeljna ideja slovenskega algoritma pisnega deljenja je izvajanje zaporednih deljenj delov deljenca (*delnih deljencev*) z deliteljem. Na vsakem koraku postopka tako izvedemo deljenje delnega deljenca z deliteljem, rezultat tega je *delni količnik*. Produkt med delnim količnikom in deliteljem poimenujemo *vmesni produkt*, razlika med omenjenima vrednostnima je *vmesni ostanek*. Vmesni ostanek skupaj z delom danega deljenca tvori nov *delni deljenec*. Vrednosti delnega deljenca, delnega količnika, vmesnega produkta ter vmesnega ostanka se tako v zaporednih korakih izvedbe algoritma pisnega deljenja spreminjajo.



Slika 2: Terminologija pisnega deljenja.

V primeru pisnega deljenja z enomestnim deliteljem deljenje delnega deljenca z deliteljem sovпада z deljenjem z ostankom (v okviru poštevanke). V tem primeru je določitev vmesnega količnika ter vmesnega ostanka direktna (določitev vmesnega produkta lahko celo opustimo). Nasprotno velja, če je delitelj dvomestno ali večmestno število. Takrat namreč določitev delnega količnika ter vmesnega ostanka običajno ni enostavna, ampak zahteva izvedbo dodatnih aktivnosti. V nadaljevanju prispevka te (skupaj s celotnim algoritmom pisnega deljenja) natančneje opisujemo. Omejimo se na primer pisnega deljenja z dvomestnim deliteljem.

Postopek izvedbe algoritma pisnega deljenja z dvomestnim deliteljem

Postopek izvedbe algoritma pisnega deljenja pričnemo pri največji oz. največjih desetiških enotah deljenca. Ponavljamo izvajanje naslednjih korakov: določimo delni deljenec; določimo delni količnik; določimo vmesni ostanek. Postopek zaključimo, ko je

delni deljenec manjši od delitelja. V nadaljevanju natančneje opišemo navedene tri ponavljajoče se korake v izvedbi algoritma pisnega deljenja.

1. Določitev delnega deljenca

Prvodoločeni delni deljenec je število, ki ga tvorijo števke, predstavljajoče največje desetiške enote deljenca. To število mora biti večje od delitelja ter manjše od njegovega desetkratnika (zato da bo količnik, dobljen pri deljenju delnega deljenca z deliteljem, enomestno število), kar od učencev zahteva znanje, vezano na primerjanje števil po velikosti. V naslednjih ponovitvah tega koraka algoritma pisnega deljenja delni deljenec določimo tako, da vmesnemu ostanku pripišemo naslednjo, še neuporabljeno števko deljenca. Če takšne števke ni več na voljo, se postopek zaključi.

2. Določitev delnega količnika

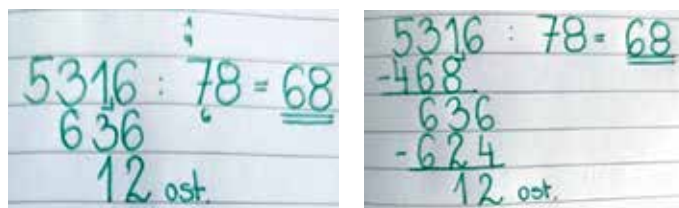
Delni količnik je število, ki ustreza vrednosti količnika v enakosti osnovnega izreka o deljenju. To je torej največji mogoči količnik; takšen, da se produkt tega z deliteljem najbolj približa delnemu deljencu, a ga ne preseže. Določitev delnega količnika ni vedno enostavna naloga (Fuson, 2023), kar izvira iz dejstva, da običajno nimamo memoriziranih vrednosti produktov dvomestnega števila (delitelja) s poljubnimi enomestnimi naravnimi števili. Zato določitev količnika in morebitnega ostanka pri omenjenem deljenju običajno ne poteka direktno, temveč zahteva izvedbo dodatnih postopkov, ki pa jih izvedemo z manj ali več dodatnimi zapisi ter na različne načine. Na način določitve delnega količnika vpliva tudi to, koliko pri pridobitvi delnega količnika uporabljamo ocenjevanja le-tega (torej ocenjevanja rezultata pri deljenju delnega deljenca z deliteljem). Običajno manjša prisotnost ocenjevanja pri določanju delnega količnika sovпада z več računanja slednjega. Pri računanju gre pravzaprav za računanje produktov med naravnimi števili in deliteljem. Računanje produktov delitelja z naravnimi števili lahko poteka direktno z množenjem, lahko pa uporabljamo tudi druge strategije, na primer seštevanje ter kombinacijo seštevanja/odštevanja in množenja (Hickendorff idr., 2019), kar lahko vključuje tudi rabo zakona o razčlenjevanju pri računanju.

