

PRIMER DIAKAVSTIKE

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14H45, 26B15

Obravnavali bomo diakavstiko, ki nastane z lomljenjem snopa vzporednih svetlobnih žarkov na polkrožnici.

A DIACAUSTIC CURVE

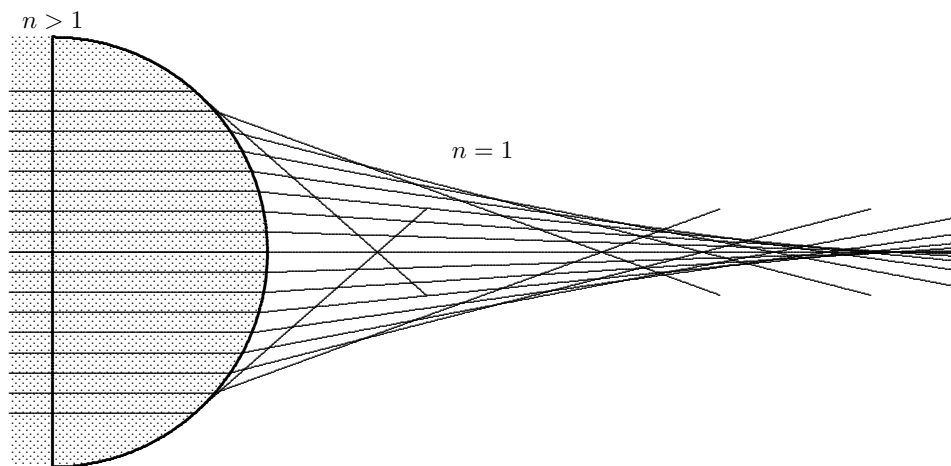
A diacaustic curve obtained by fraction of parallel rays of light on a halfcircle will be discussed.

Vzemimo lečo, ki ima obliko polkrogle, narejeno iz optičnega sredstva z lomnim količnikom $n > 1$. Pravokotno na ravni del leče naj pada zadosti širok snop enobarvne svetlobe. Zanima nas tisti del svetlobe, ki pride na drugo stran leče. Na ravnem delu površja leče se svetloba ne lomi, na sferičnem delu pa se lomi po lomnem zakonu, in sicer na primerno veliki krogelni kapici, na preostalem pasu pa pride do odboja nazaj v lečo, kar pa nas ne bo zanimalo. Lomljeni žarki se ne zbirajo v točki, ampak ogrinjajo *diakavstično ploskev*. Zanimal nas bo potek lomljenih žarkov v ravnini skozi os leče. Ti žarki ogrinjajo ravninsko krivuljo, ki ji pravimo *diakavstika*. Razmeroma preprosto je pripraviti fizikalni poskus za opazovanje take diakavstike.

V prispevku bomo poiskali to krivuljo v parametrični obliki v primerno izbranem koordinatnem sistemu. Problem bomo obravnavali matematično. Pri različno oblikovanih lečah dobimo različne diakavstike in eksakten račun se posreči le redkokdaj.

Na ravninsko krivuljo $\mathcal{K}$, ki jo vzamemo za idealno zrcalo, naj padajo vzporedni žarki ali pa žarki iz izbrane točke v ravnini krivulje. Odbiti žarki, podaljšani v premice, sestavljajo družino premic. Če obstaja ogrinjača $\mathcal{K}'$ teh premic, jo imenujemo *katakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ glede na dane vpadaajoče žarke. Analogno je *diakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ ogrinjača na tej krivulji lomljenih žarkov, podaljšanih v premice. Vedno vzamemo za vpadišnico (vpadno pravokotnico) normalo na krivuljo v točki, kamor žarek vpada in se tam odbije oziroma lomi. Izraza katakavstika in diakavstika je prvi uporabljal Jakob Bernoulli (1654–1705) leta 1693.

