ZGODOVINA REŠEVANJA POLINOMSKIH ENAČB

MARJAN JERMAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 12D10, 97H30

V članku je kratek oris zgodovine reševanja polinomskih enačb.

HISTORY OF SOLVING POLYNOMIAL EQUATIONS

The article outlines a short history of solving polynomial equations.

Uvod

Ko skušamo predstaviti nova poglavja iz matematike, večinoma posežemo po najkrajših in najbolj elegantnih poteh. Takšen način je po navadi najbolj pregleden in estetsko všečen. Do cilja pridemo sorazmerno hitro, poslušalca pa na poti obremenimo z najmanjšo možno količino potrebnih vmesnih rezultatov. Večina ljubiteljev matematike nas je nad takim načinom navdušenih, le redko pa se zavemo, da zelo prečiščena rešitev problema pogosto zakrije motivacijo za njegovo postavitev in intuicijo, ki je privedla do rešitve. Tako velikokrat zamudimo priložnost pokazati, kako iz različnih zornih kotov pogledati na problem in kako ga napasti z različnimi sredstvi.

Za večino dijakov je reševanje linearne enačbe žal le enostaven postopek premetavanja členov, reševanje kvadratne enačbe pa je enakovredno pomnjenju sorazmerno zapletenega obrazca. Prav tako nekateri študenti matematike o kubičnih enačbah vedo le, da se dajo rešiti z zelo zoprnimi in težko izračunljivimi formulami. V članku bi rad pokazal, kako lahko z zgodovinskim pogledom na reševanje enačb vsaj nekatere dijake in študente navdušimo za matematiko in jim predstavimo, koliko iskrivih in globokih idej je skritih za na videz suhoparnimi rezultati.

Ukvarjali se bomo z reševanjem polinomske enačbe

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0. \tag{1}$$

Zgodovina in matematika se prepleteta že pri postavitvi problema:

(i) Kaj sploh pomeni simbolni zapis (1)?

(ii) Kateri številski množici pripadajo koeficienti polinoma a_i? V kateri množici iščemo rešitev x?

(iii) Ali je možna in kako poteka osnovna aritmetika (seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje) s temi števili?

(iv) Ali je obstoj rešitev in ali so metode reševanja problema podobne za vse izbire številskih množic?

Na videz odvečna vprašanja skrivajo globoke ideje, ki so se rojevale vsaj 5000 let. Za ilustracijo bom navedel le nekaj zelo pomanjkljivih odgovorov, s katerimi želim osvetliti njihov pomen:

(i) Simbola $+$ in $-$ je uvedel Johannes Widman (1462–1500), simbol za enakost $=$ Robert Recorde (1510–1558), simbol za koren pa Christoff Rudolff (1499–1545). Približno v istem času so začeli simbolno zapisovati tudi potence. Pred tem so bile enačbe opisane z dolgim in težko preglednim tekstom, ki ni omogočal danes na videz enostavnih algebrajskih manipulacij.

(ii) Pitagora (570–500 pr. Kr.) je trdil, da vsaki stvari ustreza ali naravno število ali kvocient dveh naravnih števil. Ničlo so po dolgih stoletjih težav z mestnim zapisom odkrili Babilonci, verjetno pa so jo zares razumeli šele dosti kasneje v Indiji. Negativnih števil v zahodni civilizaciji niso znali uporabljati skoraj do konca renesanse.

(iii) V Egiptu so za zapis števil uporabljali sistem, v katerem se da sorazmerno lahko seštevati in odštevati, množenje in deljenje pa sta zelo zapleteni operaciji. Šele Eudoxusu (405–355 pr. Kr.) je na precej zapleten način uspelo definirati množenje pozitivnih realnih števil. Še danes je recimo zelo težko na srednješolskem nivoju odgovoriti, kaj sploh pomeni zapis $2^{\sqrt{3}}$.

(iv) Če zahtevamo, da so koeficienti in rešitve v enačbi (1) realna števila, je iskanje ničel polinoma bistveno različno od reševanja starogrških diofantskih enačb, kjer so koeficienti in rešitve cela števila. Še bolj zapleteni so nekateri problemi iz teoretičnega računalništva, kjer so koeficienti polinoma celoštevilski ostanki pri deljenju s praštevilom.