3. Določitev vmesnega ostanka

Ko določimo ustrezní delni količnik, sledi določitev vmesnega ostanka. Načini njegove določitve se ločijo po tem, ali pred določitvijo vmesnega ostanka določimo vmesni produkt, ali ne. S tega vidika ločimo dolg in kratek način pisnega deljenja. V kratkem načinu deljenja vmesnega produkta ne izračunamo, preden se lotimo določanja vmesnega ostanka; vrednost oziroma velikost vmesnega produkta tako ni znana; znane bodo le števke, ki v tem produktu nastopijo. Pri tem načinu izračunamo razliko med delnim deljencem in vmesnim produktom s pomočjo algoritma pisnega odštevanja. Sočasno oziroma izmenično z izvajanjem tega algoritma poteka tudi izvedba algoritma pisnega množenja (za določitev števk vmesnega produkta). Gre torej za izmenjujoča se množenje in odštevanje, ki ju izvajamo v posameznih korakih pisnih algoritmov množenja in odštevanja pri obravnavi posameznih števk števil.

Kratki način pisnega deljenja (v fazi določitve vmesnega ostanka) ponazarjamo še na primeru deljenja števila 5316 s številom 78 (Slika 3). Ko število 531 delimo s številom 78, dobimo 6. Vmesni ostanek pridobimo z izmeničnim množenjem in odštevanjem s

pomočjo algoritmov pisnega množenja (delnega količnika 6 in delitelja 78) in odštevanja (vmesnega produkta od delnega deljenca 531). Najprej obravnavamo enice: število 6 pomnožimo s številom 8 (enice delitelja), rezultat je 48. Sedaj izvedemo odštevanje enic: od enic delnega deljenca (531) odštejemo enice pridobljenega produkta, število 8 (desetice števila 48 si zabeležimo, ker jim bomo uporabili pri obravnavi desetic števil). Ker odštevanje 1 – 8 ni izvedljivo v okviru naravnih števil, lahko z uporabo zakona o ohranitvi razlike ta izraz nadomestimo z izrazom 11 – 8, pri čemer pripišemo 1 k deseticam produkta med delnim količnikom in deseticami delitelja (ko bomo množili 6 in 7, bomo temu produktu poleg števila 4 prišteli še 1). Rezultat odštevanja, število 3, podpišemo pod enice obravnavanega delnega deljenca. Postopek ponovimo še pri deseticah števil.



Slika 3: Kratki način in dolgi način pisnega deljenja.

Pri dolgem načinu pisnega deljenja določanje ostanka pri deljenju delnega deljenca z deliteljem poteka v dveh fazah. Najprej izračunamo produkt med deliteljem in delnim količnikom, nato pa izvedemo še odštevanje omenjenega produkta od delnega deljenca. Za razliko od kratkega načina pisnega deljenja omenjena množenje in odštevanje nista izvedena nujno s pomočjo tradicionalnih algoritmov. Pri tem načinu izvedbe algoritma nekoliko bolj poudarimo velikost obravnavanih števil. Pri odštevanju delnega deljenca in vmesnega produkta sta ti vrednosti zapisani, iz česar je jasno razvidna njuna vrednost (in ne le vrednosti števk). Glede na to, kako pridobimo omenjeni vmesni produkt in izračunamo razliko, če ter kam posamezne izračune napišemo, ločimo več variacij: vmesne produkte lahko na primer določimo in zapišemo v sklopu enega matematičnega izraza ali kot posamezne dodatne izračune (stranske račune). V nekaterih primerih so vmesni produkti ter vmesni ostanki določeni mentalno, izračuni zanje niso zapisani, izraz deljenja pa predvsem vmesnih produktov ne vključuje. Iz samega zapisa izraza deljenja v takšnih primerih pravzaprav ni mogoče določiti, ali gre za dolgo deljenje (kjer so nekateri izračuni izvedeni mentalno) ali prej opisano kratko deljenje. Iz opisa postopka izvedbe algoritma pisnega deljenja pri deljenju z dvomestnim ali večmestnim deliteljem izhaja, da so osnovni koraki algoritma sicer določeni, nekateri vmesni koraki pa so lahko izvedeni na različne načine (na primer določitev vmesnega ostanka). Slednje implicira raznolikost algoritmov pisnega deljenja tako z vidika uporabe strategij računanja kot z vidika različnosti zapisovanja izrazov.

