PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **12** (1984/1985)
Številka 4
Strani 204–208

Tomaž Pisanski:

TEST HI KVADRAT

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/12/731-Pisanski-test.pdf

TEST HI KVADRAT

Pri mnogih družabnih igrah uporabljamo kocko. Če je kocka poštena, pade šestica z verjetnostjo 1/6. To pomeni, da lahko v povprečju pričakujemo na vsakih šest metov eno šestico. Če vržemo kocko 60 krat, lahko pričakujemo približno 10 šestic.

Včasih se nam zazdi, da šestica noče pasti. Ali je kocka morda obtežena, torej nepoštena? Statistika pozna metodo, s katero lahko dokaj zanesljivo preverimo, ali je kocka obtežena ali ne. Metodi rečemo **test hi kvadrat.** Čeprav je ozadje te metode precej zamotano in ga na tem mestu ne moremo razložiti, pa je sama uporaba testa hi kvadrat zelo preprosta in uporabna.

Za pomoč sem prosil svoja sinova. Pobrskali smo malo in našli tri kocke. Vsako smo vrgli 60 krat. Rezultate smo zabeležili v preglednici 1.

ŠTEVILO PIK	1	2	3	4	5	6	SKUPAJ
RDEČA KOCKA	5	16	8	14	12	5	60
ČRNA KOCKA	7	8	8	11	10	16	60
BELA KOCKA	6	10	10	9	14	11	60
TEORETIČNO	10	10	10	10	10	10	60

PREGLEDNICA 1 Rezultati metov treh kock. Prikazane so absolutne frekvence (število pojavitev posameznih izidov). Najbolj sumljivo se vede rdeča kocka, ker dejanske frekvence najbolj odstopajo od teoretičnih. Ali je obtežena?

Dodali smo vrstico s teoretičnimi absolutnimi frekvencami. Ker je pri pošteni kocki verjetnost, da pade na katerokoli od svojih šestih ploskev enaka, so verjetnosti posameznih izidov vse enake 1/6. Ker so te verjetnosti (pravimo jim tudi relativne frekvence) vse med seboj enake, bi po 60 metih teoretično pričakovali za vsak izid 60 . 1/6 = 10 pojavitev. Zato smo postavili v zadnjo vrstico preglednice 1 same desetke, teoretične absolutne frekvence. Dejanske absolutne frekvence odstopajo od teoretičnih, kar je popolnoma razumljivo, četudi so kocke 205 poštene. Če dejanske frekvence malo odstopajo od teoretičnih, lahko z veliko verjetnostjo sklepamo, da je kocka poštena. Če pa dejanske frekvence močno odstopajo od teoretičnih, tedaj je malo verjetno, da gre za pošteno, neobteženo kocko.

Test hi kvadrat napravi dvoje. Dejanskim in teoretičnim frekvencam priredi število, s katerim merimo odstopanje frekvenc. Čim večje je dobljeno število, tem večje je odstopanje. Za odstopanje dopuščamo dve razlagi. Lahko, da gre za **slučajno odstopanje** ali pa gre (poleg slučajnega) še za **sistematično odstopanje**, torej teoretične frekvence ne ustrezajo dejanski porazdelitvi. V našem primeru pomeni prva hipoteza, da gre za slučajno odstopanje poštene kocke, druga pa, da imamo opravka z obteženo kocko.

Čas je, da si pogledamo vso stvar čisto splošno, potem pa se bomo vrnili k našim kockam. Denimo, da ima poskus n izidov. Denimo, da poskus ponovimo N krat. Naj bodo E_1, E_2, ..., E_n teoretične absolutne frekvence, O_1, O_2, ..., O_n dejanske absolutne frekvence. To pomeni, da se je pri N ponovitvah poskusa izid i dogodil O_i-krat, medtem ko smo pričakovali, da se zgodi E_i-krat. Izraz

$$\chi^2(n-1) = (E_1 - O_1)^2/E_1 + (E_2 - O_2)^2/E_2 + \dots + (E_n - O_n)^2/E_n$$

imenujemo **hi kvadrat z (n - 1) prostostnimi stopnjami.** V statističnih priročnikih lahko najdemo preglednice za hi kvadrat. Za naše namene bo zadostovala preglednica 2.

