POTENCE KOVINSKIH RAZMERIJ

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 11A55, 11B39

V prispevku pokažemo, kako se izražajo cele potence kovinskih razmerij v obliki periodičnih verižnih ulomkov.

POWERS OF METALLIC RATIOS

In this contribution we show how the integer powers of metallic ratios can be expressed by periodic continued fractions.

Uvod

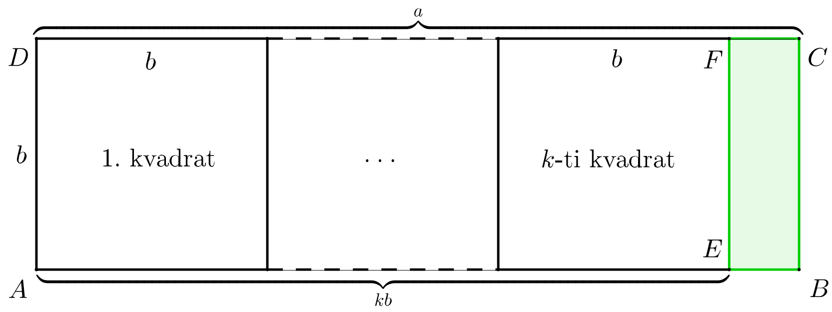
V zadnjih desetletjih je z razvojem teorije dinamičnih sistemov nastalo več del, na primer [2, 4, 5], ki obravnavajo kovinska razmerja kot posplošitve bolj znanega zlatega razmerja, ki ga navadno srečamo pri zlatem rezu, pa tudi njihovo uporabo, na primer v [1]. V članku želimo predstaviti nekaj lastnosti kovinskih razmerij. Za razumevanje je treba znati nekaj geometrije in elementarne algebre, reševati homogene linearne diferenčne enačbe s konstantnimi koeficienti ter osnove teorije o verižnih ulomkih, s katerimi bomo izrazili potence s celimi eksponenti kovinskih razmerij.

Kovinski pravokotniki

Vzemimo pravokotnik $ABCD$ s stranicama $a = |AB|$ in $b = |BC|$, pri čemer je $a > b$ in a/b ni naravno število (slika 1).

Od stranice AD proti stranici BC lahko od pravokotnika odrežemo $k = \lfloor a/b \rfloor$ ($\lfloor u \rfloor$ pomeni celi del realnega števila u) kvadratov s stranico b, tako da ob stranici BC ostane manjši pravokotnik $BCFE$. Zanima nas, kdaj je pravokotnik $BCFE$ podoben pravokotniku $ABCD$. Pogoj za podobnost je seveda enakost

$$\frac{a - kb}{b} = \frac{b}{a}. \tag{1}$$



Slika 1. Kovinski pravokotnik.

Takoj vidimo, da razmerje $\sigma_k = a/b$ zadošča kvadratni enačbi $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$, ki ima rešitvi

$$\lambda_1 = \sigma_k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2+4}) \quad \text{in} \quad \lambda_2 = \hat{\sigma}_k = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2+4}). \tag{2}$$

Pozitivno rešitev σ_k imenujemo *kovinsko razmerje reda* k ali *kovinsko sredino reda* k. Iskani pravokotnik ima potemtakem stranici v kovinskem razmerju reda k, to je $a/b = \sigma_k$. Tak pravokotnik imenujemo *kovinski pravokotnik reda* k. V posebnem primeru imamo števila

