МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

На правах рукописи

ПАГОН Душан

ДЕФОРМАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ

01.01.06. - математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель -
член-корр. АН СССР
профессор
А.И.Кострикин

МОСКВА - 1982

Moscow State University M. V. Lomonosov
Faculty of Mechanics and Mathematics
Department of Higher Algebra

Dušan Pagon

Deformations of Graded Lie Algebras

PhD thesis
(01.01.06 - mathematical logics, algebra and number theory)

Moscow, 1982

Abstract

In the thesis we study the graded deformations of some natural classes of nilpotent Lie algebras and the class of almost free Lie algebras. We have found local graded deformations (2-cocycles) of this algebras and examined the conditions for existence of their extensions to global graded deformations.

The obtained results can be divided into three groups:

1. general results about graded deformations (the definition, closure under the extension operation, existence of obstacles);
2. graded deformations of nilpotent Lie algebras, which are the maximal parts of some classical simple Lie algebras, and their specializations;
3. graded deformations of free and almost free Lie algebras were completely described.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Понятие деформации в математике и физике встречается довольно часто, причем в него может быть вложен различный смысл. Основная идея, как правило, заключается в введении одного или нескольких непрерывных параметров, при помощи которых осуществляется связь между однородными объектами.

В теории алгебр определение деформации, в том виде, в котором она теперь изучается чаще всего, впервые дал М. Герстенхабер в 1964 году [1]. В этой и последующих его работах ([2] , [3] , [4]) введены основные понятия теории деформаций колец и алгебр, а также дана трактовка элементов первой и второй групп когомологий алгебры с коэффициентами в ней самой как локальных автоморфизмов и локальных деформаций, соответственно. В 1967 году В.Пипер указал на связь между деформациями ассоциативных и лиевых алгебр. Элементам второй группы когомологий алгебры Ли ставятся в соответствие 2-коциклы ее универсальной обертывающей алгебры [5].

Несмотря на почти двадцатилетний период, прошедший со времени выхода в свет первой статьи Герстенхабера, конкретных результатов, относящихся к теории деформаций алгебр, пока получено не очень много. Основная причина этого заключается, по-видимому, в том, что деформации алгебр либо тривиальные, либо их настолько много, что они не поддаются изучению. А.Н.Рудаков [6] в 1971 году показал, что для всех простых алгебр Ли над полем комплексных чисел вторая группа когомологий - нулевая. Аналогичный результат для всех классических простых алгебр Ли над полем положительной характеристики $p>3$ был получен А.С.Джумадильдаевым (неопубликовано). С другой стороны попытки В.Пипера [7] исследовать деформации несложной ассоциативной алгебры верхнетреугольных матриц порядка $n \times n$ с одинаковыми элементами на диагонали ни к чему хорошему не привели, и ему удалось получить полное описание только в простейших случаях $n = 2,3$.

Весьма интересным оказалось изучение деформаций простых алгебр Ли картановского типа в модулярном случае. Содержательные результаты о деформациях модулярных алгебр серий $W_n(\bar{m})$, $H_n(\bar{m})$, $K_n(\bar{m})$, полученные А.С.Джумадильдаевым [8], [9], позволили ему уточнить известную гипотезу А.И.Кострикина и И.Р.Шафаревича [10] о классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>5$. Он также получил несколько глубоких результатов о когомологиях градуированных алгебр Ли с коэффициентами в градуированном модуле.

В данной работе основное внимание уделено деформациям нильпотентных алгебр Ли и близких в ним почти свободных алгебр Ли. Интерес к деформациям нильпотентных алгебр Ли возникает не случайно. Хорошо известно [11], что классы изоморфизма нильпотентных алгебр Ли фиксированной размерности над полем P определяются наборами "непрерывных" параметров - элементов поля P. Однако общая ситуация изучена весьма слабо и задачу о разумном описании нильпотентных алгебр Ли трудно даже сформулировать в корректной форме. Естественно ожидать, что деформации, являющиеся такими же инвариантами алгебр, как автоморфизмы, дифференцирования, могут сыграть значительную роль в вопросе о классификации нильпотентных алгебр Ли.

В главе первой приводятся основные определения из теории деформаций алгебр, принадлежащие Герстенхаберу, а также вводится новое понятие градуированной деформации (определение I.I), являющееся центральным во всей работе. Градуированные деформации кажутся наиболее подходящими для изучения нильпотентных и других градуированных алгебр, поскольку они, с одной стороны, прекрасно согласуются с их естественной структурой и, с другой стороны, по сравнению с обычными деформациями, представляют собой достаточно хороший объект, вполне поддающийся изучению. В этой же главе мы доказываем замкнутость градуированных локальных деформаций относительно операции продолжения (лемма I.I) и приводим пример неинтегрируемого градуированного 2-коцикла (лемма I.2).

Вторая глава диссертации посвящена изучению градуированных деформаций максимальных нильпотентных подалгебр, содержащихся в простых алгебрах классических серий $A_n - D_n$. Несмотря на то, что эти алгебры возникают очень естественным путем, вопрос об их деформациях оказался крайне трудным и потребовал привлечения достаточно сильной вычислительной техники. Особенно это относится к сериям A_n и B_n. В первом случае поиски решения велись сначала с помощью ЭВМ. Затем, на основе полученных данных, был разработан общий метод, позволяющий вычислить вторую группу градуированных когомологий для указанных алгебр при любом n. Он, грубо говоря, заключается в разбиении рассматриваемой алгебры на $k \geq 2$ подалгебр или подпространств с определенными дополнительными свойствами, которое влечет за собой расщепление соответствующей группы когомологий на несколько независимых или слабо зависимых друг от друга подгрупп, сравнительно легко вычисляемых по отдельности. Сам метод имеет общий характер и, по-видимому, его применение выходит за рамки, отведенные ему в данной работе. Окончательный результат о деформациях максимальных нильпотентных подалгебр в классических простых сериях достаточно прост: если поле P алгебраически замкнуто и его характеристика не равна 2 и 3, то существует всего одиннадцать нетривиальных градуированных локальных деформаций и все они имеют нулевые продолжения. Это следствие теорем 2.I - 2.4, доказательство которых фактически занимает всю вторую главу.

В тертьей главе сначала совсем легко решается вопрос о градуированных деформациях свободных и свободных нильпотентных алгебр Ли (теорема 3.I, следствие 3.I). Они все оказываются тривиальными. Поэтому естественно ввести в рассмотрение класс алгебр Ли, близких к свободным. Это так называемые почти свободные алгебры, получающиеся путем наложения на образующие единственного однородного нетривиального соотношения. Мы доказываем, что вторая группа градуированных когомологий для таких алгебр, уже не обязана быть нулевой, и приводим алгоритм построения всех нетривиальных градуированных 2-коциклов и их продолжений (теоремы 3.2, 3.3). Затем дается пример алгебры Ли, заданной пятью образующими и двумя соотношениями (п.5, §2, гл.3), показывающий, что к таким алгебрам теория, разработанная нами для изучения градуированных деформаций почти свободных алгебр, уже не применима. Поэтому в общем случае даже при использовании метода, указанного в главе II, по-видимому не удается избежать громоздких вычислений, связанных с непосредственным перебором большого количества подстановок в уравнение коцикличности. Предъявить сколько-нибудь точную оценку для размерности второй группы когомологий в этом случае также представляется затруднительным.

Нумерация утверждений и формул в работе сквозная: цифры, стоящие слева от точки, обозначают, соответственно, номера главы, параграфа и пункта, в котором формула находится, а число, стоящее справа от точки - ее порядковый номер в данном разделе работы.

Результаты диссертации докладывались на конференции молодых ученых МГУ, на алгебраических семинарах Московского университета и в Институте математики и механики АН КазССР. Часть результатов была опубликована в работах [I6] , [I7] .

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю профессору А.И.Кострикину, который постановкой задач, ценными советами и постоянным вниманием оказал мне поистине неоценимую помощь в работе над диссертацией.

Глава I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ АЛГЕБР

§I. Определение градуированных деформаций и некоторые их свойства.

Пусть А - произвольная алгебра над полем P с векторным пространством V и операцией умножения $\mathcal{F}_0$. Обозначим через $P[[t]]$ кольцо формальных степенных рядов от одной переменной t с коэффициентами из P, и пусть $F = P((t))$ будет поле частных кольца $P[[t]]$. Тогда любую билинейную функцию $f: V\times V \to V$ можно единственным образом продолжить до билинейного отображения из $V_F \times V_F$ в V_F, где $V_F = V \otimes_P F$. Полученные отображения будем обозначать теми же символами, что и исходные функции, а подпространство пространства $Lin^2(V_F)$, образованное ими, обозначим через $Lin^2_P(V_F)$. Деформацией алгебры А принято называть семейство алгебр $A(t)$ с векторным пространством V_F и операцией умножения $\mathcal{F}_t$, имеющей вид:

$$\mathcal{F}_t(a,b) = f_0(a,b) + t f_1(a,b) + t^2 f_2(a,b) + \dots ,$$

где $f_i \in Lin^2_P(V_F)$ при $i \geq 0$. Ограничение $\mathcal{F}_0 = f_0$ на $V\times V$ есть умножение в исходной алгебре А. Отображение f_1 называем локальной деформацией или дифференциалом семейства $A(t)$.

Если дополнительно предположить, что исходная алгебра A была ассоциативной или алгеброй Ли, то естественно потребовать, чтобы таковой являлась и продеформированная алгебра $A(t)$. В первом случае такое требование приводит нас к следующим уравнениям относительно функций f_i:

$$\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}} \{ f_i(f_j(a,b),c) - f_i(a,f_j(b,c)) \} = 0, \tag{I.I}$$

для любых $a, b, c \in A$, $k \geq$ I. Во втором случае получаем, что все f_i – кососимметрические функции, которые должны еще удовлетворять условиям:

$$\sum_{\substack{i+j=k\\ i,j\geq 0}} f_i \circ f_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots , \tag{I.2}$$

где композиция $f_i \circ f_j$ определяется следующим образом:

$$f_i \circ f_j\,(a,b,c) = f_i(f_j(a,b),c) + f_i(f_j(b,c),a) + f_i(f_j(c,a),b); \quad a,b,c \in A.$$

При $k =$ I условия (I.I), (I.2) приводят нас к уравнениям:

$$a f_1(b,c) - f_1(ab,c) + f_1(a,bc) - f_1(a,b)c = 0, \tag{I.3}$$

$$f_1([a,b],c) + f_1([b,c],a) + f_1([c,a],b) + [f_1(a,b),c] + [f_1(b,c),a] + [f_1(c,a),b] = 0, \tag{I.4}$$

соответственно. (Мы воспользовались общепринятым способом записи операции умножения в ассоциативных и лиевых алгебрах.) Но левая сторона уравнений (I.3), (I.4) есть не что иное, как $-\delta f_1$, где δ – кограничный оператор из теории когомологий алгебр Хохшильда-Серра ([I2] , [I3]). Значит, f_1 является 2-коциклом алгебры A с коэффициентами в A, то есть $f_1 \in Z^2(A,A)$.

Две деформации – $\mathcal{F}_t, \mathcal{G}_t$ алгебры A называем эквивалентными, если существует отображение $\Phi_t \in Aut(V_F)$ вида $\Phi_t(a) = a + t\varphi_1(a) + t^2\varphi_2(a) + \dots$, где $\varphi_i|_V \in End(V)$, и такое, что $\mathcal{G}_t(a,b) = \Phi_t^{-1}(\mathcal{F}_t(\Phi_t(a), \Phi_t(b)))$. Эквивалентные деформации, очевидно, приводят нас к изоморфным алгебрам. Любую алгебру можно рассматривать как тривиальную деформацию самой себя. Все деформации данной алгебры, эквивалентные ей самой, также будем называть тривиальными.

Сравнивая дифференциалы эквивалентных деформаций, получаем: $g_1(a,b) = f_1(a,b) + \delta\varphi_1(a,b)$, значит, $g_1 - f_1$ – элемент пространства кограниц $B^2(A,A)$. Поэтому изучение нетривиальных деформаций ассоциативных и лиевых алгебр сводится к двум задачам:

I. нахождение всех локальных деформаций, что эквивалентно вычислению группы $H^2(A,A)$;

II. исследование вопроса о продолжаемости локальных деформаций, то есть вопроса о существовании отображений $f_i \in Lin_P^2(V_F)$, $i >$ I, таких, что выполнены все условия (I.I) или (I.2).

Алгебру А, у которой вторая группа когомологий с коэффициентами в А нулевая, называем жесткой относительно деформаций. Если процесс интегрирования локальной деформации f_1, обрывается на коцепи f, не принадлежащей $B^3(A,A)$, то коцикл f_1 называем неинтегрируемым, а f – препятствием к продолжению f_1 до деформации алгебры А. Как показал Герстенхабер [I], все коцепи, получающиеся в процессе интегрирования произвольного 2-коцикла, являются 3-коциклами. Следовательно, из тривиальности группы $H^3(A,A)$ вытекает продолжаемость всех локальных деформаций алгебры А.

Если А – произвольная конечномерная нильпотентная алгебра Ли, то пространство $Z^2(A,A)$ заведомо большое. Так, всякое билинейное отображение $f: A\times A \to A$, удовлетворяющее условиям $f(A,A) \in Z(A)$, $f(A,A^2)=0$, является 2-коциклом. Учитывая тот факт, что многие нильпотентные алгебры обладают естественной градуировкой [11], целесообразно ввести понятие деформации, сохраняющей эту структуру. Поэтому мы даем следующее

Определение I.I. Пусть A – градуированная алгебра, то есть $A=\bigoplus_{\alpha\in\Omega}A_\alpha$ и $\mathcal{F}_0(A_\alpha,A_\beta)\subseteq A_{\alpha+\beta}$ ($A_{\alpha+\beta}=0$, если $\alpha+\beta\notin\Omega$). Тогда деформацию $\mathcal{F}_t$ алгебры A назовем градуированной, если $\mathcal{F}_t(A_\alpha,A_\beta)\subseteq A_{\alpha+\beta}$ для любых α,β из Ω, или, что равносильно, $f_i(A_\alpha,A_\beta)\subseteq A_{\alpha+\beta}$ при $i=1,2,\dots$. Аналогично определяем градуированные i-коцепи, а подпространства, образованные ими в $C^i(A,A), Z^i(A,A), B^i(A,A)$ и $H^i(A,A)$, обозначаем, соответственно, через $C^i_{gr}(A,A), Z^i_{gr}(A,A), B^i_{gr}(A,A)$ и $H^i_{gr}(A,A)$.

Лемма I.I. Пусть $A=\bigoplus_{\alpha\in\Omega}A_\alpha$ – произвольная ассоциативная или лиева алгебра с градуировкой. Если коцикл $f_1\in H^2_{gr}(A,A)$ не продолжается до градуированной деформации алгебры A, то его нельзя интегрировать и во всей группе $C^2(A,A)$.

Доказательство. Пусть f – препятствие к интегрированию f_1 как градуированного коцикла. Поскольку 3-коцепь f, очевидно, является градуированной, отсюда следует, что она представляет нетривиальный класс в $H^3_{gr}(A,A)$. Предположим, что $f\in B^3(A,A)$ и пусть η будет 2-коцепью, такой, что $\delta\eta=f$. Обозначим через η_0 градуированную компоненту коцепи η и через η_1 разность $\eta-\eta_0$. Тогда для любых $\alpha,\beta,\gamma\in\Omega$ и любых $a\in A_\alpha, b\in A_\beta, c\in A_\gamma$ имеем:

$$f(a,b,c)=\delta\eta(a,b,c)=\delta\eta_0(a,b,c)+\delta\eta_1(a,b,c)\in A_{\alpha+\beta+\gamma},$$

что верно тогда и только тогда, когда $\delta\eta_1(a,b,c)=0$. Следовательно $\delta\eta_1=0$ и $f=\delta\eta_0\in B^3_{gr}(A,A)$, что противоречит нашему предположению о нетривиальности 3-коцикла f .

Лемма I.2. Существует нильпотентная алгебра Ли с непродолжаемыми градуированными коциклами.

Доказательство. Рассмотрим алгебру L с базисом $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, $n \geqslant 8$ и умножением $[e_i, e_j] = \delta_{j,0}(1-\delta_{i,n})e_{i+1} - \delta_{i,0}(1-\delta_{j,n})\, e_{j+1}$. (Здесь и в дальнейшем $\delta_{k,\ell}$ - символ Кронекера, равный I при $k=\ell$ и 0 в противном случае.) Очевидно, L - нильпотентная алгебра, класса нильпотентности n, а естественная градуировка имеет вид $L_1 = \langle e_0, e_1\rangle$, $L_i = \langle e_i\rangle$ при $i = 2, 3, \dots, n$. Произвольная 2-коцепь $f \in C^2_{gr}(L,L)$ действует по правилу:

$$f(e_0, e_i) = \alpha_i\, e_{i+1}\ ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$f(e_i, e_j) = \beta_{i,j}\, e_{i+j}\ ; \quad 0 < i < j < n-i+1,$$

где α_i, $\beta_{i,j}$ элементы основного поля P. Остальные значения можно определить исходя из кососимметричности и линейности f. Потребуем теперь, чтобы f была коциклом. Тогда для любой пары индексов (i,j) с $1 \leqslant i < j \leqslant n-i-1$ должно иметь место равенство:

$$0 = (\delta f)(e_0, e_i, e_j) = f([e_0,e_i],e_j) + f([e_i,e_j],e_0) + f([e_j,e_0],e_i) +$$
$$+ [f(e_0,e_i),e_j] + [f(e_i,e_j),e_0] + [f(e_j,e_0),e_i] =$$
$$= -f(e_{i+1},e_j) - f(e_i,e_{j+1}) + \alpha_i[e_{i+1},e_j] + \beta_{i,j}[e_{i+j},e_0] - \alpha_j[e_{j+1},e_i] =$$
$$= (\beta_{i,j} - \beta_{i+1,j} - \beta_{i,j+1})\, e_{i+j+1}\ .$$

Значит $\beta_{i,j} = \beta_{i+1,j} + \beta_{i,j+1}$. Отсюда вытекает, что произвольный коцикл $f \in Z^2_{gr}(L,L)$ полностью задается коэффициентами α_i и

$\beta_{j,n-j}$, $j=1,2,\dots,[\frac{n-1}{2}]$, которые могут принимать произвольные значения. Следовательно $\dim Z^2_{gr}(L,L) = [\frac{3n-3}{2}]$. С другой стороны, как легко видеть, $\dim B^2_{gr}(L,L)=n$. Значит $\dim H^2_{gr}(L,L)=[\frac{n-3}{2}]$. Докажем, что базис группы $H^2_{gr}(L,L)$ составляют коциклы f_k , $k=2,3,\dots,[\frac{n-1}{2}]$, каждый из которых определен следующими значениями основных коэффициентов: $\alpha_i=0$, $\beta_{j,n-j}=\delta_{j,k}$.

Действительно, $\left(\sum\limits_{k=2}^{[\frac{n-1}{2}]} a_k f_k\right)(e_m,e_{n-m})=a_m e_n$ при $m=2,3,\dots,[\frac{n-1}{2}]$, а для произвольной I-коцепи $\varphi\in C^1_{gr}(L,L)$ имеем:

$$(\delta\varphi)(e_m,e_{n-m})=[\varphi(e_m),e_{n-m}]+[e_m,\varphi(e_{n-m})]=0.$$

Также легко доказывается, что коцикл $f=\sum\limits_{k=2}^{[\frac{n-1}{2}]} a_k f_k$ будет продолжаемым только в случае, если композиция $f\circ f$ тождественно равна нулю. Для этого достаточно заметить, что $f\circ f(e_i,e_j,e_k)\in L_{i+j+k}$ при $i,j,k>0$, а для любой 2-коцепи $\psi\in C^2_{gr}(L,L)$ имеем:

$$(\delta\psi)(e_i,e_j,e_k)=[\psi(e_i,e_j),e_k]+[\psi(e_j,e_k),e_i]+[\psi(e_k,e_i),e_j]=0.$$

Теперь из того, что

$$f_k\circ f_k\,(e_1,e_k,e_{n-k-1})=f_k(f_k(e_1,e_k),e_{n-k-1})+$$
$$+f_k(f_k(e_k,e_{n-k-1}),e_1)+f_k(f_k(e_{n-k-1},e_1),e_k)=$$
$$=\beta_{1,k}f_k(e_{k+1},e_{n-k-1})-\beta_{k,n-k-1}f_k(e_1,e_{n-1})+kf_k(e_k,e_{n-k})=ke_n$$

при $2\le k\le[\frac{n-2}{2}]$, вытекает, что у алгебры L над полем любой характеристики есть непродолжаемый градуированный коцикл.

§2. Вопрос о специализации параметра

Деформируя алгебру Ли L над полем P, мы приходим к семейству алгебр Ли $L(t)$, определенных уже над полем формальных степенных рядов $P((t))$. Вопрос о том, можно ли параметру t присвоить конкретное значение из поля P и тем самым получить новые алгебры над основным полем P, называется вопросом о специальзации параметра.

I. Пусть L будет семимерной алгеброй Ли с базисом $\{e_1,\dots,e_7\}$ и умножением

$$[e_i,e_j]=\begin{cases} e_{i+j} & \text{при } i=1,2,\ j=i+1,i+2,\dots,7-i\,;\\ 0 & \text{для других значений индексов } i<j. \end{cases}$$

Докажем, что L элемент однопараметрического семейства алгебр Ли, заданных над основным полем P.

Определим для произвольного нечетного числа m матрицу Q_m, имеющую следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
1 & 1 & -1 & \multicolumn{9}{c}{\overbrace{0\quad 0\quad 0\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad 0\quad 0\quad 0}^{m-3}}\\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0\\
 & & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & -1\\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0\\
 & & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & -1\\
 & & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
\multicolumn{6}{c}{\overbrace{0\quad 0\quad 0\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad 0}^{\frac{1}{2}(m-3)}} & 1 & 1 & 0\ \ldots & 0 & 0 & -1
\end{array}\right)$$

Ранг матрицы Q_m не зависит от характеристики поля P и равен I, если $m=3$ и $m-1$ при $m\geqslant 5$. Пусть теперь f - произвольный элемент группы $C^2_{gr}(L,L)$. Вычитанием из него кограниц, мы ввиду того, что $\operatorname{rank} Q_7 = 6$ можем добиться того, что коцепь $\tilde{f} = f - \delta\varphi$ будет принимать нулевые значения на парах базисных элементов (e_1, e_i), (e_2, e_3). Далее, предположив, что $\tilde{f}$ является коциклом и проделав единственные возможные подстановки в (I.4): $a = e_1$, $b = e_2$, $c = e_3, e_4$, мы получим, что $\tilde{f}(e_2, e_4) = 0$, $\tilde{f}(e_2, e_5) = -\tilde{f}(e_3, e_4)$. Значит $\dim H^2_{gr}(L, L) = 1$, и градуированные деформации алгебры L имеют вид

$$[e_i, e_j]_t = [e_i, e_j] + t g(e_i, e_j), \text{ где } g(e_i, e_j) = (\delta_{i,2}\delta_{j,5} + \delta_{i,4}\delta_{j,3} - \delta_{i,5}\delta_{j,2} - \delta_{i,3}\delta_{j,4}) e_7 .$$

Указанные деформации, очевидно, допускают специализацию параметра, и при этом, согласно известным результатам [II], получается $|P|$ неизоморфных алгебр. С подобными примерами однопараметрических семейств нильпотентных алгебр Ли, полученных в результате деформации какого-то фиксированного элемента этого семейства, мы встретимся в главе II, §I, 3.