Izvedba algoritma pisnega deljenja ter njeno razumevanje nista enostavna. To izhaja predvsem iz dejstev, da algoritem pisnega deljenja vključuje tudi izvedbo drugih računskih operacij, predvideva ocenjevanje pri računanju ter se v primerjavi z drugimi algoritmi pisnega računanja prične pri najvišjih desetiških enotah. Razumevanje ter izvedba omenjenih elementov pisnega deljenja sta v tesni povezavi s konceptom mestne vrednosti, enim izmed zahtevnejših konceptov matematike za učence. Večina napak, ki se zgodijo pri izvedbi algoritma pisnega deljenja, je posledica

dica slabega razumevanja tega algoritma (kar se kaže na primer v izpuščanju vrednosti 0 v rezultatu – bodisi kot vmesne ali zadnje številke števila) ter slabega obvladovanja drugih operacij, ki jih ta algoritem zahteva (Sturm, 2016). Kot smo omenili, je število produktov, ki jih določimo z namenom določitve ustreznega delnega količnika odvisno tudi od vloge ocenjevanja delnega količnika. Slednje pri učencih in dijakih velikokrat povzroča težave. Raziskave namreč kažejo, da imajo učenci glede na osnovne računske operacije največ težav ravno pri ocenjevanju rezultata pri deljenju (Rubenstein, 1985).

Kratki ali dolgi način?

Vprašanje, ki ga obravnavamo v tem prispevku – ali je primernejši kratki ali dolgi način deljenja, ni novo. John (1930) je ugotovila, da učenci, ki uporabljajo dolgi način, pri matematičnih problemih dosegajo večjo natančnost in hitrost. Olander in Sharp (1932) sta poročala, da dolgi način omogoča do štirikrat več točnih količnikov, kar potrjuje tudi Grossnickle (1936), ki opozarja na ključno vlogo učiteljev pri izbiri metode poučevanja. Tudi Bathelt idr. (1986) so ugotovili, da kratki način pri nemških četrtošolcih povzroča več napak, zlasti pri zahtevnejših primerih deljenja. Schulz in Leuders (2018) pa opozarjata, da poučevanje krajših algoritmov negativno vpliva na razvoj alternativnih strategij in razumevanje številskih odnosov, kar omejuje prilagodljivost učencev pri reševanju nalog. Novejše raziskave predvsem sledijo pristopom, ki poudarjajo, da učenci potrebujejo poznavanje več strategij zato, da se lahko odločajo za najučinkovitejšo. Če npr. delimo 12012 z 12 je strategija dekompozicije $12012 : 12 = (12000 + 12) : 12 = 1000 + 1$ učinkovitejša kot tradicionalni algoritem pisnega deljenja, kar pa ne velja za $5316 : 68$. A tudi novejše raziskave kažejo, da algoritmi, ki temeljijo na števkih,

pogosto vodijo do večjega števila napak, in poudarjajo prednosti algoritmov, kot je nizozemski, ki ne temeljijo na števkih (Hickendorff idr., 2018, 2019). Težave z večmestnim deljenjem niso omejene le na učence, temveč se z njimi pogosto srečujejo tudi učitelji razrednega pouka. Raziskave iz različnih držav kažejo, da številni učitelji pri reševanju zahtevnejših nalog deljenja izkazujejo pomanjkanje samozvesti in omejen nabor strategij. Kljub temu pa učitelji, katerih izobraževanje je poudarjalo razumevanje številskih odnosov, izstopajo z večjo prilagodljivostjo in uspešnostjo pri poučevanju deljenja (Fernández Verdú idr., 2014; Kaasila idr., 2010; Ortiz-Laso in Diego-Mantecón, 2020).

Raziskave o deljenju v slovenskem šolskem prostoru so redke in temeljijo na majhnih vzorcih učencev, kar otežuje splošne zaključke o rabi dolgega in kratkega načina. Jamšek (2011) je na vzorcu petošolcev analizirala oba načina, vendar ni mogla potrditi hipoteze, da manj uspešni učenci pogosteje uporabljajo daljši način. Polutnik (2017) je v raziskavi s 17 petošolci ugotovil, da se večina učencev (14) raje odloča za daljši način deljenja, pri katerem naredijo polovico manj napak kot pri krajšem. Skvarča (2019) je na podlagi pregleda učnih gradiv za 4. razred ugotovila, da ta pri obravnavi pisnega deljenja z enomestnim deliteljem prikazujejo kratki način deljenja, nekatera oba načina, nobeno od pregledanih gradiv pa ne obravnava zgolj dolgega načina deljenja. V omenjeno obravnavo so bila zajeta naslednja gradiva: *Igra števil in oblik* (Centa idr., 2006), *Matematika 4* (Hodnik Čadež in Uran, 2016), *Radovednih 5, Matematika 4* (natančnejši podatki niso navedeni), *Svet matematičnih čudes 4* (Cotič idr., 2007) ter *Igraje v matematiko 4* (Hernja in Vesenjaj, 2002). Pri deljenju z dvomestnim deliteljem sta v dveh pregledanih gradivih za 5. razred (Kopasić, 2022; Bajramović idr., 2014) predstavljena oba načina deljenja.