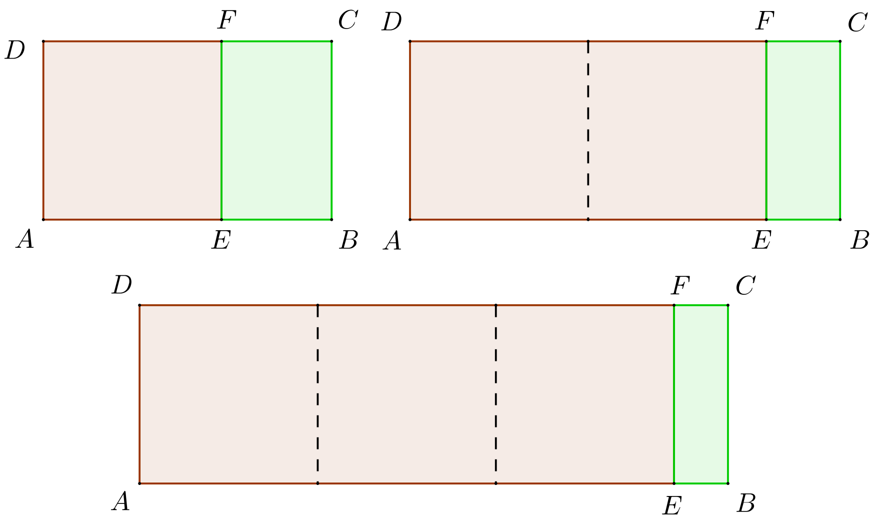
$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \quad \sigma_2 = 1+\sqrt{2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{13}), \tag{3}$$

ki jih v tem vrstnem redu in v skladu s tremi najboljšimi športnimi uvrstitvami imenujemo *zlato, srebrno in bronasto razmerje*. Namesto besede *razmerje* uporabljamo tudi besedi *število* in *sredina*. Ustrezni pravokotniki so *zlati, srebrni in bronasti pravokotnik* (slika 2).

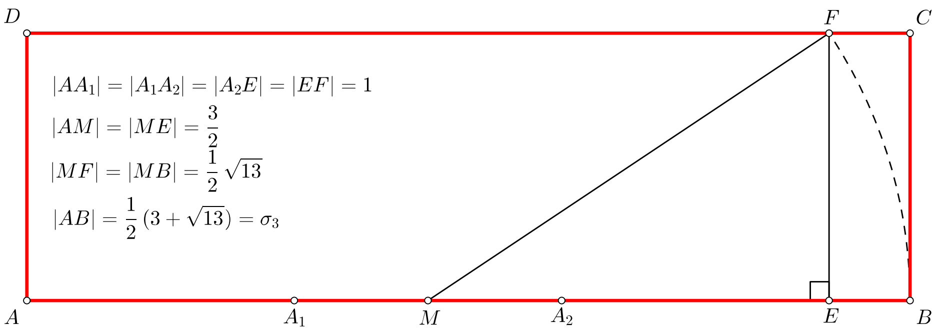
Manjši pravokotnik $BCFE$ je seveda, tako kot pravokotnik $ABCD$, tudi kovinski pravokotnik reda k. Od pravokotnika $BCFE$ lahko tudi odrežemo k kvadratov s stranico $a - kb$, tako da ostane še manjši kovinski pravokotnik reda k. Postopek lahko nadaljujemo v nedogled. To pomeni, da v kovinskih pravokotnikih obstaja neka fraktalna struktura.

Evklidska konstrukcija kovinskega pravokotnika reda k pri dani stranici b je preprosta. Sledi neposredno iz zapisa σ_k v obliki

$$\frac{k}{2} + \sqrt{\left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1}.$$



Slika 2. Zlati, srebrni in bronasti pravokotnik.



Slika 3. Konstrukcija bronastega pravokotnika.

Na sliki 3 je narejen primer bronastega pravokotnika za $b = 1$.

Podobno kot delimo daljico AB v zlatem rezu, jo lahko delimo tudi v srebrnem in bronastem rezu, na splošno s točko R_k v rezu reda k. Veljati mora: $|AR_k|/|R_kB| = \sigma_k$. Preprost račun pokaže, da je

$$|AR_k| = \frac{\sigma_k - 1}{k}|AB|, \quad |R_kB| = \frac{k + 1 - \sigma_k}{k}|AB|.$$

Da pa se daljico AB razdeliti v rezu reda k tudi z geometrijsko konstrukcijo.

