

STROJNIŠKI

VESTNIK 11

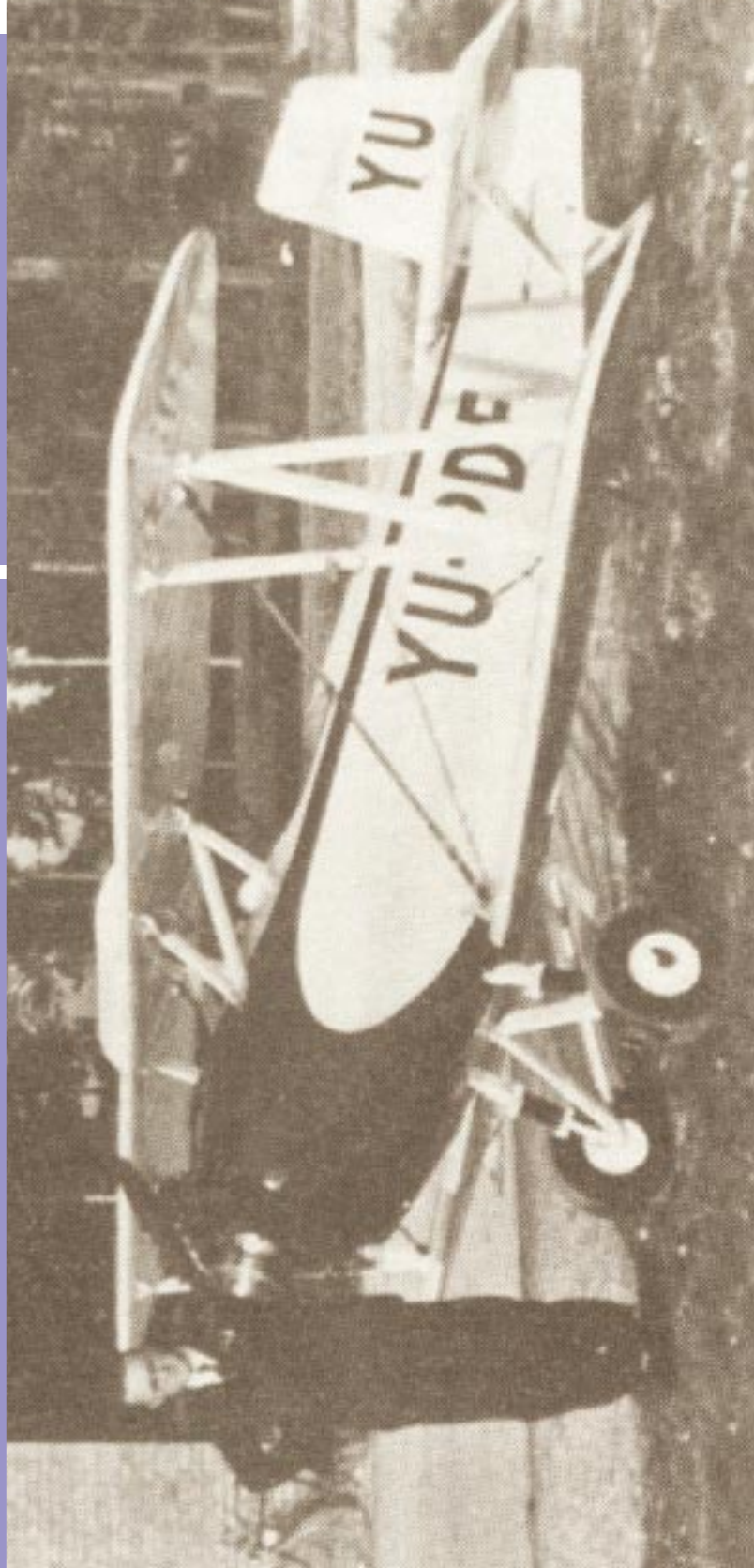
JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING

strani - pages 569 - 642

ISSN 0039-2480 . Stroj V . STJVAX

cena 800 SIT

1. Vogalna singularnost torzije
kompozitne palice
The Corner Singularity of Composite Bars in Torsion
2. Vpliv zrnate strukture na elasto-plastični odziv polikristalnega skupka
The Effect of Grain Structure on the Elastic-Plastic Response of a Polycrystalline Aggregate
3. Optimiranje oblike konstrukcij:
tristranični projektni element
Structural Shape Optimization: A Trilateral Design Element
4. Optimiranje pogonskega mehanizma
stiskalnice za globoki vlek
Optimization of Link-Drive Mechanism for Deep Drawing Mechanical Press
5. Določanje kritične obremenitve
krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem
območju
Determination Of the Buckling Loads of Circular Annular Plates in the Elastic-Plastic Region
6. Izboljšana razpoznava dušenja z
uporabo zvezne valčne transformacije
Enhanced identification of damping using continuous wavelet transform



Vsebina

Contents

Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering
letnik - volume 48, (2002), številka - number 1 1

Uvodnik

Alujevič, A.: Petnajst let Kuhljevih dnevov (1987-2002)

Razprave

Mejak, G.: Vogalna singularnost torzije kompozitne palice

Kovač, M., Simonovski, I., Cizelj, L.: Vpliv zrnate strukture na elasto-plastični odziv polikristalnega skupka

Kegl, M.: Optimiranje oblike konstrukcij: tristranični projektni element

Vohar, B., Gotlih, K., Flašker, J.: Optimiranje pogonskega mehanizma stiskalnice za globoki vlek

Bremec, B., Kosel, F.: Določanje kritične obremenitve krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem območju

Slavič, J., Boltežar, M.: Izboljšana razpoznavna dušenja z uporabo zvezne valčne transformacije

Poročila

Osebnosti

Navodila avtorjem

Editorial

Alujevič, A.: Fifteen years of "Kuhelj's Memorial Days" (1987-2002)

Papers

Mejak, G.: The Corner Singularity of Composite Bars in Torsion

Kovač, M., Simonovski, I., Cizelj, L.: The Effect of Grain Structure on the Elastic-Plastic Response of a Polycrystalline Aggregate

Kegl, M.: Structural Shape Optimization: A Trilateral Design Element

Vohar, B., Gotlih, K., Flašker, J.: Optimization of Link-Drive Mechanism for Deep Drawing Mechanical Press

Bremec, B., Kosel, F.: Determination of the Buckling Loads of Circular Annular Plates in the Elastic-Plastic Region

Slavič, J., Boltežar, M.: Enhanced identification of damping using continuous wavelet transform

Reports

Personal Events

Instructions for Authors

Uvodnik

Editorial

Petnajst let Kuhljevih dnevov (1987-2002)

Slovensko društvo za mehaniko je letos v spomin na akademika prof.dr. Antona Kuhlja, ob stoti obletnici njegovega rojstva, pripravilo svoje šestnajsto znanstveno srečanje. Prvič smo se s tem namenom sestali leta 1987 v Preddvoru, ko je imel uvodno predavanje njegov dolgoletni sodelavec prof.dr. Peter Vencelj. Srečanja so bila nato še na Rogli, v Lipici, Portorožu, Šmarjeti, Radencih, Martuljku, Zemonu, Mokricah, Logarski dolini, Mariboru in na Bledu. Vodili so jih predsedniki društva prof.dr. Miran Saje, prof.dr. Maks Oblak, prof.dr. Boris Štok in prof.dr. Leopold Škerget. Med udeleženci naj omenim prof.dr. Antona Kuhlja ml., prof.dr. Marka Škerlja, kakor tudi pokojnega prof.dr. Milana Muršiča in preostale neimenovane.

Ko je bil akademik prof.dr. Anton Kuhelj še živ, smo se takrat stari in mladi vsak drugi torek v mesecu dobivali zvečer na stari tehniki. Tam smo imeli posamezna "preskusna" predavanja, saj je veljalo načelo, da na kongresih mehanike lahko sodelujemo le, če smo se poprej predstavili v lastni hiši. Posamežno ali v tandemu smo predstavljali svoje delo, starejši pa so potem razpravljali in spraševali (prof.dr. Ervin Prelog, prof.dr. Miloš Marinček, prof.dr. Srdjan Turk in drugi). Po smrti našega mentorja, ki je leta 1980 umrl po prometni nesreči, smo nekaj časa ostali brez naših stalnih srečanj, po sedmih letih pa smo v njegov spomin pričeli vsak september dvodnevna srečanja, z letno

skupščino našega društva in sedaj že tradicionalno večerjo z dobro kapljico. Pri tem velja omeniti tudi sponzorja našega letošnjega srečanja v hotelu Ribno, tj. Elan iz Begunj.

Srečanja obsegajo obe poglavji naše dejavnosti – tako trdnine kakor tekočine. Vendar so najbolj uspela tista srečanja, ko nismo strogo ločevali obeh dejavnosti in tudi ne teorije, numeričnega in eksperimentalnega dela, ki skupaj predstavljajo celotno podobo delovanja Slovenskega društva za mehaniko. Pred tridesetimi leti smo imeli samo ljubljansko podružnico skupnega Jugoslovanskega društva za mehaniko (ki ga je tudi na Bledu ustanovil prof.dr. Kuhelj). To društvo je bilo tudi prireditelj kongresa GAMM 1972 v Ljubljani, ki pa ga je preprečil izbruh epidemije črnih koz. Nekaj let kasneje smo v Ljubljani ustanovili Slovensko društvo za mehaniko kot združbo visokošolskih učiteljev treh ljubljanskih (FS, FAGG in FNT) in ene mariborske šole (VTŠ). Tudi dežurstvo predsedovanja smo "kolobarili", vendar žal starejši "udje" odhajajo. Tako sem se podpisani ovedel, da sem kar naenkrat postal najstarejši še neupokojeni član našega društva.

Nestorju Antonu Kuhlju smo hvaležni za vse, kar nam je dal in zapustil.