Obravnavali bomo primer, ko svetlobni žarki padajo pravokotno na premer EF polkrožnice in se na njej lomijo po lomnem zakonu. Pravokotni koordinatni sistem xy postavimo tako, kot kaže slika 2. Desno od polkrožnice si mislimo prazen prostor, levo od nje pa optično sredstvo z lomnim količnikom $n > 1$. Zanimala nas bo ogrinjača nosilk lomljenih žarkov TB . Za žarek AB , ki se lomi v točki T , je to premica p . Vpadišnica žarka AB



Slika 1. Nastanek diakavstike

je poltrak v s krajiščem v točki O skozi točko T . Vpadni kot označimo z α , lomni kot pa z β . Lomni zakon za naš žarek, zapisan v obliki matematične relacije, je

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}.$$

Vzemimo kot t , ki ga poltrak v oklepa z osjo x , za parameter, od katerega bo odvisna enačba premice p . Kot t bomo šteli za pozitiven, če je poltrak v v prvem kvadrantu in s tem $\alpha = t$, negativen pa, če je v v četrtem kvadrantu in s tem $\alpha = -t$. Upoštevati je treba tudi, da do prehoda prek polkrožnice pride le pri pogoju $|t| \leq \arcsin(1/n)$.

Obravnavajmo najprej premico p , ki ustreza poltraku v v prvem kvadrantu, kjer velja relacija

$$\sin \beta = n \sin t. \quad (1)$$

Naklonski kot premice p v koordinatnem sistemu xy je očitno $\pi + t - \beta$ in njen smerni koeficient je

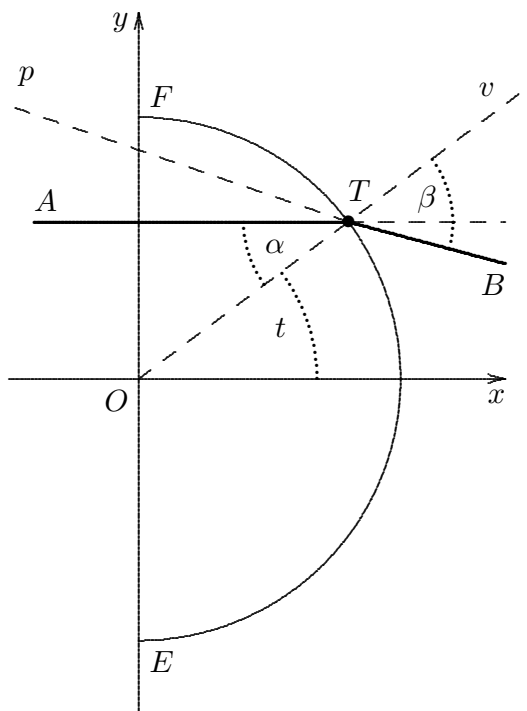
$$k_p = \operatorname{tg}(\pi + t - \beta) = -\operatorname{tg}(\beta - t) = -\frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} t}.$$

Zaradi udobnejšega računanja vpeljimo oznake:

$$s = \sin t, \quad c = \cos t, \quad \Delta = \sqrt{1 - n^2 \sin^2 t} = \sqrt{1 - n^2 s^2}.$$

Iz relacije (1) z uporabo trigonometrijske enakosti $1 + \operatorname{ctg}^2 \beta = 1/\sin^2 \beta$ dobimo

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 t}}{n \sin t} = \frac{\Delta}{ns}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{ns}{\Delta},$$



Slika 2. Obravnava loma svetlobnega žarka v koordinatnem sistemu

za smerni koeficient k_p pa

$$k_p = -\frac{s(nc - \Delta)}{ns^2 + c\Delta}.$$

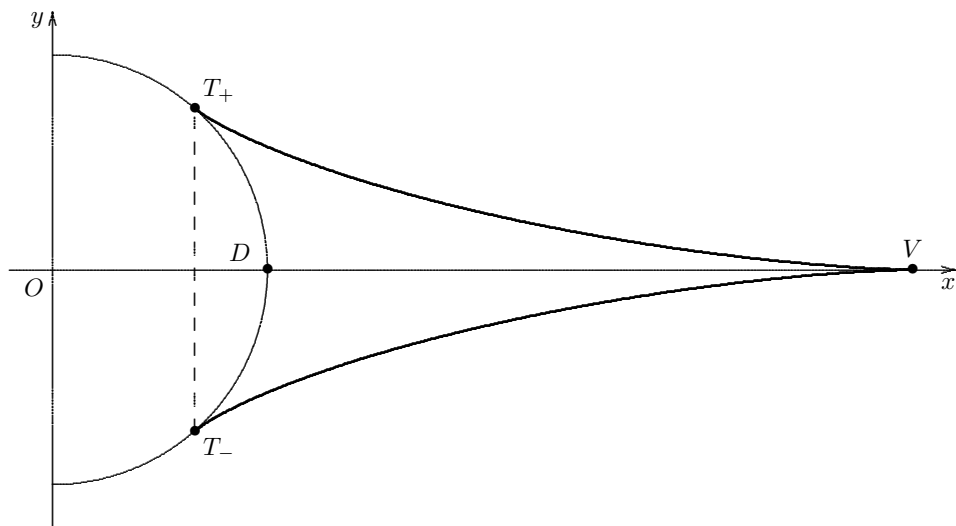
Z racionalizacijo števca v zgornjem izrazu in s poenostavljanjem imamo nazadnje:

$$k_p = -\frac{s(n^2 - 1)}{c + n\Delta}.$$

Očitno se smernemu koeficientu k_p spremeni predznak, ko iz prvega kvadranta preidemo v četrtega, kar je v skladu z zgornjim izrazom. Zato je ta veljaven pri vsakem kotu t , za katerega je $|t| \leq \arcsin(1/n)$.

Vzemimo polmer polkrožnice za enoto, tako da lahko zapišemo koordinate točke T : $x_T = c$, $y_T = s$. Enačba premice p je $y - s = k_p(x - c)$, ki pa jo zaradi udobnejšega računanja v nadaljevanju zapišemo tako:

$$F(x, y, t) = (n^2 - 1)(x - c) + \frac{c + n\Delta}{s}(y - s) = 0. \quad (2)$$



Slika 3. Diakavstika polkrožnice glede na vzporedne žarke

Pri tem so seveda c, s, Δ funkcije parametra t . Relacija (2) je enačba enoparametrične družine premic in njena ogrinjača je iskana diakavstika.

Na splošno do ogrinjače enoparametrične družine krivulj $F(x, y, t) = 0$ pridemo tako, da na x in y razrešimo sistem enačb

$$F(x, y, t) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0. \quad (3)$$

S tem dobimo pri določenih pogojih, ki se tičejo zveznosti in diferenciability nastopajočih funkcij (glej na primer [1]), ogrinjačo v parametrični obliki: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. V našem primeru bomo upoštevali relacije za odvode:

$$s' = c, \quad c' = -s, \quad \Delta\Delta' = -n^2 sc. \quad (4)$$

Druga enačba v sistemu (3) je torej:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = (n^2 - 1)s + y \left(\frac{c + n\Delta}{s} \right)' - (c + n\Delta)' = 0.$$

Ko opravimo z nakazanimi odvajanjem in upoštevamo relacije (4), dobimo po krajšem računu: $y = n^2 s^3$. Rezultat vstavimo v enačbo (2) in najdemo še: $(n^2 - 1)x = n^2 c^3 + n\Delta^3$. S tem smo našli iskano diakavstiko v parametrični obliki. V primeru, ko ima polkrožnica polmer a , se parametrični enačbi diakavstike glasita:

$$x = \varphi(t) = \frac{na}{n^2 - 1} \left(n \cos^3 t + (1 - n^2 \sin^2 t)^{3/2} \right),$$

$$y = \psi(t) = n^2 a \sin^3 t.$$

Pri tem je parameter t omejen z relacijo $|t| \leq \arcsin(1/n)$. Krivulja ima ost z vodoravno tangento za $t = 0$ v točki $V(na/(n-1), 0)$. S polkrožnico ima skupni točki $T_{\pm}(a\sqrt{n^2-1}/n, \pm a/n)$, v katerih se obe krivulji dotikata, skupni tangenti pa imata smerna koeficienta $\mp\sqrt{n^2-1}$.