Članek ni sistematičen pregled zgodovine reševanja polinomskih enačb. V nadaljevanju bom navedel le nekatere pomembne utrinke iz zgodovine matematike, ki so povezani z njihovim reševanjem.

Koeficienti naših polinomov bodo realni, rešitve pa večinoma realne, včasih tudi kompleksne.

Linearne enačbe

Skoraj vso egiptovsko matematiko poznamo iz Rhindovega in Moskovskega papirusa, ki izvirata približno iz let 1850 pr. Kr. in sta se skoraj neverjetno ohranila zaradi zelo suhega podnebja.

Rhindov papirus[1] je dobrih 30 centimetrov širok in šest metrov dolg zvitek, ki vsebuje 87 nalog. Štiriindvajseta naloga pravi:

Če neki količini dodamo njeno četrtino, dobimo 15. *Kolikšna je ta količina?*

Danes bi se naloge lotili z reševanjem enačbe

$$x + \frac{x}{4} = 15.$$

Pred skoraj 4000 leti pa so se problema lotili drugače, z metodo napačne predpostavke. To metodo so uporabljali do renesančnih časov.

Da bi si poenostavil računanje, pisar Ahmes najprej poskuša z rešitvijo $x = 4$. Ko izračuna vrednost izraza $x + \frac{x}{4} = 5$, ugotovi, da je rešitev za trikrat premajhna. Zato je prava rešitev $x = 4 \cdot 3 = 12$.

Nekateri zgodovinarji Ahmesovo rešitev interpretirajo drugače. Najprej Ahmes neznano količino razdeli na štiri enake dele, nato pa ugotovi, da je vsak del vreden tri enote.

Bralci naj sami premislijo, pri katerih polinomih lahko za iskanje ničel uporabimo Ahmesovo metodo.

Iz približno istega časa izvira babilonska[2] glinena tablica številka 8389, ki jo hranijo v Muzeju antičnega Bližnjega vzhoda v Berlinu. Prva naloga se v razširjenem prevodu glasi nekako takole:

[1] Alexander Henry Rhind (1833–1863) je bil škotski egiptolog, ki je leta 1858 na tržnici v Luxorju kupil papirus, odnesen iz Ramzesovega templja. Papirus je napisal pisar Ahmes približno 1850 let pr. Kr. Papirus je od leta 1863 v Britanskem muzeju.

[2] Babilonci so živeli v Mezopotamiji, med rekama Evfrat in Tigris. Na tem območju se je razvila sumerska civilizacija že pred letom 3500 pr. Kr. Med leti 2300 in 2100 pr. Kr. so območje zasedli Akadijci, leta 2100 pr. Kr. pa so Sumerce premagali Babilonci. Različne kulture so se v dosežkih zelo plodno medsebojno dopolnjevale.

Prvo polje da 4 kur/bur pšenice,[3] *drugo pa 3 kur/bur. Prvi pridelek presega drugega za 500 sil. Skupna površina obeh polj je 1800 sar. Koliko pridelka je zraslo na posameznem polju?*

Z današnjimi sredstvi bi nalogo zapisali kot sistem dveh linearnih enačb:

$$\begin{aligned} x+y &= 1800 \\ \frac{1200}{1800}x - \frac{900}{1800}y &= 500 \end{aligned}$$

Rešitev na tablici pa je napisana kot zaporedje računov, brez kakršnekoli razlage. Če jo razložimo in opišemo z današnjim matematičnim jezikom, gre nekako takole:

Najprej so izračunali $\frac{x+y}{2} = 900$. Nato so na videz uvedli novo spremenljivko $z = \frac{x-y}{2}$, ki je z iskanima količinama enostavno povezana: $x = 900+z$, $y = 900 - z$. Hkrati ustreza linearni enačbi z le eno neznanko:

$$\frac{2}{3}(900+z) - \frac{1}{2}(900-z) = 500.$$

Od tod so dobili: $z = 300$, $x = 1200$ in $y = 600$.