Preden si pogledamo, kaj pravi hi kvadrat za naše kocke, še pomembno opozorilo. Če je teoretična absolutna frekvenca kakega dogodka premajhna, je tudi zanesljivost testa hi kvadrat vprašljiva. Običajno zahtevamo, da je vrednost vsakega E_i vsaj 5. Kaj pa, če vrednost kakega E_i ni tako velika? Tedaj pa imamo dve možnosti. Zaporedje poskusov lahko povečamo (v našem primeru: kocko večkrat vržemo) in tako dosežemo, da je teoretična absolutna frekvenca vsakega izida vsaj 5. Druga, preprostejša možnost pa je, da združimo malo verjetne izide v nove, bolj verjetne. To možnost si bomo ogledali kasneje.

ŠTEVILO PROSTOSTNIH STOPENJ		P = 10%	P = 5%	P = 1%	P = 0.1%
2	I	4.6	6.0	9.2	13.8
3	I	6.3	7.8	11.3	16.3
4	I	7.8	9.5	13.3	18.5
5	I	9.2	11.1	15.1	20.5
6	I	10.6	12.6	16.8	22.5
7	I	12.0	14.1	18.5	24.3
8	I	13.4	15.5	20.1	26.1
9	I	14.7	16.9	21.7	27.9
10	I	16.0	18.3	23.2	29.6
12	I	18.6	21.0	26.2	32.9
14	I	21.1	23.7	29.1	36.1
16	I	23.5	26.3	32.0	39.3
18	I	26.0	28.9	34.8	42.3
20	I	28.4	31.4	37.6	45.3
25	I	34.4	37.6	44.3	52.6
30	I	40.3	43.8	50.9	59.7
40	I	51.8	55.8	63.7	73.4
60	I	74.4	79.1	88.4	99.6
80	I	96.6	101.9	112.3	124.8
100	I	118.5	124.3	135.8	149.5

PREGLEDNICA 2 Vrednosti hi kvadrat. Denimo, da ima poskus 6 izidov in je vrednost hi kvadrat enaka 12.7. Število prostostnih stopenj je 5. Pogledamo v vrstico s petimi prostostnimi stopnjami in vidimo, da leži 12.7 med 11.1 in 15.1. Verjetnost, da so odstopanja med dejanskimi in teoretičnimi frekvencami zgolj slučajna, je manj kot 5% in več kot 1%. Pesimist bo verjetno hipotezo o slučajnem odstopanju zavrnil. Če bi bila vrednost hi kvadrat pri istih pogojih 18.5, pa lahko hipotezo mirno zavrnemo, saj je verjetnost manjša od enega odstotka. Zelo verjetno gre za resnično neujemanje med teoretičnimi in dejanskimi frekvencami. Običajno se vnaprej dogovorimo, katero mejo vzamemo za ločilo med sprejetjem oziroma zavrnitvijo hipoteze. Ta meja je običajno bodisi 5% bodisi 1%. Če pa je število prostostnih stopenj tako, da ga ni v naši preglednici, si pri oceni pomagamo z dvema vrsticama, tisto, ki je neposredno pred, in tisto, ki je za manjkajočo vrstico.

Najbolje je, da se vrnemo k našim trem kockam. Pokazali bomo, kako lahko uporabimo preglednico 2. Najbolj sumljiva je rdeča kocka, saj sta pri 60 metih padli enica in šestica samo po 5 krat.

$$\chi^2(5) = (10 - 5)^2/10 + (10 - 16)^2/10 + (10 - 8)^2/10 + (10 - 14)^2/10 + (10 - 12)^2/10 + (10 - 5)^2/10 = 11$$

Iz preglednice 2 razberemo, da je vsaj v petih odstotkih mogoče pričakovati tako odstopanje, če gre zgolj za slučajnost.