2. Интересным, с точки зрения специализации параметра, является следующий пример, демонстрирующий ряд свойств градуированных деформаций, в том числе их зависимость от характеристики поля. Рассмотрим нильпотентную часть простой алгебры Витта:

$$W_1^+ = \langle e_i \mid i = 1, 2, \dots, p-2 \rangle, \; p = \operatorname{char} k \geq 5; \; [e_i, e_j] = (j-i) e_{i+j} .$$

Все однородные подпространства относительно естественной градуировки одномерны, поэтому для любой градуированной 2-коцепи f имеем: $f(e_i, e_j) = f^{i,j} e_{i+j}$. Из указанных в предыдущем пункте свойств матрицы Q_m вытекает, что $\dim B^2_{gr}(W_1^+, W_1^+) = p - 3 - \delta_{p,5}$. Мы можем также считать, что любая нетривиальная 2-коцепь удовлетворяет условиям:

$$f(e_1, e_i) = 0 \quad , \; f(e_2, e_3) = 0 .$$

Значит, $H^2_{gr}(W_1^+, W_1^+)=0$ при $p \leq 7$. Далее, подставляя в (I.4): $a=e_1, b=e_2, c=e_3$, получаем равенство нулю коэффициента $f^{2,4}$, а подстановки в (I.4): $a=e_1, b=e_2, c=e_i$; $i=4,5,\dots,p-5$, $a=e_1, b=e_3, c=e_j$; $j=5,6,\dots,p-6$, приводят нас к равенствам:

$$f^{3,i} = (i+1) f^{2,i} - (i-1) f^{2,i+1} , \qquad \text{(I22.I)}$$

$$2 f^{4,i} = (i+2) f^{3,i} - (i-1) f^{3,i+1} , \qquad \text{(I22.2)}$$

соответственно. Из подстановки в (I.4) $a=e_1, b=e_3, c=e_4$ вытекает, что $f^{3,5} = 2 f^{3,4}$, а это на основании (I22.I) эквивалентно уравнению

$$3f^{2,5} - f^{2,6} = 0 . \qquad \text{(I22.3)}$$

Наконец, подстановка в (I.4): $a=e_2, b=e_3, c=e_4$, показывает, что $f^{4,5} = -f^{2,7} - 5f^{3,4} + 2 f^{3,6}$, откуда после применения (I22.I), (I22.2) получаем равенство

$$2 f^{2,5} - 14 f^{2,6} + 7 f^{2,7} = 0 . \qquad \text{(I22.4)}$$

В случае p = II других ограничений на элементы группы $H^2_{gr}(W_1^+, W_1^+)$ нет, поэтому мы доказали, что она одномерна и натягивается на коцикл h_1, определенный следующими ненулевыми значениями на парах базисных элементов:

$$h_1(e_2, e_5) = e_7 \, , \; h_1(e_2, e_6) = 3e_8 \, , \; h_1(e_2, e_7) = e_9 \, , \; h_1(e_3, e_4) = -3e_7 \, ,$$

$h_1(e_3,e_5)=5e_8$, $h_1(e_3,e_6)=5e_9$, $h_1(e_4,e_5)=2e_9$.
При p > II подстановки в (I.4) $a=e_2, b=e_3, c=e_i$; $i=6,7,\ldots,p-7$, приводят к равенствам

$$f^{5,i}=-(i-1)f^{2,i}+(i-3)f^{2,i+3}+(i+1)f^{3,i}-(i-2)f^{3,i+2}, \qquad (I22.5)$$

а результат подстановки в (I.4): $a=e_1$, $b=e_4$, $c=e_5$:

$f^{4,6}=2f^{4,5}$ на основании (I22.I), (I22.2) эквивалентен уравнению

$$14f^{2,5}-28f^{2,6}+20f^{2,7}-5f^{2,8}=0 . \qquad (I22.6)$$

Далее, подставляя в (I.4): $a=e_1$, $b=e_4$, $c=e_6$, мы на основании (I22.I), (I22.2), (I22.5) имеем

$$40f^{2,6}-145f^{2,7}+171f^{2,8}-66f^{2,9}=0 . \qquad (I22.7)$$

Этим в случае p = I3 исчерпываются условия, наложенные на коэффициенты $f^{i,j}$, поэтому опять получаем одномерную группу градуированных когомологий, натянутую на этот раз на коцикл h_2 , заданный следующими ненулевыми значениями:

$h_2(e_2,e_5)=e_7$, $h_2(e_2,e_6)=3e_8$, $h_2(e_2,e_7)=2e_9$, $h_2(e_2,e_8)=-6e_{10}$
$h_2(e_3,e_4)=-3e_7$, $h_2(e_3,e_5)=-6e_8$, $h_2(e_3,e_6)=-2e_9$, $h_2(e_3,e_8)=-2e_{11}$,
$h_2(e_4,e_5)=-4e_9$, $h_2(e_4,e_6)=5e_{10}$, $h_2(e_4,e_7)=6e_{11}$, $h_2(e_5,e_6)=5e_{11}$.
При $p>$ I3 дополнительно подставляя в (I.4): $a=e_1$, $b=e_4$, $c=e_7$; $a=e_1$, $b=e_5$, $c=e_6$; получаем уравнения

$$51f^{2,7}-111f^{2,8}+130f^{2,9}-50f^{2,10}=0, \qquad (I22.8)$$
$$22f^{2,6}-32f^{2,7}-6f^{2,8}+28f^{2,9}-11f^{2,10}=0 .$$

Теперь заметим, что определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -14 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & -28 & 20 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 145 & -171 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & 111 & -130 & 50 \\ 0 & 22 & -32 & -6 & 28 & 11 \end{vmatrix} = 840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

отличен от нуля при $p>$I3, поэтому из (I22.3), (I22.4), (I22.6)-(I22.8) вытекает, что $f_{2,5} = f_{2,6} = \ldots = f_{2,10} = 0.$ Далее, подставляя в (I.4) $a = e_1$, $b = e_4$, $c = e_i$; $i = 8, 9, \ldots p-7$, и переходя при помощи соотношений (I22.I), (I22.2), (I22.5) в полученных уравнениях к переменным $f^{2,j}$, получим при каждом i уравнение, в которое входят только неизвестные $f^{2,j}$ с индексом $j \leq i+3$, причем коэффициент при $f^{2,i+3}$ равен

$$\frac{1}{2}(i-1)(i+1)i + 3\left((i-2)(i+1) + i-3\right) = \frac{1}{2}(i-2)(i+3)(i+5),$$

и следовательно, отличен от нуля. Значит $f^{2,j} = 0$ для любого j . Но тогда из (I22.I) вытекает, что все коэффициенты вида $f^{3,j}$ равны нулю, затем из уравнения (I22.I) вытекает, что при любом j : $f^{4,j} = 0$. Вообще , подставляя в (I.4): $a = e_1, b = e_i, c = e_j$; $j = i+2, i+3, \ldots, p-i-3$, последовательно для $i = 2, 3, 4, \ldots$, убеждаемся в том, что все коэффициенты коцикла f обязаны равняться нулю. Значит $H^2_{gr}(W_1^+, W_1^+) = 0$ при $p \geq$I7.

Для локальной деформации h_1 (в случае $p =$ II) композиция $h_1 \circ h_1$ отлична от нуля только на одной тройке базисных элементов, а именно $h_1 \circ h_1 (e_2, e_3, e_4) = 3 e_9$. Поэтому легко указать 2-коцепь g_1, кограница которой будет равна $-h_1 \circ h_1$. Положим: $g_1(e_2, e_7) = -3e_9, g_1(e_3, e_6) = 4e_9, g_1(e_4, e_5) = 3e_9$, считая значение g_1 на остальных парах базисных элементов равным нулю. Теперь заметим, что $g_1 \circ h_1 = -3 h_1 \circ h_1$ и $g_1 \circ g_1 = h_1 \circ g_1 = 0$. Отсюда немедленно вытекает, что глобальная деформация, заданная дифференциалом h_1, имеет вид

$$[x,y]_t = [x,y] + t h_1(x,y) + t^2 g_1(x,y)(1 - 3t - 2t^2 - 5t^3 + \dots) = [x,y] +$$
$$+ t h_1(x,y) + \frac{4t^2}{1+t^5} g_1(x,y)(t^4 - 4t^3 + 5t^2 + 2t + 3) = [x,y] + t h_1(x,y) + \frac{4t^2}{t+4} g_1(x,y),$$

и, следовательно, допускает специализацию параметра на основное поле, за исключением точки -4.

Единственный нетривиальный градуированный коцикл, существующий при $p = 13$, является препятствием и продолжения не имеет. Как легко видеть, условия $(h_2 \circ h_2 + \delta g_2)(e_2, e_3, e_5) = 0, (h_2 \circ h_2 + \delta g_2)(e_2, e_4, e_5) = 0$ противоречивы.

Глава II. ГРАДУИРОВАННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ПОДАЛГЕБР МАКСИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ В ПРОСТЫХ КЛАССИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ЛИ СЕРИЙ $A_n - D_n$

Пусть P - алгебраически замкнутое поле характеристики, не равной 2, 3 и $\mathcal{L}$ - одна из классических простых алгебр Ли над P: A_n, $n \geqslant 1$; B_n, $n \geqslant 2$; C_n, $n \geqslant 3$; D_n, $n \geqslant 4$. Обозначим через L ее подалгебру, порожденную множеством корневых элементов $\{e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}\}$, соответствующих фиксированной системе простых корней; $L_1 = \langle e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \dots, e_{\alpha_n} \rangle$ - подпространство, натянутое на $e_{\alpha_1}, \dots, e_{\alpha_n}$. В случае стандартных представлений классических алгебр матрицами, которыми мы и будем пользоваться всюду в дальнейшем, L_1 имеет следующий вид

Тип A_n: $L_1 = \langle E_{i,i+1} \mid i = 1, 2, \dots, n \rangle$.

Тип B_n: $L_1 = \langle E_{1,2} - E_{n+2,1}, E_{i,i+1} - E_{n+i+1,n+i} \mid i = 2, 3, \dots, n \rangle$.

Тип C_n: $L_1 = \langle E_{n+1,1}, E_{i,i+1} - E_{n+i+1,n+i} \mid i = 1, 2, \dots, n-1 \rangle$.

Тип D_n: $L_1 = \langle E_{n+2,1} - E_{n+1,2}, E_{i,i+1} - E_{n+i+1,n+i} \mid i = 1, 2, \dots, n-1 \rangle$.

На нильпотентной алгебре L можно ввести естественную градуировку: $L = \bigoplus_i L_i$, где $L_i = L_1^i$. Нас будут интересовать градуированные деформации алгебры L относительно этой градуировки. Выделим для серий A_n, C_n, D_n в L подалгебры L', L'', сумма которых равна L, причем L'' является абелевым идеалом:

A_n: $L' = \langle E_{i,j} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n \rangle$, $L'' = \langle E_{i,n+1} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \rangle$;

$$C_n : L' = \langle E_{i,j} - E_{n+j,n+i} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle,\ L'' = \langle E_{n+i,j} + E_{n+j,i} - \delta_{i,j} E_{n+i,i} \mid 1 \leq j \leq i \leq n \rangle;$$

$$D_n : L' = \langle E_{i,j} - E_{n+j,n+i} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle,\ L'' = \langle E_{n+i,j} - E_{n+j,i} \mid 1 \leq j < i \leq n \rangle.$$

Для B_n удобнее пользоваться разбиением L на три подпространства, поэтому мы оставим рассмотрение этой серии до §4. Для произвольного коцикла $f \in Z^2_{gr}(L,L)$ обозначим через f_1, $f_{1,2}$, f_2 - его ограничения соответственно на $L' \times L'$, $L' \times L'' \cup L'' \times L'$, $L'' \times L''$, продолженные тождественным нулем до отображений $L \times L \to L$. Тогда, очевидно, $f = f_1 + f_{1,2} + f_2$ и уравнение (I.4), которому удовлетворяет f, равносильно следующим семи условиям:

$(\delta f_1)_1 = 0$ и (2.I)

$(\delta f_1)_2 = 0$ на $L' \times L' \times L'$; (2.2)

$[f_1(a,b)_1, c] + [f_{1,2}(b,c)_2, a] + [f_{1,2}(c,a)_2, b] + f_{1,2}([a,b],c)_2 +$
$+ f_{1,2}([b,c],a)_2 + f_{1,2}([c,a],b)_2 = 0$ и (2.3)

$[f_{1,2}(b,c)_1, a] + [f_{1,2}(c,a)_1, b] + f_{1,2}([a,b],c)_1 + f_{1,2}([b,c],a)_1 + f_{1,2}([c,a],b)_1 = 0$ (2.4)
для $a, b \in L'$, $c \in L''$;

$[f_{1,2}(a,b)_1, c] + [f_{1,2}(c,a)_1, b] + [f_2(b,c)_2, a] + f_2([a,b],c)_2 + f_2([c,a],b)_2 = 0$ и (2.5)

$[f_2(b,c)_1, a] + f_2([a,b],c)_1 + f_2([c,a],b)_1 = 0$ для $a \in L'$, $b, c \in L''$; (2.6)

$[f_2(a,b)_1, c] + [f_2(b,c)_1, a] + [f_2(c,a)_1, b] = 0$ для $a, b, c \in L''$. (2.7)

Индексами I и 2 мы обозначаем, соответственно, L'- и L''- компоненты элементов из L и отображений с областью значений L. Если предположить, что f является кограницей:

$f = \delta\varphi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$, где $\varphi_1|_{L''} = 0$, $\varphi_2|_{L'} = 0$, то получим следующие соотношения между компонентами отображений φ и f:

$\delta\varphi_1)_1 = (f_1)_1$ и (2.8)

$\delta\varphi_1)_2 = (f_1)_2$ на $L' \times L'$; (2.9)

$[a, \varphi_2(b)_1] - \varphi_2([a,b])_1 = f_{1,2}(a,b)_1$ и (2.10)

$[\varphi_1(a)_1, b] + [a, \varphi_2(b)] - \varphi_2([a,b])_2 = f_{1,2}(a,b)_2$ для $a \in L', b \in L''$; (2.11)

$[\varphi_2(a)_1, b] + [a, \varphi_2(b)_1] = f_2(a,b)_2$ для $a, b \in L''$. (2.12)

§I. Тип A_n.

Теорема 2.I. Пусть $\mathcal{L} = A_n$. Тогда для второй группы градуированных когомологий алгебры L имеем:

$$H^2_{gr}(L,L) = \begin{cases} \{0\}, & \text{если } n \neq 4,\ 5, \\ \langle g_1, g_2, g_3 \rangle & \text{при } n=4, \\ \langle g_4, g_5 \rangle & \text{при } n=5, \end{cases}$$

где каждый из коциклов $g_1 - g_5$ отличен от нуля только на одной паре базисных элементов: $g_1(E_{1,2}, E_{4,5}) = E_{2,4}$,

$$g_2(E_{1,2}, E_{1,3}) = E_{2,5}, \quad g_3(E_{4,5}, E_{3,5}) = E_{1,4},$$

$$g_4(E_{2,3}, E_{1,3}) = E_{3,6}, \quad g_5(E_{4,5}, E_{4,6}) = E_{1,4}.$$

Все градуированные локальные деформации нильпотентных частей алгебр A_4 и A_5 продолжаемы, причем при специализации параметра t на основное поле P получаем $|P|+4$ и 3 неизоморфных алгебры, соответственно.

Доказательство. Как видно из уравнений (2.I) - (2.I2), мы можем сравнительно независимо исследовать L'- и L''-компоненты каждого из отображений f_1, $f_{1,2}$, f_2. Чтобы избежать дополнительного усложнения обозначений, будем проводить вычисления для алгебры $\mathcal{L} = A_{n-1}$.

I. . Пусть $(f_2)_2(E_{i,n}, E_{j,n}) = f_2(E_{i,n}, E_{j,n})_2 = f^{i,j} E_{i+j-n,n}$

для $1<i<j<n$, $i+j>n$ и $\varphi(E_{i,n}) = \sum\limits_{k=n-i+1}^{n-1} \varphi^i_k E_{i+k-n,k}$ при $i=2,3,\dots,n-1$. (Согласно (2.I2) мы должны воспользоваться именно такой I-коцепью). Тогда:

$$(\delta\varphi)(E_{i,n}, E_{j,n}) = (\varphi^i_j - \varphi^j_i) E_{i+j-n},$$

и полагая:

$$\varphi_j^i - \varphi_i^j = f^{i,j}, \qquad (2II.I)$$

мы получаем, что $(f_2 - \delta\varphi)_2 = 0$. Поэтому в дальнейшем можем считать, что $(f_2)_2 = 0$ для любого нетривиального градуированного 2-коцикла f.

2. $(f_{1,2})_1$. Нахождение этой компоненты оказывается самым трудным, поскольку из огромного числа ее коэффициентов ($\frac{1}{24}(n-1)\cdot(n-2)(n-3)(3n-4)$) только сравнительно немногие ($\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$ удается обратить в нуль вычитанием когранинцы. Пусть

$$(f_{1,2})_1(E_{i,j}, E_{k,n}) = f_{1,2}(E_{i,j}, E_{k,n})_1 = \sum_{l=1}^{i+k-j-1} f_l^{i,j,k} E_{l,n+j+l-i-k}$$

для $0<i<j<n$, $j-i+1<k<n$, а коцепь φ та же, что и в п.I (см. (2.I0)). Тогда

$$(\delta\varphi)(E_{i,j}, E_{k,n}) =$$
$$= \sum_{l=n-k+1}^{n-1} \varphi_l^k (\delta_{j,k+l-n} E_{i,n+j-k} - \delta_{l,i} E_{i+k-n,j}) - \delta_{j,k} \sum_{l=n-i+1}^{n-1} \varphi_l^i E_{i+l-n,l} \qquad (2I2.I)$$

и полагая:

$$\varphi_j^i + \varphi_i^j = f_{i+j-n}^{i,j,j} \qquad (2I2.2)$$

мы получаем, что

$$(f_{1,2} - \delta\varphi)_{i+j-n}^{i,j,j} = 0. \qquad (2I2.3)$$

Условия (2II.I) и (2I2.2) однозначно определяют коэффициенты φ_j^i, $i \neq j$ ($\mathrm{char}\, P \neq 2$). Положим, далее

$\varphi_i^i = -f_{2i-n}^{i,i+1,i+1}$ при $i = \left[\frac{n}{2}\right]+1, \left[\frac{n}{2}\right]+2, \dots, n-2$ и $\varphi_{n-1}^{n-1} = f_1^{1,n-2,n-1}$.

Тогда, согласно (2I2.I), имеем:

$$(f_{1,2} - \delta\varphi)_{2i-n}^{i,i+1,i+1} = 0 \qquad (2I2.4)$$

и $$\left(f_{1,2} - \delta\varphi\right)_{1}^{1,n-2,n-1} = 0 . \qquad (2I2.5)$$

Тем самым запас кограниц мы исчерпали. Воспользуемся теперь уравнением (2.5). Подставляя в него $a=E_{i,i+d}$, $b=E_{j,n}$, $c=E_{k,n}$ для $0<d<n-3, 0<i<n-d, 3<j<k<n, j+k>n+d$, мы с учетом результатов п. I получаем:

$$f_{j+k-n+d}^{i,i+d,j} = f_{j+k-n-d}^{i,i+d,k} \qquad (2I2.6)$$

При $d=1; i=[\frac{n}{2}]+1,[\frac{n}{2}]+2,\dots,n-2; j=i; k=i+1$ из (2I2.6) и (2I2.4) вытекает, что

$$f_{2i-n}^{i,i+1,i} = 0 . \qquad (2I2.7)$$

Докажем с помощью двухступенчатой индукции (основной по k и дополнительной по d), что все коэффициенты $f_{l}^{i,i+d,k}$, $f_{l}^{k,n-1,n-1}$ при $k = 3,4,\dots, n-3$ равны нулю.

Подставляя в (2.4) $a=E_{3,n-2}$, $b=E_{n-2,n-1}$, $c=E_{n-2,n}$ получаем:

$$\left(-f_{1}^{3,n-2,n-2} + f_{1}^{n-2,n-1,3} + f_{1}^{3,n-1,n-2}\right) E_{1,n-1} = 0 .$$

Но $f_{1}^{3,n-2,n-2} = 0$ согласно (2I2.3), значит,

$$f_{1}^{n-2,n-1,3} = - f_{1}^{3,n-1,n-2} \qquad (2I2.8)$$

Далее, подстановка в (2.4) $a=E_{3,n-1}$, $b=E_{i,i+1}$, $c=E_{n-1,n}$ при $i = 1,2,\dots, n-2$ приводит нас к уравнению:

$$\Big(f_{1}^{i,i+1,n-1} + \delta_{i,1} f_{2}^{3,n-1,n-1} - \delta_{i,n-2} f_{1}^{3,n-1,n-1} -$$

$$- \delta_{i,n-2} f_{1}^{3,n-1,n-2} + f_{1}^{i,i+1,3} + \delta_{i,2} f_{1}^{2,n-1,n-1}\Big) E_{1,n-1} = 0 \qquad (2I2.9)$$

Кроме того, $f_{2}^{3,n-1,n-1} = f_{1}^{2,n-1,n-1} = 0$ (см. (2I2.3)), поэтому для $i = 1,2,\dots, n-3$ имеем: $f_{1}^{i,i+1,n-1} + f_{1}^{i,i+1,3} = 0$, что вместе с

(2I2.6) влечет:

$f_1^{i,i+1,3} = f_1^{i,i+1,n-1} = 0$ $(\mathrm{char}\, P \neq 2)$. При $i = n-2$ из (2I2.9) получаем:

$$f_2^{n-2,n-1,n-1} - f_1^{3,n-1,n-1} - f_1^{3,n-1,n-2} + f_1^{n-2,n-1,3} = 0,$$

что вместе с (2I2.8) и (2I2.6) приводит нас к равенствам:

$$f_1^{n-2,n-1,3} = f_1^{n-2,n-1,n-1} = 0, f_1^{3,n-1,n-2} = f_1^{3,n-1,n-1} = 0 \quad (\mathrm{char}\, P \neq 2).$$

Тем самым мы получили основание для первой индукции. Докажем, что при фиксированном k можно вести дополнительную индукцию по d. Подстановка в (2.4) $a = E_{k+1,n-1}, b = E_{i,i+1}, c = E_{n-1,n}$ при учете индуктивного предположения основной индукции дает:

$$0 = f_{k-1}^{i,i+1,n-1} E_{k-1,n-1} + \sum_{l=2}^{k} \delta_{i,l-1} f_l^{k+1,n-1,n-1} E_{l-1,l+n-k-1} - \sum_{l=1}^{k-1} \delta_{i,l+n-k-1} f_l^{k+1,n-1,n-1} E_{l,l+n-k} - \delta_{i,n-2} \sum_{l=1}^{k-1} f_l^{k+1,n-1,n-2} E_{l,l+n-k} + \sum_{l=1}^{k-1} f_l^{i,i+1,k+1} E_{l,l+n-k} \qquad (2I2.I0)$$

Сочетая это с (2I2.6), мы, благодаря тому, что характеристика поля у нас не равна 2, имеем:

$$f_l^{n-2,n-1,k+1} - f_l^{k+1,n-1,n-2} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,k-1. \qquad (2I2.II)$$

Подставляя же в (2.4) $a = E_{k+1,n-2}, b = E_{n-2,n-1}, c = E_{n-2,n}$ и учитывая (2I2.3), (2I2.6), мы получаем:

$$f_l^{n-2,n-1,k+1} + f_l^{k+1,n-1,n-2} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,k-4,k-3,k-1; \qquad (2I2.I2)$$

$$2 f_{k-2}^{n-2,n-1,k+1} + f_{k-2}^{k+1,n-1,n-2} = 0.$$

Из (2I2.II) и (2I2.I2) вытекает, что $f_{\ell}^{n-2,n-1,k+1} = 0$ при любом ℓ (char $P \neq 2,3$). Остается показать, что $f_{q}^{k+1,n-1,n-1} = 0$, $q = 1,2,\dots,k-2$. Обозначим $n-k+q-1$ через τ. Поскольку, согласно (2I2.6),

$$f_{q}^{k+1,n-1,n-1} = f_{q}^{k+1,n-1,\tau}, \tag{2I2.I3}$$

то в случае $2k-q > n-2$ данные коэффициенты равны нулю по предположению основной индукции. Если $2k-q \leq n-2$, то подставляя в (2.4) $a = E_{k+1,\tau+1}$, $b = E_{\tau+1,n-1}$, $c = E_{\tau,n}$ и собирая коэффициенты при $E_{q,n-1}$, имеем:

$$f_{q}^{k+1,\tau+1,\tau} - f_{q}^{k+1,n-1,\tau} = 0, \tag{2I2.I4}$$

что, согласно (2I2.I3), (2I2.6) равносильно равенству

$f_{q}^{k+1,n-1,n-1} = f_{q}^{k+1,\tau+1,\tau+1}$. Последний коэффициент при $2k-q = n-2$ равняется нулю в силу (2I2.4). Наконец, в случае $2k-q < n-2$ подставляя в (2.4) $a = E_{k+1,\tau}$, $b = E_{q,\tau+1}$, $c = E_{\tau,n}$ и собирая коэффициенты при $E_{q,\tau+1}$, получаем:

$$-f_{q}^{k+1,\tau,\tau} + f_{q}^{\tau,\tau+1,k+1} + f_{q}^{k+1,\tau+1,\tau} = 0.$$

Здесь первый коэффициент равняется нулю согласно (2I2.3), оставшееся же уравнение вместе с (2I2.I0), (2I2.I3) и (2I2.I4) над полем характеристики, не равной 2,3, влечет равенство нулю коэффициентов $f_{q}^{k+1,n-1,n-1}$. Сопоставляя (2I2.I0) и (2I2.6), теперь получаем, что нулю равны все $f_{\ell}^{i,i+1,k+1}$. Следовательно, у нас есть основание для второй индукции – по d. Подставляя в (2.4) $a = E_{i,i+d}$, $b = E_{i+d,i+d+1}$, $c = E_{k+1,n}$ для $i = 1,2,\dots,n-d-2$ и пользуясь обоими индуктивными предположениями, мы получаем, что $f_{1,2}(E_{i,i+d+1}, E_{k+1,n})_1 = 0$, завершая тем самым все индуктивное доказательство.