Prof.dr. Andro Alujevič
Odgovorni urednik SV

Vogalna singularnost torzije kompozitne palice

The Corner Singularity of Composite Bars in Torsion

George Mejak

Materialna matrika kompozitov je na vsaki materialni komponenti nespremenljiva. Ta nezveznost materialne matrike omejuje regularnost rešitve elastomehanične naloge s kompozitnim materialom. Poleg materialne nezveznosti na regularnost rešitve vpliva še geometrijska oblika stične ploskve med sosednjimi materialnimi komponentami. Vsaka medmaterialna geometrična singularnost je vir singularnosti, ki se praviloma manifestira v obliki koncentracije napetosti. Pomembni podatek za izračun koncentracije napetosti je red vogalne singularnosti. V prispevku je za modelni problem torzije kompozitne prizmatične palice predstavljena metodologija določitve reda vogalne singularnosti. V prvem delu prispevka je podan model torzije s popolno in nepopolno vezjo med materialnimi komponentami. Za model popolne vezi je nato z asimptotičnim razvojem v vrsto dokazan obstoj koncentracije napetosti v vogalu. Izrecno je izračunan red vogalne singularnosti v odvisnosti od vogalnega kota in materialnih lastnosti kompozitov. Pomembna ugotovitev je, da je red singularnosti neodvisen od usmeritve materiala v vogalu. V primeru nepopolne vezi je dokazan obstoj koncentracije napetosti v vogalu za dovolj ohlapno vez. Rezultat je dokazan z regularnim asimptotičnim razvojem v okolici popolne medmaterialne nepovezanosti.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: kompoziti, palice, problemi modeliranja, analize singularnosti)

The material matrix of composite materials is constant for each individual component. This discontinuity sets regularity bounds upon the solution. Besides material discontinuities, the regularity of the solution is also affected by geometrical singularities along the material interfaces. If the interface has corners, we speak about corner singularities of the composite. Mechanical manifestations of these singularities are stress concentrations. One of the most important pieces of information about the corner singularity is the order of the singularity. In this article a method for determining the order of the singularity for the model problem of a composite bar in torsion is presented. In the first part a model of torsion for a composite bar with perfect and imperfect bonds is given. For a perfect interfacial bond the existence of the corner stress concentration is proved by the asymptotical method. The order of the singularity with respect to the angle of the corner and the material constants is explicitly computed. It is found that the order is independent of the material orientation in the corner. For the case of an imperfect bond the existence of the stress concentration is established for a weak bond. The existence is proved by the regular asymptotic perturbation of the no-material adhesion.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: composite, bars, modelling problems, singularity analysis)

0 UVOD

V tehnični praksi so konstrukcijski elementi zaradi različnih razlogov pogosto sestavljeni iz dveh ali več različnih materialov. Takim sestavljenim elementom pravimo kompoziti. Pomemben razlog za uporabo kompozitov je doseči želene materialne lastnosti kompozita s primerno izbiro materialov posameznih komponent [1]. Materialna matrika kompozita je nespremenljiva na vsaki materialni komponenti posebej in je tako stopničasta funkcija. Komponente materialne matrike se pojavljajo kot koeficienti elastične energije.

0 INTRODUCTION

Construction elements are quite often made of composite materials. The reason for using composites is to obtain a product with the desired properties composed of different materials [1]. The material matrix is constant for each material component, but has jump discontinuities across the material interfaces. As a result, the coefficients of the governing partial differential equations have jumps across the interfaces. It is well known [2] that the regularity of the solution depends upon

Znano je, da nezveznost materialne matrike odločilno vpliva na regularnost rešitve [2]. Posebej to pomeni, da moremo pri kompozitih pri prehodu iz ene materialne komponente v drugo pričakovati določeno singularnost. Po drugi strani je znotraj komponent materialna matrika nespremenljiva in je potemtakem rešitev na posamezni komponenti notranje regularna. Poleg nezveznosti materialne matrike pri prehodu iz ene materialne komponente v drugo na regularnost vpliva še geometrijska oblika stične ploskve sosednjih materialnih komponent. Vsaka geometrična singularnost je vir nove singularnosti, ki se praviloma izraža v obliki koncentracije napetosti. Tej singularnosti pravimo vogalna singularnost kompozita.

Znano je, da je poznavanje reda singularnosti rešitve pomembno pri numeričnem modeliranju [3], saj vpliv singularnosti na rešitev ni krajeven, temveč praviloma celovit. Uspešnost neposredne metode omejitve vpliva singularnosti, z zgostitvijo diskretizacije v okolici vira singularnosti, je omejena s povečanjem števila prostostnih stopenj in poslabšanjem numerične pogojenosti naloge. Bolj učinkovita je dekompozicija rešitve na singularni in regularni del ter lepljenje singularnega dela z diskretizacijo regularnega dela. Pomanjkljivost te metode je, da moramo singularni del rešitve poznati dovolj natančno. Preprostejša, zato pa še vedno dovolj učinkovita, je metoda dekompozicije prostora aproksimacije na singularni in regularni del. V metodi končnih elementov to pomeni uporabo singularnih elementov v okolici singularnosti rešitve. Za uporabo te metode je dovolj poznati red singularnosti rešitve [3].

V prispevku bomo določili red vogalne singularnosti za modelni problem torzije prizmatične kompozitne palice. Prispevek je razdeljen v štiri razdelke. Po uvodu sledi formulacija problema torzije kompozitne palice v variacijski obliki in v obliki robne naloge. Formulirana je naloga torzije s popolno vezjo med posameznimi materialnimi komponentami palice in nepopolno vezjo, ki dopušča na medmaterialnem stiku dislokacijo v smeri osi palice. V tretjem razdelku je obravnavana vogalna singularnost s pomočjo asimptotičnega razvoja v okolici vogala. Tu se bomo omejili na torzijo palice s popolno vezjo. Izpeljana je karakteristična enačba za lastne vrednosti in dokazan je obstoj koncentracije napetosti z izrecnim izračunom reda vogalne singularnosti. Torzija palice z nepopolnimi vezmi med materialnimi komponentami je obravnavana v četrtem razdelku. Pokazali bomo, da dislokacija ne sprosti napetosti in da ima tudi v tem primeru rešitev singularnost v vogalu.

1 TORZIJA KOMPOZITNE PALICE

Napetost pri torziji homogene prizmatične palice $\Omega \times [0, l]$, kjer sta Ω prerez palice in l dolžina palice, je dana s Prandtlovo napetostno funkcijo $\hat{\chi}$. V kartezičnem koordinatnem sistemu z osjo z v smeri osi palice sta tako edini neničelni komponenti napetosti $t_{13} = t_{31} = \mu g(\partial \hat{\chi} / \partial y)$ in $t_{23} = t_{32} = -\mu g(\partial \hat{\chi} / \partial x)$,

the regularity of the coefficients. On the other hand, coefficients are constant within the components, and the interior regularity is not affected. Besides material discontinuities, there is another possible source of the singularity: the shape of the interface boundary between the material components. Each geometric singularity of the interfacial boundary is the source of another singularity of the solution. The mechanical manifestation of these singularities is through stress concentrations. If the interfacial boundary has corners, we speak about the corner singularities of the composite.

It is well known that accurate numerical modelling depends upon a firm knowledge of the order of the singularities [3], as the numerical solution is globally affected by singularities. The direct approach of the local mesh refinement is hampered by the increase in the number of degrees. Also, the condition number of the problem may be affected by the high ratio of the element sizes. A more effective method is to decompose the solution into the singular and regular parts. However, to do this, the singular part of the solution has to be known in advance. Simpler, and still good enough, is the method of decomposing the discretization space. In the case of the finite-element method this means that singular elements are used around the source of the singularity. To use singular elements one only has to know the order of the singularity [3].

In this paper the discussion is restricted to the model problem of the torsion of a composite bar with perfect and imperfect interfacial bonds. The paper has four parts. After an introduction we have the formulation of the problem. Variational, as well as distributional formulations are given. Attention is given to possible axial dislocations, which arise due to the imperfect bonding. In the next section the corner singularity of bars with a perfect bond is approached by the asymptotic expansion. A characteristic equation is derived and the existence of the stress concentration is established. It is proved that the asymptotic expansion has only one singular term, which gives the stress concentration. In the last section the torsion with the imperfect bond is considered. Stress concentration is proved in the case of the weak bond and thus the axial dislocation does not relax the stress concentrations.

1 TORSION OF COMPOSITE BARS

For a homogenous prismatic bar $\Omega \times [0, l]$, where Ω is the cross section and l is the height of the bar, stress components are given by the Prandtl stress function $\hat{\chi}$. In the Cartesian coordinate system with the z axis aligned with the axis of the bar the only non-zero stress components are $t_{13} = t_{31} = \mu g(\partial \hat{\chi} / \partial y)$

kjer je μ strižni modul palice, $\mathcal{G}$ pa je torzijski zasuk palice na dolžino palice. Potencialna energija torzije palice je vsota elastične energije in potenciala površinskih sil. Elastična energija homogene palice je:

$$\hat{U}_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{e} : \underline{t} \, d\Omega = l\mu\theta^2 \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \hat{\chi}|^2 d\Omega,$$

potencial površinskih sil pa je:

$$\hat{U}_t = - \int_{\Omega} \vec{t} \cdot \vec{u}|_{z=0} d\Omega - \int_{\Sigma} \vec{t} \cdot \vec{u} d\Omega,$$

kjer je $\vec{u}$ vektor pomika, ki ima na osnovni ploskvi $z=0$ pomik samo v smeri osi palice, Σ je plašč palice. Potencial površinskih sil moremo preoblikovati v:

$$\hat{U}_t = -2l\mu\theta^2 \int_{\Omega} \hat{\chi} d\Omega + l\mu\theta^2 \int_{\partial\Omega} \hat{\chi} \vec{r} \cdot \vec{n} d\Gamma - l\mu\theta^2 \int_{\partial\Omega} \phi \frac{d\hat{\chi}}{ds} d\Gamma.$$

Potencialna energija palice je tako $\hat{U}_p = \hat{U}_e + \hat{U}_t$. Brezrazsežni zapis potencialne energije je $\hat{U} = \hat{U}_p / (l\mu_0\theta^2)$, kjer je μ_0 referenčni strižni modul. V nadaljevanju bomo uporabljali izključno brezrazsežni zapis. Da bo pisava enostavnejša, brezrazsežnih in razsežnih strižnih modulov μ_i s pisavo ne bomo ločili.

Potencialna energija $\hat{U}$ kompozitne palice s prerezom $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, kjer so Ω_i disjunktni prerezi posameznih materialnih komponent, je vsota potencialnih energij materialnih komponent palice. Potem je potencialna energija torzije enaka:

$$\hat{U} = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega + \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\partial\Omega_i} \hat{\chi}_i \vec{r} \cdot \vec{n} d\Gamma - \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\partial\Omega_i} \phi_i \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} d\Gamma, \quad (1),$$

kjer sta μ_i ter $\hat{\chi}_i$ strižni modul in napetostna funkcija i -te komponente, ϕ_i pa je pomik i -te komponente v smeri osi palice. Rob $\partial\Omega_i$ materialne komponente je vsota robov do sosednjih materialnih komponent in zunanjega roba. Tu smo vzeli, da je prerez kompozitne palice enostavno povezano območje. V primeru, da ima prerez luknjo, lahko luknjo obravnavamo kot materialno komponento s strižnim modulom, ki limitira proti nič [4]. Zunanji rob prereza je prost, zato imajo napetostne funkcije tistih komponent, ki sestavljajo ovoj na zunanjem robu, nespremenljivo vrednost. Napetostna funkcija je določena do stalnice natančno, zato moremo te stalnice izbrati tako, da imajo napetostne funkcije na zunanjem robu vrednost nič. Na robu med dvema materialnima komponentama velja ravnovesni pogoj recipročne Cauchyjeve relacije. To v zapisu z napetostno funkcijo na skupnem robu i -te in j -te materialne komponente pomeni enakost $\mu_i(d\hat{\chi}_i/ds) = \mu_j(d\hat{\chi}_j/ds)$. Funkciji $\hat{\chi}_i$ in $\hat{\chi}_j$ se torej na skupnem robu razlikujeta le za stalnico. Pri predpostavki enostavno povezanega prereza Ω_i in izbire vrednosti napetostnih funkcij na zunanjem robu potem sledi enakost izrazov $\mu_i\hat{\chi}_i$ in $\mu_j\hat{\chi}_j$ na

and $t_{23} = t_{32} = -\mu\mathcal{G}(\partial\hat{\chi}/\partial x)$ where μ is the shear modulus of the bar and $\mathcal{G}$ is the torsion angle per unit length of the bar. The potential energy of the bar is the sum of the elastic energy and the potential of the surface traction. The elastic energy is:

whereas the potential of the surface traction is:

where $\vec{u}$ is the displacement vector, which is at the base $z=0$, directed along the z axis. The lateral surface of the bar is denoted by Σ . The potential of the surface traction is rewritten as:

The potential energy is thus $\hat{U}_p = \hat{U}_e + \hat{U}_t$. The corresponding non-dimensional form is $\hat{U} = \hat{U}_p / (l\mu_0\theta^2)$, where μ_0 is a reference shear modulus. In the following, only the non-dimensional form will be used and thus, to simplify the notation, we make no notational distinction between the dimensional and non-dimensional moduli.