Kvadratne enačbe

Babilonska tablica številka 13 901, ki izvira približno iz leta 1600 pr. Kr. in je shranjena v Britanskem muzeju, vsebuje 24 nalog. Ker je napisana v retoričnem slogu, je bila verjetno namenjena poučevanju matematike. Prva naloga na tablici pravi:

Če ploščini kvadrata prištejemo stranico, dobimo $\frac{3}{4}$*. Poišči stranico kvadrata.*

Danes bi nalogo prevedli v kvadratno enačbo:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}.$$

Na tablici pa rešitev poteka takole: Vzemi 1 in jo deli z 2, dobiš $\frac{1}{2}$. Če to polovico pomnožiš samo s sabo, dobiš $\frac{1}{4}$. Seštevek $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ je enak 1, to je kvadrat števila 1. Na koncu od 1 odštej število, ki si ga prej množil s sabo (to je $\frac{1}{2}$). Stranica kvadrata je torej $\frac{1}{2}$.

[3] Približno velja: bur = 1800 sar, 1 sar = 36 m^2, kur = 300 sil, 1 sila = 1 liter

Na videz nerazumljiv tekst skupaj s podobnimi babilonskimi nalogami razkriva, da so že takrat znali rešiti kvadratno enačbo

$$x^2 + ax = b \tag{2}$$

s formulo

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b} - \frac{a}{2}.$$

In kje se skriva druga rešitev kvadratne enačbe? Enačba (2) je zapisana tako, da so njeni koeficienti pozitivna števila. Tudi stranica, ki jo iščemo, je pozitivno število, zato je pred korenom smiseln le pozitivni predznak.

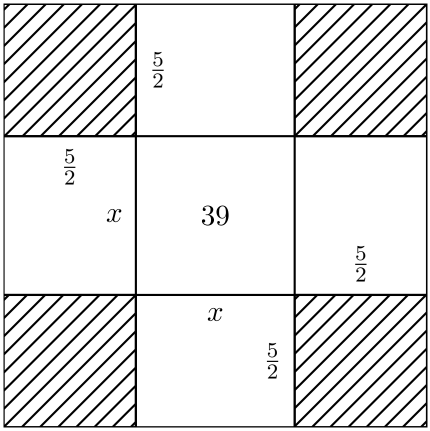
Še bolj nazorno so se precej kasneje kvadratnih enačb lotili Arabci.

Abu Jafar Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (780–850) v svojem delu *Hisab al-jabr wal-muqabala* brez uporabe matematičnih simbolov najprej klasificira šest različnih tipov linearnih in kvadratnih enačb. Na videz pretirana razdelitev je potrebna, ker so takrat za koeficiente priznavali le pozitivna števila. Nato opiše operaciji *al-jabr* in *al-muqabala*, ki vsako linearno ali kvadratno enačbo prevedeta na enega od teh tipov. V današnjem jeziku operacija al-jabr poskrbi za odpravo negativnih členov (na obeh straneh enačbe prišteje nasprotno vrednost negativnih členov), operacija almuqabala pa uravnoteži odvečne člene v enačbi (na obeh straneh odšteje manjšo od skupnih količin). Zato veliko zgodovinarjev matematike šteje Al-Khwarizmija za začetnika moderne algebre. Bralec lahko ugane, od kod prihaja beseda *algebra*, iz njegovega polatinjenega imena pa izvira tudi beseda *algoritem*.

V nadaljevanju pokaže, kako rešiti vsako od teh šestih enačb. Ker je reševanje v svojem bistvu geometrijsko, obstajajo špekulacije, da Al-Khwarizmijeve metode temeljijo na poznavanju prejšnjih del, morda Evklidovih *Elementov*[4] (300 pr. Kr.) ali pa židovskega dela *Mishnat ha Middot*[5] (pribl. 150 po Kr.).

[4]Evklid iz Aleksandrije (325–265 pr. Kr.) je v trinajstih knjigah zbral vse starogrško znanje matematike in ga postavil na aksiomatične temelje. *Elementi* so več kot 2000 let ostali najpomembnejše matematično delo zahodne civilizacije.