Таким образом, для полного определения компоненты $(f_{1,2})_1$ нам осталось найти коэффициенты $f_l^{i,i+d,n-2}, f_l^{i,i+d,n-1}$ при $d = 1,2,..,n-4;$ $i = 1,2,..,n-d-1$. Очевидно, и здесь достаточно найти коэффициенты в случае $d = 1$, а затем воспользоваться тем же индуктивным переходом, что и выше. Более того, из (2I2.6) вытекает, что нулю равны все координаты указанных коэффициентов, за исключением, может быть, последних двух, на которые налагаются следующие связи:

$$f_{n-4}^{i,i+1,n-2} = f_{n-4}^{i,i+1,n-1} \quad \text{при} \quad i = 1,2,\dots,n-3. \tag{2I2.I5}$$

Кроме того, согласно (2I2.3) - (2I2.5), имеем:

$$f_{n-3}^{n-2,n-1,n-1} = f_{n-4}^{n-2,n-1,n-1} = f_{n-4}^{n-2,n-1,n-2} = f_{n-5}^{n-3,n-2,n-2} = 0.$$

Сочетая (2I2.I5) с результатами подстановки в (2.4)

$a = E_{n-2,n-1}, b = E_{i,i+1}, c = E_{n-1,n}$ при $i = 1,2,\dots,n-3$ и

$a = E_{n-4,n-3}, b = E_{i,i+1}, c = E_{n-1,n}$ при $i = 1,2,\dots,n-6,n-5,n-3$

получаем:

$$\begin{gathered} f_{n-4}^{i,i+1,n-1} = f_{n-4}^{i,i+1,n-2} = 0; \quad i = 1,2,\dots,n-3 \\ f_{n-5}^{i,i+1,n-2} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,\dots,n-4 \\ f_{n-3}^{i,i+1,n-1} = 0 \; ; \quad i = 1,2,\dots, n-6 \\ f_{n-3}^{n-5,n-4,n-1} + f_{n-4}^{n-5,n-3,n-1} = 0, \; f_{n-3}^{n-3,n-2,n-1} - f_{n-4}^{n-4,n-2,n-1} = 0. \end{gathered} \tag{2I2.16}$$

Чтобы избавиться от последних четырех коэффициентов, достаточно сделать следующие две подстановки в (2.4)

$$a=E_{1,n-4}\ ,\ b=E_{n-5,n-3}\ ,\ c=E_{n-1,n}\ ,$$

$$a=E_{1,n-4}\ ,\ b=E_{n-4,n-2}\ ,\ c=E_{n-1,n}\ ,$$

учесть (2I2.5) и сравнить полученные уравнения с (2I2.6). (При n = 5 необходимость во второй подстановке отпадает.) Итак, единственные коэффициенты компоненты $(f_{12})_1$, которые у нас еще не определены, это $f^{n-4,n-3,n-1}_{n-3}$ и $f^{n-2,n-1,n-2}_{n-5}$.

Оказывается, что они, как раз, не всегда обязаны равняться нулю. Действительно, единственные условия, которые на них налагаются, вытекают из подстановок в (2.4):

$$a=E_{n-5,n-3}\ ,\ b=E_{n-4,n-3}\ ,\ c=E_{n-1,n}\text{и}$$

$$a=E_{n-6,n-5}\ ,\ b=E_{n-2,n-1}\ ,\ c=E_{n-2,n}\ .$$

Но эти подстановки допустимы лишь при $n > 5$ и $n>6$, соответственно. Тем самым мы получаем нетривиальные коциклы g_1 и g_5, определенные в формулировке теоремы 2.I.

3. $(f_2)_1$. Как видно из соотношений (2.8) - (2.I2), эта компонента не затрагивается кограницами, поэтому если она является коциклом, то обязательно нетривиальным. С таким примером мы сталкиваемся в первом случае наличия данной компоненты - в алгебре A_4, когда единственное отображение указанного типа - g_3 очевидно удовлетворяет уравнениям полученным из (2.6) всевозможными подстановками, поскольку $L'\cap L^4=\{0\}$. Пусть теперь $n>5$.

$$f_2(E_{i,n}, E_{j,n})_1 = \sum_{\ell=1}^{i+j-n-1} f_\ell^{i,j} E_{\ell,\ell+2n-i-j}$$

для $2<i<j<n$, $i+j>n+1$. Докажем сначала, что равен нулю коэффициент $f_1^{n-2,n-1}$. Подставляя в (2.6) $a=E_{4,5}, b=E_{n-2,n}$, $c=E_{n-1,n}$ и собирая коэффициенты при элементе $E_{1,5}$, имеем:

$$f_1^{n-2,n-1} + \delta_{n,7} f_1^{4,6} = 0. \qquad (2I3.I)$$

Чтобы убедиться в справедливости нашего утверждения при n = 7, подставим дополнительно в (2.6): $a=E_{4,6}, b=E_{5,7}, c=E_{6,7}$ и в (2.7): $a=E_{4,7}, b=E_{5,7}, c=E_{6,7}$. Получаем уравнения

$$f_1^{5,6} - f_1^{4,5} = 0 \quad \text{и} \quad f_1^{4,5} + f_1^{5,6} - f_1^{4,6} = 0 ,$$

которые вместе с (2I3.I) образуют независимую систему, поскольку по предположению $\mathrm{char}\, P \neq 3$.

Далее, индукцией по ℓ легко доказывается, что все $f_\ell^{n-2,n-1}$ равны нулю. Для этого достаточно сделать в (2.6) подстановку: $a=E_{\ell,\ell+1}, b=E_{n-2,n}, c=E_{n-1,n}$. Полученный результат дает нам возможность индукцией по убывающему индексу i доказать равенство $f_\ell^{i,i+1}=0$. Действительно, подставляя в (2.6): $a=E_{i-1,i+1}$, $b=E_{i,n}, c=E_{i+1,n}$, имеем:

$$f_2(E_{i-1,n}, E_{i,n})_1 = [\, f_2(E_{i,n}, E_{i+1,n})_1 , E_{i-1,i+1} \,].$$

А из того, что $f_2(E_{i,n}, E_{i+1,n})_1 = 0$ при любом i , сразу вытекает, что вся компонента $(f_2)_1$ будет нулевой. Достаточно подставить в (2.6): $a=E_{i,i+1}, b=E_{i+1,n}, c=E_{i+d,n}$ и применить индукцию по d .

4. $(f_1)_2$. Пусть $(f_1)_2(E_{i,j}, E_{k,\ell}) = f^{i,j,k,\ell} E_{n+i+k-j-\ell,n}$ при $0<i<j<n$, $0<k<\ell<n$, $i \leq k$ & $(i=k \Rightarrow j<\ell)$, $j-i+\ell-k<n$, а 1-коцепь φ, согласно (2.9), определим следующим образом:

$$\varphi(E_{i,j}) = \varphi^{i,j} E_{n+i-j,n} \qquad \text{для} \quad 0<i<j<n,\ i-j<n.$$

Тогда:

$$(\delta\varphi)(E_{i,j}, E_{k,\ell}) = -\delta_{\ell,n+i-j}\varphi^{i,j}E_{k,n} + \delta_{j,n+k-\ell}\varphi^{k,\ell}E_{i,n} - \delta_{j,k}\varphi^{i,\ell}E_{n+i-\ell,n}$$

и полагая:

$$\left.\begin{array}{l} -\varphi^{i,i+1} + \varphi^{i,n-1} = f^{i,i+1,i,n-1} \\ -\varphi^{i,i+1} - \varphi^{i,n-1} = f^{i,i+1,i+1,n-1} \end{array}\right\} \text{при} \quad i=1,2,\dots,n-3;$$

$$\varphi^{i,j} = -f^{i,i+1,i+1,j} \qquad \text{при} \quad 1<i+1<j<n-1;$$

$$\varphi^{n-2,n-1} = -f^{1,n-1,n-2,n-1},$$

мы добъемся равенства нулю указанных коэффициентов у коцикла $(f_1-\delta\varphi)_2$. Наша первая цель доказать, что $f^{i,i+1,j,j+1}=0$ при $j=2,3,\dots,n-2$; $i=1,2,\dots j-1$. Для этого достаточно сделать в (2.2) подстановки: $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{j,j+1}$, $c=E_{i,n-2}, E_{i+1,n-2}$ и сложить полученные равенства ($\mathrm{char}\, P \neq 2$). Определим, далее, коэффициенты $f^{i,i+1,j,j+2}$. Если $j \neq i-1, i, i+1$, то подставляя в (2.2): $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{j,j+1}$, $c=E_{j+1,j+2}$, сразу получаем, что $f_1(E_{i,i+1}, E_{j,j+2})_2=0$. Из подстановок в (2.2):

$a=E_{1,n-3}$, $b=E_{n-3,n-1}$, $c=E_{n-2,n-1}$ и $a=E_{n-4,n-3}$, $b=E_{n-4,n-2}$, $c=E_{n-3,n-2}$

вытекает, что $f^{n-2,n-1,n-3,n-1}=0$, $f^{n-3,n-2,n-4,n-2}=0$, соответственно.

Подставляя в (2.2):

$$a=E_{i,i+1}, b=E_{i-1,i+1}, c=E_{1,n-3} ; i=3,4,\dots, n-4 \text{ при } n\geq 7$$

$$\text{и } a=E_{i,i+1}, b=E_{i,i+2}, c=E_{1,n-3} ; i=2,3,\dots, n-4 \text{ при } n\geq 6$$

имеем равенство нулю коэффициентов $f^{i,i+1,i-1,i+1}$, $f^{i,i+1,i,i+2}$ при указанных i. Если проделать первую подстановку при $i=2$, а вторую при i = I, то получим уравнения:

$$f^{2,3,1,3}+f^{1,n-3,2,3}=0 , f^{1,2,1,3}+f^{1,n-3,1,2}=0 . \qquad (2I4.I)$$

Сочетая (2I4.I) с результатами подстановок в (2.2):

$$a=E_{2,3} , b=E_{1,3} , c= E_{2,n-3} , E_{3,n-3} ;$$

$$a=E_{1,2} , b=E_{1,3} , c= E_{3,n-3}$$

и учитывая, что характеристика поля у нас отлична от 2,3, получаем, что при $n\geq 7$: $f^{2,3,1,3}=f^{1,2,1,3}=0$. В случае n = 6 равенство нулю последнего коэффициента вытекает из подстановки в (2.2): $a=E_{1,2}$, $b=E_{1,3}$, $c=E_{2,3}$. При n = 5 коэффициент $f^{1,2,1,3}$ может быть произвольным, равно как и коэффициент $f^{2,3,1,3}$ в случае n = 6. Тем самым мы приходим к нетривиальным коциклам g_2 и g_4. Теперь, подставляя при $i\neq j-1,j,j+1$ в (2.2): $a=E_{i,i+1}, b=E_{j,j+1}, c=E_{j+1,j+3}$, получаем, что $f^{i,i+1,j,j+3}=0$.

Подстановки

$$a=E_{i,i+1} , (b,c)=(E_{i-1,i}, E_{i,i+2}),(E_{i-1,i+1}, E_{i+1,i+2}),(E_{i,i+2}, E_{i+2,i+3})$$

приводят нас к тому же результату при $j=i-1,i$. Применяя индукцию по d , докажем, что $f^{i,i+1,j,j+d}$ = 0 для любого d .

Основание для такой индукции у нас есть, возможность индуктивного перехода вытекает из подстановки в (2.2):

$a=E_{i,i+1}$, $b=E_{j,j+1}$, $c=E_{j+1,j+d+1}$ при $i\neq j-1, j, j+1$;

и $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{j,j+d}$, $c=E_{j+d,j+d+1}$, когда $i=j, j+1$. Опираясь на последний результат мы в состоянии закончить исследование компоненты $(f_1)_2$. Применяя снова индукцию по d, мы получаем, что все $f^{i,i+d,k,l}$ равны нулю. Индуктивный переход нам обеспечивает подстановка в (2.2): $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{i+1,i+d+1}$, $c=E_{k,l}$.

5. $(f_1)_1$, $(f_{1,2})_2$. Заметим, прежде всего, что согласно (2.I), (2.8) $(f_1)_1 \in H^2_{gr}(L,L)$ для $\mathcal{L}=A_{n-2}$. Поэтому, если нам при фиксированном n' удастся доказать, что $(f_{1,2})_2 = 0$, то на основании результатов предыдущих четырех пунктов и, в случае $n' = 5,6$, дополнительных подстановок в (2.3): $a=E_{1,2}$, $b=E_{4,5}$, $c=E_{4,6}$;

$a=E_{1,2}$, $b=E_{1,3}$, $c=E_{5,6}$; $a=E_{3,5}$, $b=E_{4,5}$, $c=E_{4,6}$ и

$a=E_{1,3}$, $b=E_{2,3}$, $c=E_{6,7}$; $a=E_{4,5}$, $b=E_{4,6}$, $c=E_{4,7}$, соответственно, автоматически получим, что $(f_1)_1 = 0$ в случае $n=n'+1$. С другой стороны, действуя индукцией по n, не пользуясь указанными выше подстановками в (2.3) и I-коцепями φ, для которых $(\delta\varphi)_1\neq 0$, мы при вычислении компоненты $(f_{1,2})_2$ можем первое слагаемое в (2.3) всегда считать равным нулю. Очевидно, при $n = 3$ единственный ненулевой коцикл $f_0 : (E_{1,2}, E_{2,3}) \mapsto E_{1,3}$ является хограницей, так что основание для указанной индукции у нас есть. Докажем возможность индуктивного перехода.

Пусть

$$f_{1,2}(E_{i,j}, E_{k,n})_2 = f^{i,j,k} E_{i+k-j,n} \quad \text{при } 0<i<j<n,\ j-i<k<n$$

и $\varphi(E_{i,n})=\varphi^{i}E_{i,n}$, $i=1,2,\dots,n-1$, а при $n = 4$ также

$\varphi(E_{1,2})=\varphi^{1,2}E_{2,3}$, $\varphi(E_{2,3})=\varphi^{2,3}E_{1,2}$.

Тогда, полагая $\varphi^{i+1}-\varphi^{i}=f^{i,i+1,i+1}$, $i=1,2,\dots,n-2$ и $\varphi^{1,2}=f^{1,2,3}$, $\varphi^{2,3}=f^{2,3,2}$, мы согласно (2.II) имеем: $(f_{1,2}-\delta\varphi)_2(E_{i,i+1},E_{i+1,n})=0$, а при $n = 4$ кроме того: $(f-\delta\varphi)^{1,2,3}=(f-\delta\varphi)^{2,3,2}=0$. Легко видеть, что из равенства нулю всех коэффициентов вида $f^{i,i+1,k}$, вытекает, что $(f_{1,2})_2 = 0$. Это можно доказать индукцией по d, подставляя в (2.3): $a=E_{i,i+d}$, $b=E_{i+d,i+d+1}$, $c=E_{k,n}$. Поэтому нам достаточно доказать, что указанные коэффициенты равняются нулю. Подставляя в (2.3): $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{k,n-1}$, $c=E_{n-1,n}$; $i=2,3,\dots,n-3$, $k=2,3,\dots,i$ получаем, что $f^{i,i+1,k} = 0$ при этих значениях i,k. Подстановки

$a=E_{n-2,n-1}$, $b=E_{k,k+1}$, $c=E_{k+1,n}$; $k=2,3,\dots,n-4$

$a=E_{n-2,n-1}$, $b=E_{n-3,n-2}$, $c=E_{n-2,n}$;

$a=E_{n-2,n-1}$, $b=E_{n-3,n-1}$, $c=E_{n-1,n}$;

$a=E_{n-2,n-1}$, $b=E_{n-4,n-3}$, $c=E_{n-2,n}$,

показывеют, что $f^{n-2,n-1,k} = 0$ при $k=2,3,\dots,n-2$. Далее, подставляя в (2.3): $a=E_{i,i+1}$, $b=E_{k,k+1}$, $c=E_{k+1,n}$; $0<i<n-3$, $i+1<k<n-1$, мы убеждаемся, что $f^{i,i+1,k} = 0$ и для этих значений индексов i,k. Наконец, чтобы доказать равенство нулю оставшихся пока неопределенными коэффициентов $f^{i,i+1,n-1}$ достаточно подставить в (2.3):

$a=E_{i,i+1}$, $b=E_{n-3,n-2}$, $c=E_{n-1,n}$; $i=1,2,\dots,n-5$

$a=E_{n-3,n-2}$, $b=E_{1,n-2}$, $c=E_{n-1,n}$;

$a=E_{n-4,n-3}$, $b=E_{1,n-2}$, $c=E_{n-1,n}$

и при $n = 5$ дополнительно: $a=E_{1,2}$, $b=E_{2,3}$, $c=E_{4,5}$. Таким образом, мы получили равенство нулю компоненты $(f_{1,2})_2$ и тем самым завершили доказательство утверждения теоремы 2.I, относящегося к локальным деформациям.

Рассмотрим теперь произвольные элементы группы $H^2_{gr}(L,L)$ для $\mathcal{L}=A_4, A_5$: $h_1=\alpha g_1+\beta g_2+\gamma g_3$, $h_2=\alpha g_4+\beta g_5$. Они, очевидно, удовлетворяют условию (I.2) при $f_1=h_i$, $f_j=0$, $j>1$ и, следовательно, имеют тривиальные продолжения. Нас интересует, сколько неэквивалентных деформаций алгебры L можно получить, когда константы α, β, γ пробегают все элементы поля P.

6. $\mathcal{L}=A_4$. Пусть $L(\alpha,\beta,\gamma)$ алгебра Ли с базисом $E_{i,j}$, $1\le i<j\le 5$ и таблицей умножения:

$[\downarrow, \rightarrow]$	$E_{2,3}$	$E_{3,4}$	$E_{4,5}$	$E_{1,3}$	$E_{2,4}$	$E_{3,5}$	$E_{1,4}$	$E_{2,5}$
$E_{1,2}$	$E_{1,3}$	0	$\alpha E_{2,4}$	$\beta E_{2,5}$	$E_{1,4}$	0	0	$E_{1,5}$
$E_{2,3}$		$E_{2,4}$	0	0	0	$E_{2,5}$	0	0
$E_{3,4}$			$E_{3,5}$	$-E_{1,4}$	0	0	0	0
$E_{4,5}$				0	$-E_{2,5}$	$\gamma E_{1,4}$	$-E_{1,5}$	0
$E_{1,3}$					0	$E_{1,5}$	0	0

(остальные коммутаторы равны нулю).

Предположим, что $L(\alpha',\beta',\gamma')\cong L(\alpha,\beta,\gamma)$, и пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_{10}\}$ будет базисом алгебры $L(\alpha',\beta',\gamma')$, в котором она имеет те же структурные константы, что и алгебра $L(\alpha,\beta,\gamma)$ в стандартном базисе, указанном выше. Выражая элементы e_k через $E_{i,j}$, $1\le i<j\le 5$, и решая полученную систему квадратичных уравнений, мы видим, что решение существует всего в двух случаях:

$\alpha'=\mu\alpha, \beta'=\nu\beta, \gamma'=\frac{\mu}{\nu}\gamma$ и $\alpha'=\mu\alpha, \beta'=\nu\gamma, \gamma=\frac{\mu}{\nu}\beta$, где μ, ν - произвольные ненулевые элементы поля P. Отсюда вытекает, что алгебры $L(\alpha,\beta,\gamma)$ и $L(\alpha',\beta',\gamma')$ могут быть изоморфнимы только тогда, когда константы α, α' одновременно равны 0 или отличны от 0, и множества $\{\beta,\gamma\}$, $\{\beta',\gamma'\}$ содержат одинаковое количество ненулевых элементов. Если $\alpha\beta\gamma \neq 0$, то из того, что $L(\alpha',\beta',\gamma') \cong L(\alpha,\beta,\gamma)$, следует равенство: $\frac{\alpha'}{\beta'\gamma'} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$. Значит, $L(\alpha,\beta,\gamma) \cong L(\frac{\alpha}{\beta\gamma},1,1) \ncong L(\alpha',1,1)$ при $\alpha' \neq \frac{\alpha}{\beta\gamma}$. Далее: $L(\alpha,0,0) \cong L(1,0,0)$, $L(\alpha,\beta,0) \cong L(\alpha,0,\gamma) \cong L(1,1,0)$,

$L(0,\beta,\gamma) \cong L(0,1,1)$ и $L(0,\beta,0) \cong L(0,0,\gamma) \cong L(0,1,0)$

при любых ненулевых элементах $\alpha,\beta,\gamma \in P$. Следовательно, число неэквивалентных деформаций равно $|P| + 4$.

7. $\mathcal{L} = A_5$. Действуя так же, как и в предыдущем пункте, получаем, что $L(\alpha',\beta') \cong L(\alpha,\beta)$ тогда и только тогда, когда множества $\{\alpha,\beta\}$, $\{\alpha',\beta'\}$ содержат одинаковое число ненулевых элементов. Другими словами: $L(\alpha,\beta) \cong L(1,1)$ и $L(\alpha,0) \cong L(0,\beta) \cong$ $\cong L(0,1)$ для любых $\alpha,\beta \in P\setminus\{0\}$. Поэтому, деформируя L над основным полем, мы получим ровно три неизоморфные алгебры. Тем самым теорема 2.I нами полностью доказана.

§2. Тип C_n.

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{L}=C_n$. Тогда для второй группы градуированных когомологий алгебры L имеем:

$$\dim H^2_{gr}(L,L)=\begin{cases}0, \text{ если } n\neq 3,\ 4\\ \text{I при } n=3,\ 4\end{cases}.$$

Каждый из коциклов g_6, g_7, являющихся образующими группы $H^2_{gr}(L,L)$ в случаях $n=3$, 4, действует ненулевым образом только на одну пару базисных элементов, а именно:

$$g_6(E_{2,3}-E_{6,5}, E_{1,3}-E_{6,4})=E_{5,2},\ g_7(E_{2,3}-E_{7,6}, E_{2,4}-E_{8,6})=E_{6,2}.$$

Локальные деформации g_6, g_7 имеют тривиальные продолжения, а при специализации параметра t на основное поле мы в каждом случае получаем единственную, с точностью до изоморфизма, алгебру не изоморфную исходной.

Доказательство. Как и в предыдущем параграфе, нам для нахождения локальных деформаций придется изучать по отдельности каждую компоненту произвольного коцикла $f\in H^2_{gr}(L,L)$. Чтобы сделать вычисления менее громоздкими, введем для стандартного базиса алгебры L следующие обозначения:

$$E_{i,j}-E_{n+j,n+i}=e_{i,j}\ ,E_{n+i,i}=e_{i,i}\ ,\ E_{n+i,j}+E_{n+j,i}=e_{i,j}$$

Таким образом, $L=\langle e_{i,j}\mid 1\leq i,j\leq n\rangle$.

I. $(f_1)_1$. Поскольку подалгебра L' изоморфна рассмотренной выше нильпотентной части алгебры A_{n-1}, то на основании соотношений (2.I), (2.8) и теоремы 2.I мы можем утверждать, что единственными нетривиальными коциклами указанного вида могут быть отображения $\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\tilde{g}_3$ при $n=5$ и $\tilde{g}_4$, $\tilde{g}_5$ при $n=6$, каждое из которых отлично от нуля только на одной паре базисных элементов:

$$\tilde{g}_1\,(e_{1,2}, e_{4,5}) = \alpha_1\, e_{2,4}\,, \qquad \tilde{g}_2\,(e_{1,2}, e_{1,3}) = \alpha_2\, e_{2,5}\,,$$

$$\tilde{g}_3\,(e_{4,5}, e_{3,5}) = \alpha_3\, e_{1,4}\,, \qquad \tilde{g}_4\,(e_{2,3}, e_{1,3}) = \alpha_4\, e_{3,6}\,,$$

$$\tilde{g}_5\,(e_{4,5}, e_{4,6}) = \alpha_5\, e_{1,4}\,.$$

Но подставляя в (2.3): $a = e_{1,2}\,,\ b = e_{4,5}\,,\ c = e_{3,2}\,;$ $a = e_{1,2}\,,\ b = e_{1,3}\,,\ c = e_{4,2}\,;$ $a = e_{3,5}\,,\ b = e_{4,5}\,,\ c = e_{1,1}\,;$ $a = e_{1,3}\,,\ b = e_{2,3}\,,\ c = e_{4,3}\,;$ $a = e_{4,5}\,, b = e_{4,6}\,,\ c = e_{1,1}\,,$ мы немедленно убеждаемся в том, что отображения $\tilde{g}_1 - \tilde{g}_5$ не являются коциклами. Значит, $(f_1)_1 = 0$.

2. $(f_2)_1$. Докажем, что эта компонента коцикла f также всегда равняется нулю. Во-первых, подставляя в (2.7):

$$a = e_{1,1}\,,\ b = e_{2,1}\,,\ c = e_{n-i,i}\ ;\ i = 1, 2, \ldots, \left[\tfrac{n-1}{2}\right],$$ а при $n \geqslant 6$

дополнительно: $a = e_{1,1}\,, b = e_{2,1}\,,\ c = e_{i+2\left(\left[\frac{n+2}{2}\right] - \frac{n}{2}\right), i}\,;\ i = \left[\frac{n+1}{2}\right], \left[\frac{n+3}{2}\right], \ldots, n-3,$

мы получаем, что $f_2(e_{1,1}, e_{2,1})_1 = 0$. Далее, подстановка в (2.7): $a = e_{2,1}\,, b = e_{2,2}\,,\ c = e_{4,1}$ при $n = 6$ и подстановки: $a = e_{2,1}\,, b = e_{2,2}\,,$

$$c = e_{n-i-1,i}\,,\ e_{j+2\left(\frac{n+1}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]\right), j}\ ;\quad 0 < i < \left[\tfrac{n}{2}\right] \leqslant j \leqslant n-5 \quad (n \geq 7),$$

приводят нас к равенству: $f_2(e_{2,1}, e_{2,2})_1 = 0$. Подставляя же в (2.6): $a = e_{12}\,, b = e_{1,1}\,,\ c = e_{2,1}$, мы имеем:

$$f_2\,(e_{1,1}\,, e_{2,2})_1 = 0\,. \tag{222.I}$$

Наша следующая цель - доказать, исходя из (222.I), индукцией по i, что $f_2(e_{1,1}, e_{i,i})_1 = 0$; $i = 2, 3, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Чтобы обосновать индуктивный переход, достаточно подставить в (2.6):

$$a = e_{i,i+1}\,,\ b = e_{1,1}\,,\ c = e_{i,i}\,,\ e_{i+1,i}\,.$$

Теперь мы в состоянии индукцией по m доказать, что $f_2(e_{i,j}, e_{k,l})_1 = 0$, когда $i,k \leq m$. Тем самым мы получим, что вся компонента $(f_2)_1$ равна нулю. Подставляя при $i \leq m-1$ в (2.6): $a = e_{m,m+1}$, $b = e_{i,j}$, $c = e_{m,l}$; $l = 1,2,\dots,m$, мы имеем: $f_2(e_{i,j}, e_{m+1,l})_1 = 0$. Подстановки: $a = e_{m-1,m+1}$, $b = e_{m,j}$, $c = e_{m-1,l}$; $l = 1,2,\dots,m-2$ приводят нас к равенству: $f_2(e_{m,j}, e_{m+1,l})_1 = 0$. Далее, подставляя в (2.6): $a = e_{1,j}$, $b = e_{i,1}$, $c = e_{m+1,m+1}$; $j = 2,3,\dots,m+1$, $i = 1,2,\dots,m$, мы получаем, что $f_2(e_{k,l}, e_{m+1,m+1})_1 = 0$ при $k \leq m+1$, а подстановки: $a = e_{1,m}$, $b = e_{1,1}$, $c = e_{m+1,m}$; $a = e_{1,j}$, $b = e_{m,1}$, $c = e_{m+1,m}$; $j = 2,3,\dots,m$, показывают, что $f_2(e_{m,l}, e_{m+1,m})_1 = 0$.