The potential energy $\hat{U}$ of the composite bar with the cross section $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$, where Ω_i are cross sections of the individual material components, is the sum of the potential energies of the individual material components. Thus:

where μ_i and $\hat{\chi}_i$ are the shear modulus and the stress function of the cross section Ω_i , and ϕ_i is the dislocation of the i -th component in the direction of the z axis. The boundary $\partial\Omega_i$ of the i -th material component is the union of the boundaries between the material components and the part of the outer boundary. We assume here that the cross section of the bar is simply connected. In the opposite case, where the cross section has a hole, the hole can be treated as the limit of the material, with the shear modulus vanishing, [4]. The outer boundary is traction free, and thus the stress functions along the outer boundary are constant. The stress function is determined up to a constant factor, and thus the constants can be arranged such that the stress functions along the outer boundary are all vanishing. Across the interfacial boundary the Cauchy reciprocal relation holds. In particular, along the interfacial boundary between i -th and j -th component we have $\mu_i(d\hat{\chi}_i/ds) = \mu_j(d\hat{\chi}_j/ds)$. Functions $\hat{\chi}_i$ and $\hat{\chi}_j$ thus differ along the common boundary for a constant. Due to the arrangement of the constants along the outer boundary it follows then that $\mu_i\hat{\chi}_i$ and $\mu_j\hat{\chi}_j$ are equal along the common boundary. Therefore,

skupnem robu. To pomeni, da napetostna funkcija $\hat{\chi}$, katere zožitev na Ω_i je enaka $\hat{\chi}_i$, ni zvezna na Ω .

Pri ravnovesnem pogoju na meji med različnima materialoma je druga vsota v (1) enaka nič. Potem je:

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega - \sum_{i < j} \mu_i \int_{\Gamma_{ij}} \llbracket \phi \rrbracket \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} d\Gamma \quad (2),$$

kjer je Γ_{ij} skupni rob komponent Ω_i in Ω_j , in

$$\llbracket \phi \rrbracket_{\Gamma_{ij}} = (\phi_i - \phi_j)|_{\Gamma_{ij}}$$

skok osnega pomika na meji med dvema materialoma. V primeru popolne vezi med materialnimi komponentami je ta skok enak nič. Točneje, velja $\llbracket \phi \rrbracket = 0$. Potemtakem je potencialna energija za popolno kompozitno palico enaka:

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega. \quad (3).$$

Če ima pomik ϕ skok na meji med dvema materialoma, je vez med materialoma nepopolna. Pri nepopolni vezi se materialne komponente dislocirajo v osni smeri. Najpreprostejši model, glej [5], nepopolne vezi temelji na predpostavki, da je dislokacija v osni smeri sorazmerna napetosti. Z enačbo je $\llbracket \phi \rrbracket = -\alpha \mu (d\hat{\chi}/ds)$, kjer je α pozitivna stalnica. Pripadajoča potencialna energija je:

$$\hat{U} = \hat{U}(\hat{\chi}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla \hat{\chi}_i|^2 - 2\hat{\chi}_i \right) d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \mu_i^2 \int_{\Gamma_{ij}} \left| \frac{d\hat{\chi}_i}{ds} \right|^2 d\Gamma \quad (4).$$

Očitno se (4) za $\alpha=0$ reducira v potencial popolne vezi (3). Potencial v (4) je definiran na množici:

$$\hat{V} = \left\{ \hat{\chi} : \hat{\chi}|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) \text{ in } \frac{d\hat{\chi}}{ds}|_{\Gamma_{ij}} \in L^2(\Gamma_{ij}) \right\},$$

kjer je $H^1(\Omega_i)$ prostor Soboljeva prvega reda. Tu smo privzeli, da so robovi Γ_{ij} odsekoma regularni.

Napetostna funkcija χ ima skok na prehodu iz enega v drugi material. Ta skok moremo s preprosto preslikavo $\chi_i = \mu_i \hat{\chi}_i$ regularizirati. Pripadajoči regulariziran potencial je:

$$U = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{2\mu_i} |\nabla \chi_i|^2 - 2\chi_i \right) d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \int_{\Gamma_{ij}} \left| \frac{d\chi_i}{ds} \right|^2 d\Gamma \quad (5),$$

prostor pa:

$$V = \left\{ \chi : \chi|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i) \text{ in } \frac{d\chi}{ds}|_{\Gamma_{ij}} \in L^2(\Gamma_{ij}) \right\}.$$

Prostor V je s skalarnim zmnožkom:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \sum_{i < j} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \, d\Gamma$$

Hilbertov prostor. Omenimo, da moremo pri privzetku regularnosti robov potencial definirati namesto na V na množici: $H^1(\Omega) \cap \left\{ \chi : \chi|_{\Gamma_{ij}} \in H^{3/2}(\Omega_i) \right\}$.

Rešitev torzijske naloge kompozitne palice je minimum potenciala torzije na dopustni množici. Rešitev je torej dana z minimizacijsko nalogo:

function $\hat{\chi}$, which equals $\hat{\chi}_i$ on Ω_i is not continuous on Ω .

It follows from the equilibrium that the second sum in (1) vanishes. Hence:

where Γ_{ij} is the common boundary of Ω_i and Ω_j , and:

is the axial dislocation at the interfacial boundary. In the case of perfect bonding there are no dislocations and thus $\llbracket \phi \rrbracket = 0$. Therefore, the potential energy of the composite bar with perfect bonding is:

In the case of the axial dislocations we speak of the imperfect bonding and ϕ has a jump across the interface. The most simple dislocation model is based on the assumption that axial dislocations are proportional to the axial stresses, [5]. Thus $\llbracket \phi \rrbracket = -\alpha \mu (d\hat{\chi}/ds)$, where α is a positive proportional factor. The potential energy for the imperfect bonding is thus:

Evidently, for $\alpha=0$, (4) reduces to (3). The potential (4) is defined on the functional space:

where $H^1(\Omega_i)$ is the Sobolev space of the first order. In the above it was assumed that the interfacial boundaries Γ_{ij} are piecewise regular.

The stress function χ has jumps across the material interfaces. These jumps are eliminated with a simple transformation $\chi_i = \mu_i \hat{\chi}_i$. The corresponding potential has the form:

with the corresponding space:

The functional space V , equipped with the scalar product:

is a Hilbert space. It should be noted that assuming some additional regularity upon Γ_{ij} the space V can be replaced with $H^1(\Omega) \cap \left\{ \chi : \chi|_{\Gamma_{ij}} \in H^{3/2}(\Omega_i) \right\}$.

A solution of the torsional problem is a solution of the minimization problem for the potential energy. Thus we have:

$$\min_{\chi \in V} U(\chi).$$

Eksistenca in enoličnost rešitve izhaja iz šibke napol zveznosti in koerkivnosti potenciala na Hilbertovem prostoru V , glej [6]. Minimizacijski nalogi pripada variacijska naloga: poišči $\chi \in V$, tako da je:

The existence and the uniqueness of the solution follows from the fact that the potential energy is a coercive, weakly lower semicontinuous function defined on the Hilbert space V , see [6]. To the minimization problem is associated a variational problem: find $\chi \in V$, such that:

$$a(\chi, w) = b(w), \text{ za vsak/for all } w \in V \quad (6),$$

kjer je:

where

$$a(\chi, w) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\mu_i} \int_{\Omega_i} \nabla \chi \cdot \nabla w d\Omega + \alpha \sum_{i < j} \int_{\Gamma_{ij}} \frac{d\chi}{ds} \frac{dw}{ds} d\Gamma$$

in

and

$$b(w) = 2 \int_{\Omega} w d\Omega.$$

Variacijski nalogi je v porazdelitvenem pomenu enakovredna robna naloga: najdi $\chi \in V(\Delta) = V \cap \left\{ \chi : \Delta \chi|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i) \right\}$, tako da velja:

The variational problem is equivalent to the following boundary value problem in the distributional sense: find $\chi \in V(\Delta) = V \cap \left\{ \chi : \Delta \chi|_{\Omega_i} \in L^2(\Omega_i) \right\}$ such that:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu_i} \Delta \chi &= 2 \quad \text{v/in } \Omega_i \quad \text{za vsak/for all } i = 1, \dots, N \quad \text{in/and} \\ \left\| \frac{1}{\mu} \frac{\partial \chi}{\partial \vec{n}} \right\| - \alpha \frac{d^2 \chi}{ds^2} &= 0 \quad \text{na/on } \Gamma_{ij} \quad \text{za vsak/for all } 1 \leq i < j \leq N. \end{aligned}$$

Regularnost rešitve robne naloge je na vsaki materialni komponenti enaka regularnosti roba komponente. Če je rob $\partial\Omega_i$ razreda C^s , leži zožitev rešitve na Ω_i v prostoru $H^s(\Omega_i)$. Vsak vogal na robu $\partial\Omega_i$ vpliva na regularnost rešitve. Znano je, da leži rešitev Poissonove naloge z regularno desno stranjo na konveksni ravninski množici v prostoru H^2 in da za nekonveksno poligonsko množico ta regularnost ni dosežena [7]. V primeru kompozitne palice situacija ni tako preprosta. Če je komponenta Ω_i konveksna, vsaj ena komponenta, ki ima z Ω_i skupen rob, ni konveksna, zato podobnega rezultata ne moremo pričakovati. Kako je dejansko z regularnostjo v okolici medmaterialnega vogala, bomo raziskali v naslednjem razdelku.

On each material component the regularity of the solution is determined by the regularity of the boundary. If the boundary $\partial\Omega_i$ is of class C^s , the restriction of the global solution to the cross section Ω_i belongs to the space $H^s(\Omega_i)$. Each corner of the boundary $\partial\Omega_i$ affects the regularity of the solution. For example, it is well known that for the Poisson boundary value problem stated on a convex polygonal plane domain the solution belongs to the space H^2 , and that for a non-convex domain this regularity is not achieved [7]. In the case of the composite bar the situation is more involved. If a cross section Ω_i is convex, then at least one component that bonds to Ω_i is not convex. How exactly the regularity depends upon the interfacial corner singularities will be studied in the next section.