[5]*Mishnat ha Middot* (razprava o merah) je najstarejše židovsko delo o geometriji. Pisec rabin Nehemiah obravnava like in telesa, med drugim navede tudi Heronovo formulo za ploščino trikotnika. Razprava ima tudi teološko vrednost: rabin skuša na mehak način zaobiti v Bibliji navedeno dejstvo, da je $\pi = 3$. V jeruzalemskem templju naj bi stala ogromna posoda z okroglim robom, premerom 10 kubitov in obsegom 30 kubitov. Rabin pravi, da so premer merili z zunanje, obseg pa z notranje strani posode. Rob naj bi bil širok približno toliko, kot lahko razpremo dlan.



Slika 1. Reševanje enačbe $x^2 + 10x = 39$

Enačbo $x^2 + 10x = 39$ na primer reši takole (glej sliko 1): Vzemimo kvadrat s stranico x in mu nad vsako od stranic narišimo pravokotnik z osnovnico x in višino $\frac{5}{2}$. Skupna ploščina kvadrata in štirih pravokotnikov je $x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{5}{2}$. Ob ogliščih prvotnega kvadrata lahko med pravokotniki dorišemo štiri manjše kvadratke, ki skupaj s pravokotniki dopolnjujejo kvadrat s stranico x do večjega kvadrata s stranico $x + 2 \cdot \frac{5}{2}$. Večji kvadrat ima ploščino enako

$$x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 = (x^2 + 10x) + 25 = 39 + 25 = 64,$$

zato je njegova stranica dolga 8, stranica x manjšega kvadrata pa meri $8 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 3$.

Enako kot prej lahko vidimo, da druga rešitev geometrijsko ni smiselna. Morda je na tem mestu prav omeniti, da je šele Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) leta 1849 dokazal, da ima polinom stopnje n z realnimi koeficienti natanko n kompleksnih ničel. Že leta 1799 je v svojem doktoratu pokazal, da se da vsak realni polinom razstaviti na nerazcepne linearne in kvadratne faktorje, vendar argumenti v njegovem topološkem dokazu ne zadoščajo današnjim matematičnim standardom. Leta 1816 je izdelal prvi popolnoma pravilen algebraičen dokaz.[6]

[6]Za dan polinom Gauss skonstruira nov polinom veliko višje lihe stopnje, ki ima ničle prek kvadratnih enačb povezane z ničlami prvotnega polinoma. Ker je novi polinom lihe stopnje, ima vsaj eno realno ničlo, zato ima prvotni polinom vsaj eno kompleksno ničlo.

Kubične enačbe

Prve kubične enačbe so se pojavile že pri Babiloncih kot praktični problemi pri izkopavanjih kleti. Na primer, enačbo $ax^3 + bx^2 = c$ so najprej prevedli v obliko $y^3 + y^2 = d$, nato pa so jo vsaj približno rešili s pomočjo obstoječih tabelic za vrednosti $n^3 + n^2$.

Znan je tudi grški mit o oraklu iz Delosa, ki je za končanje kuge svetoval prostorninsko podvojitev Apolonovega oltarja v obliki kocke.

Arhimed (287–212 pr. Kr.) se je v svojem delu *O sferi in valju* vprašal, kje je treba odrezati kroglo z ravnino tako, da bosta nastala kosa v volumskem razmerju 1 : 2. Bralec se lahko hitro prepriča, da sta tedaj polmer krogle r in višina odrezane kapice v povezana s kubično enačbo

$$v^3 - 3rv^2 + \frac{4}{3}r^3 = 0. \tag{3}$$

Zgodovinsko pomembno je tudi vprašanje, ali je možno samo s šestilom in ravnilom narisati pravilni sedemkotnik. Zelo lahko je videti, da se ga da narisati natanko takrat, ko se da narisati pravilni štirinajstkotnik. Če je r polmer štirinajstkotniku očrtanega kroga, a pa njegova stranica, se da na zvit način brez uporabe kotnih funkcij ugotoviti (slika 2), da ustrezata kubični enačbi