Наконец, из подстановки в (2.6): $a = e_{m,m+1}$, $b = e_{m+1,j}$, $c = e_{m,l}$; $j = 1,2,\dots,l-1$, $l = 2,3,\dots,m$ вытекает равенство:

$$f_2(e_{m+1,j}, e_{m+1,l})_1 = 0 .$$

3. $(f_{1,2})_2$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,j}, e_{k,l}) = \sum_{s=1}^{\left[\frac{k+j+l-i}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l} e_{k+j+l-i-s,s}$$

при $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq l \leq k \leq n$, $k+j+l-i \leq 2n$ и

$$\varphi(e_{i,j}) = \sum_{s=1}^{\left[\frac{k+l}{2}\right]} \varphi_s^{i,j} e_{k+l-s,s}$$

для $1 \leq l \leq k \leq n$. Тогда, согласно (2.II):

$$\delta\varphi(e_{i,j}, e_{k,l})_2 = \sum_{s=1}^{\left[\frac{k+l}{2}\right]} \varphi_s^{k,l} [e_{i,j}, e_{k+l-s,s}] + \delta_{i,k} \varphi(e_{k+j-i,l})_2 +$$

$$+ \delta_{i,l}(1-\delta_{k,l}) \varphi(e_{\max\{k,j\}, \min\{k,j\}})_2$$

и выбирая надлежащим образом коэффициенты $\varphi_s^{k,l}$, мы получим:

$f_{1,2}(e_{i,i+1}, e_{k,i})_2 = 0$ при $2 \leq i+1 \leq k \leq n$ и

$f_{1,2}(e_{1,j}, e_{1,1})_2 = 0$ для $2 \leq j \leq n$.

Замечая далее, что в случае $n = 3$ для $\psi_1(e_{i,j}) = \delta_{i,2}\delta_{j,3}\alpha_1 e_{1,2}$ и $\psi_2(e_{i,j}) = \delta_{i,1}\delta_{j,2}\alpha_2 e_{2,3}$ кограницы $\delta\psi_1, \delta\psi_2$ равны 0 на $L' \times L'$ и полагая:

$$\alpha_1 = -f_1^{2,3,1,1}, \quad \alpha_2 + \varphi_1^{2,2} = -f_2^{1,2,2,2}, \quad \alpha_2 - \varphi_1^{2,2} = -f_1^{1,2,2,1},$$

мы в этом случае дополнительно имеем:

$$f_1^{2,3,1,1} = f_2^{1,2,2,2} = 0. \qquad (223.I)$$

Докажем теперь, что вся компонента $(f_{1,2})_2$ равняется нулю.

Подставляя при $n \geq 4$ в (2.3): $a = e_{2,n}, b = e_{i,i+1}, c = e_{1,1}$; $i = 2,3,\ldots,n-1$ и $a = e_{2,n-1}, b = e_{n-1,n}, c = e_{1,1}$, мы получаем, что

$$f_1^{i,i+1,1,1} = 0 \qquad (\mathrm{char}\, P \neq 2). \qquad (223.2)$$

Из (223.I), (223.2) и подстановок в (2.3): $a = e_{1,j}, b = e_{i,i+1}, c = e_{1,1}$; $i = 2,3,\ldots,n-1$, $j = 2,3,\ldots,n$, вытекает, что

$$f_s^{i,i+1,j,1} = 0. \qquad (223.3)$$

Подставляя в (2.3): $a = e_{i,1}, b = e_{i,i+1}, c = e_{k,1}$; $i = 2,3,\ldots,n-1$, $k = i+1, i+2, \ldots, n$, мы с учетом (223.3) имеем:

$$f_s^{1,i+1,k,1} = 0. \qquad (223.4)$$

Теперь подстановки $a = e_{1,k}, b = e_{1,j}, c = e_{1,1}$; $2 \leq k < j \leq n$ приводят нас к равенству:

$$f_{1,2}(e_{1,j}, e_{k,1})_2 = 0. \qquad (223.5)$$

Исходя из (223.3) мы индукцией по $j-i$ получаем, что

$$f_s^{i,j,1,1} = 0, \quad 2 \leq i < j \leq n. \qquad (223.6)$$

Подстановки в (2.3): $a=e_{1,k}$, $b=e_{i,j}$, $c=e_{1,1}$; $k=2,3,\dots,n$, $2\le i<j\le n$ и равенства (223.5), (223.6) показывают, что

$$f_s^{i,j,k,1}=0 . \qquad (223.7)$$

Из (223.7) и подстановок в (2.3): $a=e_{1,k}$, $b=e_{i,j}$, $c=e_{l,1}$; $k=2,3,\dots,n$, $l=k,k+1,\dots,n$, $2\le i<j\le n$, вытекает, что

$f_s^{i,j,l,k}=0$ при указанных значениях индексов i,j,k,l.

Подстановки: $a=e_{1,2}$, $b=e_{4,5}$, $c=e_{2,2}$ при $n\ge 5$

$a=e_{1,2}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,2}$ при $n\ge 4$

$a=e_{1,2}$, $b=e_{1,3}$, $c=e_{2,2}$ при $n=4$

и (223.I) вместе дают: $f_{1,2}(e_{1,2},e_{2,2})_2=0$.

Подставляя в (2.3): $a=e_{1,2}$, $b=e_{2,k}$, $c=e_{2,2}$ и

$a=e_{1,2}$, $b=e_{1,k}$, $c=e_{l,1}$; $l=2,3,\dots,n$, $k=l,l+1,\dots,n$,

получаем, что $f_s^{1,2,k,l}=0$.

Наконец, подстановки: $a=e_{1,2}$, $b=e_{2,j}$, $c=e_{k,l}$; $j=3,4,\dots,n$, $2\le l<k\le n$, показывают, что и $f_s^{1,j,k,l}=0$.

4. $(f_1)_2$. Пусть

$$f_1(e_{i,j},e_{k,l})_2=\sum_{s=1}^{\left[\frac{j+l-i-k+1}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l}\, e_{j+l-i-k-s+1,s}$$

при $1\le i<j\le n$, $1\le k<l\le n$, $i\le k$ & $(i=k\Rightarrow j<l)$,

и $\varphi(e_{i,j})=\sum\limits_{s=1}^{\left[\frac{j-i+1}{2}\right]}\varphi_s^{i,j}\, e_{j-i-s+1,s}$ для $1\le i<j\le n$.

Тогда, выбирая подходящим образом коэффициенты $\varphi_1^{1,2}$, $\varphi_1^{1,3}$, $\varphi_1^{2,3}$, $\varphi_1^{i,i+1}$; $i=3,4,\dots,n-1$, $\varphi_s^{1,j}$; $j=4,5,\dots,n$, $\varphi_s^{i,j}$; $4\le i+2\le j\le n$, и вычитая из коцепи f кограницу $\delta\varphi$, мы можем добиться того, чтобы

$$f_1(e_{1,2}, e_{1,3})_2 = f_1(e_{1,2}, e_{i,i+1})_2 = f_1(e_{i,i+1}, e_{i+1,j}) = 0$$

при указанных значениях индексов i, j. Докажем сначала, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{j,j+1})_2 = 0$ при $2 \leq i < j-1 \leq n-2$ ($n \geq 5$). Подставляя в (2.2): $a = e_{2,3}$, $b = e_{i,i+1}$, $c = e_{1,2}, e_{1,3}$; $i = 4, 5, \ldots, n-1$, мы получим: $f_1^{2,3,i,i+1} = 0$. При $n \geq 6$ дополнительные подстановки $a = e_{1,2}$, $b = e_{i,i+1}$, $c = e_{j,j+1}$; $3 \leq i < j-1 \leq n-2$ показывают, что и все остальные $f_1^{i,i+1,j,j+1}$ равняются нулю. Рассмотрим теперь коэффициенты $f_s^{i,i+1,i,i+2}$; $i = 2, 3, \ldots, n-2$, $s = 1, 2$. Подставляя при $n \geq 5$ в (2.2) $a = e_{2,3}$, $b = e_{2,4}$, $c = e_{2,5}$, имеем: $f_2^{2,3,2,4} = 0$.

При $n = 4$ на этот коэффициент никакие условия не налагаются и мы приходим к нетривиальному коциклу g_7. Далее, из подстановки в (2.2): $a = e_{2,3}$, $b = e_{3,4}$, $c = e_{2,4}$, вытекает, что $f_1^{2,3,2,4} = 0$. Подставляя в (2.2): $a = e_{1,i}$, $b = e_{i,i+1}$, $c = e_{i,i+2}$; $i = 3, 4, \ldots, n-2$, получаем: $f_1^{i,i+1,i,i+2} = 0$, а подстановки:

$a = e_{2,3}$, $b = e_{i,i+1}$, $c = e_{i,i+2}$; $i = 4, 5, \ldots, n-2$,

$a = e_{3,4}$, $b = e_{3,5}$, $c = e_{2,4}, e_{2,5}$

показывают, что и все $f_2^{i,i+1,i,i+2}$ равны нулю ($\operatorname{char} P \neq 3$).

Похожая картина наблюдается в случае коэффициентов вида $f_s^{i,i+1,i-1,i+1}$; $i = 2, 3, \ldots, n-1$, $s = 1, 2$. Если подставить в (2.2) $a = e_{1,3}$, $b = e_{2,3}$, $c = e_{1,2}, e_{2,4}$, то получим равенства нулю коэффициентов $f_1^{2,3,1,3}$, $f_2^{2,3,1,3}$. В случае $n = 3$ последняя подстановка неприменима и возникает нетривиальный коцикл q_6. Подставляя же в (2.2):

$a=e_{i,i+1}$, $b=e_{i-1,i+1}$, $c=e_{1,2}, e_{2,3}$; $i=3,4,\dots,n-1$

и $a=e_{3,4}$, $b=e_{2,4}$, $c=e_{1,3}$, $e_{1,4}$, мы убеждаемся в том, что $f_1^{i,i+1,i-1,i+1} = f_2^{i,i+1,i-1,i+1} = 0$ для указанных индексов i.

Теперь в случае $n \geq 4$ индукцией по $l-k$ получаем, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,l})_2 = 0$, когда $1 \le k < l \le i$ или $i+1 \le k < l \le n$. Далее, из того, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{i,i+2})_2 = 0$ и из подстановок в (2.2): $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{i,j}$, $c=e_{j,j+1}$; $1 \le i \le j-2 \le n$, вытекает: $f_1(e_{i,i+1}, e_{i,j})_2 = 0$. Подстановки $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{j,i+1}$, $c=e_{j-1,j}$; $1 \le j < i \le n-1$ показывают, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{j,i+1})_2 = 0$. Подставляя в (2.2): $a=e_{i,i+1}$, $(b,c)=(e_{i-1,i}, e_{i,i+2}), (e_{i-1,i+1}, e_{i+1,i+2})$,

имеем: $f_1(e_{i,i+1}, e_{i-1,i+2})=0$; $2 \le i \le n-2$, а затем из подстановок:

$a=e_{i,i+1}$, $b=e_{j-1,j}$, $c=e_{j,i+2}$; $i=3,4,\dots,n-2$, $j=i-1,i-2,\dots,2$

находим: $f_1(e_{i,i+1}, e_{j-1,i+2})_2 = 0$.

Наконец, из подстановок в (2.2): $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{j,k}$, $c=e_{k,k+1}$; $i=2,3,\dots,n-3$, $j=1,2,\dots,i-1$, $k=i+2,i+3,\dots,n-1$, следует, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,l})_2 = 0$ при любых значениях индексов i,k,l, откуда индукцией по $j-i$ немедленно получаем, что $f_1(e_{i,j}, e_{k,l})_2$ всегда равно 0.

5. $(f_{1,2})_1$, $(f_2)_2$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,j}, e_{k,l}) = \sum_{s=1}^{n+i-j-k-l+1} f_s^{i,j,k,l} e_{s,j+k+l+s-i-1}$$

для $1 \le i < j \le n$, $1 \le l \le k \le n$, $j+k+l-i \le n$ и

$$f_2(e_{i,j}, e_{k,l})_2 = \sum_{s=1}^{\left[\frac{i+j+k+l-1}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l} e_{i+j+k-l-s-1,s},$$

где $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant l \leqslant k \leqslant n$, $i \leqslant k \,\&\, (i=k \Rightarrow j<l)$, $i+j+k+l \leqslant 2n$.

За счет кограницы $\delta\varphi$ (см. (2.10)) можем добиться равенства нулю следующих коэффициентов:

$$f^{1,j,1,1}_{s}\ ;\ j=2,3,\dots,n-1\ ,\quad f^{i,i+1,j,1}_{s}\ ;\ i=1,2,\dots,\left[\tfrac{n-1}{2}\right],$$

$$j=i+1,i+2,\dots,n-i-1\ ,\quad f^{i,i+1,1,1}_{i-1}\ ;\ i=2,3,\dots,n-1. \qquad (225.1)$$

Поэтому при $n=3$ мы сразу получаем, что $(f_{1,2})_1 = 0$. Пусть в дальнейшем n будет больше 3. Подставляя в (2.4):

$$a=e_{i,i+1}\ ,\ b=e_{3,n}\ ,\ c=e_{1,1}\ ;\ i=3,4,\dots,n-2\ ,$$

мы получим, что $f^{i,i+1,1,1}_{1}=0$. Воспользуемся теперь несколько раз условием (2.5) при фиксированном $b=e_{1,1}$. Подстановки:

$$a=e_{i,i+1}\ ,\ c=e_{i-1,s}\ ;\ s=2,3,\dots,n-3\ ,\ i=s+2,s+3,\dots,n-1,$$

показывают, что $f^{i,i+1,1,1}_{s}=0$. Далее, подставив в (2.5):

$$a=e_{n-2,n-1}\ ,\ c=e_{n-2,n-2},\ e_{n-1,n-2},\ e_{n,n-2} \text{ и } a=e_{n-1,n}\ ,\ c=e_{n-1,n-1},$$

и решив полученную линейную систему, имеем:

$$f^{n-2,n,1,1}_{n-2}=f^{1,1,n-1,n-2}_{n-2}=f^{1,1,n-1,n-1}_{n-1}=f^{1,1,n,n-1}_{n}=0.$$

Подстановки: $a=e_{i,i+1}\ ,\ c=e_{n,i}$ и $a=e_{i+2,i+3}\ ,\ c=e_{n,i+1}$

приводят нас к равенствам:

$$f^{i,i+1,1,1}_{i}=0\ ;\ i=2,3,\dots,n-1, \text{ и } f^{i,i+1,1,1}_{i-1}=0\ ;\ i=3,4,\dots,n-2\ ,$$

а из подстановок $a=e_{i,i+1}\ ,\ c=e_{n,s}\ ;\ s=3,4,\dots,n-2\ ,\ i=2,3,\dots,s-1$

вытекает, что $f^{i,i+1,1,1}_{s}$ равняется нулю и при этих значениях индексов i,s. Значит

$$f_{1,2}\,(e_{i,i+1}\ ,\ e_{1,1})_1=0. \qquad (225.2)$$

Наконец, подставляя при $n \geqslant 5$ в (2.5): $a=e_{1,2}$, $b=e_{1,1}, e_{2,1}$, $c=e_{2,2}$, и при $n \geqslant 7$ дополнительно: $a=e_{1,2}$, $b=e_{i,i}$, $c=e_{2,2}$; $i=3,4,\dots,n-4$, мы получим, что

$$f_{1,2}(e_{1,2}, e_{2,2})_1 = 0. \tag{225.3}$$

Теперь заметим аналогию между условиями (223.I) и (225.I), результатами (223.2), (223.8) и (225.2), (225.3), и идентичность, в данном случае, уравнений (2.3), (2.4). Поэтому, проделав те же шаги, что и в п.3, мы в итоге получим $(f_{1,2})_1 = 0$. Итак, нам осталось рассмотреть компоненту $(f_2)_2$. Подставляя в (2.5): $a=e_{2,3}$, $b=e_{1,1}$, $c=e_{3,1}$, мы имеем: $f^{1,1,\,3,1}_{2} = 0$, а подстановки: $a=e_{2,3}$, $b=e_{1,1}$, $c=e_{2,1}, e_{2,2}, e_{3,1}$; $a=e_{1,2}, e_{1,3}$, $b=e_{1,1}$, $c=e_{2,1}$ показывают, что

$$f_2(e_{1,1}, e_{2,1})_2 = f_2(e_{2,1}, e_{3,1})_2 = 0. \tag{225.4}$$

Из (225.4) и подстановок в (2.5): $a=e_{2,i}$, $b=e_{1,1}$, $c=e_{2,1}$; $i=3,4,\dots,n$ вытекает, что $f_2(e_{1,1}, e_{i,2})_2 = 0$. Далее, подставляя в (2.5): $a=e_{i,i+2}, e_{i+1,j}$, $b=e_{i,1}$, $c=e_{i+1,1}$; $i=2,3,\dots,n-2$, $j=i+2,i+3,\dots,n$, мы получим: $f_2(e_{i,1}, e_{j,1})_2 = 0$. Теперь из подстановок $a=e_{1,j}$, $b=e_{1,1}$, $c=e_{i,1}$ следует: $f_2(e_{1,1}, e_{i,j})_2 = 0$, и остается подставить в (2.5): $a=e_{1,j}$, $b=e_{i,1}$, $c=e_{k,l}$, чтобы получить равенство нулю всей компоненты $(f_2)_2$.

6. Мы доказали, что в случае типа C_n единственными нетривиальными элементами группы $H^2_{gr}(L,L)$ будут g_6, g_7 при $n = 3, 4$, соответственно. Очевидно $g_6 \circ g_6 = g_7 \circ g_7 = 0$, следовательно указанные коциклы имеют тривиальные продолжения.

Далее, выбирая в алгебре $L(t)$, $t\in P\setminus\{0\}$ базис $e'_{i,j}$:

$$e'_{i,j} = \begin{cases} e_{i,j} & \text{, если } \max\{i,j\} \le 2, \\ \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e_{i,j} & \text{, если } \max\{i,j\} \ge 3, \min\{i,j\} \le 2, \\ \frac{1}{\alpha}\, e_{i,j} & \text{, если } \min\{i,j\} \geq 3, \end{cases}$$

мы видим, что ее структурные константы совпадают со структурными константами алгебры $L(1)$ относительно стандартного базиса, т.е. все такие алгебры изоморфны. С другой стороны $L\not\cong L(1)$, поскольку в ней дополнение L' к максимальному абелевому идеалу - L'' является подалгеброй, а в алгебре $L(1)$ это не так. Этим завершается доказательство теоремы 2.2 .

§3. Тип D_n.

Теорема 2.3. Пусть $\mathcal{L}=D_n$. Тогда для второй группы градуированных когомологий алгебры L имеем:

$$\dim H^2_{gr}(L,L) = \begin{cases} 3, & \text{если } n=4 \\ 0 & \text{при } n\neq 4. \end{cases}$$

Образующими группы $H^2_{gr}(L,L)$ в случае $n=4$ являются коциклы g_8, g_9, g_{10}, каждый из которых отличен от нуля только на одной паре базисных элементов: $g_8(E_{1,2}-E_{6,5}, E_{1,3}-E_{7,5}) = E_{8,1}-E_{5,4}$, $g_9(E_{3,4}-E_{8,7}, E_{2,4}-E_{8,6})=E_{7,2}-E_{6,3}$, $g_{10}(E_{6,1}-E_{5,2}, E_{7,1}-E_{5,3}) = E_{1,4}-E_{8,5}$. Произвольная линейная комбинация коциклов g_8, g_9, g_{10} имеет тривиальное продолжение и при специализации параметра t на основное поле получаем $|P|+2$ неэквивалентных деформаций.

Доказательство. Так же, как и в случае $\mathcal{L}=C_n$, введем сокращенную запись элементов базиса алгебры L:

$$E_{i,j}-E_{n+j,n+i}=e_{i,j}, \quad E_{j+n,i}-E_{i+n,j}=e_{j,i} \quad ; 1\leq i<j\leq n,$$

и перейдем к изучению отдельных компонент коцикла $f\in H^2_{gr}(L,L)$.

I. Подалгебра L' у нас та же, что и в случае $\mathcal{L}=C_n$, поэтому к компоненте $(f_1)_4$ применимы все рассуждения из п. I предыдущего параграфа. Подставляя в (2.3): $(a,b,c) =$
$(e_{1,2}, e_{4,5}, e_{2,1})$, $\quad (e_{1,2}, e_{1,3}, e_{4,2})$,
$(e_{3,5}, e_{4,5}, e_{2,1})$, $\quad (e_{1,3}, e_{2,3}, e_{3,1})$,
$(e_{4,5}, e_{4,6}, e_{2,1})$,
мы убеждаемся, что указанная компонента равна нулю.

2. $(f_2)_1$. Отображения этого вида кограницами не являются (см. (2.8)-(2.I2)), поэтому если они коциклы, то обязательно нетривиальные. Такой случай имеет место при $n = 4$, когда единственное отображение указанного вида - g_{10} удовлетворяет условиям (2.6), (2.7) и, следовательно, принадлежит $H^2_{g^c}(L,L)$. Пусть теперь $n \geqslant 5$. Подставляя в (2.7): $a=e_{2,1}, b=e_{3,1}, c=e_{n,i}$, $e_{n-1,n-3}$; $i=1,2,\ldots, n-4$, имеем $f_2(e_{2,1},e_{3,1})_1=0$, а подстановки в (2.6): $b=e_{2,1}$, $(a,c)=(e_{1,2}, e_{3,1})$ и $(e_{2,3}, e_{3,2})$ показывают, что $f_2(e_{2,1},e_{3,2})_1=f_2(e_{3,1},e_{3,2})_1=0$. Докажем индукцией по k , что $f_2(e_{2,1},e_{k+1,k})_1=0$; $k=2,3,\ldots, [\frac{n}{2}]$. Из подстановок в (2.6): $a=e_{k,k+1}, b=e_{2,1}, c=e_{k,k-1}$ сначала вытекает, что $f_2(e_{2,1},e_{k+1,k-1})_1=0$, а затем, после подстановок: $a=e_{1,4}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{3,1}$; $a=e_{k-1,k}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{k+1,k-1}$ получается требуемый результат. Теперь мы индукцией по k докажем, что $f_2(e_{i,j}, e_{k+1,k})_1=0$; $k=2,3,\ldots, [\frac{n}{2}]$, $i \leq k+1$. Для этого достаточно подставить в (2.6): $a=e_{2,i}, b=e_{2,1}$, $c=e_{k+1,k}$; $a=e_{1,j}, b=e_{i,1}, c=e_{k+1,k}$; $i=3,4,\ldots,k+1$, $j=2,3,\ldots,i-1$. Докажем, наконец, индукцией по m , что $f_2(e_{i,j}, e_{k,l})_1=0$ для любых $i,k \leq m \leq n-1$, а это равносильно тому, что $(f_2)_1=0$ при $n \geqslant 5$. Подстановки в (2.6): $a=e_{m,m+1}$, $b=e_{i,j}$, $c=e_{m,l}$; $i=2,3,\ldots,m-1$, $j=1,2,\ldots,i-1$, $l=1,2,\ldots,m-1$, показывают, что $f_2(e_{i,j}, e_{m+1,l})_1=0$. Затем, подставляя в (2.6): $a=e_{m-1,m+1}$, $b=e_{m-1,l}$, $c=e_{m,j}$; $j=1,2,\ldots,m-1$, $l=1,2,\ldots,m-2$, получаем: $f_2(e_{m,j}, e_{m+1,l})_1=0$.

Далее, из подстановок: $a=e_{m-2,m-1}, b=e_{m,j}, c=e_{m+1,m-2}$; $j=1,2,\ldots,m-1$, вытекает, что $f_2(e_{m,j}, e_{m+1,m-1})_1 = 0$, а из подстановок: $a = e_{m,m+1}$, $b = e_{m,j}$, $c = e_{m+1,l}$; $1 \leq j < l \leq m-1$ следует, что и $f_2(e_{m+1,j}, e_{m+1,l})_1$ равняется нулю.

3. $(f_1)_2$. Пусть

$$f_1(e_{i,j}, e_{k,l})_2 = \sum_{s=1}^{[\frac{j+l-i-k}{2}]} f_s^{i,j,k,l} e_{j+l-i-k-s+2,\, s}$$

при $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k < l \leq n$, $i \leq k \ \& \ (i = k \Rightarrow j < l)$,

и $\varphi(e_{i,j}) = \sum_{s=1}^{[\frac{j-i}{2}]} \varphi_s^{i,j} e_{j-i-s+2,\, s}$ для $1 \leq i < j \leq n$.