Zato ne moremo sklepati, da je kocka nepoštena. (Ko smo kasneje še nekajkrat ponovili poskus z isto kocko, smo vsakič dobili mnogo bolj prepričljivo potrditev, da gre za pošteno kocko.) Vrednost hi kvadrat za črno kocko je 5.4, za belo pa je še manjša, o čemer se lahko zdaj bralec prepriča kar sam.

V resnici smo metali črno in belo kocko skupaj in smo si v preglednici 3 zabeležili vse izide.

Če bi želeli neposredno uporabiti test hi kvadrat, bi morali za vsakega od 36 enako verjetnih izidov dobiti absolutno teoretično frekvenco vsaj 5. To pa pomeni vsaj 180 metov parov kock. Ker sta šla sinova na dvorišče igrat nogomet, sam pa nisem imel dovolj časa, sem se odločil, da bi bilo bolje šteti vsoto pik na obeh kockah. Vsoto 2 dobimo na en sam način: 2 = 1 + 1. Vsoto 3 dobimo na dva načina: 3 = 2 + 1 = 1 + 2. Vsoto štiri dobimo že na tri načine 4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 in tako dalje.

		BELA KOCKA						
		1	2	3	4	5	6	SKUPAJ
ČRNA KOCKA	1	0	3	3	1	0	0	7
	2	1	0	1	0	3	3	8
	3	1	1	1	1	3	1	8
	4	1	0	2	2	3	3	11
	5	2	3	1	2	1	1	10
	6	1	3	2	3	4	3	16
	SKUPAJ	6	10	10	9	14	11	60

PREGLEDNICA 3 Šestdeset metov parov kock. Imamo 36 enako verjetnih izidov. Ker je teoretična absolutna frekvenca vsakega izida le 60/36, kar je manj kot 5, ne moremo uporabiti testa hi kvadrat.

V preglednici 3 moramo seštevati števila po diagonalah od levo spodaj, do desno zgoraj. Tako dobimo preglednico 4.

VSOTA PIK ČRNE IN BELE KOCKE	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	SKUPAJ
DEJANSKA ABSOLUTNA FREKVENCA	0	4	4	4	3	10	12	8	7	5	3	60
TEORETIČNA ABSOLUTNA FREKVENCA	$\frac{10}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{40}{6}$	$\frac{50}{6}$	$\frac{60}{6}$	$\frac{50}{6}$	$\frac{40}{6}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{20}{6}$	$\frac{10}{6}$	60

PREGLEDNICA 4 Vsota pik na dveh kockah po 60 metih. Izidi niso med seboj enako verjetni. Štiri vsote (2,3,11,12) so premalo verjetne za neposredno uporabo testa hi kvadrat.

Če združimo prva dva izida (vsoti 2 in 3) ter zadnja dva izida (vsoti 11 in 12) porazdelitve s preglednice 4, dobimo končno porazdelitev preglednice 5 z devetimi izidi, na kateri pa lahko uporabimo test hi kvadrat.

POPRAVLJENA VSOTA PIK ČRNE IN BELE KOCKE	(2,3)	4	5	6	7	8	9	10	(11,12)	SKUPAJ
DEJANSKA ABSOLUTNA FREKVENCA	4	4	4	3	10	12	8	7	8	60
TEORETIČNA ABSOLUTNA FREKVENCA	$\frac{30}{6}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{40}{6}$	$\frac{50}{6}$	$\frac{60}{6}$	$\frac{50}{6}$	$\frac{40}{6}$	$\frac{30}{6}$	$\frac{30}{6}$	60

PREGLEDNICA 5 Popravljena vsota pik na dveh kockah po 60 metih. Vse teoretične frekvence so dovolj velike. Test hi kvadrat z osmimi prostostnimi stopnjami pokaže, da statistično ne moremo ovreči predpostavke, da gre za pošteni kocki.

Ker je računanje vrednosti hi kvadrat zamudno, bomo v naslednjem prispevku pokazali, kako si pri tem lahko pomagamo z računalnikom.

Glej članek na str. 163.

Tomaž Pisanski