$$a^3 - ra^2 - 2r^2a + r^3 = 0.$$

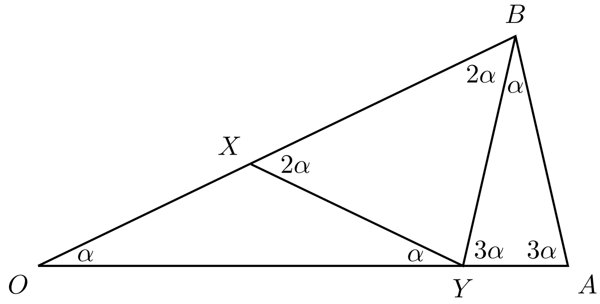
Ker je enačba za primerno izbiro polmera r nerazcepna nad racionalnimi števili,[7] je ta konstrukcija nemogoča.

Prav zadnja dva problema sta več kot tisoč let kasneje vzpodbudila arabske matematike, da so se intenzivno lotili reševanja kubičnih enačb. Omar Khayyam (1048–1122) je klasificiral 14 tipov kubičnih enačb (s pozitivnimi koeficienti), za vsakega od tipov preštel pozitivne rešitve in jih predstavil kot presek dveh krivulj drugega reda. Tako je recimo rešitev Arhimedove enačbe (3) abscisa preseka primerno izbrane parabole in hiperbole (slika 3)

$$y = x^2, \quad (x - 3r)y = -\frac{4}{3}r^3.$$

Seveda takrat še niso poznali matematičnega simbolizma in enačb krivulj v koordinatnem sistemu. Obe stožnici Khayyam opiše geometrijsko.

[7] V primeru $r = 1$ dobimo enačbo $p(a) = a^3 - a^2 - 2a + 1 = 0$. Če p ne bi bil minimalni polinom (nad $\mathbb{Q}$) za a, bi vseboval vsaj en linearen faktor, kar pomeni, da bi imel vsaj eno racionalno ničlo. Edina kandidata za racionalne ničle $a = \pm 1$ pa nista polinomovi ničli. Samo z ravnilom in šestilom se dajo narisati le nekatera števila, ki imajo minimalni polinom stopnje 2^m za primeren $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Slika 2. Na sliki je enakokrak trikotnik $\triangle ABO$, ki ima kot ob vrhu enak $\alpha = \frac{1}{7} \cdot 180°$, kota ob osnovnici pa merita 3α. Ta trikotnik je štirinajstina pravilnega štirinajstkotnika, iz katerega zlahka dobimo pravilni sedemkotnik. Evklid je zvito izbral točki X in Y na krakih tako, da je $\angle ABY = \alpha$ in $\angle BXY = 2\alpha$. Samo s pomočjo podobnosti lahko dobimo kubično zvezo med $OA = OB$ in AB (upoštevamo, da je $\triangle ABO \sim \triangle YAB$ in da sta višini trikotnikov $\triangle OYX$ in $\triangle OAB$ v razmerju $OX : OB$).

Dokončna rešitev kubične enačbe je prišla z renesanso in je povezana s hudimi spori o njenem avtorstvu. V tistih časih so matematiki velik delež svojih dohodkov pridobili na matematičnih tekmovanjih, ki so jih razpisali bogati pomembneži, zato je poznavanje rešitve kubične enačbe pomenilo veliko prednost pred tekmeci.

Kubično enačbo brez kvadratnih členov

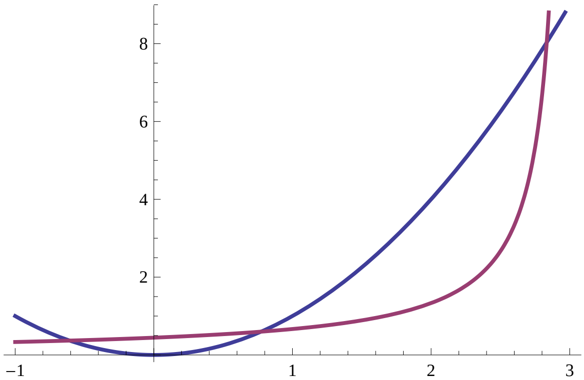
$$x^3 + px + q = 0 \tag{4}$$

je prvi rešil Scipione dal Ferro (1465–1526). Rešitev je napisal kot recept brez vsakršne razlage. Zaradi tedaj še zelo nerodne uporabe simbolov in nepoznavanja negativnih števil dal Ferro ni opazil, da je s tem v bistvu rešil poljubno kubično enačbo oblike

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{5}$$

Translacija $y = x + \frac{a}{3}$ namreč poskrbi, da v enačbi (5) izginejo kvadratni členi in jo tako prevede na enačbo oblike (4).