Zaključek

Ugotovitve raziskav kažejo, da je dolgi način deljenja primernejši za poučevanje kot standardna metoda, saj zagotavlja večjo natančnost in prilagodljivost, medtem ko kratki način deljenja lahko služi kot učinkovita bližnjica za obetavnejše učence ali enostavnejše primere. Menimo, da primarno poučevanje dolgega načina deljenja v primerjavi s kratkim načinom tudi dandanes nudi nekaj prednosti, izpostavljam tri. Prva je večja natančnost. Ta metoda deljenja sistematično razbije proces na manjše korake, ki omogočajo boljši fokus in temeljito preverjanje morebitnih napak. To je še posebej pomembno pri deljenju z večmestnimi števili, kjer je kratko deljenje pogosto napornejše zaradi manjšega števila korakov in slabše preglednosti. Druga pomembna prednost dolgega načina je njegova izobraževalna vrednost. Ta metoda učence bolje pripravi na razumevanje kompleksnejših matematičnih konceptov, kot so deljenje polinomov, deljenje v drugih številskih sestavih in druge algebrske razlage deljenja. Dolgi način zahteva in spodbuja globlje razumevanje aritmetičnih principov, saj morajo učenci razumeti pomen vsakega koraka v procesu, kar povečuje njihovo matematično razumevanje in logično razmišljanje. Tretja prednost je visoka vizualna preglednost. Vsi koraki postopka so jasno zapisani, kar učencem omogoča, da lažje sledijo celotnemu procesu deljenja in razumejo, kako posamezne številke vplivajo na končni rezultat.

Pomembno je poudariti, da je ključnega pomena, da učenci spoznajo več načinov/algoritmov deljenja, saj jim to omogoča prilagodljivo in učinkovito reševanje nalog. S tem pridobijo sposobnost izbire metode, ki je zanje in za dani račun najprimernejša, kar prispeva k boljšemu razumevanju in uspešnosti pri matematičnih izzivih.

Literatura

- Al Fedaghi, S. in Alkhalidi, A. A. (2019). Thinking for computational thinking. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications (IJACSA)*, 10(2). <https://doi.org/10.14569/IJACSA.2019.0100277>
- Baaquie, B. E. in Kwek, L. C. (2023). Classical Gates and Algorithms. V *Quantum Computers. Theory and Algorithms* (str. 37–69). Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-19-7517-2_3