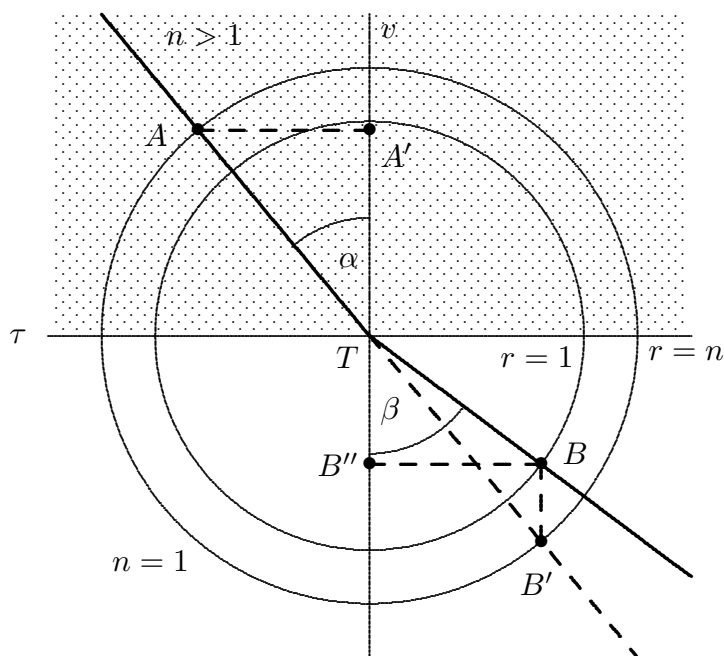
Ploščina S krivočrtnega trikotnika z oglišči T_-VT_+ , omejenega s krožnim lokom T_-DT_+ in diakavstiko, je

$$S = 2 \int_0^{\arcsin(1/n)} (\varphi(t)\psi'(t) - a^2 \cos t (\sin t)') dt.$$

S programom za simbolno računanje takoj najdemo izraz

$$S = \frac{a^2}{16(n^2 - 1)}(3\pi + 2(3n^4 - 8n^2 + 8) \arcsin(1/n) - 6(n^2 - 2)\sqrt{n^2 - 1}).$$

Za $n = \sqrt{2}$ dobimo preprost rezultat: $S = 5a^2\pi/16$.



Slika 4. Geometrijska konstrukcija loma stran od vpadišnice

Diakavstiko polkrožnice, pa tudi vseh tistih ravninskih krivulj, za katere znamo konstruirati normalo (vpadiščnico) v dani točki, si lahko predočimo

tudi s kakšnim računalniškim programom za dinamično geometrijo, na primer s Cabri-Geometry. Poskrbeti moramo za to, da lomljeni žarki puščajo za sabo sled, ko točko preloma T vodimo po dani krivulji $\mathcal{K}$.

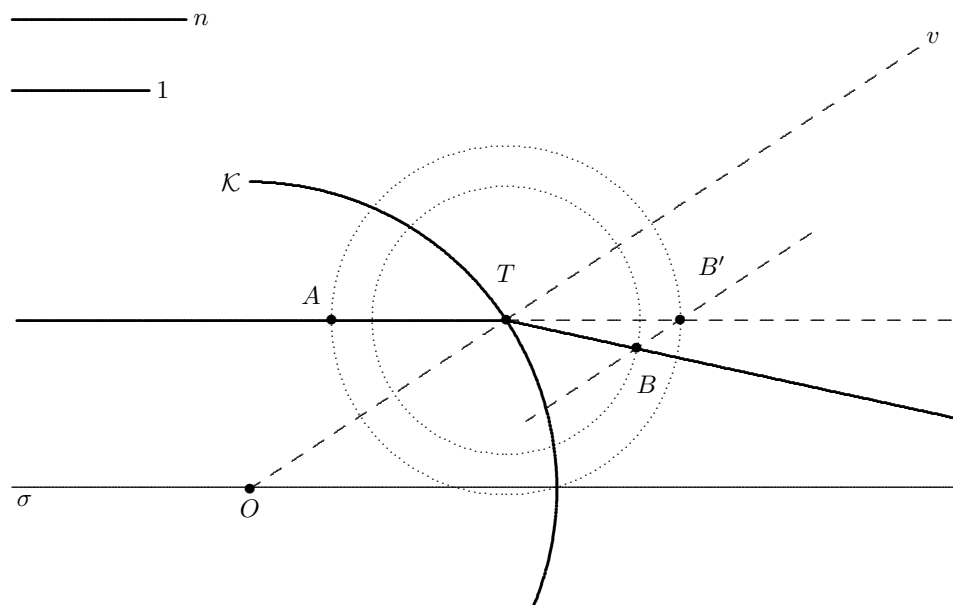
Poglejmo, kako lahko geometrijsko konstruiramo lomljeni žarek AB v točki T (slika 4), ko žarek prehaja iz optično gostejšega (nad premico τ) v optično redkejšo sredstvo (pod premico τ). Načrtamo vpadišnico v v točki T in pomožni koncentrični krožnici, ki imata središči v točki T , njuna polmera pa sta v razmerju $n : 1$. Če vzamemo polmer manjše krožnice za enoto, potem je polmer večje n . Skozi točko T konstruiramo premico, ki seka večjo krožnico v točkah A in B' . Nato poiščemo na manjši krožnici točko B , ki je presečišče vzporednice skozi točko B' k vpadišnici v . Nazadnje konstruiramo na v še točko B'' kot pravokotno projekcijo točke B na v .

Iz opisane konstrukcije takoj dobimo enakost $|AA'| = |BB'|$, kar ni nič drugega kot lomni zakon: $n \sin \alpha = \sin \beta$.

Konstrukcija se očitno posreči le pri pogoju $\sin \alpha \leq 1/n$. V nasprotnem primeru ne pride do loma. Kot je znano iz fizike, pride tedaj do odboja.

Z opisano konstrukcijo v dinamični geometriji lahko lom vzporednih svetlobnih žarkov na krožnem loku predstavimo tako, da konstruiramo krožni lok $\mathcal{K}$ s središčem v točki O . S premico σ izberemo smer žarkov. Na loku $\mathcal{K}$ izberemo točko T tako, da jo lahko kasneje premikamo po $\mathcal{K}$. Konstruiramo vpadišnico v , to je poltrak s krajiščem v točki O skozi točko T .

Z daljicama, ki imata razmerje dolžin $1 : n$, izberemo razmerje lomnih



Slika 5. Geometrijska konstrukcija loma na krožnem loku

količnikov za lom svetlobnega žarka na loku $\mathcal{K}$. Načrtamo koncentrični krožnici polmerov $r = 1$ in $r = n$ s središčem v točki T . Po prej opisani metodi konstruiramo lom žarka, ki prihaja vzporedno s premico σ v točko T . Z drsenjem točke T po loku $\mathcal{K}$ dobimo enoparametrično družino lomljenih žarkov, tako kot kaže slika 1.

LITERATURA

- [1] I. Vidav, *Višja matematika I*, Matematika – fizika 6, DMFA–založništvo, Ljubljana, 2008.

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN OBČNI ZBOR DMFA Bled, 6. in 7. 11. 2009

Ustanovni občni zbor *Društva matematikov in fizikov LR Slovenije* v nedeljo, 30. oktobra 1949, ni bil na Bledu, temveč v fizikalni predavalnici ljubljanske univerze, Kongresni trg 11. Res pa je bilo društvo ustanovljeno ravno zaradi sodelovanja na pripravah za prvi kongres jugoslovanskih matematikov, fizikov in astronomov, ki pa je bil novembra 1949 na Bledu. Zato je bilo prav, da smo se letos zbrali na Bledu in se tako spomnili tudi 60-letnice DMFA Slovenije. Naš gostitelj je bil tokrat hotel Golf.

Strokovni del za učitelje je potekal v treh sekcijah: matematika v osnovni šoli, matematika v srednji šoli in fizika. Vodilna tema pri fiziki je bila zaradi mednarodnega leta astronomije seveda astronomija, matematiki pa smo se posvetili uporabi učnih pripomočkov.

Vzporedno je potekalo *13. slovensko srečanje o uporabi fizike* (o njem bomo poročali posebej) in *3. slovensko srečanje matematikov raziskovalcev*.

Na društvenem strežniku, kjer se prijavljajo učitelji, je bilo uradno prijavljenih 180 udeležencev, vseh skupaj (z raziskovalci, fiziki in matematiki, predavatelji, častnimi člani in povabljeni) pa nas je bilo okoli 350.

Povzetke in razporede predavanj, razen za srečanja o uporabi fizike, smo že sredi oktobra objavili na domači strani društva.

Letošnji bilten strokovnega srečanja je posvečen tudi praznovanju 60-letnice DMFA Slovenije, ki je potekalo pod skupnim naslovom „0 do ∞ “. V prvem delu smo objavili obsežnejši zgodovinski pregled delovanja društva od leta 1949–2009, pripravil ga je Milan Hladnik, in pregled delovanja nekaterih podružnic: Celja (napisal Stanislav Pirnat), Novega mesta (zapisal Dušan Modic) in Kopra (napisala Eda Okretič - Salmič). O štiridesetih letih računalništva na slovenskih šolah je kratek zapis prispeval Izidor Hafner, o MARS-u (MAtematično Raziskovalno Srečanje za srednješolce) pa je pisal Boštjan Kuzman.