Выбирая подходящим образом значения $\varphi_s^{i,j}$, мы можем добиться того, чтобы после вычитания из $(f_1)_2$ кограницы $\delta\varphi$ выполнялись условия:

$$f_1(e_{i,i+1}, e_{i+1,j})_2 = 0 \ ; \ i = 1,2,\dots,n-2 \ , \ j = i+2, i+3, \dots, n \ ,$$

$$f_2^{1,2,1,3} = f_2^{2,3,1,3} = f_2^{3,4,1,3} = 0 \ , \qquad (233.I)$$

$$f_1^{2,3,i,i+1} = 0 \ ; \ i = 4,5,\dots,n-1 \ .$$

Значит, $(f_1)_2 = 0$ при $n=3$. Если $n = 4$, то коэффициент $f_1^{1,2,1,3}$ может быть произвольным, и мы приходим к нетривиальному коциклу g_8. При $n \geq 5$, подставляя в (2.2): $a = e_{1,2}$, $b = e_{1,3}$, $c = e_{1,5}$ получаем, что указанный коэффициент обязан равняться нулю. Далее, подстановки в (2.2): $a = e_{1,2}$, $(b,c) = (e_{2,3}, e_{1,3})$ и $(e_{3,4}, e_{1,4})$ показывают, что $f_1^{2,3,1,3} = f_1^{1,2,3,4} = 0$.

Подставляя при $n \geq 5$ в (2.2): $a = e_{1,2}$, $b = e_{4,5}$, $c = e_{3,4}, e_{3,5}$, имеем: $f_1^{1,2,4,5} = 0$, а дополнительные подстановки: $a = e_{1,2}$, $b = e_{1,4}$, $c = e_{i,i+1}$; $i = 5,6,\dots, n-1$ при $n \geq 6$ приводят к равенствам

$f_1^{1,2,i,i+1} = 0$. Наконец, из подстановок в (2.2): $a=e_{1,2}$, $b=e_{i,i+1}$, $c=e_{j,j+1}$; $3 \leq i < j \leq n-1$ вытекает, что

$$f_1^{i,i+1,j,j+1} = 0 . \qquad (233.2)$$

Исходя из (233.I), (233.2), мы индукцией по $k-l$ получаем равенства: $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,l})_2 = 0$, сначала для $i=3,4,\dots,n-1$, $1 \leq k < l \leq i$, а затем и для $i=1,2,\dots,n-4$, $i+2 \leq k < l \leq n$ ($n \geq 5$). Теперь, подставляя в (2.2): $a=e_{1,2}, e_{1,3}$, $b=e_{2,3}$, $c=e_{2,4}$ и $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{1,3}$, мы имеем: $f_1^{2,3,2,4}=0$, $f_1(e_{2,3}, e_{1,4})_2=0$, а подстановка: $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,4}$, показывает, что $f_2^{2,3,2,4} = 0$. Из подстановки в (2.2): $a=e_{1,2}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,4}$ при учете (233.I) вытекает равенство $f_1^{3,4,2,4} = 0$. Далее, подставляя при $n \geq 5$ в (2.2): $a=e_{1,2}$, $(b,c)=(e_{i,i+2}, e_{i,i+1}), (e_{i+1,i+2}, e_{i,i+2})$; $i=3,4,\dots,n-2$, мы убеждаемся в том, что $f_1^{i,i+1,i,i+2} = f_1^{i+1,i+2,i,i+2} = 0$ для указанных значений индекса i, а из подстановок: $a=e_{3,4}$, $b=e_{2,4}, e_{4,5}$, $c=e_{3,5}$, следует, что $f_2^{3,4,2,4} = f_2^{3,4,3,5} = f_2^{4,5,3,5} = 0$. При $n=4$ на коэффициент $f_2^{3,4,2,4}$ нет никаких ограничений, следовательно мы можем определить нетривиальный коцикл g_9. Для $n \geq 6$ подставляя в (2.2): $a=e_{3,4}, e_{3,5}$, $b=e_{4,5}$, $c=e_{4,6}$ и $a=e_{3,4}, e_{3,5}, e_{3,6}$, $b=e_{5,6}$, $c=e_{4,6}$, получаем, соответственно, что $f_2^{4,5,4,6}$, $f_2^{5,6,4,6}$ должны равняться нулю. Наконец, при $n \geq 7$ из подстановок в (2.2)

$a=e_{3,4}$, $(b,c)=(e_{i,i+1}, e_{i,i+2}), (e_{i+1,i+2}, e_{i,i+2})$; $i=5,6,\dots,n-2$,

вытекает: $f_2^{i,i+1,i,i+2} = f_2^{i+1,i+2,i,i+2} = 0$. Теперь, подставляя при

$n \geqslant 5$ в (2.2): $a=e_{i,i+1}, (b,c)=(e_{i-1,i}, e_{i,i+2}), (e_{i-1,i+1}, e_{i+1,i+2}); i=3,4,\ldots,n-2$, мы имеем: $f_1(e_{i,i+1}, e_{i-1,i+2})_2=0$. Применяя индукцию по убывающему индексу k, при любом $n \geqslant 4$ получим равенства $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,i+1})_2=0$; $i=3,4,\ldots,n-1$, а при $n \geqslant 5$ также $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,i+2})_2=0; i=3,4,\ldots,n-2$.

Далее, индукцией по возрастающему индексу l убеждаемся в том, что $f_1(e_{i,i+1}, e_{k,l})_2=0$ для $i=1,2,\ldots,n-3$, $k=1,2,\ldots,i$, откуда уже индукцией по $j-i$ вытекает, что $f_1(e_{ij}, e_{k,l})_2$ всегда равно нулю, значит, $(f_1)_2-\delta_{n,4}(f_1^{1,2,1,3} g_8+f_2^{3,4,2,4} g_9)=0$.

4. $(f_{1,2})_2$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,j}, e_{k,l})_2=\sum_{s=1}^{\left[\frac{j+k+l-i-1}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l} e_{j+k+l-i-s,s}$$

для $1 \leqslant i<j \leqslant n$, $1 \leqslant l<k \leqslant n$, $j+k+l-i \leqslant 2n-1$, и

$$\varphi(e_{i,j})=\sum_{s=1}^{\left[\frac{i-j-1}{2}\right]} \varphi_s^{i,j} e_{j-i-s,s} \quad \text{при } 1 \leqslant j<i \leqslant n .$$

Выбирая надлежащим образом коэффициенты $\varphi_s^{i,j}$ и вычитая из отображения $(f_{1,2})_2$ кограницу $\delta\varphi$, мы можем добиться следующих ограничений на компоненту $(f_{1,2})_2$:

$$f_{1,2}(e_{i,i+1}, e_{k,i})_2=0; \; i=1,2,\ldots,n-2, \; k=i+2, i+3, \ldots, n,$$

$$f_{1,2}(e_{i,i+1}, e_{i,1})_2=0; \; i=3,4,\ldots,n-1,$$

$$f_2^{1,3,2,1}=0.$$

В случае $n=3$, вычитая из $(f_{1,2})_2$ дополнительно кограницы $\delta\psi_1, \delta\psi_2$, где $\psi_1(e_{i,j})=\delta_{i,1}\delta_{j,2}e_{2,3}$, $\psi_2(e_{i,j})=\delta_{i,2}\delta_{j,3}e_{1,2}$, которые не влияют на компоненту $(f_1)_1$, мы имеем еще и равенство нулю коэффициентов $f_1^{1,2,2,1}$, $f_2^{2,3,3,1}$. При $n \geqslant 4$, подставляя в (2.3): $a=e_{1,2}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,1}$, получаем, что $f_1^{1,2,2,1}=f_1^{3,4,2,1}=0$, а при $n\geq 5$ из подстановок: $a=e_{1,2}$, $b=e_{i,i+1}$, $c=e_{2,1}$; $i=4,5,\dots,n-1$, вытекает, что $f_1^{i,i+1,2,1}=0$. Далее, подставляя в (2.3): $a=e_{1,2}$, $b=e_{2,3}$, $c=e_{3,1}$; $a=e_{2,3}$, $b=e_{1,3}$, $c=e_{2,1}, e_{3,1}$, мы приходим к равенствам: $f_1^{2,3,3,1}=0$, $f_{1,2}(e_{2,3},e_{3,2})_2=0$, а подстановки $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,4}, e_{2,4}$, $c=e_{2,1}, e_{3,1}$ показывают, что $f_2^{2,3,3,1}=0$, $f_{1,2}(e_{2,4},e_{4,1})_2=0$ $(char\ P\neq 2,3)$. Теперь, подставляя в (2.3): $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{k,k+1}$, $c=e_{k,1}$; $i=4,5,\dots,n-1$, $j=2,3,\dots,i-2$, мы получаем: $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{k+1,1})_2=0$; подстановки: $a=e_{i-1,i}, e_{i-1,i+1}$, $b=e_{i,i+1}$, $c=e_{i-1,1}$; $i=3,4,\dots,n-1$ приводят нас к равенствам: $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{i+1,i})_2=0$, а подстановки: $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{i+1,i+2}, e_{i,i+2}$, $c=e_{i,1}$; $a=e_{i+1,i+2}$, $b=e_{i,i+1}$, $c=e_{i+1,1}$; $i=3,4,\dots,n-2$ показывают, что $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{i+2,1})_2=0$. Из подстановок в (2.3): $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{k,k+1}$, $c=e_{k,1}$; $i=2,3,\dots,n-3$, $k=i+2,i+3,\dots,n-1$ следует, что $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{k+1,1})_2=0$ для указанных значений i,k. Если же подставить в (2.3): $a=e_{1,2}$, $b=e_{1,l}$, $c=e_{2,1}$; $l=3,4,\dots,n$, $a=e_{1,2}$, $b=e_{1,3}$, $c=e_{k,1}$; $k=4,5,\dots,n$ и $a=e_{1,2}$, $b=e_{l,l+1}$, $c=e_{k,l}$; $l=3,4,\dots,n-2$, $k=l+2,l+3,\dots,n$, то получим, что $f_{1,2}(e_{1,2},e_{k,l})_2$ всегда равняется нулю. Докажем, наконец, индукцией по j, что $f_{1,2}(e_{1,j},e_{k,1})_2=0$ при $k=2,3,\dots,n$ и $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{k,l})_2=0$ для $i=2,3,\dots,n-1$, $l=1,2,\dots,j-1$, $k=l+1,l+2,\dots,n$. Во-первых, подставляя в (2.3): $a=e_{1,j-1}$, $b=e_{j-1,j}$, $c=e_{k,1}$; $k=2,3,\dots,j-1,j+1,j+2,\dots,n$, мы имеем равенство: $f_{1,2}(e_{1,j},e_{k,1})_2=0$ при $j\neq k$. Затем, подстановки: $a=e_{j-1,j}$, $(b,c)=(e_{1,j-1},e_{j,1}),(e_{1,j},e_{j-1,1})$ показывают, что $f_{1,2}(e_{1,j},e_{j,1})_2=f_{1,2}(e_{j-1,j},e_{j,j-1})_2=0$. Подставляя же в (2.3): $a=e_{1,j-1}$, $b=e_{i,i+1}$, $c=e_{k,1}$; $i=2,3,\dots,j-2,j,j+1,\dots,n-1$, $k=j,j+1,\dots,n$, мы убедимся в том, что и $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{k,j-1})_2=0$. Теперь остается только провести индукцию по $j-i$ для того, чтобы получить равенство $f_{1,2}(e_{i,j},e_{k,l})_2=0$ при любых i,j,k,l и тем самым завершить изучение компоненты $(f_{1,2})_2$.

5. $(f_{1,2})_1$, $(f_2)_2$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,j},e_{k,l})_1=\sum_{s=1}^{\left[\frac{j+k+l-i-3}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l}\, e_{s,j-i+k+l-s-2}$$

при $1\le i<j\le n-2,\ 1\le l<k\le n-1,\ j-i+k+l\le n+1$, и

$$f_2(e_{i,j},e_{k,l})_2=\sum_{s=1}^{\left[\frac{i+j+k+l-3}{2}\right]} f_s^{i,j,k,l}\, e_{i+j+k+l-s-2,s}$$ для

$1\le j<i\le n,\ 1\le l<k\le n,\ i\le k\ \&\ (i=k\Rightarrow j<l),\ i+j+k+l\le 2n+1$.

Тогда, вычитая из f когграницу, мы согласно (2.I0), (2.I2) можем добиться выполнения следующих условий:

$f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{k,i})_1=0$; $i=1,2,\dots,[\frac{n}{2}]-1$, $k=i+2,i+3,\dots,n-i$,

$f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{i,1})_1=0$; $i=2,3,\dots,n-1$,

$f_1^{1,2,2,1}=f_{n-2}^{n-2,n-1,2,1}=0$ и $f_{i-1}^{i,i+1,2,1}=0$; $i=4,5,\dots,n-1$,

$f_2^{2,1,3,1}=0$ при $n\geqslant 3$ и $f_1^{2,1,3,1}=0$, если $n=4$.

Далее, подставляя в (2.4): $a=e_{1,2}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,1}$; $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{3,n}$, $c=e_{2,1}$; $i=3,4,\dots,n-1$, мы получаем: $f_2^{3,4,2,1}=f_1^{i,i+1,2,1}=0$.

Подстановки: $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{n,s}$; $i=1,3,4,\dots,n-1$, $s=2,3,\dots,i-2,i+1,i+2,\dots,n-3$ показывают, что $f^{i,i+1,2,1}_{s}=0$, а из подстановок в (2.4), (2.5): $a=e_{i,i+1}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{i+2,i+3}$, $e_{n-1,n-2}$; $i=1,2,\dots,n-3$, вытекает, что $f^{i,i+1,2,1}_{n-2}=f^{i,i+1,2,1}_{1}=0$. Значит $f_{1,2}(e_{i,i+1},e_{2,1})_1=0$ для любого i. Если подставить в (2.5): $a=e_{2,3}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{3,1}$, то имеем: $f^{2,3,3,1}_{1}=f^{2,3,3,1}_{2}=0$. При $n\geq 6$ подстановка в (2.5): $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,1}$, $c=e_{n-2,n-3}$ приводит нас к равенству: $f^{2,3,3,1}_{n-3}=0$, а для $n\geq 7$ из подстановок: $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,1}$, $c=e_{n,s}$; $s=3,4,\dots,n-4$ следует, что $f^{2,3,3,1}_{s}=0$. Наконец, подставляя в (2.5): $a=e_{2,3}$, $b=e_{3,4}$, $c=e_{2,1}, e_{3,1}$; $a=e_{2,3}$, $b=e_{2,4}$, $c=e_{2,1}$, мы убеждаемся в том, что $f_{1,2}(e_{2,3},e_{4,1})_1=0$. Теперь мы пришли к результатам, аналогичным тем, которые были получены в начале предыдущего пункта относительно компоненты $(f_{1,2})_2$. Поскольку уравнения (2.3), (2.4) в случае равенства нулю компоненты $(f_1)_1$ совпадают, то отсюда вытекает, что и $(f_{1,2})_1$ равна 0. Итак, нам осталось только закончить рассмотрение компоненты $(f_2)_2$. Пусть в (2.5) $b=e_{2,1}$, $c=e_{3,1}$, а элемент a принимает следующие значения: $e_{4,5}$, $e_{1,2}$, $e_{1,3}$, $e_{3,4}$. Тогда мы, соответственно, получим равенство нулю величин: $f_2(e_{2,1},e_{3,1})_2$, $f_2(e_{2,1},e_{3,2})_2$, $f_2(e_{3,1},e_{3,2})_2$, $f_2(e_{2,1},e_{4,1})_2$. Подставляя в (2.5): $a=e_{1,3}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{4,1}$; $a=e_{2,4}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{3,2}$, будем иметь $f_2(e_{2,1},e_{4,3})_2=0$, а подстановки: $a=e_{k,k+2}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{k+1,k}$; $k=3,4,\dots,n-3$, показывают, что $f_2(e_{2,1},e_{k+1,k})_2=0$.

При $k=4,5,\dots,n-1$ из подстановок в (2.5): $a=e_{2,i}$, $b=e_{2,1}$, $c=e_{k,k-1}$; $i=3,4,\dots,k$, $a=e_{1,i}$, $b=e_{j,1}$, $c=e_{k,k-1}$; $j=2,3,\dots,k-2$, $i=j+1,j+2,\dots,k$ вытекает, что $f_2(e_{i,j},e_{k,k-1})_2=0$. Теперь мы в состоянии индукцией по $m=max\{i,k\}$ доказать, что $f_2(e_{i,j},e_{k,\ell})_2$ всегда равно 0.

Во-первых, подставляя в (2.5): $a=e_{m,m+1}$, $b=e_{i,j}$, $c=e_{m,\ell}$; $i=2,3,\dots,m-1$, $j=1,2,\dots,i-1$, $\ell=1,2,\dots,m-1$, будем иметь: $f_2(e_{i,j},e_{m+1,\ell})_2=0$. Во-вторых, подстановки: $a=e_{m-1,m+1}$, $b=e_{m,j}$; $c=e_{m-1,\ell}$; $\ell=1,2,\dots,m-2$ показывают, что $f_2(e_{m,j},e_{m+1,\ell})_2=0$. В-третьих, подставляя в (2.5): $a=e_{m-2,m-1}$, $b=e_{m,j}$, $c=e_{m+1,m+2}$, получаем: $f_2(e_{m,j},e_{m+1,m-1})_2=0$. Наконец, из подстановок: $a=e_{m,m+1}$, $b=e_{m,\ell}$, $c=e_{m+1,j}$; $j=1,2,\dots,m-2$, $\ell=j+1,j+2,\dots,m-1$ следует, что $f_2(e_{m+1,j},e_{m+1,\ell})_2=0$.

6. Очевидно, произвольная линейная комбинация базисных коциклов, полученных в случае $n=4$, имеет тривиальное продолжение. Определим, аналогично п.6 §I, алгебру $L(\alpha,\beta,\gamma)$ с тем же векторным пространством, что и у алгебры L и коммутированием: $[a,b]=[a,b]_{D_4}+\alpha g_8(a,b)+\beta g_9(a,b)+\gamma g_{10}(a,b)$. Нас интересует число неизоморфных алгебр в классе $\{L(\alpha,\beta,\gamma)|\ \alpha,\beta,\gamma\in P\}$. Действуя так же, как и в случае алгебры A_4, мы получим, что алгебры $L(\alpha,\beta,\gamma)$, $L(\alpha',\beta',\gamma')$ будут изоморфными только тогда, когда выполнены следующие соотношения:

$\alpha'=\mu\varepsilon$, $\beta'=\nu\eta$, $\gamma'=\frac{1}{\mu\nu}\zeta$, где $\mu,\nu\in P\setminus\{0\}$, $\{\varepsilon,\eta,\zeta\}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Поэтому получаем $|P|+2$ неизоморфных алгебры:

$$L(\alpha,\beta,\gamma) \cong L(\alpha\beta\gamma,1,1) \cong L(\alpha',1,1) \ ; \ \alpha' \neq \alpha\beta\gamma \ ,$$

$$L(\alpha,\beta,0) \cong L(\alpha,0,\beta) \cong L(0,\alpha,\beta) \cong L(1,1,0) ,$$

$$L(\alpha,0,0) \cong L(0,\alpha,0) \cong L(0,0,\alpha) \cong L(1,0,0) ,$$

$$L(0,0,0) \cong L \ ; \ \alpha\beta\gamma \neq 0 .$$

Теорема 2.3 полностью доказана.

§4. Тип B_n.

Теорема 2.4. Пусть $\mathcal{L}=B_n$. Тогда группа $H^2_{gr}(L,L)$ равна нулю, за исключением случая $n = 3$, когда она натягивается на коцикл g_{11}, действующий ненулевым образом только на одной паре базисных элементов:

$$g_{11}(E_{3,4}-E_{7,6}, E_{2,4}-E_{7,5}) = E_{6,2}-E_{5,3}.$$

Коцикл g_{11} имеет тривиальное продолжение и при специализации параметра t на основное поле получаем ровно одну алгебру, не изоморфную исходной.

Доказательство. Как уже упоминалось в начале этой главы, воспользуемся разбиением алгебры L в прямую сумму трех подпространств:

$$L' = \langle E_{1,i+1}-E_{n+i+1,1} = e_{i,1} \mid i=1,2,\ldots,n \rangle,$$

$$L'' = \langle E_{j,i+j}-E_{n+i+j,n+j} = e_{i,j} \mid i=1,2,\ldots,n-1,\ j=2,3,\ldots,n-i+1 \rangle,$$

$$L''' = \langle E_{2n-j+2,i+j-n}-E_{i+j,n-j+2} = e_{i,j} \mid i=3,4,\ldots,2n-1,\ j=\max\{1,n-i+2\},\max\{2,n-i+3\},\ldots,\left[\tfrac{2n-i+1}{2}\right] \rangle.$$

Заметим, что L''' - абелева алгебра и L'' - подалгебра L, изоморфная нильпотентной части алгебры A_{n-1}. Действие L'' на L', L''' следующее:

$$[e_{i,j}, e_{k,1}] = \begin{cases} -\delta_{k+1,j}\, e_{i+k,1}, & \text{если } i+k \le n \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$[e_{i,j}, e_{k,l}] = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta_{j,k+l-n}\Big((1+\operatorname{sgn}(i+j+l-n-2))\, e_{i+k,n-i-j+2} - (1-\operatorname{sgn}(i+j+l-n-2))\, e_{i+k,l}\Big) - \\ \quad -\delta_{j,n-l+2}\, e_{i+k,l-i}, & \text{если } i+k \le 2n-1 \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коммутирая же между собой элементы из L', мы попадаем в L''': $[e_{i,1}, e_{j,1}] = e_{i+j,\, n-j+1}$ для $i < j$. Различные компоненты элементов из L и отображений $\varphi : L \to L$, $f : L \times L \to L$ относительно разбиения $L = L' \oplus L'' \oplus L'''$, будем обозначать аналогично, как в рассмотренном раньше случае разбиения L на две подалгебры. Понятно, что для любого $f \in C^2_{gr}(L, L)$ компоненты $(f_1)_2$, $(f_{1,3})_1$, $(f_{2,3})_1$, $(f_3)_3$ могут быть отличными от 0 только если $n \geq 4$, компоненты $(f_{1,3})_2$, $(f_{2,3})_2$ – при $n \geq 5$, а $(f_3)_1$, $(f_3)_2$ при $n \geq 7$ и $n \geq 8$, соответственно. В дальнейшем, при вычислении отдельных компонент произвольного коцикла, будем каждый раз предполагать, что n удовлетворяет указанным условиям, не оговаривая этого специально. Уравнение (I.4) ввиду нашего разложения алгебры L распадается на следующие условия:

$$\begin{gathered}[f_1(a,b)_2, c] + [f_1(b,c)_2, a] + [f_1(c,a)_2, b] - \\ - f_{1,3}(a,[b,c])_1 - f_{1,3}(b,[c,a])_1 - f_{1,3}(c,[a,b])_1 = 0,\end{gathered} \tag{24.I}$$

$$\begin{gathered}[f_1(a,b)_1, c] + [f_1(b,c)_1, a] + [f_1(c,a)_1, b] - \\ - f_{1,3}(a,[b,c])_3 - f_{1,3}(b,[c,a])_3 - f_{1,3}(c,[a,b])_3 = 0,\end{gathered} \tag{24.2}$$

$$f_{1,3}(a,[b,c])_2 + f_{1,3}(b,[c,a])_2 + f_{1,3}(c,[a,b])_2 = 0; \quad (a,b,c) \in L' \times L' \times L'. \tag{24.3}$$

$$\begin{gathered}[f_1(a,b)_1, c] + [f_{1,2}(b,c)_2, a] - [f_{1,2}(a,c)_2, b] - \\ - f_{2,3}(c,[a,b])_1 + f_1([b,c],a)_1 + f_1([c,a],b)_1 = 0,\end{gathered} \tag{24.4}$$

$$[f_1(a,b)_2, c] - f_{2,3}(c,[a,b])_2 + f_1([b,c],a)_2 + f_1([c,a],b)_2 = 0, \tag{24.5}$$

$$[f_1(a,b)_3, c] + [f_{1,2}(b,c)_1, a] - [f_{1,2}(a,c)_1, b] -$$

$$-f_{2,3}(c,[a,b])_3+f_1([b,c],a)_3+f_1([c,a],b)_3=0 \text{ для } (a,b,c)\in L'\times L'\times L''. \quad (24.6)$$

$$\begin{aligned}&[f_{1,2}(a,b)_1,c]-[f_{1,2}(a,c)_1,b]+f_{1,2}([a,b],c)_1+\\&+[f_2(b,c)_2,a]-f_{1,2}(a,[b,c])_1+f_{1,2}([c,a],b)_1=0,\end{aligned} \quad (24.7)$$

$$\begin{aligned}&[f_{1,2}(a,b)_3,c]+[f_2(b,c)_3,a]-[f_{1,2}(a,c)_3,b]+\\&+f_{1,2}([a,b],c)_3-f_{1,2}(a,[b,c])_3+f_{1,2}([c,a],b)_3=0,\end{aligned} \quad (24.8)$$

$$\begin{aligned}&[f_{1,2}(a,b)_2,c]-[f_{1,2}(a,c)_2,b]+f_{1,2}([a,b],c)_2-\\&-f_{1,2}(a,[b,c])_2+f_{1,2}([c,a],b)_2=0 \text{ для } (a,b,c)\in L'\times L''\times L''.\end{aligned} \quad (24.9)$$

$$-[f_{1,3}(a,c),b]-[f_{2,3}(b,c)_2,a]+f_{1,3}([a,b],c)_1-f_{1,3}(a,[b,c])_1=0, \quad (24.10)$$

$$-[f_{1,3}(a,c)_2,b]+f_{1,3}([a,b],c)_2-f_{1,3}(a,[b,c])_2=0, \quad (24.11)$$

$$\begin{aligned}&[f_{1,2}(a,b)_2,c]-[f_{1,3}(a,c)_3,b]+[f_{2,3}(b,c)_1,a]+\\&+f_{1,3}([a,b],c)_3-f_{1,3}(a,[b,c])_3=0 \text{ для } (a,b,c)\in L'\times L''\times L'''.\end{aligned} \quad (24.12)$$

$$[f_{1,3}(b,c)_2,a]-[f_{1,3}(a,c)_2,b]+f_3([a,b],c)_1=0, \quad (24.13)$$

$$[f_1(a,b)_2,c]+[f_{1,3}(b,c)_1,a]-[f_{1,3}(a,c)_1,b]+f_3([a,b],c)_3=0, \quad (24.14)$$

$$f_3([a,b],c)_2=0 \qquad \text{для} \quad (a,b,c)\in L'\times L'\times L'''. \quad (24.15)$$

$$[f_{1,3}(a,b)_2, c]-[f_{1,3}(a,c)_2, b]+[f_3(b,c)_1, a]=0, \qquad (24.I6)$$

$$[f_3(b,c)_2, a]=0 \quad \text{для} \quad (a,b,c)\in L'\times L'''\times L'''. \qquad (24.I7)$$

$$(\delta f_2)_1=0, \qquad (24.I8)$$

$$(\delta f_2)_2=0, \qquad (24.I9)$$

$$(\delta f_2)_3=0 \quad \text{на} \quad L''\times L''\times L''. \qquad (24.20)$$

$$[f_{2,3}(b,c)_1, a]-[f_{2,3}(a,c)_1, b]+f_{2,3}([a,b], c)_1- \\ -f_{2,3}(b,[c,a])_1-f_{2,3}(a,[b,c])_1=0, \qquad (24.2I)$$

$$[f_2(a,b)_2, c]+[f_{2,3}(b,c)_3, a]-[f_{2,3}(a,c)_3, b]+ \\ +f_{2,3}([a,b], c)_3-f_{2,3}(b,[c,a])_3-f_{2,3}(a,[b,c])_3=0, \qquad (24.22)$$

$$[f_{2,3}(b,c)_2, a]-[f_{2,3}(a,c)_2, b]+f_{2,3}([a,b], c)_2- \\ -f_{2,3}(b,[c,a])_2-f_{2,3}(a,[b,c])_2=0 \quad \text{для} \quad (a,b,c)\in L''\times L''\times L'''. \qquad (24.23)$$

$$[f_3(b,c)_1, a]+f_3([a,b], c)_1+f_3([c,a], b)_1=0, \qquad (24.24)$$

$$[f_3(b,c)_2, a]+f_3([a,b], c)_2+f_3([c,a], b)_2=0, \qquad (24.25)$$

$$[f_{2,3}(a,b)_2, c]-[f_{2,3}(a,c)_2, b]+[f_3(b,c)_3, a]+ \\ +f_3([a,b], c)_3+f_3([c,a], b)_3=0 \quad \text{для} \quad (a,b,c)\in L''\times L'''\times L'''. \qquad (24.26)$$

$$[f_3(a,b)_2, c]+[f_3(b,c)_2, a]+[f_3(c,a)_2, b]=0 \quad \text{для} \quad (a,b,c)\in L'''\times L'''\times L'''. \qquad (24.27)$$