Ni težko videti, da je $k < \sigma_k < k + 1$ za vsako naravno število k. To dokažemo s kratkim zaporedjem relacij:

$$k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2}) < \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4}) = \sigma_k < \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4k + 4}) = k + 1.$$

Zato, ker je število σ_k med k in $k + 1$, je zanj smiselno uporabljati izraz *sredina*. Ker sta σ_k in $\hat{\sigma}_k$ rešitvi kvadratne enačbe $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$, zanju veljata Viètovi formuli $\sigma_k + \hat{\sigma}_k = k$, $\sigma_k \hat{\sigma}_k = -1$. Za dovolj velik k je razlika med σ_k in k poljubno majhna:

$$\lim_{k\to\infty} (\sigma_k - k) = \lim_{k\to\infty} (-\hat{\sigma}_k) = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} (\sqrt{k^2 + 4} - k) = 0.$$

Število (diskriminanta) $k^2 + 4$ za noben naraven k ni kvadrat, kot sledi iz relacije

$$k < \sqrt{k^2 + 4} < \sqrt{k^2 + 4k + 4} = k + 2.$$

Če bi bilo število $\sqrt{k^2 + 4}$ naravno, bi to šlo samo v primeru $\sqrt{k^2 + 4} = k+1$, kar pa vodi v protislovje $2k = 3$. Od tod sledi, da so vsa kovinska števila σ_k iracionalna.

Razvoj v verižni ulomek

Kovinsko razmerje ima lep razvoj v (enostaven, navaden, pravilen) verižni ulomek. Vsako necelo realno število ξ lahko zapišemo v obliki

$$\xi = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}.$$

Pri tem so $a_1, a_2, a_3, \ldots$ naravna števila, $a_0 = \lfloor \xi \rfloor$ pa celo število. Za cela realna števila tak zapis nima smisla. Verižni ulomek po dogovoru označujemo krajše takole:

$$\xi = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots].$$

Naj bo $\xi > 1$. Tedaj je očitno $a_0 > 0$ in

$$\frac{1}{\xi} = [0; a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

Za $0 < \xi < 1$ je $a_0 = 0$ in

$$\frac{1}{\xi} = [a_1; a_2, a_3, \ldots].$$

Racionalna števila imajo končen, iracionalna pa neskončen razvoj v verižni ulomek. Pri končnih verižnih ulomkih vzamemo najkrajši zapis, v katerem je zadnji člen na desni strani podpičja 2 ali več. Neskončen verižni ulomek oblike

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}, a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}, \ldots]$$

imenujemo *periodičen s periodo dolžine p*. Krajše ga zapišemo v obliki

$$\xi = [a_0; a_1, \ldots, a_k, \overline{a_{k+1}, \ldots, a_{k+p}}].$$

Števila $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sestavljajo *predperiodo*. Vsaka kvadratna iracionala $(a+\sqrt{b})/c$, kjer sta a in $c \neq 0$ celi števili, b pa naravno število, ki ni kvadrat, ima razvoj v periodični verižni ulomek. Samo števila, ki so pravkar opisane kvadratne iracionale, imajo razvoje v periodične verižne ulomke. Več o tem najdemo v obširni matematični literaturi, na primer v [6].

Verižni ulomek za σ_k dobimo zelo enostavno iz zveze $\sigma_k^2 - k\sigma_k - 1 = 0$, če jo prepišemo v obliko $\sigma_k = k + 1/\sigma_k$:

$$\sigma_k = k + \frac{1}{\sigma_k} = k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{\sigma_k}} = [k; \overline{k}].$$

Kovinska razmerja lahko povežemo z Gaußovo preslikavo $G : [0,1) \to [0,1)$, ki je definirana s predpisom $G(x) = \{1/x\}$ za $x \in (0,1)$ in $G(0) = 0$. Pri tem pomeni $\{u\}$ ulomljeni del števila u, to se pravi $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$. Negibna točka preslikave G je po definiciji vsako tako število $\xi \in [0,1)$, za katero je $G(\xi) = \xi$.

Ker veljata relaciji $k < \sigma_k < k+1$ in Vietovi formuli za σ_k in $\hat{\sigma}_k$, dobimo

$$G(1/\sigma_k) = \{\sigma_k\} = \sigma_k - k = -\hat{\sigma}_k = 1/\sigma_k.$$

Preslikava G ima zato neskončno mnogo netrivialnih negibnih točk, in sicer $\xi_k = 1/\sigma_k$. Števila $1/\sigma_k$ so vse negibne točke preslikave G, česar ni težko utemeljiti, dokaz pa najdemo na primer v [3].

Verižni ulomki za negibne točke preslikave G so

$$\xi_k = [0; k, k, k, \ldots] = [0; \overline{k}].$$

Potence kovinskih razmerij

Zanimajo nas potence σ_k^n kovinskih razmerij za naravne eksponente n. Videli bomo, da se te potence da izraziti s periodičnimi verižnimi ulomki. To ni presenetljivo, saj je potenca z naravnim eksponentom kvadratne iracionale tudi tako število, kar je izraženo s spodnjim zapisom potence. Posebej pa moramo obravnavati potence z lihimi in sodimi eksponenti.

Potencam je ne glede na parnost eksponenta skupna oblika. Nedvomno je ta oblika

$$\sigma_k^n = E_n(k) + F_n(k)\sigma_k,$$

kjer so $E_n(k)$ in $F_n(k)$ neka racionalna števila. Očitno je $E_0(k) = 1$ in $E_1(k) = 0$ ter $F_0(k) = 0$ in $F_1(k) = 1$. Ker pa za $n \geq 0$ velja $\sigma_k^{n+2} = k\sigma_k^{n+1} + \sigma_k^n$, imamo enakost

$$E_{n+2}(k) + F_{n+2}(k)\sigma_k = kE_{n+1}(k) + kF_{n+1}(k)\sigma_k + E_n(k) + F_n(k)\sigma_k.$$

Zaradi enoličnosti zapisa morata veljati relaciji:

$$E_{n+2}(k) = kE_{n+1}(k) + E_n(k) \quad \text{in} \quad F_{n+2}(k) = kF_{n+1}(k) + F_n(k).$$

Začetka zaporedij $\{E_n(k)\}_{n=0}^{\infty}$ in $\{F_n(k)\}_{n=0}^{\infty}$ sta naslednja:

$$\begin{aligned} E_n(k) &: \quad 1, 0, 1, k, k^2+1, k^3+2k, k^4+3k^2+1, \ldots, \\ F_n(k) &: \quad 0, 1, k, k^2+1, k^3+2k, k^4+3k^2+1, \ldots \end{aligned}$$

Števila $F_n(k)$ imenujemo *k-Fibonaccijeva*[1] *števila*. Tudi števila $E_n(k)$ so k-Fibonaccijeva: $E_n(k) = F_{n-1}(k)$. Smiselno je vzeti $E_{-1}(k) = -k, F_{-1}(k) = 1$, kar je tudi v skladu z enakostjo $\sigma_k^{-1} = -\hat{\sigma}_k = -k + \sigma_k$. Tako smo našli:

$$\sigma_k^n = F_{n-1}(k) + F_n(k)\sigma_k. \tag{4}$$

Za $k = 1$ so števila $F_n = F_n(1)$ običajna Fibonaccijeva števila. Prav tako dobimo

$$\hat{\sigma}_k^n = F_{n-1}(k) + F_n(k)\hat{\sigma}_k. \tag{5}$$

Če odštejemo (5) od (4) in upoštevamo enakost $\sigma_k - \hat{\sigma}_k = \sqrt{k^2+4}$, najdemo eksplicitni izraz za k-Fibonaccijeva števila, tako imenovano *Binetovo*[2]

[1] Fibonacci, Leonardo iz Pise (okoli 1170–1250), je bil italijanski matematik.

[2] Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) je bil francoski matematik, astronom in fizik.

formulo:

$$F_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}(\sigma_k^n - \hat{\sigma}_k^n). \tag{6}$$

Do rezultata (6) lahko pridemo tudi, če rešimo diferenčno enačbo $F_{n+2}(k) = kF_{n+1}(k) + F_n(k)$ po običajnem postopku z nastavkom $F_n(k) = \lambda^n$, karakteristično enačbo $\lambda^2 - k\lambda - 1 = 0$ s korenoma $\lambda_1 = \sigma_k, \lambda_2 = \hat{\sigma}_k$, linearno kombinacijo $C_1\sigma_k^n + C_2\hat{\sigma}_k^n$ obeh rešitev ter z upoštevanjem začetnih pogojev $F_0(k) = 0$ in $F_1(k) = 1$.

S k-Fibonaccijevimi števili so tesno povezana k-Lucasova[3] števila $L_n(k)$, ki jih vpeljemo s prav tako diferenčno enačbo kot k-Fibonaccijeva števila, to je $L_{n+2}(k) = kL_{n+1}(k) + L_n(k)$, toda pri začetnih pogojih $L_0(k) = 2$ in $L_1(k) = k$. Za rešitev dobimo s prej opisanim postopkom ustrezno Binetovo formulo

$$L_n(k) = \sigma_k^n + \hat{\sigma}_k^n. \tag{7}$$

Iz diferenčne enačbe in začetnih pogojev induktivno sledi, da so vsa števila $F_n(k)$ in $L_n(k)$ naravna, le $F_0(k)$ je za vse k enak 0.

Z relacijama $F_{-n}(k) = (-1)^{n+1}F_n(k)$ in $L_{-n}(k) = (-1)^n L_n(k)$ razširimo zaporedji k-Fibonaccijevih in k-Lucasovih števil v dvostranski zaporedji. Enakosti (4) in (5) potem veljata za vsako celo število n. Prav tako Binetovi formuli (6) in (7), iz katerih dobimo še

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+r}(k)}{F_n(k)} = \lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+r}(k)}{L_n(k)} = \sigma_k^r$$

za vsako celo število r.

Z upoštevanjem Viètovih formul lahko izrazimo iz (5) tudi potence z negativnimi celimi eksponenti:

$$\sigma_k^{-n} = (-1)^n(F_{n+1}(k) - F_n(k)\sigma_k). \tag{8}$$

Za števila $F_n(k)$ in $L_n(k)$ velja več identitet. Omenimo samo eno, ki jo bomo potrebovali:

$$(k^2+4)F_n^2(k) = L_n^2(k) + 4(-1)^{n+1}. \tag{9}$$

Enakost (9) preverimo neposredno z Binetovima formulama (6) in (7):

$$\begin{aligned}(k^2+4)F_n^2(k) &= (\sigma_k^n - \hat{\sigma}_k^n)^2 = \sigma_k^{2n} + \hat{\sigma}_k^{2n} - 2\sigma_k^n\hat{\sigma}_k^n \\ &= (\sigma_k^n + \hat{\sigma}_k^n)^2 - 4(\sigma_k\hat{\sigma}_k)^n = L_n^2(k) + 4(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

[3]François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) je bil francoski matematik.

V primeru lihega indeksa imamo:

$$(k^2+4)F_{2n+1}^2(k)=L_{2n+1}^2(k)+4. \qquad (10)$$

Sedaj izračunajmo σ_k^{2n+1}. Ker je $\sigma_k^{2n+1}+\hat{\sigma}_k^{2n+1}=L_{2n+1}(k)$ in $\sigma_k^{2n+1}\hat{\sigma}_k^{2n+1}=(\sigma_k\hat{\sigma}_k)^{2n+1}=(-1)^{2n+1}=-1$, sta σ_k^{2n+1} in $\hat{\sigma}_k^{2n+1}$ rešitvi kvadratne enačbe $\mu^2-L_{2n+1}(k)\mu-1=0$. To pa pomeni, da je σ_k^{2n+1} kovinsko število reda $L_{2n+1}(k)$. Rezultat izrazimo še z verižnimi ulomki:

$$[k;\overline{k}]^{2n+1}=[L_{2n+1}(k);\overline{L_{2n+1}(k)}], \quad [k;\overline{k}]^{-(2n+1)}=[0;\overline{L_{2n+1}(k)}].$$

Lotimo se še potenc σ_k^{2n}. Za $k=1$ in $n=1$ je najenostavneje: $\sigma_1^2=1+\sigma_1=[2;\overline{1}], \sigma_1^{-2}=[0;2,\overline{1}]$. Verižna ulomka imata periodo dolžine 1. V preostalih primerih pa imajo potence σ_k^{2n}, zapisane kot verižni ulomek, periodo dolžine 2. Kako pridemo do tega?

Za števili $\sigma_k^{2n}-1$ in $\hat{\sigma}_k^{2n}-1$ veljata enakosti $(\sigma_k^{2n}-1)+(\hat{\sigma}_k^{2n}-1)=L_{2n}(k)-2$ in $(\sigma_k^{2n}-1)(\hat{\sigma}_k^{2n}-1)=2-L_{2n}(k)$. To pomeni, da sta $\nu_k=\sigma_k^{2n}-1>0$ in $\hat{\nu}_k=\hat{\sigma}_k^{2n}-1$ rešitvi kvadratne enačbe $\nu^2-(L_{2n}(k)-2)\nu-(L_{2n}(k)-2)=0$. Označimo $K_{2n}(k)=L_{2n}(k)-2$. Pri tem je vedno $K_{2n}(k)>0$. Iz $\nu_k^2-K_{2n}(k)\nu_k-K_{2n}(k)=0$ dobimo

$$\begin{aligned}\nu_k&=K_{2n}(k)+\frac{K_{2n}(k)}{\nu_k}=K_{2n}(k)+\cfrac{1}{\cfrac{\nu_k}{K_{2n}(k)}}=K_{2n}(k)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\nu_k}}\\&=K_{2n}(k)+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{K_{2n}(k)+\cfrac{K_{2n}(k)}{\nu_k}}}=\cdots=[K_{2n}(k);\overline{1,K_{2n}(k)}].\end{aligned}$$

Vstavimo izraza za ν_k ter $K_{2n}(k)$ in dobimo

$$\sigma_k^{2n}=[L_{2n}(k)-1;\overline{1,L_{2n}(k)-2}], \quad \sigma_k^{-2n}=[0;L_{2n}(k)-1,\overline{1,L_{2n}(k)-2}].$$

Dobljena verižna ulomka imata periodo 2. Izjema nastopi takrat, ko je $L_{2n}(k)=3$, kar pa je možno le v primeru $n=k=1$ (glej tabelo 1), kar pa smo že obravnavali.

$n \to$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$F_n(1)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$L_n(1)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199
$F_n(2)$	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378	5741
$L_n(2)$	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726	16238
$F_n(3)$	0	1	3	10	33	109	360	1189	3927	12970	42837	141481
$L_n(3)$	2	3	11	36	119	393	1298	4287	14159	46764	154451	510117
$F_n(4)$	0	1	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209	416020	1762289
$L_n(4)$	2	4	18	76	322	1364	5778	24476	103682	439204	1860498	7881196

Tabela 1. Nekaj k-Fibonaccijevih in k-Lucasovih števil ($k = 1, 2, 3, 4$).

Ekvivalenčni razredi

V množico naravnih števil $\mathbb{N}$ lahko s kovinskimi razmerji uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$ in ustrezne ekvivalenčne razrede $[k]_\sim$. Naravni števili k in k' sta v relaciji $\sim$, kar zapišemo kot $k \sim k'$, natanko tedaj, ko obstajata taki racionalni števili α in β, da velja $\sigma_{k'} = \alpha + \beta\sigma_k$. Ker se σ_k in $\sigma_{k'}$ izražata s $\sqrt{k^2+4}$ oziroma $\sqrt{k'^2+4}$, lahko zapišemo tudi v ekvivalentni obliki: $k \sim k'$ velja natanko tedaj, ko je $\sqrt{(k'^2+4)/(k^2+4)}$ pozitivno racionalno število.

Relacija $\sim$ je očitno refleksivna ($k \sim k$), simetrična ($k \sim k' \Rightarrow k' \sim k$) in tranzitivna ($k \sim k' \wedge k' \sim k'' \Rightarrow k \sim k''$), torej ekvivalenčna relacija.

Primer. $1 \sim 4$, ker je $\sqrt{(4^2+4)/(1^2+4)} = \sqrt{20/5} = \sqrt{4} = 2$, $11 \sim 76$, ker je $\sqrt{(76^2+4)/(11^2+4)} = \sqrt{5780/125} = \sqrt{1156/25} = 34/5$, toda $11 \not\sim 14$, ker je $\sqrt{(14^2+4)/(11^2+4)} = \sqrt{200/125} = \sqrt{8/5}$, kar ni racionalno število.

Razrede $[k]_\sim$ vpeljemo za vsak $k \in \mathbb{N}$ kot običajno: $[k]_\sim = \{k' \in \mathbb{N} : k' \sim k\}$. Zlati, srebrni in bronasti razred so naravna zaporedja:

$$\begin{aligned}
[1]_\sim &= \{1, 4, 11, 29, 76, 199, \ldots\},\\
[2]_\sim &= \{2, 14, 82, 478, 2786, \ldots\},\\
[3]_\sim &= \{3, 36, 393, 4287, 46764, \ldots\}.
\end{aligned}$$

Če je $k \sim k'$, potem je $[k]_\sim = [k']_\sim$, če pa $k \not\sim k'$, je $[k]_\sim \cap [k']_\sim = \emptyset$.

Če primerjamo števila v zlatem, srebrnem in bronastem razredu s tistimi v tabeli 1, opazimo v razredih 1-, 2- in 3-Lucasova števila z lihim indeksom: $L_{2n+1}(k)$. Res. Če je k najmanjše število v razredu, potem z enakostjo (10) dobimo:

$$\sqrt{\frac{L_{2n+1}^2(k) + 4}{k^2 + 4}} = F_{2n+1}(k),$$

kar je celo naravno število. To pomeni, da je $k \sim L_{2n+1}(k)$ za vsak $k \in \mathbb{N}$ in $n \geq 0$.

Za konec

V ravnini kompleksnih števil so n-ti koreni enote rešitve enačbe $z^n = 1$. Zapišemo jih lahko kot $z_k = \exp(2k\pi i/n)$, kjer je $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Koreni z_k so oglišča pravilnega n-kotnika, ki je včrtan krožnici $|z| = 1$. Dolžina a_n stranice takega pravilnega n-kotnika je $a_n = |z_1 - z_0| = 2\sin(\pi/n)$, različne dolžine $d_{n,k}$ diagonal pa so $d_{n,k} = |z_k - z_0| = 2\sin(k\pi/n)$, kjer vzamemo $k = 2, 3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$. Diagonale in stranica so v razmerju

$$\frac{d_{n,k}}{a_n} = \frac{\sin(k\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.$$

Za $n = 4$ je to razmerje $\sqrt{2} = \sigma_2 - 1$, za $n = 5$ pa $(1 + \sqrt{5})/2 = \sigma_1$. Za $n = 6$ dobimo $\sqrt{3}$ in 2, za $n = 8$ pa $\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{1 + \sigma_2}, 1 + \sqrt{2} = \sigma_2$ in $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2 + 2\sigma_2}$. Vidimo, da je razmerje med diagonalo in stranico v pravilnem petkotniku zlato razmerje, v pravilnem osemkotniku je razmerje med srednje dolgo diagonalo in stranico srebrno razmerje. V [4] pa avtorica pokaže, da razmerje med diagonalo in stranico v nobenem pravilnem n-kotniku ni bronasto razmerje. Pač pa zavidanja vreden članek [1] uporablja bronasto razmerje v teoriji kvazikristalov. Pripomnimo, da je bil ta članek uvrščen na šesto mesto med desetimi najodličnejšimi raziskovalnimi dosežki Univerze v Ljubljani v letu 2017.

LITERATURA

[1] T. Dotera, S. Bekku in P. Ziherl, *Bronze-mean hexagonal quasicrystal*, Nature materials, 2017, DOI: 10.1038/NMAT4963.

[2] S. Falcon, *Relationships between some k-Fibonacci sequences*, Applied Mathematics **5** (2014), 2226–2234.

[3] M. Lakner, P. Petek in M. Škapin Rugelj, *Diskretni dinamični sistemi*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2015.

[4] A. Redondo Buitrago, *Polygons, diagonals, and the bronze mean*, Nexus network journal, **9** (2007), 321–326.

[5] V. W. de Spinadel, *From the golden mean to chaos*, Nueva Libreria, Buenos Aires 1998.

[6] H. S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*, Van Nostrand, New York in drugje, 1948.