Neodvisno od dal Ferra je rešitev poljubne kubične enačbe odkril Nicolo Tartaglia (1500–1557). Prav v tem času je Girolamo Cardano (1501–1576) skušal napisati knjigo *Ars Magna*, ki bi vsebovala tudi rešitev kubične enačbe. Po daljšem prepričevanju mu je s trikom uspelo prepričati Tartaglio, da mu je razkril rešitev. Pri tem mu je sveto obljubil, da rešitve nikomur



Slika 3. Rešitev Arhimedove kubične enačbe (3) v primeru $r = 1$ kot abscisa preseka parabole in hiperbole. Smiselna je le rešitev $0 < v < r$.

ne bo izdal. Ko je kasneje Cardano v Bologni našel dal Ferrove zapiske, je s tem delno spodbijal Tartaglievo prvo avtorstvo rešitve in se odločil, da lahko prelomi obljubo. Cardano je bil tudi sicer zelo problematična osebnost, a je njegova knjiga prinesla poleg sistematične rešitve še negotov pogled v nehote odkrita kompleksna števila.

Tartaglieva ideja za rešitev enačbe (4) temelji na dobro znani enakosti

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3.$$

Če jo prepišemo v obliko

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

in primerjamo z enačbo (4), opazimo, da bi morda lahko pomagala substitucija $x = u + v$, pri čemer bi veljalo

$$p = -3uv, \quad q = -(u^3+v^3). \tag{6}$$

Sedaj lahko uporabimo že znani babilonski trik, ki pove, da lahko s pomočjo vsote in razlike neznanih količin ti dve količini enostavno izračunamo. Velja namreč:

$$(u^3 - v^3)^2 = (u^3+v^3)^2 - 4u^3v^3,$$

kar skupaj s povezavami (6) pomeni:

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Tako je $x = u + v$, pri čemer je

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \\ v^3 &= -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}. \end{aligned}$$

Tretja korena za u in v izberemo tako,[8] da velja $p = -3uv$. Pričakovano se izkaže, da temu pogoju zadoščajo le tri kombinacije tretjih korenov, ki dajo vse ničle enačbe (4).

Ko je Cardano na ta način reševal enačbo $x^3 = 15x + 4$, je presenečen ugotovil, da ima enačba sicer zelo lepo rešitev $x = 4$, med reševanjem pa se ne more izogniti korenom negativnih števil:[9]

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Cardano ni vedel kaj storiti, za nasvet se je obrnil celo na Tartaglio, ki mu ni znal pomagati. Do intuitivne rešitve težav je prišel Rafael Bombelli (1526–1572), ki je nastavil enačbi

$$\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm t\sqrt{-1},$$

s tem nevede uvedel imaginarno enoto in po kubiranju dobil $t = 1$.[10] Pri tem je moral poleg običajnega pravila za računanje s koreni pozitivnih števil $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$ uporabiti tudi novo pravilo $\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -x$.

Enačbe četrte stopnje

Cardano je svojemu študentu Lodovicu Ferrariju (1522–1565) naročil, naj skuša rešiti sistem enačb

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10, \\ \frac{x_1}{x_2} &= \frac{x_2}{x_3}, \\ x_1 x_2 &= 6. \end{aligned}$$

[8] Naj bo $\zeta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ primitivni tretji koren enote. Tedaj enačbama poleg u in v ustrezajo tudi $u\zeta$, $u\zeta^2$, $v\zeta$ in $v\zeta^2$. Seveda takrat kompleksnih števil še niso poznali.

[9] To se zgodi natanko takrat, ko so vsi trije koreni različni in realni.

[10] Pri nastavku je imel Bombelli srečo. Izkaže se, da je najti ustrezni realni del enako težko kot rešiti osnovno kubično enačbo. Zato so tedanji matematiki tak primer imenovali *casus irreducibilis*.