другой стороны, предполагая, что f является кограницей: $=\delta\varphi$, $\varphi \in End(L)$, получаем:

$$_1(a,b)_1 = [\varphi_1(a)_2, b] + [a, \varphi_1(b)_2] - \varphi_3([a,b])_1 , \tag{24.28}$$

$$_1(a,b)_2 = -\varphi_3([a,b])_2 , \tag{24.29}$$

$$_1(a,b)_3 = [\varphi_1(a)_1, b] + [a, \varphi_1(b)_1] - \varphi_3([a,b])_3 \quad \text{для} \quad a, b \in L' ; \tag{24.30}$$

$$_{1,2}(a,b)_1 = [\varphi_1(a)_1, b] + [a, \varphi_2(b)_2] - \varphi_1([a,b])_1 , \tag{24.3I}$$

$$_{1,2}(a,b)_2 = [\varphi_1(a)_2, b] - \varphi_1([a,b])_2 , \tag{24.32}$$

$$_{,2}(a,b)_3 = [\varphi_1(a)_3, b] + [a, \varphi_2(b)_1] - \varphi_1([a,b])_3 \quad \text{для} \quad (a,b) \in L' \times L'' ; \tag{24.33}$$

$$_2)_1 = (\delta\varphi_2)_1 , \tag{24.34}$$

$$_2)_2 = (\delta\varphi_2)_2 , \tag{24.35}$$

$$f_2)_3 = (\delta\varphi_2)_3 \quad \text{на} \quad L'' \times L'' ; \tag{24.36}$$

$$_{1,3}(a,b)_1 = [a, \varphi_3(b)_2] , \tag{24.37}$$

$$_{1,3}(a,b)_3 = [\varphi_1(a)_2, b] + [a, \varphi_3(b)_1] \quad \text{для} \quad a \in L', b \in L''' ; \tag{24.38}$$

$$_{2,3}(a,b)_1 = [a, \varphi_3(b)_1] - \varphi_3([a,b])_1 , \tag{24.39}$$

$$_{,3}(a,b)_2 = [a, \varphi_3(b)_2] - \varphi_3([a,b])_2 , \tag{24.40}$$

$$_3(a,b)_3 = [\varphi_2(a)_2, b] + [a, \varphi_3(b)_3] - \varphi_3([a,b])_3 \quad \text{для} \quad a \in L'', b \in L''' ; \tag{24.4I}$$

$$(a,b)_3 = [\varphi_3(a)_2, b] + [a, \varphi_3(b)_2] \quad \text{для} \quad a, b \in L''' . \tag{24.42}$$

рейдем теперь к рассмотрению отдельных компонент произ-
льного нетривиального градуированного 2-коцикла $f \in H^2_{gr}(L,L)$.

I. $(f_3)_2$, $(f_1)_2$, $(f_{2,3})_2$, $(f_{1,3})_1$, $(f_3)_3$. Поскольку $[L',L'] = L'''$, то из (24.I5) сразу следует, что $(f_3)_2 = 0$.

Пусть $f_1(e_{i,1}, e_{j,1})_2 = \sum\limits_{k=2}^{n-i-j+1} f_k^{i,j}\, e_{i+j,\,k}$ при $1 \leq i < j \leq n-i-1$,

а $\varphi(e_{i,j}) = -\sum\limits_{k=2}^{n-i+1} f^{i+j-n-1,\,n-j+1}\, e_{i,k}$ для $i=3,4,\dots,n-1$, $j=n-i+2, n-i+3, \dots, [n-\frac{i-1}{2}]$.

Тогда, согласно (24.29), разность $(f_1)_2 - \delta\varphi$ будет тождественно равна нулю на $L' \times L'$.

Теперь из (24.5) вытекает, что $(f_{2,3})_2 = 0$.

Докажем, что и компонента $(f_{1,3})_1$ всегда обязана быть нулевой.

Подставляя сначала в (24.I0): $a=e_{i,1}$, $b=e_{j,k}$, $c=e_{1,i+j+1}$; $i=1,2,\dots,n-4$, $j=3,4,\dots,n-i-1$, $k=n-j+2, n-j+3, \dots, [n-\frac{j-1}{2}]$,

мы получаем, что $f_{1,3}(e_{i,1}, e_{j,k})_1 = 0$ для указанных значений индексов i,j,k. Далее, подстановки: $a=e_{1,1}$, $b=e_{i,2}$, $c=e_{n-i,j}$ показывают, что $f_{1,3}(e_{i+1,1}, e_{n-i-1,j})_1 = 0$ при $j \neq i+3$. Наконец, подставляя в (24.I0): $a=e_{i,1}$, $b=e_{j,n-i-j}$, $c=e_{n-i-j,i+j+2}$; $i=1,2,\dots,n-4$, $j=1,2$, и при $n = 6$ дополнительно в (24.I4): $a=e_{2,1}$, $b=e_{3,1}$, $c=e_{5,3}$; $a=e_{1,1}$, $b=e_{4,1}$, $c=e_{5,1}$, мы приходим к равенствам: $f_{1,3}(e_{1,1}, e_{n-1,j})_1 = 0$, $f_{1,3}(e_{i+1,1}, e_{n-i-1,i+3})_1 = 0$ для $n \geq 6$. Если же n равно 4 или 5, то равенство: $f_{1,3}(e_{n-3,1}, e_{3,n-1})_1 = 0$ вытекает из подстановок:

$$a = e_{2,1},\ b=e_{1,1};\ c=e_{3,3};\quad a=e_{1,1},\ b=e_{1,2},\ c=e_{3,4}$$

в (24.I4) и (24.I0), соответственной.

На основании полученных в этом пункте результатов, из (24.I4) следует, что $(f_3)_3 = 0$.

2. $(f_2)_2$, $(f_1)_3$, $(f_{1,2})_1$, $(f_{2,3})_3$. Поскольку подалгебра L'' изоморфна нильпотентной части алгебры A_{n-1}, то к компоненте $(f_2)_2$ применимы все рассуждения из п.I §2. Стало быть, подставляя в (24.7): $a=e_{2,1}\,, b=e_{1,2}\,, c=e_{1,5}\;;\; a=e_{2,1}\,, b=e_{1,2}\,, c=e_{2,2}\;;$

$$a=e_{1,1}\,, b=e_{1,5}\,, c=e_{2,4}\;;\; a=e_{3,1}\,, b=e_{1,2}\,, c=e_{2,2}\;;$$

$$a=e_{1,1}\,, b=e_{1,5}\,, c=e_{2,5}\,,$$

мы убеждаемся в том, что $(f_2)_2=0$. Пусть

$$f_1(e_{i,1}, e_{j,1})-[\varphi_1(e_{i,1}), e_{j,1}]-[e_{i,1}, \varphi_1(e_{j,1})]=\sum_{k=\max\{1,n-i-j+2\}}^{[n-\frac{i+j-1}{2}]} f_k^{i,j} e_{i+j,k}$$

при $1 \le i < j \le n$.

Рассмотрим линейное отображение $\varphi_3 \in End(L)$, действующее на базисных элементах следующим образом:

$$\varphi_3(e_{i,j})=\begin{cases} -\sum\limits_{k=\max\{1,n-i+2\}}^{[n-\frac{i-1}{2}]} f_k^{i+j-n-1,\,n-j+1} e_{i,k}\,, & \text{если } e_{i,j}\in L''',\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда согласно (24.30), $(f_1)_3-\delta\varphi_1-\delta\varphi_3=0$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,1}, e_{j,k})_1-[e_{i,1}, \varphi_2(e_{j,k})]=f^{i,j,k} e_{i+k,1}$$

при $i=1,2,\dots,n-1\,,\quad j=1,2,\dots,n-i\,,\quad k=2,3,\dots,n-j+1$.

Здесь под φ_2 подразумевается сумма всех линейных отображений, кограницы которых вычитались из компоненты $(f_2)_2$. Пусть, далее, линейное отображение φ_1, которое уже упоминалось нами выше, действует на L' по правилу:

$$\varphi_1(e_{1,1})=0\,,\; \varphi_1(e_{n,1})=-f^{1,n-1,2} e_{n,1}\,,\; \varphi_1(e_{i,1})=-\sum_{j=1}^{i-1} f^{j,1,j+1} e_{j,1}\;;\; i=2,3,\dots,n-1,$$

и равно тождественному нулю на L'' и L'''. Тогда, как показывает (24.3I), вычитая из $(f_{1,2})_1$ кограницу $\delta(\varphi_1+\varphi_2)$, получим, что

$f_{1,2}(e_{i,1}, e_{1,i+1})_1=0$ при $i=1,2,\dots,n-2$, и $f_{1,2}(e_{1,1}, e_{n-1,2})_1=0$.

В случае $n = 3$, дополнительно вычитая из $(f_{1,2})_1$ кограницы отображений $\psi_1(e_{i,j})=\delta_{i,1}\,\delta_{j,3}\,f^{1,1,3}e_{1,2}$, $\psi_2(e_{i,j})=\delta_{i,1}\delta_{j,2}\,f^{2,1,2}e_{1,3}$, тождественно равные нулю на $L''\times L''$, приходим к равенствам: $f_{1,2}(e_{1,1}, e_{1,3})_1=0$, $f_{1,2}(e_{2,1}, e_{1,2})_1=0$. Теперь подстановка в (24.7): $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,2}$, $c=e_{1,3}$ убеждает нас в том, что $(f_{1,2})_2=0$ при $n\leqslant 3$. Наша ближайшая цель - доказать, что то же самое верно и для $n\geqslant 4$. Подставляя в (24.7): $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,4}$, $c=e_{3,3}$; $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,3}$, $c=e_{2,3}, e_{1,i}$; $i=5,6,\dots,n$, и при $n = 4$ дополнительно: $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,4}$, $c=e_{1,3}, e_{2,3}$, мы получаем, что $f^{1,1,k}=0$ для любого k. Подстановки в (24.7):

$a=e_{1,1}$, $b=e_{1,j+2}$, $c=e_{j,k}$; $j=2,3,\dots,n-2$, $k=2,3,\dots,n-j+1$

показывают, что $f^{1,j,k}=0$, а из подстановок: $a=e_{2,1}$, $b=e_{1,n}$, $c=e_{n-2,2}$; $a=e_{i,1}$, $b=e_{1,2}$, $c=e_{1,i+2}$; $i=2,3,\dots,n-2$ вытекает, что нулю равны все коэффициенты вида $f^{i,1,2}$.

Теперь индукцией по i можем доказать, что $f_{1,2}(e_{i,1}, e_{j,k})_2=0$ при любых i, j, k. Индуктивный переход мы совершаем, подставляя в (24.7):

$a=e_{i,1}$, $b=e_{1,2}$, $c=e_{j,k}$; $j=1,2,\dots,n-i-1$, $k=2,3,\dots,n-j+1$, $(j,k)\neq(1,2)$.

Из полученных в этом пункте результатов и уравнения (24.5) немедленно следует, что $(f_{2,3})_3=0$.

3. $(f_{1,2})_2$, $(f_1)_1$, $(f_{2,3})_1$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,1}, e_{j,k})_2 = \sum_{s=2}^{n-i-j+1} f_s^{i,j,k} e_{i+j,s}$$

для $i=1,2,\ldots,n-2$, $j=1,2,\ldots,n-i-1$, $k=2,3,\ldots,n-j+1$, и

$$\varphi_4(e_{i,1}) = \sum_{s=2}^{n-i+1} \varphi_s^i e_{i,s} \quad ; \quad i=1,2,\ldots,n-1.$$

Положим:

$$\varphi_s^i = -f_s^{1,i-1,2} \quad ; \quad i=2,3,\ldots,n-1, \quad s=3,4,\ldots,n-i+1,$$

$$\varphi_2^i = -f_2^{1,i-1,2} - \varphi_{i+1}^1 \quad ; \quad i=2,3,\ldots,n-1,$$

$$\varphi_s^1 = f_s^{1,1,s+1} \quad ; \quad s=2,3,\ldots,n-1,$$

и $\varphi_n^1 = -f_{n-1}^{1,1,n-1}$, если $n \geq 4$.

Коэффициент φ_3^1 в случае $n=3$ пока считаем произвольным, он буде определен в следующем пункте. Тогда имеем:

$$f_s^{1,j,2} = 0 \; ; \; j=1,2,\ldots,n-2, \quad s=2,3,\ldots,n-j,$$

$$f_{i-1}^{1,1,i} = 0 \; ; \; i=3,4,\ldots,n \quad \text{и} \quad f_{n-1}^{1,1,n-1} = 0.$$

Добавляя к этому результат подстановки в (24.12): $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,4}$, $c=e_{5,1}$, мы получаем, что $f_s^{1,1,k}=0$ при $n \leq 4$. Пусть теперь $n \geqslant 5$. Подстановки в (24.9) при фиксированном $a=e_{1,1}$:

$b=e_{1,j}$, $c=e_{1,s}$; $j=3,4,\ldots,n-2$, $s=j+2,j+3,\ldots,n$,

$b=e_{2,n-3}$, $c=e_{1,n-3}$, $e_{1,n-2}$; $b=e_{1,4}$,

$c=e_{1,5}$, $e_{2,4}$; $b=e_{1,5}$, $c=e_{2,4}$, и при $n = 5$ дополнительная подстановка в (24.I2): $a = e_{1,1}$, $b = e_{1,3}$, $c = e_{7,2}$ показывают, что коэффициенты вида $f_s^{1,1,k}$ равняются нулю. Далее, подставляя в (24.9): $a = e_{1,1}$, $b = e_{1,k}$, $c = e_{j,k+1}$; $k = 3,4,\dots, n-j$, мы видим, что $f_{1,2}(e_{1,1}, e_{j+1,k})_2 = 0$.

Из подстановок в (24.9):

$$a = e_{1,1}\ ,\ b = e_{1,2}\ ,\ c = e_{i,j}\ ;\ i = 2,3,\dots,n-3\ ,\ j = 3,4,\dots,n-i+1,$$

$$a = e_{2,1}\ ,\ (b,c) = (e_{1,2}, e_{1,5})\ ,\ (e_{1,i}, e_{i-4,2})\ ;\ i = 6,7,\dots,n,$$

и в (24.I2): $a = e_{1,1}$, $b = e_{n-3,2}$, $c = e_{n-1,3}$; $a = e_{2,1}$,

$$b = e_{i,2}\ ,\ c = e_{2n-i-3,1}, e_{j,2}\ ;\ i = 1,2,\dots,n-4,\ j = n+1, n+2, \dots, 2n-i-5, 2n-i-3$$

вытекает, что все $f_s^{2,j,k}$ равны нулю при $n \geqslant 5$. Для $n = 4$ тот же результат получим, подставляя дополнительно в (24.I2): $a = e_{2,1}$, $b = e_{1,2}$, $c = e_{3,3}$ и в (24.4): $a = e_{1,1}$, $b = e_{2,1}$, $c = e_{1,2}$.

Теперь мы в состоянии индукцией по i доказать, что $f_{1,2}(e_{i,1}, e_{j,k})_2$ всегда равно нулю. Если $i \geqslant [\frac{n}{2}]$, то для этого достаточно подставить в (24.9): $a = e_{1,1}$, $b = e_{i,2}$, $c = e_{j,2}$;

$$a = e_{i,1}\ ,\ b = e_{1,2}\ ,\ c = e_{j,k}\ ;\ j = 1,2,\dots,n-i-2\ ,\ k = 3,4,\dots,n-j+1.$$

При $i \leqslant [\frac{n-1}{2}]$ для обоснования индуктивного перехода необходимы следующие дополнительные подстановки в (24.9): $b = e_{1,2}$,

$$(a,c) = (e_{i+1,1}, e_{i-1,3}), (e_{i,1}, e_{j,2}), (e_{1,1}, e_{i+j-1,2})\ ;\ j = i+1, i+2, \dots, n-i-2.$$

Пусть

$$f_1(e_{i,1}, e_{j,1})_1 - [\varphi_4(e_{i,1}), e_{j,1}] - [e_{i,1}, \varphi_4(e_{j,1})] = f^{i,j} e_{i+j,1}$$

при $1 \leqslant i < j \leqslant n-i$,

и $$\varphi_5(e_{i,j}) = \begin{cases} -f^{i+j-n-1,\,n-j+1} e_{i,1}, & \text{если } 3 \le i \le n,\ n-i+2 \le j \le [n-\frac{i}{2}], \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда согласно (24.28): $(f_1 - \delta\varphi_4 - \delta\varphi_5)_1 = 0.$

Теперь из уравнения (24.4) вытекает, что компонента $(f_{2,3})_1$ тождественно равна нулю.

4. $(f_3)_1$, $(f_{1,3})_2$, $(f_{1,3})_3$. Подстановки в (24.I6):
$a = e_{i,1},\ b = e_{j,k},\ c = e_{l,m};\ 3 \le j \le l \le n-j \;\&\; (j = l \Rightarrow k < m),$
$k = n-j+2, n-j+3, \dots, n-[\frac{i}{2}],\ m = n-l+2, n-l+3, \dots, n-[\frac{l}{2}],\ i = n-j+1,$ если $2j = n-l$
и $n-j$ в противном случае, показывают, что $(f_3)_1 = 0$.

Теперь, подставляя в (24.I6):
$a = e_{i,1},\ b = e_{j,k},\ c = e_{l,m};\ i = 1, 2, \dots, n-4,\ j = 3, 4, \dots, n-i-1,\ k = n-j+2,$
$n-j+3, \dots, n-[\frac{i}{2}]$,

$$(l,m) = \begin{cases} (n,2), (n,3), \dots, (n, [\frac{n-j-i+1}{2}]), (n, [\frac{n-i-j}{2}]+2), (n, [\frac{n-i-j}{2}]+3), \dots, (n, \min\{n-i-j+1, [\frac{n+1}{2}]\}), \\ (n-1, \frac{n-i-j}{2}+2) \quad \text{для } \frac{n-i-j}{2} \in \mathbb{Z} \\ (n-i, i+j+1), (n-i, i+j+2), \dots, (n-i, [\frac{n}{2}]+1), \quad \text{если } n-i-j+1 > [\frac{n+1}{2}], \end{cases}$$

получаем, что $(f_{1,3})_2 = 0$.

Пусть

$$\big((f_{1,3})_3 - \delta(\varphi_4 + \varphi_5)\big)(e_{i,1}, e_{j,k}) = \sum_{s=\max\{1,\,n-i-j+2\}}^{[n-\frac{i+j-1}{2}]} \left(f_s^{i,j,k} + \delta_{n,3}\delta_{i,1}\delta_{j,3}\delta_{k,2}\varphi_3^1\right) e_{i+j,s}$$

при $i = 1, 2, \dots, \min\{n, 2n-4\},\ j = 3, 4, \dots, 2n-i-1,\ k = \max\{1, n-j+2\}, \max\{2, n-j+3\}, \dots, [n-\frac{i+j-1}{2}]$.

Полагая при $n = 3$ $\varphi_3^1 = -f_1^{1,3,2}$, получим, что в этом случае $f_{1,3}(e_{1,1}, e_{3,2})_3 = 0$. Если же $n \ge 4$, то подстановка в (24.I2):

$a=e_{1,1}, b=e_{1,4}, c=e_{3,n-1}$ показывает, что $f^{1,3,n-1}_{n-2}=0$. Докажем индукцией по j, что все коэффициенты вида $f^{1,j,k}_{s}$ равны нулю. Чтобы обосновать индуктивный переход, подставим в (24.I2): $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,n-i+2}$, $c=e_{j,i}$; $i=\max\{2,n-j+2\},\max\{3,n-j+3\}, \ldots, [n-\frac{j-1}{2}]$, а при четных j также: $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,\frac{j}{2}}$, $c=e_{j,n-\frac{j}{2}}$. При $n=4$ необходимо дополнительно подставить в (24.I2), (24.2):

$a=e_{1,1}, b=e_{2,2}, c=e_{3,n-1}$; $a=e_{1,1}, b=e_{2,1}$ $c=e_{3,1}$,

соответственно. Теперь из подстановок в (24.12)

$a=e_{1,1}, b=e_{i,2}, c=e_{j,k}$; $i=1,2,\ldots,\min\{n-1,2n-5\}$, $j=3,4,\ldots,2n-i-2$, $k=\max\{1,n-j+2\},\max\{2,n-j+3\},\ldots,[n-\frac{j-1}{2}]$ немедленно вытекает, что $(f_{1,3})_3=0$.

5. $(f_{1,2})_3$, $(f_2)_1$. Пусть

$$f_{1,2}(e_{i,1},e_{j,k})_3 = \sum_{s=\max\{1,n-i-j+2\}}^{[n-\frac{i+j-1}{2}]} f^{i,j,k}_{s}\, e_{i+j,s}$$

при $i=1,2,\ldots,n$, $j=\max\{1,3-i\},\max\{2,4-i\},\ldots,n-1$, $k=2,3,\ldots,n-j+1$,

и $f_2(e_{i,j},e_{k,l})_1 = f^{i,j,k,l}\, e_{i+k,1}$ при

$1<i\le k\le n-i$ & $(i=k \Rightarrow j<l)$, $j=2,3,\ldots,n-i+1$, $l=2,3,\ldots,n-k+1$.

Тогда мы, исходя из (24.33), вычитанием из f кограницы можем добиться равенства нулю коэффициентов:

$f^{n,j,k}_{1}$; $j=1,2,\ldots,n-1$, $k=2,3,\ldots,n-j+1$,

$f^{i,1,i+1}_{s}$; $i=2,3,\ldots,n-1$, $s=n-i+1,n-i+2,\ldots,[n-\frac{i}{2}]$.