2 ASIMPTOTIČNI RAZVOJ V OKOLICI MEDMATERIALNEGA VOGALA

2 ASYMPTOTIC EXPANSION IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE INTERFACIAL CORNER

Najprej si bomo pogledali primer popolne vezi $\alpha=0$. Pri tem se bomo zaradi enostavnosti omejili na vogal na meji med dvema materialoma. Enako lahko obravnavamo tudi vogal na meji med več materiali, s to razliko, da je računska pot težja. Naj bosta Ω_1 in Ω_2 dve materialni komponenti s skupnim robom Γ , ki ima v točki O vogal z odprtjem $\kappa\pi$, $\kappa \in (0,2)$. Privzeli bomo, da je v okolici O vogala rob odsekoma raven. V okolici O uvedemo polarni koordinati r, φ s središčem v O , tako da se rob Γ ujema s poltrakoma $\varphi=0$ in $\varphi=\kappa\pi$. Na O iščemo rešitev nepopolne robne naloge:

In this section the case of a perfect bonding $\alpha=0$ will be considered. To simplify the notation the discussion is restricted to the bimaterial interface. With the same method, but with more evolved computations, a more general case of the multimaterial corner singularity can be studied. Let Ω_1 and Ω_2 be two materials with the common boundary Γ , which has a corner at O with the angle $\kappa\pi$, $\kappa \in (0,2)$. It is assumed that the boundary is locally flat in the neighbourhood of O . In the neighbourhood of O the polar coordinates r, φ are introduced such that the boundary Γ coincides with the rays $\varphi=0$ and $\varphi=\kappa\pi$. In the neighbourhood a solution of the incomplete boundary value problem:

$$-\Delta \chi_i = 2\mu_i \quad \text{v/in } \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7a)$$

$$\chi|_{\varphi=0} = \chi|_{\varphi=2\pi} \quad \text{in/and} \quad \chi|_{\varphi=\kappa\pi} = \chi|_{\varphi=\kappa\pi}, \quad (7b)$$

$$\mu_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\varphi=0} = \mu_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\varphi=2\pi} \quad \text{in/and} \quad \mu_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} = \mu_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} \quad (7c).$$

Rešitev iščemo v obliki $\chi_i = \chi_i^p + \chi_i^0$, kjer je χ_i^0 harmonična funkcija, ki zadošča pogojem (7b) in (7c) in χ_i^p posebna rešitev (7a), ki prav tako zadošča pogojem (7b) in (7c). Znano je, da moremo pri obravnavi vogalne singularnosti Poissonove naloge ločiti primera $\kappa \neq 1/2$ in $\kappa = 1/2$. Podobno velja tudi sedaj. Za $\kappa \neq 1/2$ je posebna rešitev:

$$\chi_i^p = \frac{1}{2} \mu_i r^2 (-1 + \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \tan \kappa\pi).$$

Za $\kappa = 1/2$ rešitev ni tako preprosta in je:

$$\begin{aligned} \chi_1^p &= -\frac{1}{2} r^2 \mu_1 + \frac{r^2 (\mu_1 - \mu_2) ((-4\mu_1 + \pi(\mu_1 - 5\mu_2)) \cos 2\varphi - 4\mu_1 \log r \sin 2\varphi)}{2\pi (\mu_1 + 3\mu_2)}, \\ \chi_2^p &= -\frac{1}{2} r^2 \mu_2 + \frac{2r^2 \mu_2 (-\mu_1 + \mu_2) (\varphi \cos 2\varphi + \log r \sin 2\varphi)}{\pi (\mu_1 + 3\mu_2)}. \end{aligned}$$

Rešitev vsebuje logaritemski člen, ki pa je pomnožen z r^2 , tako da je logaritemska singularnost navzoča šele v drugem odvodu χ_i^p po r in potemtakem ni vir napetostne koncentracije. Harmonično rešitev zapišemo z razvojem:

$$\chi_i^0 = \chi_i^0(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} r^{\lambda_k} \Phi_{i|k}(\varphi),$$

kjer so λ_k pozitivne lastne vrednosti in $\Phi_{i|k}$ lastne funkcije problema:

$$\frac{d^2 \Phi_{i|k}}{d\varphi^2} + \lambda_k^2 \Phi_{i|k} = 0 \quad \text{v/in } \Omega_i$$

z robnimi pogoji (7b) in (7c), kjer je normalni odvod zamenjan z odvodom po φ . Pri razvoju harmoničnega dela rešitve ni treba ločiti primera $\kappa \neq 1/2$ in $\kappa = 1/2$. Lastne vrednosti so ničle karakterističnega polinoma:

$$\begin{aligned} p &= p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = \\ &= \lambda^2 (-4\mu_1 \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 \cos 2\pi\lambda - (\mu_1 - \mu_2)^2 \cos 2\pi(1-\kappa)\lambda) = \\ &= \frac{1}{2} \mu_1^2 (1 + \beta)^2 \lambda^2 \left[\left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 (1 - \cos 2\pi(1-\kappa)\lambda) - (1 - \cos 2\pi\lambda) \right] \end{aligned} \quad (8),$$

kjer je $\beta = \mu_2 / \mu_1$. Očitno velja $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; \kappa, \mu_2, \mu_1)$. Z drugimi besedami za red singularnosti ni pomembno, kateri material je znotraj kota $\kappa\pi$. Poleg tega velja tudi $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; 2-\kappa, \mu_1, \mu_2)$. To pomeni, da se moremo v nadaljevanju omejiti na $\kappa \in (0, 1]$. Vidimo tudi, da so za $\kappa=1$ ničle karakterističnega polinoma celoštevilčne in da potemtakem rešitev nima singularnosti. V nadaljevanju bomo zato privzeli $\kappa \in (0, 1)$. Singularnosti prav tako ni v primeru $\beta=1$, zato v nadaljevanju $\beta \neq 1$.

is sought. The solution has the form $\chi_i = \chi_i^p + \chi_i^0$, where χ_i^0 is a harmonic function with the boundary conditions (7b) and (7c), and χ_i^p is a particular solution of (7a), which also satisfies the boundary conditions (7b) and (7c). For the asymptotic expansion of the Laplace equation it is well known that the cases $\kappa \neq 1/2$ and $\kappa = 1/2$ must be treated separately. The same is also true for the Poisson equation. For $\kappa \neq 1/2$ a particular solution is:

For $\kappa = 1/2$ the solution is more involved and it is:

The solution has a logarithmic term, which is multiplied by r^2 . Thus the logarithmic singularity shows up only after the second derivative of χ_i^p with respect to r , and consequently it is not a source of the stress concentration. The harmonic solution is considered in the form:

where λ_k are positive eigenvalues and $\Phi_{i|k}$ are corresponding eigenvectors of the problem:

with the boundary conditions (7b) and (7c). Here, the normal derivative is rewritten as the derivative with respect to φ . The above form of the asymptotic expansion is valid for both cases $\kappa \neq 1/2$ and $\kappa = 1/2$. The eigenvalues are zeros of the characteristic polynomial:

where $\beta = \mu_2 / \mu_1$. Evidently $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; \kappa, \mu_2, \mu_1)$. In other words, for the order of the singularity it is not important which material is within the angle $\kappa\pi$ and which within the angle $(2-\kappa)\pi$. Also, it follows $p(\lambda; \kappa, \mu_1, \mu_2) = p(\lambda; 2-\kappa, \mu_1, \mu_2)$, and thus the further discussion is restricted to $\kappa \in (0, 1]$. In the case of $\kappa=1$, zeros of the characteristic polynomial are integer, and thus there are no singularities. In the following we assume $\kappa \in (0, 1)$. There are also no singularities if $\beta=1$. Hence, we assume $\beta \neq 1$. Let us

Poglejmo, kako je z ničlami izraza v oglatem oklepaju v (8) v razponu $\lambda \in [k, k+1], k \in \mathbb{N}$. Z zapisom $\lambda \in k+x, x \in [0,1]$ se moremo pri iskanju ničel omejiti na iskanje presečišč funkcij $\gamma(1 - \cos(2\pi(1-\kappa)x - \delta))$ in $1 - \cos 2\pi x$ v razponu $x \in [0,1]$, kjer je $\gamma \in (0,1)$ in $\delta = \delta(k) \in [0, 2\pi)$. Funkciji imata za $\delta \neq 0$ na $(0, 2\pi)$ natanko dve presečišči. Za $\delta = 0$ imata funkciji eno presečišče $x \in (1 - \arccos(1-2\gamma), 1)$ in dotikališče v $x=0$. Fazni pomik δ je enak nič za $k=0$. V primeru $\kappa \in \mathbb{Q}$ je $\delta=0$ tudi za $k \in [\mathbb{Z}^+ / 1-\kappa]$, kjer je oglati oklepaj celi del argumenta. Najmanjša pozitivna lastna vrednost je torej manjša od 1 in je potemtakem vir koncentracije napetosti. Ta lastna vrednost je edini vir koncentracije napetosti, saj je naslednja lastna vrednost po velikosti že večja od 1. Tako smo dokazali:

IZREK Vodilni člen asimptotičnega razvoja napetostne funkcije bikompozitne palice v vogalu meje med dvema materialoma je r^λ , kjer je λ rešitev karakteristične enačbe (8). Velja ocena:

$$\lambda \in (1 - \frac{1}{2\pi} \arccos(1-2\gamma), 1) \text{ za/for } \gamma = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2$$

Izrek postavlja zgornjo mejo singularnosti rešitve v okolici vogala. Ta meja je neodvisna od kota vogala. Sam red singularnosti, ki je rešitev transcendentne enačbe, je odvisen od kota. V primeru $\kappa = 1/2$ lahko ničle brez težav izračunamo. Ničle so:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k, 2k + \lambda_1, 2(k+1) - \lambda_1\}, \text{ kjer je/where } \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1+6\beta + \beta^2}{2(1+\beta)^2}.$$

Lastne funkcije so:

$$\Phi_{ijk}(\varphi) = a_{ijk} \cos \lambda_k \varphi + b_{ijk} \sin \lambda_k \varphi,$$

kjer so a_{ijk} in b_{ijk} stalnice, določene z robnimi pogoji (7b) in (7c). V primeru enojne ničle λ_k je lastni podprostor enorazsežen, v primeru dvojne pa dvorazsežen. Lastne funkcije, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, so paroma ortogonalne v skalarnem zmnožku:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \mu_1 \int_0^{\kappa\pi} \Phi \Psi d\varphi + \mu_2 \int_{\kappa\pi}^{2\pi} \Phi \Psi d\varphi$$

in sestavljajo poln sistem funkcij prostora periodičnih funkcij $L^2([0, 2\pi])$.