Hitro lahko vidimo, da spremenljivka x_2 zadošča enačbi

$$x_2^4 + 6x_2^2 + 36 = 60x_2.$$

Med reševanjem tega problema je Ferrari odkril splošno metodo za reševanje enačbe

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Enačbo je najprej nekoliko preoblikoval:

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b\right)x^2 - cx - d. \tag{7}$$

Ta enačba bi se bistveno poenostavila, če bi bila tudi njena desna stran popolni kvadrat. S tem bi reševanje enačbe četrte stopnje prevedli na reševanje dveh kvadratnih enačb. Žal diskriminanta kvadratne funkcije na desni strani enačbe (7) večinoma ni enaka 0. Ferrari je dobil genialno idejo in v levo stran enačbe uvedel nov parameter y, desno stran pa ustrezno prilagodil

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}ax + y\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y\right)x^2 - (c - ay)x - d + y^2.$$

Da bo diskriminanta desne kvadratne funkcije enaka 0, mora veljati:

$$(c - ay)^2 - 4\left(\frac{1}{4}a^2 - b + 2y\right)(y^2 - d) = 0.$$

To pa je kubična enačba (imenujemo jo *kubična resolventa*) spremenljivke y z vsaj eno realno rešitvijo, ki jo znamo dobiti s pomočjo Cardanovih formul. Če je y ena od rešitev, smo tako enačbo (7) prevedli na reševanje dveh kvadratnih enačb:

$$x^2 + \frac{1}{2}ax + y = \pm\left(x\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b + 2y} + \sqrt{y^2 - d}\right).$$

Vsaka od enačb da po dve rešitvi.

Enačbe višjih stopenj

V prihodnjih stoletjih je veliko izjemnih matematikov, med njimi Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651–1708), Leonhard Euler (1707–1783), Étienne Bézout (1730–1783), Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796), Edward Waring (1736–1798) in Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) skušalo rešiti enačbo pete stopnje. Bolj natančno, skušali so najti formulo, ki bi rešitev enačbe pete stopnje opisala samo s pomočjo osnovnih računskih operacij in korenov (v takem primeru pravimo, da je enačba *rešljiva z radikali*).

Tschirnhaus je skušal najti substitucijo

$$y = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0,$$

ki bi enačbo

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

prevedla v obliko $y^n - c_0 = 0$. Njegova ideja temelji na pričakovanju, da je sistem $n-1$ enačb za vmesne koeficiente

$$c_{n-1} = \ldots = c_1 = 0$$

rešljiv, če le izberemo dovolj veliko število neznank $b_{m-1}, \ldots, b_0$.[11]

Splošno enačbo pete stopnje lahko s substitucijo $y = x^2 + b_1x + b_0$ prevedemo na enačbo oblike $y^5 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0$. Pri tem je treba rešiti sistem dveh kvadratnih enačb z neznankama b_1 in b_0. Primerna kubična substitucija bi sicer odpravila tudi kvadratni člen, vendar bi bilo pri tem treba rešiti sistem treh enačb, ki je ekvivalenten reševanju polinomske enačbe šeste stopnje.[12] Erlandu Samuelu Bringu (1736–1798) in Georgeu Birchu Jerrardu (1804–1863) je neodvisno drug od drugega uspelo odpraviti tudi kvadratni člen tako, da sta uporabila substitucijo četrte stopnje. Gian Francesco Malfatti (1731–1807) je v primerih, ko je enačba $x^5+a_1x+a_0 = 0$ rešljiva z radikali, našel tudi njene rešitve, ki pa so odvisne od rešitev neke pripadajoče polinomske enačbe šeste stopnje.[13]

Leta 1799 je Paolo Ruffini (1765–1822) pokazal, da se rešitev enačb stopnje vsaj pet ne da zapisati na želen način. Med dokazovanjem je Ruffini

[11]Naj bo $K = \mathbb{Q}(a_0, ..., a_{n-1})$. Če je polinom $p \in K[x]$, ki mu želimo odpraviti vmesne člene, nerazcepen, lahko v jeziku moderne algebre rečemo, da Tschirnhausova transformacija $T\colon K[x] \to K[x]$ ohranja ustrezno razširitev polja, to je $K[x]/\langle p\rangle = K[x]/\langle T(p)\rangle$. Lomljeni oklepaji označujejo glavni ideal, ki ga generira ustrezni polinom. $T(p)$ si lahko predstavljamo tudi kot minimalni polinom enega od primitivnih elementov razširitve $K[x]/\langle p\rangle$.