Наша следующая цель доказать, что компонента $(f_2)_1$ тождественно равна нулю. Подстановка в (24.8): $a=e_{1,1}$, $b=e_{1,n}$, $c=e_{2,n-1}$ показывает, что $f^{1,n,2,n-1}=0$. Добавляя к этому результат подстановок в (24.8): $c=e_{1,3}$, $a=e_{2,1}, e_{3,1}$; $c=e_{2,2}$, $a=e_{1,1}, e_{2,1}$, при фиксированном $b=e_{1,2}$ в случае $n=3$ достигаем намеченной цели. При $n\geqslant 4$, подставляя в (24.8):

$a=e_{n,1}$, $b=e_{j,k}$, $c=e_{l,m}$; $1\leq j\leq l\leq n-j-1$,

$k=2,3,\ldots,n-j$, $m=2,3,\ldots,n-l+1$, получаем, что

$f_2(e_{j,k},e_{l,m})_1=0$, если выполнено условие: $\max\{j+k,l+m\}\leq n$, и

$$f_2^{n,1,k}+f^{1,k,1,n}=0. \tag{245.I}$$

Сочетая уравнения (245.I) с результатами подстановок в (24.8):

$b=e_{1,k}$, $(a,c)=(e_{n-1,1},e_{1,n}),(e_{n,1},e_{l,n-l+1})$; $k,l=2,3,\ldots,n-2$,

приходим к равенствам: $f^{1,k,l,n-l+1}=0$, $f_{1,2}(e_{n,1},e_{1,k})_3=0$ $(\mathrm{char}\,P\neq 2)$.

Чтобы получить аналогичные равенства при $k=n-1$, необходимо подставить в (24.8): $a=e_{n,1}$, $b=e_{n-1,i}$, $c=e_{i,n-i+1}$; $i=1,2,\ldots,n-2$, а при $n=5$ дополнительно: $a=e_{5,1}$, $b=e_{2,3}$, $c=e_{1,5}$. Кроме того в (24.I8) необходимо подставить $a=e_{1,n-1}$, $b=e_{i,n-i+1}$, $c=e_{n-i-1,i+2}$, а в случае $n=4$ дополнительно: $a=e_{1,3}$, $b=e_{1,4}$, $c=e_{2,3}$. Наконец, из подстановок в (24.I8)

$a=e_{1,i}$, $b=e_{n-2,2}$, $c=e_{1,n}$; $i=2,3,\ldots,n-2$,

$a=e_{1,2}$, $b=e_{1,n-1}$, $c=e_{n-2,3}$; $a=e_{1,3}$, $b=e_{1,4}$, $c=e_{2,2}$

вытекает равенство нулю коэффициентов $f^{1,k,n-1,2}$. Теперь, применяя (24.I8), индукцией по j можем доказать, что

$f_2(e_{j,k}, e_{l,n-l+1})_1 = 0$ при $j+k \leq n$, а затем получить равенство: $f_2(e_{j,r-j+1}, e_{l,n-l+1})_1 = 0$. Значит, $(f_{2,1}) = 0$.

Нам осталось закончить рассмотрение компоненты $(f_{1,2})_3$.

Подстановки в (24.8): $a = e_{1,1}$, $b = e_{1,j+k}$, $c = e_{j,k}$; $j = 1,2,\ldots,n-2$, $k = 2,3,\ldots,n-j$ показывают, что $f_{1,2}(e_{1,1}, e_{j+1,k})_3 = 0$.

Далее, подставляя в (24.8): $a = e_{1,1}$, $b = e_{i,2}$, $c = e_{j,k}$; $i = 1,2,\ldots,n-1$, $j = 1,2,\ldots,\min\{n-1, 2n-i-1\}$, $k = 3,4,\ldots,n-j+1$, получаем, что $f_{1,2}(e_{i,1}, e_{j,k})_3$ равняется нулю при указанных значениях индексов i, j, k.

Теперь из подстановок в (24.8): $(a,c) = (e_{1,1}, e_{n-1,2})$, $(e_{2,1}, e_{n-1,2})$, $(e_{1,1}, e_{i,2})$, $(e_{i,1}, e_{1,i+1})$; $i = 2,3,\ldots,n-2$, при фиксированном $b = e_{1,2}$, вытекает, что $f_{1,2}(e_{i,1}, e_{1,2})_3 = 0$, $f_{1,2}(e_{2,1}, e_{j,2})_3 = 0$. Наконец, применяя индукцию по i и подставляя в (24.8): $a = e_{i,1}$, $b = e_{1,i+1}$, $c = e_{j,2}$; $i, j = 2,3,\ldots,n-1$, мы видим, что все коэффициенты вида $f_s^{i,j,2}$ также равны нулю.

6.$(f_2)_3$. Заметим сначала, что в случае $n = 3$ отображения этого типа кограницами не являются. Единственно возможная подстановка в (24.20): $a = e_{1,2}$, $b = e_{1,3}$, $c = e_{2,2}$ показывает, что $f_2(e_{1,2}, e_{2,2})_3 = 0$, в то время как на значение $f_2(e_{1,3}, e_{2,2})_3$ никакие ограничения не налагаются. Таким образом, получаем нетривиальный коцикл g_{11}, определенный в формулировке теоремы 2.4. При $n \geqslant 4$ для удобства вычислений произведем разбиение подалгебр L'', L''' в прямые суммы:

$L'' = M_1 + M_2$, $L''' = N_1 + N_2$, где $M_1 = \langle e_{i,j} \in L'' \subset B_n \mid i+j=n \rangle$, $N_1 = \langle e_{i,j} \in L''' \subset B_n \mid j \geq 2 \rangle$, а M_2, N_2 дополнения к ним в L'' и L''' , соответственно. Компоненты отображения $h=(f_2)_3$, относительно указанного разбиения, обозначим, как обычно, через $h_1, h_{1,2}, h_2$. Поскольку: $[M_1, M_1 \oplus N_1] \subset M_1 \oplus N_1$, $[M_1, M_2 \oplus N_2] \subset M_2 \oplus N_2$, $[M_2, M_2 \oplus N_2] = 0$, $[M_2, N_1] \subset N_2$, то условия (24.20), (24.36) теперь эквивалентны системе (2.I) - (2.I2), в которой компоненты отображения f заменены компонентами отображения h , а пространства L', L'' - пространствами M_1, M_2 , соответственно. Впредь, ссылаясь на (2.I) - (2.I2), мы будем иметь в виду именно уравнения, полученные из них указанными изменениями.

Пусть

$$h_2(e_{i,n-i+1}, e_{j,n-j+1})_2 = h^{i,j} e_{i+j,1} \quad \text{при} \quad n-j+1 \leq i < j \leq n-1,$$

и
$$\varphi(e_{i,n-i+1}) = \sum_{j=n-i+2}^{n-[\frac{i}{2}]} \varphi^i_j e_{i,j} \quad ; i = 3,4,\dots,n-1 .$$

Определим коэффициенты φ^i_j следующим образом:

При $n=4$: $\varphi^3_3 = -h^{2,3}$,

при $n=5$: $\varphi^3_4 = -h^{3,4}$, $\varphi^4_3 = -h^{2,4}$,

а при $n \geq 6$: $\varphi^{n-i}_{2i+1} = -h^{2i,n-i}$; $i = 1,2,\dots,[\frac{n-2}{4}]$,

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{i}_{2n-i-j+1}+\varphi^{j}_{i+1} &= -h^{i,j} \\ \varphi^{i}_{2n-i-j+1}-\varphi^{2n-i-j}_{i+1} &= h^{i,2n-i-j} \\ \varphi^{j}_{i+1}-\varphi^{2n-i-j}_{i+1} &= h^{2n-i-j,j} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &j=[\tfrac{3n+5}{4}],[\tfrac{3n+9}{4}],\dots,n-1, \\ &i=n-j+1,n-j+2,\dots,n-[\tfrac{i}{2}]-1. \end{aligned}$$

Тогда, как видно из (2.I2), $(h_2)_2-\delta\varphi=0$ на $M_2\times M_2$.

Компонента $(h_1)_2$ также равна нулю для любого нетривиального коцикла h . Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (2.2):

$$a=e_{i,j},\ b=e_{k,\ell},\ c=e_{1,\ell-1}\ ;\ i=[\tfrac{n}{2}]+1,[\tfrac{n}{2}]+2,\dots,n-2,\ k=n-i,n-i+1,\dots,i-1-\delta_{i,n-2},$$

$$j=2+\delta_{i,k+1},3+\delta_{i,k+1},\dots,n-i\ ,\ \ell=3,4,\dots,j-1,(1-\delta_{i,k+1})j,(1-\delta_{i,k+1})(j+1),\dots,(1-\delta_{i,k+1})(n-k-1).$$

Рассмотрим компоненту $(h_2)_1$. Подставляя в (2.6): $a=e_{1,3}$, $b=e_{1,n}$, $c=e_{2,n-1}$, а при $n=5$ дополнительно в (2.6): $a=e_{1,4}$, $b=e_{1,5}$, $c=e_{3,3}$ и в (2.7): $a=e_{1,5}$, $b=e_{2,4}$, $c=e_{3,3}$, получаем, что $h_2(e_{1,n},e_{2,n-1})_1=0$. Докажем, что $h_2(e_{i,n-i+1},e_{j,n-j+1})_1=0$ при любых значениях индексов i,j . Для этого применим основную индукцию по j и дополнительную по i . На возможность индуктивного перехода в последнем случае указывает подстановка в (2.6): $a=e_{1,n-i}$, $b=e_{i,n-i+1}$, $c=e_{j,n-j+1}$, а в случае основной индукции подстановка:

$a=e_{1,n-j}$, $b=e_{1,n}$, $c=e_{j,n-j+1}$.

Наша следующая цель – доказать равенство нулю компоненты $(h_{1,2})_1$. Сначала подставляя в (2.5):

$a=e_{i,n-i}$; $b=e_{j,n-j+1}$, $c=e_{k,n-k+1}$;

$j=1,2,\ldots, [\frac{2n-2}{3}]$, $i=1,2,\ldots,\min\{n-2,2n-3j-1\}$,

$k=\max\{n-i-j+1,j+1\},\max\{n-i-j,j\}+2,\ldots,\min\{n-1,2n-i-2j\}$,

и $a=e_{i,n-i}$, $b=e_{k,n-k+1}$, $c=e_{2n-i-j-k,i+j+k-n+1}$ при

$j=2,3,\ldots,n-3$, $i=1,2,\ldots,n-j-2$ & $\max\{n-i-j,j\}<\min\{n,2n-i-2j\}-2$,

$k=\max\{n-i-j,j\}+1,\max\{n-i-j,j\}+2,\ldots,n-[\frac{i+j}{2}]-1$,

получаем, что $h_{1,2}(e_{l,n-l}, e_{m,n-m+1})_1$ всегда равно нулю.

Затем, индукцией по i можем доказать равенство: $h_{1,2}(e_{i,j}, e_{1,n})_1=0$.

Действительно, подставляя в (2.5): $a=e_{1,j}$, $b=e_{i,j+1}$, $c=e_{1,n}$; $j=2,3,\ldots,n-i-2$, имеем: $h_{1,2}(e_{i+1,j}, e_{1,n})_1=0$.

Наконец индукцией по k убеждаемся, что $h_{1,2}(e_{i,j}, e_{k,n-k+1})_1$ тождественно равно нулю. Для этого теперь достаточно сделать в (2.5) подстановки:

$a=e_{i,j}$, $b=e_{k,n-k}$, $c=e_{1,n}$; $i=1,2,\ldots,n-3$, $j=2,3,\ldots,n-i-1$.

Итак, нам осталось рассмотреть компоненты $(h_1)_1$, $(h_{1,2})_2$. К ним применимы те же рассуждения, что и к аналогичным компонентам отображения f в начале п.5 §I. Подстановка в (2.3): $a=e_{1,3}$, $b=e_{2,2}$, $c=e_{3,2}$ в случае n = 4 показывает, что $h_1(e_{1,3}, e_{2,2})_1=0$. Поэтому достаточно доказать равенство лю компоненты $(h_{1,2})_2$ при любом n. Но последнее немед-енно вытекает из подстановок в (2.3): $a=e_{1,j}$, $b=e_{i-1,j+1}$, $=e_{k,n-k+1}$; $k=n-1,n-2,\dots,3$, $i=n-k+1,n-k+2,\dots,n-2$, $j=2,3,\dots,n-i$

7. Поскольку коцикл g_{11} отличен от нуля только на одной ре базисных элементов алгебры $L\subset B_3$, то, очевидно, $_1\circ g_{11}=0$ и указанная локальная деформация имеет тривиальное родолжение.

Пусть α произвольный ненулевой элемент поля P. ножая базисные элементы $e_{1,2}, e_{2,1}, e_{3,2}, e_{5,1}$ на $\sqrt{\alpha}$, а $e_{1,3}$ на $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, мы видим, что коммутирование в алгебре $L(\alpha)$ задается так же, как и в алгебре $L(1)$ со стандартным азисом. Значит, все алгебры $L(\alpha)$, $\alpha\in P\setminus\{0\}$, изоморфны ад P. С другой стороны, предположение об изоморфности лгебр L, $L(1)$ приводит нас к противоречию. Теорема 2.4 оказана.

Глава III. ГРАДУИРОВАННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ СВОБОДНЫХ И ПОЧТИ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ЛИ

§I. Свободная и свободная нильпотентная алгебры Ли

Рассмотрим свободную алгебру Ли $\mathcal{L}_n$ над произвольным полем P, с n образующими, упорядоченными следующим образом: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Пусть $\mathcal{U}(\mathcal{L}_n)$ - универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathcal{L}_n$. Введем на множестве ассоциативных слов из $\mathcal{U}(\mathcal{L}_n)$ лексикографическую упорядоченность и, кроме того, будет считать, что $uv < u$ для любых слов u, v из $\mathcal{U}(\mathcal{L}_n)$. Ассоциативное слово u назовем правильным, если для любых элементов $u', u'' \in \mathcal{U}(\mathcal{L}_n)$, таких, что $u'u''=u$, имеем: $u''u' < u$. Определим, далее, понятие правильного неассоциативного слова в алгебре Ли $\mathcal{L}_n$. Именно, $y \in \mathcal{L}_n$ считаем правильным тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

ассоциативное слово $\hat{y}$, полученное из y отбрасыванием скобок, является правильным; (3I.I)

если $y=[y', y'']$, то y', y'' - правильные слова; (3I.2)

если $y=[[y',y''], y''']$, то $\hat{y}'' \leq \hat{y}'''$. (3I.3)

Как показал в своей работе А.И.Ширшов [I4], правильные неассоциативные слова образуют базис свободной алгебры Ли $\mathcal{L}_n$ и находятся во взаимно однозначном соответствии с правильными ассоциативными словами из $\mathcal{U}(\mathcal{L}_n)$. Этот базис алгебры $\mathcal{L}_n$ будем обозначать через $\mathcal{B}=\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, где $|e_i| \leq |e_{i+1}|$ - упорядочение длин элементов, а базисные элементы одинаковой длины располагаются в порядке возрастания ($e_i < e_j$ Тогда и только тогда, когда $\hat{e}_i < \hat{e}_j$). Через $\mathcal{L}_k$ обозначим подмножество множества $\mathcal{L}$, состоящее из элементов длины k . Отметим несколько свойств правильных ассоциативных и неассоциативных слов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Лемма 3.I. Любой конец данного правильного ассоциативного слова строго меньше этого слова.

Доказательство. Конец u' правильного слова $u \in U(\mathcal{L}_n)$ не может превосходить ни одного начала этого слова по определению правильности слова. Предположим, что u' совпадает с некоторым началом слова u . Тогда имеем две возможности: либо $u = u'vu'$, либо $u = v'vv''$, где $v'v = vv'' = u'$. В первом случае из того, что $u'u'v < u = u'vu'$, вытекает, что $u'v < vu'$, поэтому $u = u'vu' < vu'u'$ и мы приходим к противоречию с правильностью слова u . Аналогично во втором случае получаем:

$$u'v' < u = u'v'' \Rightarrow v' < v'' \Rightarrow u = v'vv'' = v'v'v < v''v'v$$

- противоречие.

Лемма 3.2. Если u, v - правильные ассоциативные слова и $u > v$, то uv - правильное ассоциативное слово.

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый из трех возможных типов разбиений слова uv :

а) $uv = u' \cdot u''v$. Тогда $u''vu' \overset{\text{л.1}}{<} uvu' < uv$ и все доказано.

б) $uv = u \cdot v$. Если $|u| \geq |v|$, то $vu < uvu < uv$; если же $v = v'v''$, $|v'| = |u|$, то $vu = v'v''u \leq uv''u \overset{\text{л.1}}{<} uvu < uv$.

в) Пусть, наконец, $uv = uv' \cdot v''$. Тогда $v''uv' \overset{л.1}{<} vu \overset{б)}{<} uv$, ч.т.д.

Лемма 3.3. Пусть $e_i, e_j \in \mathcal{L}$ – правильные неассоциативные слова и $e_i > e_j$. Тогда в записи коммутатора $[e_i, e_j]$ через элементы базиса $\mathcal{L}$ будут участвовать только слова, строго большие e_j.

Доказательство. Если e_i, e_j – образующие алгебры $\mathcal{L}_n$, то $[e_i, e_j] \in \mathcal{L}$, и утверждение нашей леммы очевидно справедливо. Следовательно, мы можем применить индукцию по суммарной длине слов e_i, e_j: $\lambda = |e_i| + |e_j|$. Для осуществления индуктивного перехода от λ_0 к λ_0+1 воспользуемся второй индукцией – по высоте элемента e_j. Начало для дополнительной индукции у нас имеется: $e_j = x_n^{\lambda_0-1} x_{n-1} = [\underbrace{x_n,[x_n,\dots[x_n}_{(\lambda_0-1)-раз},x_{n-1}]\dots]]$, $e_i = x_n \Rightarrow e_j < [e_i, e_j] \in \mathcal{L}$.

Далее, лемма, очевидно, имеет место, если e_i – образующая, а также в случае, когда $e_i = [e_{i'}, e_{i''}]$, $e_{i''} \leq e_j$ (определение базиса и лемма I). Пусть, наконец, $e_i = [e_{i'}, e_{i''}]$ и $e_{i''} > e_j$. Тогда, раскрывая коммутатор по тождеству Якоби, получаем:

$$[e_i, e_j] = [[e_{i'}, e_j], e_{i''}] + [e_{i'}, [e_{i''}, e_j]].$$

К внутренним коммутаторам применимо предположение основной индукции, значит они раскладываются по базисным элементам, строго большим e_j. Но тогда попадаем в предположение второй индукции, чем и завершается доказательство леммы.

Теперь мы в состоянии доказать, что у свободной нильпотентной алгебры Ли класса нильпотентности $m \geq 2$ не существует нетривиальных градуированных 2-коциклов.

Другими словами, имеет место

Теорема 3.1. Пусть $L_n(m) = \mathcal{L}_n / \mathcal{L}_n^{m+1}$, $m \geq 2$. Тогда $H^2_{gr}(L_n(m), L_n(m)) = 0$.

Доказательство. В случае $m = 2$ все очевидно; любой градуированный коцикл f действует по правилу

$$(x_i, x_j) \xrightarrow{f} \sum_{0<l<k<n+1} f^{i,j}_{k,l} [x_k, x_l] \ ; \quad 0<j<i<n+1$$

(далее – по кососимметричности и линейности), и поэтому является кограницей линейного отображения φ определенного следующими значениями на базисе:

$$\varphi(x_i)=0 \ , \quad \varphi([x_i,x_j]) = -\sum_{1\leq l<k\leq n} f^{i,j}_{k,l} [x_k, x_l] .$$

Следовательно, мы можем вести индукцию по величине m. Предположим, что наше утверждение имеет место при всех m': $2 \leq m' \leq m$ и обозначим:

$$\tau(s) = \sum_{i=1}^{s} |\mathcal{L}_i| \ ; \quad s = 1, 2, \dots, m+1 .$$

В силу индуктивного предположения из того, что $f \in H^2_{gr}(L_n(m+1), L_n(m+1))$ и $|e_i|+|e_j| \leq m$, следует, что $f(e_i,e_j)=0$. Пусть

$$f(e_i,e_j) = \sum_{s=\tau(m)+1}^{\tau(m+1)} f^{i,j}_s e_s$$

для $|e_i|+|e_j| = m+1, \ i>j$.

Определим отображение $\varphi \in End(L_n(m+1))$:

$$\varphi(e_k) = \begin{cases} -\sum\limits_{s=r(m)+1}^{r(m+1)} f_s^{i,j} e_s, & \text{где } e_k = [e_i, e_j] \in \mathcal{B}_{m+1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда у коцикла $g = f - \delta\varphi$ ненулевыми могут быть только значения на парах базисных элементов (e_i, e_j) таких, что $|e_i| + |e_j| = m+1$ и $e_j < e_{i''}$, где $e_i = [e_{i'}, e_{i''}]$. Но подставляя в уравнение (I.4), которому удовлетворяет коцикл g, тройки базисных элементов $a = e_{i'}$, $b = e_{i''}$, $c = e_j$, в порядке убывания индекса j, мы согласно лемме 3.3 получаем, что и эти значения равны нулю.

Следствие 3.I. $H^2_{gr}(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n) = 0$

В заключение этого параграфа введем понятие почти правильных неассоциативных слов и докажем несколько их свойств, которые нам понадобятся при изучении почти свободных алгебр Ли.

Определение 3.I. Слово $y \in \mathcal{L}_n$ назовем почти правильным, если оно само, а также все его подслова удовлетворяют условию (3I.I).

Следствие 3.2. Для любого неассоциативного слова $y \in \mathcal{L}_n$ существует почти правильное неассоциативное слово y^*, которое либо равно y в алгебре $\mathcal{L}_n$, либо отличается от него знаком.

Доказательство. Справедливость этого утверждения непосредственно вытекает из определения 3.I и леммы 3.2.

Лемма 3.4. Пусть z - слово, полученное из почти правильного неассоциативного слова $y \in \mathcal{L}_n$ заменой его подслова

y' на почти правильное слово y'' такое, что $\hat{y}'' < \hat{y}'$. Тогда $\hat{z}^* < \hat{y}$.

Доказательство можно провести индукцией по длине слова y.

В процессе перехода от z к z^* нам приходится менять коммутаторы $[z_1, y_2]$ на $-[y_2, z_1]$, где $\hat{z}_1, \hat{y}_2$ - правильные ассоциативные слова и $z_1 < y_2$. Поскольку в исходном слове y на их месте находилось почти правильное слово $[y_1, y_2]$, $y_1 > z_1$, то $\hat{y}_2 \hat{z}_1 < \hat{y}_2 \hat{y}_1 < \hat{y}_1 \hat{y}_2$, ч.т.д.

Лемма 3.5. Произвольное почти правильное неассоциативное слово $y \in \mathcal{L}_n$ выражается через базис $\mathcal{B}$ в виде:

$$y = e_i + \sum_{e_j < e_i} \pm e_j \quad \text{, где} \quad \hat{e}_i = \hat{y} .$$

Доказательство. В ходе разложения элемента y по базисным словам применяются тождество Якоби и закон антикоммутативности. В первом случае выражение $[[y_1, y_2], y_3]$ для $y_2 > y_3$ заменяется на $[[y_1, y_3], y_2] + [y_1, [y_2, y_3]]$. Второе слагаемое при отбрасывании скобок дает то же ассоциативное слово, что и исходное выражение, а из первого слагаемого получается строго меньшее слово, поскольку согласно лемме 3.2 имеем $\hat{y}_3 \hat{y}_2 < \hat{y}_2 \hat{y}_3$, и значит $\hat{y}_1 \hat{y}_3 \hat{y}_2 < \hat{y}_1 \hat{y}_2 \hat{y}_3$. Второе из упомянутых преобразований мы уже рассмотрели в доказательстве леммы 3.4 и убедились, что оно всегда приводит к уменьшению исходного слова.

Следствие 3.3. Замена в базисном элементе $e_i \in \mathcal{B} < \mathcal{L}_n$ подслова e_j на слово $e_k < e_j$ и разложение полученного элемента по базису $\mathcal{B}$, приводят к линейной комбинации правильных неассоциативных слов, строго меньших e_i.

§2. Почти свободные алгебры Ли

Рассмотрим произвольное однородное степени d-нормирован-
е соотношение между элементами свободной алгебры Ли $\mathcal{L}_n$ в ко-
рой мы зафиксировали базис $\mathcal{B}$:

$$= \sum_{i=\tau(d-1)+1}^{m} \alpha_i e_i = 0 \; ; \; m \le \tau(d) \, , \alpha_i \in P \; \& \; \alpha_m = 1 . \qquad (32.I)$$

Определение 3.2. Под почти свободной алгеброй Ли будем
нимать факторалгебру свободной алгебры $\mathcal{L}_n$ по идеалу $I(e)$,
рожденному элементом e : $L = L(n,e) = \mathcal{L}_n / I(e)$.

Как и $\mathcal{L}_n$, алгебра L наделена естественной градуировкой:

$$= \bigoplus_{i \ge 1} L_i \; , \quad L_i = \langle x \in L \mid |x| = i \rangle .$$

I. Наша первая цель – найти удобный для дальнейших вычисле-
й базис алгебры L . Заменим каждый из базисных элементов
e_i алгебры $\mathcal{L}_n$, для которого $\hat{e}_m$ является подсловом слова
e_i , на элемент, полученный в результате следующих действий:
сдвиг левых скобок, не содержащихся в e_m, но расположенных
нутри выражения $q \subset e_i$, $\hat{q} = \hat{e}_m$, в начало этого
ыражения; б) добавление в начале выражения q стольких
евых скобок, сколько их было сдвинутых, и в конце q – такого
е количества правых скобок; в) замена вхождений подслова
e_m на элемент e ; г) отбрасывание двойных скобок, если они
бразовались.