Dokazali smo, da je rešitev torzije bikompozitne palice singularna v medmaterialnem vogalu in izračunali red singularnosti. V posebnem primeru krožnega prereza moremo rešitev torzije dobiti z razvojem po polnem sistemu funkcij Φ_{ijk} . V splošnem primeru rešitev dobimo z metodo končnih elementov. Ker poznamo red singularnosti, moremo pri tem uporabiti v okolici vogala singularne elemente, recimo Sternove elemente.

now consider (8) for $\lambda \in [k, k+1], k \in \mathbb{N}$. Denoting $\lambda \in k+x, x \in [0,1]$, searching for zeros of (8) is the same as finding intersections of functions $\gamma(1 - \cos(2\pi(1-\kappa)x - \delta))$ and $1 - \cos 2\pi x$ on the interval $x \in [0,1]$, where $\gamma \in (0,1)$ and $\delta = \delta(k) \in [0, 2\pi)$. The functions have, for $\delta \neq 0$, exactly two intersections on $(0, 2\pi)$. For $\delta = 0$ there is only one intersection $x \in (1 - \arccos(1-2\gamma), 1)$, and a contact at $x=0$. The phase shift δ equals zero for $k=0$. In the case $\kappa \in \mathbb{Q}$ it follows that $\delta=0$ also for $k \in [\mathbb{Z}^+ / 1-\kappa]$, where the bracket denotes the integer part. The smallest intersection is less than 1, and thus it is the source of the stress concentration. It is the only source of the stress concentration since the next intersection is always greater than 1. Thus it was proved:

THEOREM The leading term of the asymptotic expansion of the stress function of the bicomposite bar in the neighbourhood of the interfacial corner is r^λ , where λ is the solution of the characteristic equation (8). For λ the following estimate holds:

$$\lambda \in (1 - \frac{1}{2\pi} \arccos(1-2\gamma), 1) \text{ za/for } \gamma = \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2$$

With the theorem the upper bound on the singularity is established. The bond is independent of the angle. However, the order of the singularity, which is given by the solution of the transcendent equation, depends upon the angle. In the particular case $\kappa = 1/2$ the characteristic equation is readily solved. The zeros are:

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{2k, 2k + \lambda_1, 2(k+1) - \lambda_1\}, \text{ kjer je/where } \lambda_1 = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1+6\beta + \beta^2}{2(1+\beta)^2}.$$

The eigenvectors are:

$$\Phi_{ijk}(\varphi) = a_{ijk} \cos \lambda_k \varphi + b_{ijk} \sin \lambda_k \varphi,$$

where a_{ijk} and b_{ijk} are constants given by the boundary conditions (7b) and (7c). In the case of a single zero the associated eigenvector space is one dimensional and if the zero is double, the eigenspace is two dimensional. Eigenvectors that belong to different eigenvalues are orthogonal with respect to the scalar product:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \mu_1 \int_0^{\kappa\pi} \Phi \Psi d\varphi + \mu_2 \int_{\kappa\pi}^{2\pi} \Phi \Psi d\varphi$$

and constitute a complete set in the subspace of the periodic functions of $L^2([0, 2\pi])$.

It was proved that the solution of the torsional problem of the bimaterial composite bars has a corner singularity. In the particular case of a circular cross section of the bar the solution can be found by the series expansion over the complete set of eigenfunctions Φ_{ijk} . The general case solution can be found using the finite-element method. Since the order of the singularity is known, the singularity of the problem can be modelled with singular finite elements, for example, with Stern elements.

Metodo, uporabljeno za dvokompozitno palico, lahko uporabimo tudi za večkompozitno palico. V nasprotju z dvokompozitno palico pri večkompozitni palici najmanjše pozitivne lastne vrednosti ne moremo oceniti navzdol z oceno, ki je neodvisna od strižnih modulov materialnih komponent. Na primer, pri štirikompozitni palici s krožnim prerezom z enakima materialnima komponentama v prvem in tretjem ter drugem in četrtem kvadrantu gre najmanjša pozitivna vrednost z limito $\beta \rightarrow 0$ proti nič.

3 VOGALNA SINGULARNOST TORZIJE PALICE Z NEPOPOLNO VEZJO

Podobno kakor prejšnjem razdelku definiramo okolico O in vse preostalo s to razliko, da imamo sedaj namesto pogoja (7c) pogoja:

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi} = \alpha \frac{d^2 \chi}{dr^2} \Big|_{\varphi=0} \quad (9a)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} = \alpha \frac{d^2 \chi}{dr^2} \Big|_{\varphi=\kappa\pi} \quad (9b).$$

Robna pogoja (9a, b) v nasprotju s pogojem (7c) ne ločita posameznih potenc r^λ , zato namesto sistema štirih enačb za vsako lastno vrednost dobimo neskončni sistem. Naloge se zato lotimo z asimptotičnim razvojem rešitve po $\varepsilon = 1/\alpha$ v okolici $\alpha = \infty$. Iz zapisa (5) potencialne energije izhaja, da limitna vrednost $\alpha = \infty$ ustreza popolni nepovezanosti materialnih komponent, kjer vsaka komponenta pomeni palico, ki je v torziji neodvisno od sosednjih komponent. To pomeni, da ima napetostna funkcija χ na vsakem robu $\partial\Omega_i$ nespremenljivo vrednost. Velja omeniti, da je v nasprotju z regularnim razvojem v okolici neskončnosti, razvoj v okolici $\alpha = 0$ singularen. Kot medmaterialnega vogala je za eno materialno komponento ostri, za drugo pa topi kot. Znano je [7], da ima rešitev Poissonove naloge s homogenim robnim pogojem v vogalu s topim kotom singularnost. Vodilni člen asimptotičnega razvoja je $r^{1/\kappa}$, kjer je $\kappa \in (1, 2)$. Torej je rešitev za $\varepsilon = 0$ singularna. Nadaljnje člene asimptotičnega razvoja po ε dobimo iz robne naloge, kjer je na levi strani (9a, b) skok normalnega odvoda predhodnega člena v asimptotičnem razvoju. Na desni (9a, b) je drugi odvod po r , zato ima vodilni člen vsakega nadaljnega člena v asimptotičnem razvoju vodilno potenco, ki je za dve večja od predhodnega člena. To pomeni, da so vsi nadaljnji členi nesingularni in da je tako vsa singularnost v ničtem členu razvoja po ε . Ostaja pa odprto vprašanje, kako je s konvergenčnim polmerom razvoja po ε . To vprašanje bo tema nadaljnjih raziskav.

4 SKLEP

V primeru torzije kompozitne palice s popolno vezjo je z asimptotičnim razvojem v okolici vogala dokazano, da je vir koncentracije napetosti v vodilnem členu asimptotičnega razvoja. Izpeljana je

As already noted, the same method also works for multicomposite bars. However, a similar estimation upon the order of the singularity, as in the Theorem, does not exist. The estimation now also depends upon the shear modulo. For example, for a bar made of two materials arranged in a check-board pattern the smallest positive zero of the characteristic equation goes to zero with $\beta \rightarrow 0$.

3 CORNER SINGULARITY FOR IMPERFECT BOND

As in the previous section we define the neighbourhood O and all the others with the exception that instead of (7c) we now apply the conditions:

The boundary conditions (9a, b), in contrast to (7c), do not separate the powers r^λ , and thus instead of a linear system with four equations for four unknowns, for each eigenvalue an infinite linear system is obtained. The problem is thus rather approached with the asymptotic expansion with respect to $\varepsilon = 1/\alpha$ in the neighbourhood of $\alpha = \infty$. From (5) it follows that the limiting value $\alpha = \infty$ corresponds to the no-adhesion case, where each component is in a separate torsion. Therefore, the stress function χ has a constant value on the boundary $\partial\Omega_i$ of the each component. It should be noted that the asymptotic expansion with respect to α is singular in the neighbourhood of $\alpha = 0$. The interfacial corner is acute with respect to one material and obtuse with respect to the other. It is well known that a solution of the Poisson boundary-value problem has a corner singularity, [7]. The leading term of the singularity is $r^{1/\kappa}$, where $\kappa \in (1, 2)$. Therefore, the solution is singular for $\varepsilon = 0$. Further terms of the expansion are obtained from (9a, b). For a given order of ε there is a jump of the normal derivative of the previous term of the expansion on the left-hand side, and the second derivative of a new term on the right-hand side. It follows then that all further terms of the expansion are nonsingular and hence that all the singularity is in the first term. However, it is an open question as to what is the convergence radius of the expansion. This will be the object of further research.

4 CONCLUSION

In the case of the perfect bonding it is shown that the source of stress concentration is in the leading term of the asymptotic expansion in the neighbourhood of the corner. A characteristic

enačba za določitev reda vogalne singularnosti v odvisnosti od kota vogala in materialnih lastnosti kompozita. Dokazano je, da je red vogalne singularnosti neodvisen od usmeritve vogala. Iz teh ugotovitev izhaja, da moremo vogalno singularnost torzije kompozitne palice s popolno vezjo brez težav numerično modelirati z uporabo singularnih elementov. V primeru nepopolne vezi analiza reda vogalne singularnosti ni popolna. Dokazano je, da je v primeru ohlapne vezi tudi v tem primeru opazna koncentracija napetosti v vogalu.

Na koncu je na mestu še opomba, da iz povedanega izhaja, da je torzija vogalov v območju plastičnosti. Omenimo, da moramo v modelu elasto-plastične torzije energijski funkcional zožiti na množico:

$$V \cap \left\{ \chi : |\nabla \chi|_{\Omega_i} \leq \sigma_i \right\},$$

kjer so σ_i meje plastičnih napetosti.

equation, which determines the order of the singularity in terms of the corner angle and material properties, is derived. It is shown that the order of the singularity is independent of the material orientation with respect to the corner. It follows then that the corner singularity can be numerically modelled by using singular elements. For the case of imperfect bonding the conclusions are not complete. The existence and the order of the singularity is proved only for weak bonding.

At the end it should be remarked that from the above discussion it follows that the interfacial corners of the composite bar in torsion are actually plastic. Note, that in the case of elastoplastic torsion the appropriate function space is:

where σ_i are the yields stresses.

5 LITERATURA

5 REFERENCES

- [1] Christensen, R.M. (1991) Mechanics of composite materials. *Krieger Publishing Company*, Malabar.
- [2] Ladyženskaja, O.A., N.N. Uralceva (1968) Linear and quasi-linear equations of elliptic type. *Academic Press*, New York.
- [3] Szabo, B., I. Babuška (1991) Finite element analysis, *John Wiley*, New York.
- [4] Huy, H.P., E. Sanchez-Palencia (1974) Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée. *J. Math. Anal. Appl.* 47(1974). 284—309.
- [5] Aboudi, J. (1991) Mechanics of composite materials: A unified micromechanical approach. *Elsevier*, New York.
- [6] Lipton, R. (1998) Optimal fiber configurations for maximum torsional rigidity. *Arch. Rational Mech. Anal.* 144, 79—106.
- [7] Grisvard, P. (1992) Singularities in boundary value problems. *Masson*. Paris.

Avtorjev naslov: doc. dr. George Mejak
 Oddelek za matematiko
 Fakulteta za matematiko in fiziko
 Univerza v Ljubljani
 Jadranska 19
 1111 Ljubljana
 george.mejak@fmf.uni-lj.si

Author's Address: Doc. Dr. George Mejak
 Department of Mathematics
 Faculty of Mathematics and Physics
 University of Ljubljana
 Jadranska 19
 1111 Ljubljana, Slovenia
 george.mejak@fmf.uni-lj.si

Prejeto: 27.12.2002
 Received:

Sprejeto: 31.1.2003
 Accepted:

Vpliv zrnate strukture na elasto-plastični odziv polikristalnega skupka

The Effect of Grain Structure on the Elastic-Plastic Response of a Polycrystalline Aggregate

Marko Kovač · Igor Simonovski · Leon Cizelj

Ena od ključnih predpostavk klasične mehanike trdnin je idealiziranje nehomogene mikrostrukture materiala. Ob takšni predpostavki ne moremo natančno napovedati razlik med meritvami odziva različno velikih, a geometrijsko podobnih preskušancev (vpliv velikosti). Za določitev vpliva zrnate strukture na makroskopski odziv je predlagan postopek, ki modelira elasto-plastično obnašanje materiala na mezoskopski ravni. Glavna zamisel je razdelitev trdnine na posamezne dele. Obravnava makroskopskega elementa je razdeljena na modeliranje naključne kristalne strukture (uporaba Voronojevega mozaika in naključne usmerjenosti kristalne rešetke) ter izračun napetostnega oziroma deformacijskega polja. Glavni namen prispevka je ocena najmanjše velikosti polikristalnega skupka, nad katero se makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala porazgubi in zato ni pričakovati, da bi povzročala opaznejši vpliv velikosti.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: mikrostrukture materialov, strukture zrnate, skupki polikristalni, polja deformacijska)

One of the key assumptions of classical continuum mechanics is the idealization of the non-homogenous microstructure of a material. With this assumption in mind, the differences between measured responses of specimens that are different in size but geometrically similar (size effect) cannot be predicted accurately. A numerical approach, which models elastic-plastic behavior on the mesoscopic level, is proposed to determine the effect of the polycrystalline grain structure on the macroscopic response. The main idea is to divide the continuum into a set of sub-continua. The analysis of the macroscopic element is divided into modeling the random grain structure (using Voronoi tessellation and the random orientation of crystal lattice) and the calculation of the strain/stress field. The main purpose of the paper is to estimate the minimum size of the polycrystalline aggregate above which the macroscopic inhomogeneity of the grain structure of a given material vanishes and is therefore not expected to cause significant size effects.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: microstructure, grain structures, polycrystalline aggregate, strain-stress fields)

0 UVOD

V zadnjih letih je bilo veliko naporov vloženih v določanje mehanskih lastnosti polikristalnih skupkov različnih velikosti. Klasična mehanika trdnin predpostavlja, da so lastnosti materiala homogene prek celotnega spektra tipičnih dolžin in zato neodvisne od velikosti preskušanca. Razlik med meritvami odziva različno velikih, a geometrijsko podobnih preskušancev (vpliv velikosti) tako ne moremo natančno napovedati [1]. To je v nasprotju z eksperimentalnimi podatki, ki kažejo, da velikost preskušanca lahko pomembno vpliva na obnašanje materiala. Tako se je pojavilo več postopkov, ki numerično modelirajo nehomogen material na mezoskopskem nivoju. Pri tem so se uveljavili postopki, ki poskušajo napovedati obnašanje polikristalnih skupkov z upoštevanjem zrnate

0 INTRODUCTION

A lot of efforts were made during the past few years to determine the mechanical properties of polycrystalline aggregates of different sizes. Classical continuum mechanics assumes the material properties to be homogeneous over the entire length scale, and therefore not dependent on the specimen size. The differences between the measured responses of specimens, which are different in size but geometrical similar (size effect), cannot be predicted accurately [1]. This is in opposition to experimental data, which shows that specimen size may contribute significantly to the material behavior. As a result, some approaches have appeared for the numerical modeling of inhomogenous material on the mesoscopic level. The emphasis was on approaches that predict the behavior of polycrystalline aggregates with a consideration of the

strukture materiala [2]. Dosedanji postopki so bili bolj usmerjeni na elastično območje, postopki mezoskopskega modeliranja plastičnih deformacij pa so se razvili šele v zadnjem desetletju.

Nehomogenost polikristalnih materialov sega prek celotnega spektra tipičnih dolžin [3]. Za potrebe prispevka je spekter tipičnih dolžin razdeljen na mikroskopsko raven (raven posameznih atomov s tipično velikostjo do 1 nm), mezoskopsko raven (kristalna zrna s tipično velikostjo 10 do 100 μm) in makroskopsko raven (strojni elementi s tipično velikostjo nad 10 mm). Za vsako raven obstajajo posebne konstitutivne enačbe, ki popišejo obnašanje materiala na tej ravni, pri čemer so konstitutivne enačbe na nižjih ravneh (mikroskopskih in mezoskopskih) praviloma preprostejše [4].

Postopki, ki poskušajo pomanjkljivosti klasične mehanike trdnin zaobiti z numeričnim modeliranjem materiala na nižjih ravneh, so omejeni z računalniškimi zmogljivostmi. Za numerično modeliranje makroskopskih objektov na mikroskopski ravni je namreč potrebno izjemno veliko število gradnikov (npr. atomov) oziroma preračunov z ustreznimi konstitutivnimi enačbami. Razlike v tipičnih velikostih gradnikov mikroskopskih, mezoskopskih in makroskopskih ravni znašajo tudi nekaj velikostnih razredov (npr. v 1 mm³ jekla je približno 10²⁰ atomov [5]), kar seveda močno omejuje uporabnost takšnih postopkov (npr. [6] in [7]).

Za določitev vpliva polikristalne zrnate strukture na makroskopski odziv smo uporabili numerični postopek [8], ki modelira elasto-plastično obnašanje materiala na mezoskopski ravni. Glavna zamisel je razdelitev trdnine (npr. polikristalnega skupka) na posamezne dele (npr. kristalna zrna). Skupne lastnosti takšnega polikristalnega skupka so posledica lastnosti naključno oblikovanih in usmerjenih kristalnih zrn ter njihovega števila v polikristalnem skupku. Obravnava makroskopskega elementa je razdeljena na modeliranje naključne kristalne strukture (Voronojev mozaik in naključna usmerjenost kristalne rešetke) ter izračun napetostnega oziroma deformacijskega polja (uporaba preprostih fizikalnih modelov).

Uporabljena je metoda končnih elementov (programski paket ABAQUS [9]), ki se je v dosedanjih raziskavah izkazala kot primerna za računske vrednotenje vedenja polikristalnih skupkov na mezoskopski ravni ([2] in [10]). Zaradi računske zahtevnosti je analiza omejena na 2D modele. V analizi so uporabljeni podatki jekla za reaktorske tlačne posode 22 NiMoCr 3 7, ki ima bainitno mikrostrukturo s telesno osrednjeno kubično mrežo.

Poglavitni namen prispevka je ocena najmanjše velikosti polikristalnega skupka, nad katero makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala izgine in zato ni pričakovati, da bi povzročala opaznejši vpliv velikosti.

material microstructure [2]. Previous approaches concentrated more on the elastic behavior, with the mesoscopic approaches to the modeling of plastic behavior tending to be developed in the past decade.

The inhomogeneity of materials stretches over the whole length scale [3]. For the purpose of this paper the length scale was divided into the microscopic level (of single atoms, with a typical size up to 1 nm), the mesoscopic level (crystal grains, with a typical size of 10 to 100 μm) and the macroscopic level (machine parts, with a typical size over 10 mm). Each level has distinctive, constitutive equations, which describe the material behavior on that level. The constitutive equations of the lower levels (e.g. microscopic and mesoscopic) are usually simpler [4].

Approaches that try to avoid the imperfections of classical continuum mechanics by numerical modeling of material on the lower levels are limited by computational capabilities. For the numerical modeling of macroscopic parts on the microscopic level an exceptionally large number of components (e.g. atoms) or calculations with appropriate constitutive equations is needed. The typical sizes of components on microscopic, the mesoscopic or the macroscopic levels differ by orders of magnitude (e.g. 1 mm³ of steel is made of about 10²⁰ atoms [5]). This certainly severely limits the use of microscopic models to model macroscopic parts (e.g. [6] and [7]).

A numerical approach [8], which models the elastic-plastic behavior of polycrystalline aggregate on the mesoscopic level, was used to determine the effect of the grain structure on the macroscopic response. The main idea is to divide continuum (e.g. a polycrystalline aggregate) into a set of sub-continua (grains). The overall properties of the polycrystalline aggregate are the outcome of the properties of randomly shaped and oriented grains and their number in the polycrystalline aggregate. An analysis of the macroscopic element is divided into modeling the random grain structure (Voronoi tessellation and the random orientation of the crystal lattice) and a calculation of the strain/stress field (use of simple physical models).

The finite-element method (program code ABAQUS [9]), which has proved to be suitable for the numerical modeling of the behavior of polycrystalline aggregate at the mesoscopic level, is used ([2] and [10]). The analysis is limited to two-dimensional models due to the limited computational capabilities. The material parameters for a steel pressure vessel made of 22 NiMoCr 3 7, with a bainitic microstructure and body-centred-cubic crystals are used in the analysis.

The main goal of the paper is to estimate the minimum polycrystalline aggregate size, above which the macroscopic inhomogeneity of the grain structure of a given material vanishes, and is therefore not expected to cause significant size effects.

1 TEORETIČNI MODEL

Osnovne predpostavke teoretičnega modela so:

- Za modeliranje naključne polikristalne strukture je uporabljen Voronojev mozaik.
- Vsako kristalno zrno je predpostavljeno anizotropno elastično z naključno usmeritvijo kristalne rešetke.
- Model plastičnosti predpostavlja, da plastična deformacija nastane zaradi zdrsa po vnaprej določenih ravninah zdrsa kristalne rešetke. Ravnine in smeri zdrsa so določene z usmeritvijo kristalne rešetke, ki se od zrna do zrna razlikuje (naključna usmeritev).

1.1 Voronojev mozaik

Zamisel Voronojevega mozaika je šele od nedavnega obsežneje uporabljena v znanosti o materialih, še posebej za modeliranje naključnih mikrostruktur, na primer skupki zrn v polikristalih, vzorci medkristalnih razpok in kompozitni materiali ([10] in [11]). Voronojev mozaik sestavlja celična struktura, ki jo dobimo iz Poissonovih točk tako, da postavimo mejo med celicami pravokotno na zveznico (na polovico razdalje) med sosednjima Poissonovima točkama. Rezultat je množica konveksnih teles (slika 1), ki popolnoma zapolni tako razdeljeno ravnino. Vsi v tem prispevku uporabljeni mozaiki so bili izdelani s programom VorTess [12].

1.2 Anizotropna elastičnost

Jeklo za reaktorske tlačne posode 22 NiMoCr 3 7 ima telesno osrednjeno kubično mrežo s precej izrazitim ortotropnim elastičnim odzivom. Predpostavljeno je, da se monokristal odziva kot

1 THEORETICAL MODEL

The basic assumptions of the theoretical model are:

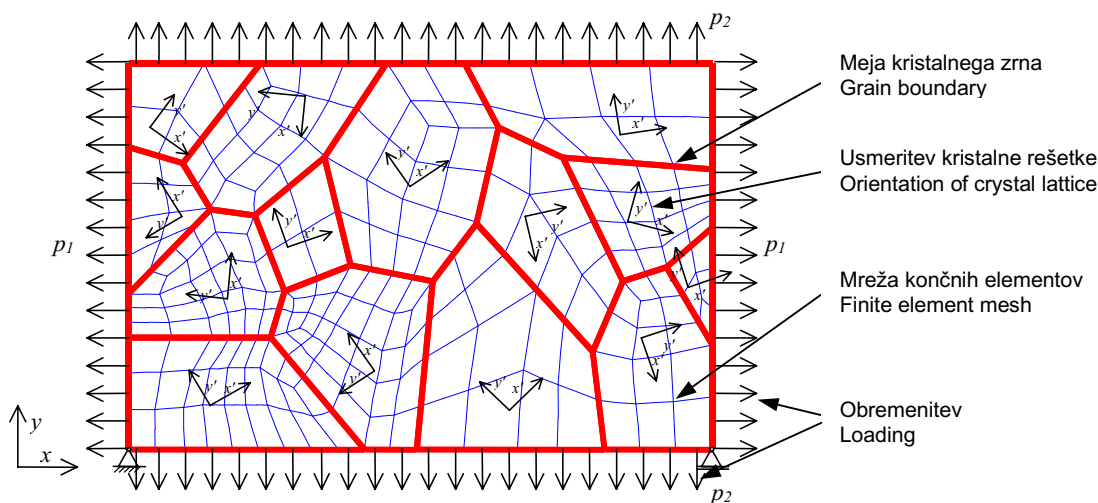
- The random polycrystalline structure is represented by a Voronoi tessellation.
- Each grain is assumed to be anisotropically elastic with a random orientation of the crystal lattice.
- The model of plasticity assumes that the plastic deformation is caused by crystalline slip on predefined slip planes of the crystal lattice. The slip planes and the direction are defined by the orientation of the crystal lattice, which differs from grain to grain (random orientation).

1.1 Voronoi tessellation

The concept of Voronoi tessellation has recently been extensively used in materials science, especially to model random microstructures, like aggregates of grains in polycrystals, patterns of intergranular cracks, and composites ([10] and [11]). A Voronoi tessellation represents a cell structure constructed from a Poisson point process by introducing planar cell walls perpendicular to the lines connecting neighboring points (at half point). This results in a set of convex polygons/polyhedra (Figure 1) embedding the points and their domains of attraction, which completely fill up the underlying space. All Voronoi tessellations used for the purpose of this paper were generated by the code called VorTess [12].

1.2 Anisotropic elasticity

Pressure-vessel steel, 22 NiMoCr 3 7, has a body-centered-cubic crystal lattice with a rather pronounced orthotropic elasticity. Each crystal grain is assumed to behave as a continuum. The



Sl. 1. Polikristalni skupek
Fig. 1. Polycrystalline aggregate

trdnina, pri čemer zanj velja splošeni Hookov zakon [13]:

constitutive relations are given by the generalized Hooke's law [13]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (1),$$

kjer σ_{ij} pomeni tenzor napetosti 2. reda, C_{ijkl} tenzor togosti 4. reda in ε_{kl} tenzor specifičnih deformacij 2. reda. Elastične lastnosti polikristalnega skupka so popolnoma določene z lastnostmi in medsebojnim delovanjem posameznih monokristalov. Elastični materialni parametri so pridobljeni iz literature za železo α s telesno osrednjeno kubično mrežo ([14] in [15]). Predpostavljeno je, da majhne količine legirnih elementov ne vplivajo na elastično togost in podajnost monokristalov [15]. Uporabljeni so naslednji elastični snovni parametri: $C_{iiii} = 230$ GPa, $C_{ijij} = 135$ GPa in $C_{ijij} = 117$ GPa [15].

where σ_{ij} represents the stress tensor of the 2nd rank, C_{ijkl} the stiffness tensor of the 4th rank, and ε_{kl} the strain tensor of the 2nd rank. The elastic properties of the polycrystalline aggregate are completely defined by the properties of, and interaction between, the crystal grains. The material parameters for the elasticity are obtained from the literature for α -Fe with a body-centered-cubic crystal lattice ([14] and [15]). It is assumed that small amounts of alloying elements do not change the elastic stiffness/compliance of a crystal grain significantly [15]. The following elastic material parameters were used $C_{iiii} = 230$ GPa, $C_{ijij} = 135$ GPa and $C_{ijij} = 117$ GPa [15].

1.3 Kristalna plastičnost

Kristalna plastičnost predpostavlja, da je plastična deformacija posledica zgolj zdrsa kristalnih ravnin. Predpostavljeno je, da je Schmidova napetost (strižna napetost v sistemu zdrsa) gonilna sila zdrsa [16]. Sistem zdrsa je določen s kombinacijo ravnine (določena z normalo $m_i^{(\alpha)}$) in smerjo zdrsa ($s_i^{(\alpha)}$) znotraj kristalne rešetke. Telesno osrednjena kubična mreža ima tri družine ravnin zdrsa: $\{110\}$, $\{112\}$ in $\{123\}$ ter eno družino smeri zdrsa: $\langle 111 \rangle$, kar pomeni 48 možnih sistemov zdrsa [17]. Osnovni zakon kristalografskega zdrsa se glasi:

1.3 Crystal Plasticity

Crystal plasticity assumes that plastic deformation is the result of crystalline slip only. It is assumed that crystalline slip is driven by Schmid stress (resolved shear stress). The slip system by a defined with combination of a slip plane (defined by its normal $m_i^{(\alpha)}$) and a slip direction ($s_i^{(\alpha)}$) within the crystal lattice. A body-centered-cubic crystal lattice has three families of slip planes – $\{110\}$, $\{112\}$ and $\{123\}$ – and one family of slip directions, $\langle 111 \rangle$, which accounts for 48 possible slip systems. The basic law of crystalline slip is:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \cdot (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl} \cdot \left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \sum_{\alpha} \frac{1}{2} \dot{\gamma}^{(\alpha)} (s_i^{(\alpha)} m_j^{(\alpha)} + s_j^{(\alpha)} m_i^{(\alpha)}) \right) \quad (2),$$

kjer $\dot{\sigma}_{ij}$ pomeni časovni odvod tenzorja napetosti, $\dot{\varepsilon}_{kl}$ je časovni odvod tenzorja specifične deformacije, $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ časovni odvod tenzorja plastične specifične deformacije in $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ hitrost zdrsa sistema zdrsa α .

where $\dot{\sigma}_{ij}$ is the stress-rate tensor, $\dot{\varepsilon}_{kl}$ is the strain-rate tensor, $\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ is the plasticity strain-rate tensor and $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ is the slipping rate of the α -th slip system.

Plastičnost neodvisno od hitrosti deformacije lahko obravnavamo kot mejni primer plastičnosti, odvisne od hitrosti deformacije [16]. Hitrost zdrsa $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ je določena z ustrezno Schmidovo napetostjo $\tau^{(\alpha)}$:

Rate-independent plasticity may be treated as the limit of rate-dependent visco-plasticity [16]. The slipping rate $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ is determined by the corresponding Schmid stress $\tau^{(\alpha)}$ as:

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{a}^{(\alpha)} \left(\frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right) \left(\left| \frac{\tau^{(\alpha)}}{g^{(\alpha)}} \right| \right)^{n-1} \quad (3),$$

pri čemer so $\dot{a}^{(\alpha)}$ referenčna stopnja strižne napetosti, n je občutljivostni parameter strižne napetosti in $g^{(\alpha)}$ trenutno stanje utrjevanja monokristala. V limiti, ko se n približuje neskončnosti, enačba (3) ustreza enačbi za material, neodvisen od hitrosti deformacije. Trenutno stanje deformacijskega utrjevanja monokristala $g^{(\alpha)}$ je določeno iz hitrosti deformacijskega utrjevanja $\dot{g}^{(\alpha)}$:

where $\dot{a}^{(\alpha)}$ is the reference strain rate, n is the strain-rate sensitivity parameter and $g^{(\alpha)}$ is the current strain-hardened state of the crystal. In the limit as n approaches infinity, eq. (3) approaches that of a rate-independent material. The current strain-hardened state of the monocrystal $g^{(\alpha)}$ can be derived from the strain-hardened rate $\dot{g}^{(\alpha)}$:

$$\dot{g}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} \quad (4),$$

kjer $h_{\alpha\beta}$ pomeni modul utrjevanja. Modul utrjevanja je obravnavalo več avtorjev ([16] in [18]), vsi pa imajo

where $h_{\alpha\beta}$ are the slip-hardening moduli. Other authors have dealt with hardening moduli ([16] and [18]), with

za osnovo izkustvene modele. V naši raziskavi smo uporabili Peirce et al. [19] ter Asaro ([18] in [20]), zakon o utrjevanju materiala, ki za izračun modula utrjevanja uporablja naslednji enačbi:

$$h_{\alpha\alpha} = h(\gamma) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left| \frac{h_0 \gamma}{\tau_s - \tau_0} \right| \text{ in/and } h_{\alpha\beta} = qh(\gamma) \quad (\alpha \neq \beta) \quad (5),$$

kjer so: h_0 začetni modul utrjevanja, τ_0 meja tečenja, ki je enaka začetni vrednosti trdnosti materiala $g^{(0)}(0)$, τ_s je mejna napetost, nad katero se začnejo velike plastične deformacije, γ kumulativni zdrs in q faktor utrjevanja. Plastični snovni parametri so pridobljeni iz literature za kristalno plastičnost, neodvisno od hitrosti deformacije [17], in iz rezultatov nateznega preskusa obravnavanega jekla. Uporabljene so bile naslednje vrednosti: občutljivostni parameter strižne napetosti $n = 50$, referenčna hitrost strižne napetosti $\dot{\alpha}^{(0)} = 0,001 \text{ s}^{-1}$, začetni modul utrjevanja $h_0 = 70 \text{ MPa}$, mejna napetost velikih plastičnih deformacij $\tau_s = 15,5 \text{ MPa}$, meja tečenja $\tau_0 = 155 \text{ MPa}$ in faktor utrjevanja $q = 1$.

Enačbe (2) do (5) so za uporabo z metodo končnih elementov podane v koračni obliki [16]. Te enačbe so v splošnem zelo toge [13]. Togost sistema narašča z naraščanjem števila sistemov zdrs. Zaradi togosti potrebuje klasična računska shema zelo majhne korake (in dolge računske čase) za zagotovitev stabilnosti rešitve.

1. 4 Ocena velikosti reprezentativnega prostorninskega elementa

V literaturi se je za najmanjši vzorec nehomogene snovi, ki je makroskopsko homogena, uveljavil termin reprezentativni prostorninski element (RPE). Velja, da pri vzorcu nehomogene snovi, večjim od RPE, vpliv velikosti na makroskopskem nivoju ni opazen [13].

Velikost RPE polikristalnega skupka je določena s primerjavo makroskopskega tenzorja togosti C^*_{ijkl} in tenzorja podajnosti D^*_{ijkl} . Pri tem so makroskopske veličine povprečene po celotnem polikristalnem skupku. Za polikristalni skupek, večji od RPE, velja ([10] in [21]):

$$C^*_{ijkl} \cong (D^*_{ijkl})^{-1} \quad (6).$$

Enačba (6) v splošnem ne velja za polikristalne skupke, manjše od RPE. Obnašanje takšnih polikristalnih skupkov je odvisno od njihovih velikosti in makroskopskih robnih pogojev [13]: makroskopski tenzor togosti predpostavlja robni pogoj s predpisano napetostjo, makroskopski tenzor podajnosti pa robni pogoj s predpisanim pomikom. Z upoštevanjem razmerij med napetostmi in specifičnimi deformacijami (npr. enačba (1)), je enačbo (6) mogoče poenostaviti z uporabo makroskopskih napetosti ali specifičnih deformacij [22], npr.:

all of them basing their work on empirical models. The Peirce et. al. [19] and Asaro ([18] and [20]) hardening law is used in our research, which uses the following equations:

where h_0 is the initial hardening modulus, τ_0 is the yield stress, which equals the initial value of the current strength $g^{(0)}(0)$, τ_s is the break-through stress, where large plastic flow initiates, γ is the cumulative slip and q is the hardening factor. Material parameters for the plasticity are obtained from the literature for rate-independent crystal plasticity (e.g. [17]) and from the results of a standard tensile test of the selected material. The following values were used: the strain-rate-sensitivity parameter $n = 50$, the reference strain rate $\dot{\alpha}^{(0)} = 0.001 \text{ s}^{-1}$, the initial hardening modulus $h_0 = 70 \text{ MPa}$, the break-through stress $\tau_s = 15.5 \text{ MPa}$, the yield stress $\tau_0 = 155 \text{ MPa}$ and the hardening factor $q = 1$.