- Bajramović, N., Repnik, A., Kociper, M., Cigula, S., Slana Mesarič, M., Antolin Drešar, D., Ferk, E. in Visočnik, D. (2014). *Matematika 5: i-učbenik za matematiko v 5. razredu osnovne šole*. Zavod Republike Slovenije za šolstvo. <http://eucbeniki.sio.si/mat5/index.html>
- Bathelt, I. Post, S. in Padberg, F. (1986). Über typische Schülerfehler bei der schriftlichen Division natürlicher Zahlen. *Der Mathematikunterricht*, 32(3), 29–44. <https://pub.uni-bielefeld.de/record/1775208>
- Centa, N., Frigelj, J., Kožuh V. in Rakun Beber, M. (2006). *Igra števil in oblik 4*. Učbenik za matematiko v 4. razredu osnovne šole (2. izdaja). Založba Rokus Klett d. o. o.
- Cotič, M., Felda, D., Bremec, B., Pisk, M. in Benčina Smotlak, N. (2007). *Svet matematičnih čudes 4, Kako poučevati matematiko v 4. razredu devetletne osnovne šole*. Priročnik. DZS, d. d.
- Fagginger Auer, M. F., Hickendorff, M. in van Putten C. M. (2018) Training Can Increase Students' Choices for Written Solution Strategies and Performance in Solving Multi-Digit Division Problems. *Frontiers in Psychology*, 9, 1644. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01644>
- Fernández Verdú, C., Callejo de la Vega, M.L. in Torres, M. M. (2014) Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. [Pre-service teachers' knowledge when they interpret primary school students' answers to quotitive division problems]. *Enseñanza de las ciencias*, 32(3), 407–424. <http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias>
- Fuson, K. C. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. V J. Kilpatrick, W. G. Martin in D. Schifter (Ur.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (str. 68–94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Grossnickle, F. E. (1936). The Incidence of Error in Division with a One Figure Divisor when Short and Long Forms of Division are Used. *The Journal of Educational Research*, 29(7), 509–511.
- Hernja, S. in Vesenjaj, P. (2002). *Igraje v matematiko 4*. Učbenik za pouk matematike v 4. razredu devetletne osnovne šole. Pikal, d. o. o., založništvo.
- Hickendorff M., Torbeyns J., Verschaffel L. (2018). Grade-related differences in strategy use in multidigit division in two instructional settings. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 169–187. <https://doi.org/10.1111/bjdp>
- Hickendorff, M.; Torbeyns, J.; Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. V Fritz, A., Haase, V.G., Räsänen, P., (Ur.), *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties: From the Laboratory to the Classroom* (str. 543–560). Springer: Cham, Switzerland.
- Hodnik Čadež, T. in Uran, T. (2016). *Matematika 4. 3.del*. Matematika za četrty razred osnovne šole. Ljubljana: Modrijan založba, d. o. o.
- Jamšek, S. (2011). *Strategije reševanja nalog pisnega deljenja v 5. razredu osnovne šole*. Diplomsko delo. Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- John, L. (1930). The Effect of Using the Long-Division Form in Teaching Division by One-Digit Numbers, *The Elementary School Journal*, 30(9), 675–692. <https://www.jstor.org/stable/995877>
- Kaasila, R., Pehkonen, E. in Hellinen, A. (2010) Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73, 247–261. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9213-1>
- Kopasić, M. (2022). *Radovednih pet, Matematika 5, 3. del, samostojni delovni zvezek*. Založba Rokus Klett, d. o. o.
- Kovalchuk, M., Voievoda, A., Prozor, E. (2020). Algorithmic Thinking as the Meaningful Component of Cognitive Competencies of the Future Engineer. *Universal Journal of Educational Research*, 8(11B), 6248–6255. <https://doi.org/10.13189/ujer.2020.082263>
- Li, Y., Schoenfeld, A. H., diSessa, A. A., Graesser, A. C., Benson, L. C., English, L. D., in Duschl, R. A. (2020). Computational thinking is more about thinking than computing. *Journal for STEM Education Research*, 3, 1–18. <https://doi.org/10.1007/s41979-020-00030-2>
- Lehmann, T.H. (2024). How current perspectives on algorithmic thinking can be applied to students' engagement in algorithmizing tasks. *Mathematics educational Research Journal*, 36, 609–643. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00462-0>
- Olander, H. T., Preston Sharp, E. (1932). Long division versus short division. *The Journal of Educational Research*, 26(1), 6–11. <https://www.jstor.org/stable/27525562>
- Ortiz-Laso, Z., in Diego-Mantecón, J. M. (2020). Strategies of Pre-Service Early Childhood Teachers for Solving Multi-Digit Division Problems. *Sustainability*, 12(23), 10217. <https://doi.org/10.3390/su122310217>
- Polutnik, T. (2017). *Pisno deljenje z dvomestnim deliteljem*. Magistrsko delo. Pedagoška fakulteta, Univerza v Mariboru.
- Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(2), 106–119.
- Sadykova, O. V., Il'bahtin, G. G. (2020). The Definition of Algorithmic Thinking. V Proceedings of the International Session on Factors of Regional Extensive Development (FRED 2019), (str. 419–422). <https://doi.org/10.2991/fred-19.2020.85>
- Schulz, A. in Leuders, T. (2018). Learning trajectories towards strategy proficiency in multi-digit division - a latent transition analysis of strategy and error profiles. *Learning and Individual Differences*, 66, 54–69. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2018.04.014>
- Shute, V. J., Sun, C., in Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review*, 22, 142–158. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2017.09.003>
- Skvarča, T. (2019). *Neformalno znanje o pisnem deljenju pri učencih tretjega in četrtega razreda osnovne šole*. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta.
- Stephens, M., in Kadijevich, D. M. (2020). Computational/algorithmic thinking. V Lerman, S. (Ur.) *Encyclopedia of mathematics education* (str. 117–123). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100044
- Sturm, S. (2016). *The Great Divide: A Study That Examines the Understanding of Long Division Across Multiple Generations* (Doktorska disertacija), State University of New York at Fredonia. <https://soar.suny.edu/handle/20.500.12648/258>
- Zhang, X. D. (2020). A matrix algebra approach to artificial intelligence. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-981-15-2770-8>