Следствие 3.4. Множество $\mathcal{L}'$, полученное из базиса $\mathcal{B}$
аменой указанных слов e_i на элементы e_i', также будет ба-
исом свободной алгебры Ли $\mathcal{L}_n$.

Это непосредственно вытекает из утверждений леммы 3.5 и следствия 3.3.

Следствие 3.5. Множество $\mathcal{B}_e$, полученное из $\mathcal{B}'$ изъятием элементов $e_{i'}$, будет базисом подпространства $\mathcal{L}(e) \subset \mathcal{L}_n$, изоморфного пространству алгебры L.

Этот результат вытекает из следствия 3.4 и следующего утверждения, принадлежащего А.И.Ширшову [15] : если элемент $y \in \mathcal{L}_n$ принадлежит идеалу $I(e)$, то старшее ассоциативное слово - $\bar{y}$, полученное после разложения y по базису $\mathcal{B}$ и отбрасывания скобок, содержит в качестве подслова слово $\bar{e} = \hat{e}_m$.

Зафиксируем на будущее в алгебре $\mathcal{L}_n$ базис $\mathcal{B}'$. Через y_0 и y_1 для произвольного элемента $y \in \mathcal{L}_n$ обозначим его $I(e)$- и $\mathcal{L}(e)$-компоненты. Пусть π будет канонический эпиморфизм алгебры $\mathcal{L}_n$ на алгебру L . В качестве базиса алгебры L мы выберем множество $B = \pi(\mathcal{B}') = \{E_i = \pi(e_i) \mid e_i \in \mathcal{B}'\}$. Для произвольного элемента $a \in L$ через a^1 будем обозначать его прообраз при отображении π , принадлежащий $\mathcal{L}(e)$. Операцию коммутирования в алгебрах $\mathcal{L}_n$ и L будем обозначать одинаковой квадратной скобкой, однако из того, к каким элементам она будет применена, всегда будет ясно, в какой именно алгебре мы действуем.

2. Возьмем произвольную градуированную 2-коцепь $f \in C^2_{gr}(L,L)$ и определим линейное отображение φ алгебры L в себя следующим образом: ограничение φ на подпространство L_1 пусть будет произвольный линейный оператор $\varphi^* \in End(L_1)$, а для любого $E_i = [E_{i'}, E_{i''}] \in B$ полагаем:

$$\varphi(E_i)=[\varphi(E_{i'}),E_{i''}]+[E_{i'},\varphi(E_{i''})]-f(E_{i'},E_{i''}).$$

Тогда коцепь $\tilde{f}=f-\delta\varphi$ будет действовать нулевым образом на парах слов $(E_i,E_j)\in B\times B$, $E_i>E_j$, таких, что $[E_i,E_j]\in B$. Кроме того, если $E_m=[E_{m'},E_{m''}]$, то мы имеем:

$$\tilde{f}(E_{m'},E_{m''})=f(E_{m'},E_{m''})-[\varphi(E_{m'}),E_{m''}]-[E_{m'},\varphi(E_{m''})]-\sum_{i=r(d-1)+1}^{m-1}\alpha_i\varphi(E_i).$$

Следовательно, размерностью пространства

$$V_d=\left\langle \tilde{f}(E_{m'},E_{m''})\;\middle|\;\tilde{f}\in C^2_{gr}(L,L)\big/B^2_{gr}(L,L)\right\rangle\subset L_d\,,$$

натянутого на множество образов пары $(E_{m'},E_{m''})$ при действии на нее всевозможными нетривиальными градуированными коцепями, будет

$$M=\dim L_d-\dim\left\langle[\varphi(E_{m'}),E_{m''}]+[E_{m'},\varphi(E_{m''})]+\sum_{i=r(d-1)+1}^{m-d}\alpha_i\varphi(E_i)\;\middle|\;\varphi^*\in End(L_1)\right\rangle.$$

Наша цель – доказать, что дополнительные условия, наложенные на коцепь $\tilde{f}$ в предположении, что она является коциклом, служат исключительно для определения значения $\tilde{f}$ на парах базисных слов $(E_i,E_j)\neq(E_{m'},E_{m''})$, $E_i>E_j$, $[E_i,E_j]\notin B$, то есть имеет место следующая

Теорема 3.2. $\dim H^2_{gr}(L,L)=M$.

Доказательство. Заметим сначала, что из тривиальности второй группы градуированных когомологий для свободной нильпотентной алгебры (теорема 3.I), вытекает, что $f(E_i,E_j)=0$ на парах $(E_i,E_j)\ :\ |e_i|+|e_j|<d$, для любого $f\in H^2_{gr}(L,L)$.

Определим для произвольного элемента $w\in V_d$ линейный оператор $\mathfrak{a}_w\in End(\mathcal{L}_n)$, который переводит каждый из базисных элементов e_i' в сумму элементов, полученных из e_i' заменой какого-то вхождения элемента e на элемент w, а на базисных элементах $e_i\in\mathcal{B}'$ действует нулевым образом. Докажем, что тогда 2-коцепь f^w, определенная по правилу $f^w(E_i,E_j)=\pi\mathfrak{a}_w[e_i,e_j]$, является коциклом. Для этого заметим, что

$$[\pi\mathfrak{a}_w[e_i,e_j],E_k]=\pi[\mathfrak{a}_w[e_i,e_j],e_k]=\pi\mathfrak{a}_w[[e_i,e_j]_0,e_k]$$

и $[E_i,E_j]^1=[e_i,e_j]_1$. Значит,

$$\pi\mathfrak{a}_w[[E_i,E_j]^1,e_k]+[\pi\mathfrak{a}_w[e_i,e_j],E_k]=\pi\mathfrak{a}_w[[e_i,e_j],e_k].$$

Поэтому мы имеем:

$$(f^w\circ\mathcal{F}_0+\mathcal{F}_0\circ f^w)(E_i,E_j,E_k)=\pi\mathfrak{a}_w((\mathcal{F}_0\circ\mathcal{F}_0)(e_i,e_j,e_k))=0,$$

в силу справедливости в алгебре $\mathcal{L}_n$ тождества Якоби. Следовательно, $f^w\in Z^2_{gr}(L,L)$.

Пусть теперь $\{w_1,w_2,\ldots,w_M\}$ - какой-то базис пространства V_d. Докажем, что тогда $\{f^{w_1},f^{w_2},\ldots,f^{w_M}\}$ будет базисом пространства $H^2_{gr}(L,L)$. Линейная независимость указанных коциклов, очевидно, вытекает из того, что $f^{w_i}(E_{m'},E_{m''})=w_i$. Поэтому нам осталось убедиться в том, что они образуют полную систему. Пусть значение коцикла $f \in H^2_{gr}(L,L)$ на паре $(E_{m'},E_{m''})$ равно нулю. Покажем, что тогда $f=0$. Мы уже знаем, что $f(L_k,L_\ell)=0$, если $k+\ell<d$ и $f(E_i,E_j)=0$, если $[E_i,E_j]\in B$. Применяя индукцию по высоте второго аргумента докажем, что $f(L_k,L_{d-k})=0$ при $k=1,2,\ldots,[\frac{d}{2}]$. Если $E_i=E_n$, $E_j=E_n^{d-2}E_{n-1}$, то либо $[E_i,E_j]\in B$, либо $[E_i,E_j]=E_m$, значит $f(E_i,E_j)=0$. То же самое рассуждение справедливо, если $E_i>E_j$ и $|E_i|=1$, или $E_i=[E_{i'},E_{i''}]$, $E_{i''}\leq E_j$. Рассмотрим оставшийся случай, когда $[E_i,E_j]\notin B$. Из условия коцикличности f получаем:

$$f(E_i,E_j)=f([E_{i'},E_j],E_{i''})+f(E_{i'},[E_{i''},E_j]).$$

Поскольку, согласно лемме 3.3, коммутаторы $[E_{i'},E_j],[E_{i''},E_j]$ раскладываются по базисным словам, строго большим E_j, применимо индуктивное предположение, и опять $f(E_i,E_j]=0$. Пусть теперь $k+\ell>d$. Воспользуемся основной индукцией по суммарной длине слов E_i,E_j – $k+\ell$ и дополнительной индукцией по высоте слова $\hat{e}_i\,\hat{e}_j$. Основание для дополнительной индукции у нас имеется, поскольку $[\ldots[[E_2,E_1],E_1],\ldots,E_1]$ – либо элемент базиса, либо 0. Далее, мы согласно обоим индуктивным предположениям получаем, что

$$f([E_{i'},E_{i''}],E_j)=f(E_{i'},[E_{i''},E_j]),$$
$$f(E_i,[E_{j'},E_{j''}])=f([E_i,E_{j'}],E_{j''}).$$

оэтому, если коммутатор $[E_i,E_j]$ не являлся базисным элементом о той причине, что $E_i=[E_{i'},E_{i''}]$, $E_{i''}>E_j$, то, постепенно меньшая длину первого аргумента, в конце концов придем к паре элементов $(E_{\tilde{i}},E_{\tilde{j}})$, такой, что $[E_{\tilde{i}},E_{\tilde{j}}]\in B$. Следовательно: $f(E_i,E_j)=f(E_{\tilde{i}},E_{\tilde{j}})=0$. Если же в $\hat{e}_i\hat{e}_j$ входило лово $\hat{e}_m$, то мы можем добиться того, чтобы оно полностью входило ибо в $\hat{e}_i$, либо в $\hat{e}_j$. Тогда, заменяя его на элемент $-\sum\limits_{s=r(d-1)+1}^{m-1}\alpha_s e_s$, мы согласно следствию 3.3 понизим высоту слова $\hat{e}_i\hat{e}_j$ и попадем в условия дополнительной индукции. Значит, $f(e_i,e_j)=0$ и теорема полностью доказана.

3. Рассмотрим вопрос о продолжаемости локальных деформаций алгебры L.

Теорема 3.3. Для любого элемента $W\in V_d$ коцикл f^W продолжаем, причем q-тое продолжение задается формулой:

$$f^W_q(E_j,E_k)=\pi\,\sigma_w^q[e_i,e_j].$$

Доказательство. Согласно отмеченным выше свойствам π и σ_w, имеем:

$$\pi\,\sigma_w^q\,[[e_i,e_j],e_k]=$$

$$=\pi\,\sigma_w^q\,[[e_i,e_j]_1,e_k]+\pi\,\sigma_w^q\,[[e_i,e_j]_0,e_k]=$$

$$=f^W_q([E_i,E_j],E_k)+\pi\,\sigma_w^{q-1}[\sigma_w[e_i,e_j],e_k]=$$

$$= f_q^w(\mathcal{F}_0(E_i,E_j),E_k) + f_{q-1}^w(f_1^w(E_i,E_j),E_k) + \pi\sigma_w^{q-1}[(\alpha_w[e_i,e_j])_0, e_k] =$$

$$= \ldots = \sum_{s=0}^{q} f_{q-s}^w\,(f_s^w(E_i,E_j),E_k)\,.$$

Поэтому

$$\sum_{s=0}^{q}(f_{q-s}^w\circ f_s^w)(E_i,E_j,E_k) = \pi\sigma_w^q\,(\mathcal{F}_0\circ\mathcal{F}_0)(e_i,e_j,e_k)=0$$

по тождеству Якоби. Значит, все условия (I.2) выполнены, ч.т.д.

4. Проиллюстрируем полученные результаты в частном случае: $d = 2$. Пусть $e = \sum_{1\le j<i\le n}\alpha_{i,j}[x_i,x_j]$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_{n,n-1}=-1$, $\alpha_{n-1,i}=\alpha_{n,i}=0$ при $i=1,2,\ldots,n-2$. Тогда $\dim L_2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$, а размерность пространства

$$M_2 = \left\langle [\varphi(x_n),x_{n-1}]+[x_n,\varphi(x_{n-1})] + \sum_{0<j<i<n}\alpha_{i,j}\varphi([x_i,x_j]) \,\middle|\, \varphi^* \in End(L_1)\right\rangle$$

равняется рангу матрицы Γ_n, построенной следующим образом: ее элемент $\gamma_{k,\ell}$ равен коэффициенту при неизвестной

$$\varphi_{\ell+(n-2)\left(\left[\frac{\ell}{n^2-4n+5}\right]-\left[\frac{\ell-1}{n-2}\right]\right)}^{\left[\frac{\ell-1}{n-2}\right]+1}$$

в выражении

$$\sum_{s=1}^{n-2}(\alpha_{i,s}\varphi_j^s+\alpha_{s,j}\varphi_i^s)-\varphi_{n-1}^{n-1}\alpha_{i,j}\ ;\ i=\min\{i'\,|\,i'(i'-1)\ge 2k\},$$

$$j = k-\frac{i^2-3i+2}{2}\ ,$$

при $1 \leq k \leq \frac{n^2-5n+6}{2}$, $1 \leq l \leq n^2-4n+5$. Например Γ_4 есть просто строчка $(\alpha_{2,1}, 0, 0, \alpha_{2,1}, -\alpha_{2,1})$ и ее ранг равен либо I либо 0 в зависимости от того, отличен от нуля коэффициент $\alpha_{2,1}$ или нет. При $n = 5$ имеем:

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} \alpha_{2,1} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{2,1} & 0 & -\alpha_{3,2} & \alpha_{3,1} & 0 & -\alpha_{2,1} \\ \alpha_{3,1} & 0 & 0 & \alpha_{3,2} & 0 & \alpha_{2,1} & 0 & 0 & \alpha_{3,1} & -\alpha_{3,1} \\ 0 & \alpha_{3,1} & -\alpha_{2,1} & 0 & \alpha_{3,2} & 0 & 0 & 0 & \alpha_{3,2} & -\alpha_{3,2} \end{pmatrix}$$

и поэтому согласно теореме 3.2:

$$\dim H^2_{gr}(L,L) = \begin{cases} 3, \text{ если } \alpha_{2,1}^2 + \alpha_{3,1}^2 + \alpha_{3,2}^2 = 0, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Легко заметить, что если ранг матрицы Γ_n отличен от нуля, то он не меньше чем $2n-7$.

Предположим теперь, что все коэффициенты α_{ij} за исключением $\alpha_{n,n-1}$ равны нулю, то есть наше соотношение имеет вид слова: $e = [x_n, x_{n-1}] = 0$. Тогда возможно несколько более явное задание нетривиальных коциклов и их продолжений.

Определение 3.3. Назовем f-производной линейное отображение алгебры L в себя, которое действует нулевым образом на базисных элементах, не превышающих x_{n-2} или строго больших x_{n-1}, а базисный элемент e_i, удовлетворяющий условию $x_{n-2} < e_i \leq x_{n-1}$, переводит в

$$(e_i)'_f = \sum (-1)^{\varepsilon} [\ldots [f(x_n, x_{n-1}), e_{i_1}], \ldots e_{i_s}],$$

где суммирование происходит по всем $s, e_{i_1}, \ldots, e_{i_s}$, таким, что

$$[\ldots[x_{n-1}, e_{i_1}], \ldots, e_{i_s}] = (-1)^{\varepsilon} e_i \quad , \qquad \varepsilon = 0, 1 .$$

Для любого натурального числа ℓ через a_ℓ обозначим билинейную функцию $L \times L \to L$, действующую на паре базисных векторов $e_i > x_{n-1}, e_j$ по правилу

$$a_\ell (e_i, e_j) = \sum (-1)^{\varepsilon} \binom{k+\ell-1}{\ell-1} [\ldots[[x_n^k, [e_j, e_{i_0}]], e_{i_1}], \ldots, e_{i_s}],$$

где суммирование проводится по всем $k, s, e_{i_0}, \ldots, e_{i_s}$

таким, что

$$e_{i_0} > x_{n-1} , \quad [\ldots[[x_n^{k+\ell}, e_{i_0}], e_{i_1}], \ldots, e_{i_s}] = (-1)^{\varepsilon} e_i .$$

Используя эти понятия, мы на основании теорем 3.2, 3.3 можем сформулировать следующее

Следствие 3.6. Пусть $L = \frac{\mathcal{L}_n}{I(x_{n-1}, x_n)}$. Тогда

$$\dim H^2_{gr}(L, L) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

и деформации алгебры L имеют вид:

$$\mathcal{F}_t(a,b) = [a,b] + \sum_{i \geq 1} t^i f_i(a,b) \text{, где } f_i(a,b) = (-1)^{i-1} a_i (a, (b)^{(i)}_{f_1}),$$

а значение $f_1(x_n, x_{n-1})$ может быть произвольным элементом из L_2.

5. В заключение приведем простой пример, показывающий, что при наличии в алгебре Ли более чем одного соотношения их взаимодействие может быть существенным и аналог теоремы

3.2 места не имеет. Как правило, в таких алгебрах выполняется строгое неравенство: $\dim H^2_{gr}(L,L) < \dim \frac{C^2_{gr}(L,L)}{B^2_{gr}(L,L)}$

Пусть $\mathcal{L}_5 = \langle x_1, x_2, \ldots, x_5 \rangle$, $I = I([x_5, x_2], [x_2, [x_2, x_1]])$, $L = \mathcal{L}_5/I$.

Тогда пространство V_2, определенное в п. 2, совпадает с $\langle [x_4, x_3], [x_4, x_1], [x_3, x_1] \rangle$, так что $M = 3$. Но подставляя в условие (I.4): $a = x_5$, $b = x_2$, $c = [x_2, x_1]$ мы убеждаемся, что $f(x_5, x_2) = 0$ для любого $f \in H^2_{gr}(L,L)$, вопреки теореме 3.2 (справедливой для алгебр с одним соотношением).

ЛИТЕРАТУРА

I. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras.- Ann. of Math., Ser.2, v.79 (1964), N1, p.59-103.

2. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras-II.- Ann. of Math., Ser.2, v.84 (1966), N1, p.1-19.

3. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras-III.- Ann. of Math., Ser.2, v.88 (1968), N1, p.1-34.

4. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras-IV.- Ann. of Math., Ser.2, v.99 (1974), N2, p.257-276.

5. Piper W.S. Algebraic deformation theory. - J. of Diff. Geom., v.1 (1967), N2, p.133-168.

6. Рудаков А.Н. Деформации простых алгебр Ли. - Изв. АН СССР, сер. мат., т.35 (I97I), №5 , с. III3-III9.

7. Piper W.S. Algebras of matrices under deformation. - J. of Diff. Geom., v.5 (1971), N3-4, p.437-449.

8. Джумадильдаев А.С. Деформации общей алгебры Ли картановского типа. - Докл. АН СССР, т.25I (I980), №6, с. I289-I292.

9. Джумадильдаев А.С. Относительные когомологии и деформации алгебр Ли картановских типов. - Докл. АН СССР, т.257 (I98I), №5 , с. I044-I048.

I0. Kostrikin A.I. Variations modulaires sur un thème de Cartan.- Actes Congrès intern. math., T.1 (1970), p.285-292.

II. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли, группы Ли. - М., "Мир", I976.

I2. Hochschild G. On the cohomology groups of an associative algebra.- Ann. of Math., Ser.2, v.46 (1945), N1, p.58-67.

I3. Hochschild G., Serre J.-P. Cohomology of Lie algebras. - Ann. of Math., Ser.2, v.57 (1953), N3, p.591-603.

I4. Ширшов А.И. О свободных кольцах Ли. - Мат. сб., т.45 (I958), №2, с. II3-I22.

I5. Ширшов А.И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли. - Сиб. мат. жур., т.3 (I962), №2, с. 292-296.

I6. Пагон Д. О деформациях нильпотентных градуированных алгебр Ли. - Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., I98I, №4, с. 50 - 54.

I7. Пагон Д. Градуированные деформации почти свободных алгебр Ли. - Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., I982, №5, с. 66-70.

Механико-математический факультет

На правах рукописи

ПАГОН Душан

ДЕФОРМАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ

(01.01.06 - математическая логика,
алгебра и теория чисел)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА • 1982

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель - член-корреспондент АН СССР, профессор А.И.Кострикин.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук М.М.Постников;
кандидат физико-математических наук А.С.Джумадильдаев.

Ведущее предприятие - Казанский государственный университет им. Ульянова (Ленина).

Защита состоится "1/X" 1982 г. в "15^{30}" час. на заседании специализированного Совета №2 по математике при МГУ по адресу: Главное здание МГУ, Москва, Ленинские горы.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. А.М.Горького МГУ.

Автореферат разослан "4/IX" 1982 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета №2 по математике при МГУ
кандидат физико-математических наук
В.Н. Чубариков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Понятие деформации в математике и физике встречается довольно часто, причем в него может быть вложен различный смысл. Основная идея, как правило, заключается во введении одного или нескольких непрерывных параметров, при помощи которых осуществляется связь между однородными объектами.

В теории алгебр определение деформации, в том виде, в котором она теперь встречается чаще всего, впервые дал М. Герстенхабер в 1964 году [1]. Хотя со времени выхода в свет этой статьи прошло почти 20 лет, конкретных результатов, относящихся к теории деформаций алгебр, получено сравнительно немного. Основная причина этого, кажется, в том, что деформации алгебр либо тривиальные (например, для простых классических алгебр Ли над полем характеристики нуль [2]), либо их настолько много, что они не поддаются изучению (например, для сравнительно простых подалгебр классических простых алгебр Ли [3]) .

Очень интересным оказалось изучение деформаций простых алгебр Ли картановского типа в модулярном случае. Исчерпывающие результаты о деформациях модулярных алгебр серий $W_n(\bar{m})$, $H_n(\bar{m})$, $K_n(\bar{m})$,

---

1. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras. - Ann. of Math., Ser.2, v.79 (1964), N1, p.59-103.
2. Рудаков А.Н. Деформации простых алгебр Ли. - Изв. АН СССР, сер. мат., т.35 (1971), №5, с.1113-1119.
3. Piper W.S. Algebras of matrices under deformation. - J. of Diff. Geom., v.5 (1971), N3-4, p.437-449.

1-1700

полученные А.С.Джумадильдаевым [I], позволили ему уточнить известную гипотезу А.И.Кострикина и И.Р.Шафаревича [2] о классификации простых конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 5$.

Большой интерес представляют деформации нильпотентных алгебр Ли. Хорошо известно [3], что классы изоморфизма нильпотентных алгебр Ли фиксированной размерности над полем k определяются наборами "непрерывных" параметров - элементов поля k. Однако общая ситуация изучена весьма слабо, и задачу о разумном описании нильпотентных алгебр Ли трудно даже сформулировать в корректной форме. Естественно ожидать, что деформации, являющиеся такими же инвариантами алгебр, как автоморфизмы или дифференцирования, могут сыграть значительную роль в вопросе о классификации нильпотентных алгебр Ли. В диссертации предлагается изучать те деформации нильпотентных и других градуированных алгебр Ли, которые хорошо согласуются с их градуированной структурой.

Цель работы: изучение градуированных деформаций некоторых естественных классов нильпотентных алгебр Ли, а также класса почти свободных алгебр Ли. Это значит, что для вышеуказанных алгебр Ли L надо решить следующие две задачи:

I. Джумадильдаев А.С. Относительные когомологии и деформации алгебр Ли картановских типов.-Докл.АН СССР, т.257(1981)№5,с.1044-1048.

2. Kostrikin A.I. Variations modulaires sur un theme de Cartan.- Actes Congres intern. math., T.1 (1970), p.285-292.

3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Алгебры Ли, свободные алгебры Ли, группы Ли. - М., "Мир" 1976.

I. Вычислить вторую группу градуированных когомологий $H^2_{gr}(L,L)$, то есть найти все локальные градуированные деформации.

II. Исследовать вопрос о продолжаемости полученных градуированных 2-коциклов до глобальных деформаций алгебры L .

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Их можно разделить на три группы.

I. Общие результаты о градуированных деформациях.
  - а) Введено понятие градуированной деформации.
  - б) Доказана замкнутость класса градуированных деформаций относительно операции продолжения.
  - в) Приведен пример непродолжаемой локальной градуированной деформации.

2. Градуированные деформации нильпотентных алгебр Ли.
  - а) Полностью изучены группы локальных градуированных деформаций нильпотентных частей простых алгебр Ли классических серий относительно их естественной градуировки.
  - б) Доказано, что полученные градуированные 2-коциклы допускают тривиальные продолжения.
  - в) Решен вопрос о специализации параметра для градуированных деформаций указанных алгебр.

3. Градуированные деформации свободных и почти свободных алгебр Ли.
  - а) Доказано, что у свободной и свободной нильпотентной алгебр Ли нет нетривиальных градуированных деформаций.
  - б) Описаны все градуированные деформации почти свободных алгебр Ли.

Приложения. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в теории колец, теории когомологий алгебр и модулей, и в задаче описания классов изо-

2-1700

морфизма нильпотентных алгебр Ли фиксированной размерности.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на конференции молодых ученых МГУ, на алгебраических семинарах Московского университета и в Институте математики и механики АН КазССР.

Публикации. Содержание диссертации опубликовано в работах, список которых приведен в конце автореферата.

Объем и структура работы. Диссертация содержит 92 страницы и состоит из введения и трех глав. К числу основных относятся главы II и III. Библиография содержит I7 наименований.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

I. О деформациях нильпотентных градуированных алгебр Ли. - Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., I98I, №4, с.50-54.

2. Градуированные деформации почти свободных алгебр Ли. - Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., I982, №5 с.66-70.

В заключение выражаю глубокую благодарность научному руководителю, члену-корреспонденту АН СССР, профессору А.И.Кострикину за постоянное внимание и большую помощь в работе над диссертацией.

Подп. к печати 5/VII-82 Ф.
Бум. тип. № Физ. п. л. 0,75 Уч.-изд. л. 0,75
Заказ 1700 Тираж 120

Изд-во Московского университета. Москва, К-9.
ул. Герцена, 5/7.
Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры