PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **4** (1976/1977)
Številka 2
Strani 75–77

Dušan Repovš:

ŠKRATEK IN PAJEK

Ključne besede: matematično razvedrilo, matematika, rekreacijska matematika, kombinatorika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/4/4-2-Repovs-skratek.pdf

MATEMATIČNO RAZVEDRILO

ŠKRATEK IN PAJEK

Ogledali si bomo zanimiva (matematična) problemčka, ki sta med seboj tesno povezana, saj je drugi samo razširitev prvega. Pa začnimo!

Problem 1.: *Škratek stoji v levem spodnjem kotu poljubno velike šahovske deske, torej na "koti" (0,0). (V splošnem naj pomeni koordinata (m,n) kvadratek, ki se nahaja na presečišču m-tega stolpca in n-te vrstice.) Na koliko načinov (pri najmanjšem številu korakov) lahko pride iz kvadratka (0,0) na izbrani kvadratek (x,y)? Pri tem pa od škratka zahtevajmo, da se giblje vedno le vodoravno ali navpično.*

Rešitev: Označimo s spremenljivko $u_{x,y}$ število možnih (najkrajših) prehodov iz kletke (0,0) v kletko (x,y). Očitno je za poljuben par števil x in y res:

$$u_{x,0} = 1 \qquad \text{in} \qquad u_{0,y} = 1$$

Prav tako je res, da lahko škratek pride v kletko (x,y) le iz kletk $(x-1,y)$ ali pa $(x,y-1)$, do katerih pa lahko pride seveda na natanko $u_{x-1,y}$ oziroma $u_{x,y-1}$ načinov. Odtod dobimo rekurzivno* relacijo za funkcijo $u_{x,y}$:

$$u_{x,y} = u_{x-1,y} + u_{x,y-1}$$

(Torej je $u_{x,y} = f(x,y)$ funkcija dveh celih nenegativnih spremenljivk.)

Sedaj se lotimo vpisovanja števil $u_{x,y}$ v posamezne stolpce. Postopek vidimo iz slike: (Ali ste prepoznali Pascalov trikotnik binomskih koeficientov? Zanimivo, mar ne?)

1					
1	5				
1	4	10			
1	3	6	10		
1	2	3	4	5	
	1	1	1	1	1

Poiščimo rešitev naše rekurzivne formule: očitno potrebuje škratek za prehod kvadratka (0,0) na kvadratek (m,n) samo $m+n$ korakov, m vodoravnih in n navpičnih. Očitno imamo za izbor m mest na razpolago kvečjemu $c^m_{m+n} = (m + n)!/(m!n!)$** možnosti. To pa je obenem odgovor na naše vprašanje:

$$u_{x,y} = \frac{(x + y)!}{x!y!}$$

Problem 2.: *Pajek si je spletel v kotu sobe nekakšno "kubično" mrežo. Dobljene prostorske kockice imenujemo kletke s koordinatami (x,y,z). (Pomen x, y in z lahko uganete iz prejšnje rešitve). Na koliko načinov lahko pride pajek iz kota sobe, t.j. iz kletke $(0,0,0)$ v dano kletko (k,l,m)? Pri tem mora vedno ubrati najkrajšo pot, kakor poprej škratek.*

Rešitev: Tako kot poprej tudi tu poiščemo podobne zakonitosti v gibanju pajka. Očitno je tokrat rekurzivna formula:

$$u_{x,y,z} = u_{x-1,y,z} + u_{x,y-1,z} + u_{x,y,z-1}$$

očitno pa veljajo tudi naslednje tri enačbe:

$$u_{x,y,0} = (x + y)!/(x!y!)$$
$$u_{x,0,z} = (x + z)!/(x!z!)$$
$$u_{0,y,z} = (y + z)!/(y!z!)$$

ker smo to ugotovili že pri škratku.

Da pridemo do kletke (k,l,m), nam tokrat zadostuje natanko $k + l + m$ korakov. Te lahko izberemo najprej na $(k + l + m)!/(k!(l + m)!)$ načinov za pot po osi x, nato nam ostane $l + m$ mest, izmed katerih lahko spet izbiramo pot po osi y na $(l + m)!/(l!m!)$ načinov. Torej je celotno število možnosti izbora števil k in l (število m pa je že s tem enolično določeno) enako izrazu:

$$\frac{(k + l + m)!}{k!(l + m)!} \cdot \frac{(l + m)!}{l!m!} = \frac{(k + l + m)!}{k!l!m!}$$

In od tod dobimo rezultat, ki smo ga pričakovali:

**Število $n!$ imenujemo "n fakulteta" ali "n faktorsko", pomeni pa produkt vseh zaporednih naravnih števil od 1 do n:

$$n! = 1.2.3.4.....$$

Naj dodamo, da postanejo števila $n!$ že za relativno majhne n-je strahovito velika, npr. 10! = 3628800, 20! = 2432902008176640000, itd.

$$u_{x,y,z} = \frac{(x + y + z)!}{x!y!z!}$$

Seveda se dá naloga posplošiti na poljubno dimenzionalno "pajkovo" mrežo in rezultat je spet analogen - v n-dimenzijah dobimo

$$u_{x_1,x_2,\dots,x_n} = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)!}{x_1!x_2!\dots x_n!}$$

Za konec pa poskusite rešiti tole nalogo: *Imamo m oštevilčenih vrčkov, ki sprejmejo vase naslednje količine medu: prvi* a_1 *litrov, drugi* a_2 *litrov, ... , m-ti* a_m *litrov. Na koliko načinov jih lahko napolnimo z medom, če moramo celo zajemalko zliti naenkrat v en sam vrček?*

Odgovor: $\frac{(a_1+\dots+a_m)!}{a_1!\dots a_m!}$

Dušan Repovš