[12]Kasneje se je izkazalo, da je poiskati substitucijo, ki bi odpravila vse vmesne člene v polinomu stopnje n, enako težko kot rešiti polinomsko enačbo stopnje $(n-1)!$. V primeru $n = 4$ imamo srečo, da ustrezna enačba šeste stopnje razpade na kvadratne faktorje.

[13]Leta 1991 je David S. Dummit [2] našel eksplicitne formule za ničle enačbe pete stopnje, ki je rešljiva z radikali.

uporabljal permutacije in razvil velik kos nove matematike, ki je kasneje postal del teorije grup. Dokaz je bil tako zapleten, da ga večina tedanjih matematikov ni razumela, zato rezultata niso popolnoma priznavali in šele Augustin Louis Cauchy (1789–1857) je leta 1821 potrdil, da Ruffinijevo delo dokazuje nerešljivost enačb stopnje vsaj pet z radikali. Kasneje se je izkazalo, da je Ruffinijev rezultat sicer pravilen, dokaz pa ima manjšo luknjo.

Niels Henrik Abel (1802–1829) ni poznal Ruffinijevega rezultata. Prepričan je bil, da mu je uspelo rešiti enačbo pete stopnje. Pred objavo odkritja so ga prosili, naj svojo metodo ilustrira na konkretnem primeru. Abel je med neuspešnim reševanjem primera našel napako v dokazu. Medtem pa je dobil tako dober vpogled v reševanje enačbe pete stopnje, da mu je uspelo izdelati prvi popolnoma pravilen dokaz o nerešljivosti enačb stopnje vsaj pet z radikali.

Navkljub rezultatom, ki sta jih dobila Ruffini in Abel, pa se dajo nekatere enačbe višjih stopenj vendarle rešiti na željeni način. Trivialen primer je recimo enačba $(x-1)^5=0$. Evariste Galois (1811–1832) je malo pred prezgodnjo smrtjo našel potrebne in zadostne pogoje, ki jih mora izpolnjevati polinom, da je enačba rešljiva z radikali. Permutacijska grupa polinomovih ničel, imenovana *Galoisova grupa*,[14] mora biti rešljiva kot grupa.[15] Polinom x^5-x-1 ima recimo Galoisovo grupo enako nerešljivi permutacijski grupi S_5, zato se njegovih ničel ne da zapisati samo z osnovnimi računskimi operacijami in koreni.

LITERATURA

[1] W. S. Anglin, *Mathematics: a concise history and philosophy*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1994.

[2] D. S. Dummit, *Solving solvable quintics*, Math. Comp. **57** (1991), št. 195, 387–401.

[3] S. MacLane in G. Birkhoff, *Algebra*, 3. izdaja, AMS, Providence, RI, 1999.

[4] J. J. O'Connor in E. F. Robertson, *The MacTutor History of Mathematics archive*, `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk`

[5] J. Sesiano, *An introduction to the history of algebra. Solving equations from Mesopotamian times to the Renaissance*, iz francoščine prevedla Anna Pierrehumbert, Mathematical World **27**, AMS, Providence, RI, 2009.

[6] I. Vidav, *Algebra*, 4. natis, DMFA, Ljubljana, 1989.

[14] *Galoisovo grupo* tvorijo vse permutacije polinomovih ničel, ki ohranjajo veljavnost vseh algebrajskih enačb z racionalnimi koeficienti, ki jih ničle izpolnjujejo.

[15] Grupa G je *rešljiva*, če se zaporedje njenih komutatorskih podgrup $G, G', (G')', \ldots$ konča z enoto. *Komutatorska grupa* G' je najmanjša grupa, ki vsebuje vse produkte $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$.