For the use with the finite-element method, equations (2) to (5) are given in incremental form [16]. These equations are, in general, very stiff [13]. The stiffness of the system increases with the number of slip systems. Due to the stiffness the classical integration scheme needs very small incremental steps (and long computational times) to ensure solution stability.

1.4 Estimation of the representative volume element size

The minimum size of a mesoscopically inhomogenous material that is macroscopically homogenous is, in the literature, usually referred to as the representative volume element (RVE). For volumes of mesoscopically inhomogenous material larger than the RVE the size effect at the macroscopic level cannot be observed [13].

The RVE size is defined by a comparison of the macroscopic stiffness C^*_{ijkl} and the compliance tensors D^*_{ijkl} . The macroscopic quantities are averaged over the entire polycrystalline aggregate. For polycrystalline aggregate larger than RVE stands ([10] and [21]):

Equation (6) is, in general, not valid for polycrystalline aggregates smaller than RVE. The behavior of polycrystalline aggregates is governed by their size and the macroscopic boundary conditions [13]: the macroscopic stiffness tensor therefore assumes a stress-driven boundary condition, while the macroscopic compliance tensor assumes a displacement-driven boundary condition. With general relations between stresses and strains in mind (as for instance described in equation (1)), equation (6) can be simplified by using macroscopic equivalent stresses or strains [22], e.g.:

$$\langle \sigma_{eq_s} \rangle \cong \langle \sigma_{eq_d} \rangle \quad (7).$$

Indeksa $_s$ in $_d$ označujeta robna pogoja s predpisano napetostjo oziroma pomikom. Tako poenostavljeno merilo je, navkljub poenostavitvam, dovolj dobra ocena za predstavitev ključne težnje [22]. Nekateri avtorji za določitev velikosti RPE uporabljajo ekstrapolacijo z upoštevanjem velikosti polikristalnega skupka [21]. Razmerje med makroskopskima tenzorjema togosti in podajnosti za polikristalni skupek se lahko izrazi kot [21]:

$$C_{ijkl}^* \cdot D_{klmn}^* = I_{ijmn} + O(V/V_{RVE}) \quad (8),$$

kjer V_{RVE} pomenijo velikost RPE, V velikost polikristala, manjšega od RPE in O oceno ostanka. Z upoštevanjem enačbe (7) in dejstva, da je število zrn i v polikristalnemu skupku sorazmerno njegovi velikosti, namesto enačbe (8) uporabimo:

$$\frac{\langle \sigma_{eq_s} \rangle}{\langle \sigma_{eq_d} \rangle} = 1 + O(i/i_{RVE}) \quad (9).$$

Ocenjujemo, da je RPE dosežen, ko je ocena ostanka O manjša od 1% (0,1%).

Indexes $_s$ and $_d$ denote the stress- and displacement-driven boundary conditions, respectively. This simplified condition is sufficient to present the crucial trends [22]. Some authors have used an extrapolation to estimate the RVE size. The extrapolation is based on the size of a polycrystalline aggregate [21]. The relation between stiffness and compliance tensors for that polycrystalline aggregate can be written as [21]:

where V_{RVE} represents the RVE size, V is the size of a polycrystalline aggregate smaller than RVE, and O is the estimate of the residuum. With equation (7) and the proportionality between the number of grains in the polycrystalline aggregate, and its size, in mind, one can use:

We estimate that RVE size is achieved when residuum O is smaller than 1% (0.1%).

2 REZULTATI

Predstavljeni so nekateri rezultati predlaganega računskega postopka. Predstavljeni so primeri makroskopskega odziva polikristalnih skupkov z različnimi usmeritvami kristalnih rešetk in robnimi pogoji.

2.1 Diagram σ - ε

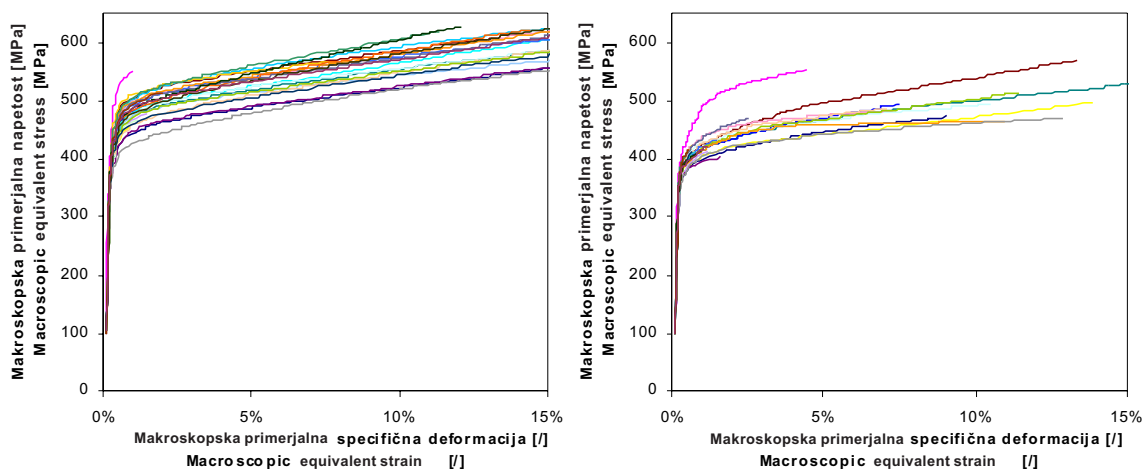
Na sliki 2 je predstavljena zveza med makroskopsko primerjalno (Misesovo) napetostjo in

2 RESULTS

The results of the proposed numerical approach are presented. Examples of the macroscopic response of polycrystalline aggregates with different orientations of the crystal lattice and boundary conditions are shown.

2.1 Stress-strain diagram

Figure 2 shows the relationship between the macroscopic equivalent (Mises) stress and the



Sl. 2. Zveza med makroskopsko primerjalno napetostjo in primerjalno specifično deformacijo pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (levo) in napetostjo (desno)

Fig. 2. A relationship between macroscopic equivalent stress and macroscopic equivalent strain with displacement (left) and stress driven boundary conditions (right)

makroskopsko primerjalno specifično deformacijo za 30 različnih primerov naključnih usmeritev kristalnih rešetk za polikristalni skupek s 14 zrn (sl. 1). Predstavljena sta primera z robnimi pogoji s predpisanim pomikom in napetostjo.

Raztros krivulj zaradi različnih usmeritev kristalnih rešetk je razločno viden. V elastičnem območju krivulje močno sovpadajo, raztros meje tečenja pa je precejšen. Na robu predpisana napetost v povprečju povzroči bolj tog odziv. To je skupaj z že opisanimi težavami vzrok za manjše število analiziranih primerov.

2.2 Ocena velikosti RPE v elastičnem območju

Analize v elastičnem območju so bile opravljene na polikristalnih skupkih s 14, 23, 53, 110 in 212 zrn. Vsak polikristalni skupek je bil analiziran za 30 primerov naključne usmeritve kristalne rešetke (z na robu predpisano napetostjo oziroma pomikom). Analize so bile izvedene pri zunanji obremenitvi $p_1 = 200$ MPa in $p_2 = 100$ MPa (sl. 1). Rezultati so primerjani z analitično rešitvijo v izotropni trdnini s snovnimi lastnostmi: $E = 210$ GPa in $\nu = 0,29$ [10].

Povprečne vrednosti so bile izračunane prek vseh 30 primerov usmeritev kristalne rešetke za vsak polikristalni skupek in robne pogoje. Rezultati so prikazani na sliki 3 (levo), pri čemer s in d označujeta robne pogoje s predpisano napetostjo oziroma pomikom, ave povprečno vrednost, naslednja številka pa število zrn v polikristalnem skupku. Prikazana je tudi analitična rešitev (makroskopska primerjalna specifična deformacija $\langle \epsilon_{eq} \rangle = 0,0515$ % in makroskopska primerjalna napetost $\langle \sigma_{eq} \rangle = 96,2$ MPa). Opaziti je mogoče trend zmanjševanja raztrosa rezultatov ob večanju števila zrn v

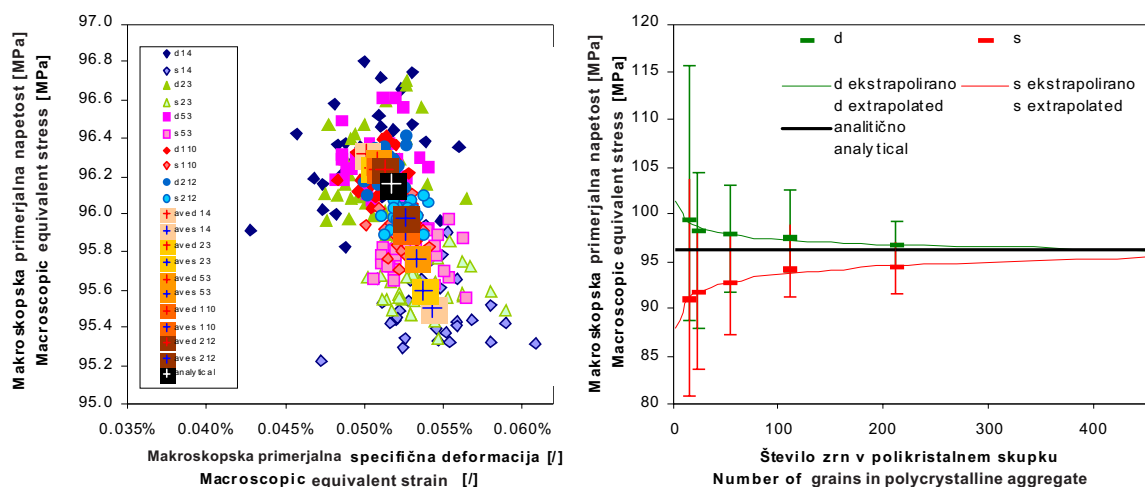
macroscopic equivalent strain for 30 cases with different orientations of crystal lattice for a 14-grains polycrystalline aggregate (Figure 1). Two cases with displacement and stress boundary conditions are presented.

The scatter of the curves due to the different orientations of the crystal lattice is clearly visible. The curves within the elasticity nearly coincide, with a distinctive scatter of yield points. The stress boundary condition causes a stiffer response. This, together with the difficulties mentioned above, is the cause for fewer analyzed cases.

2.2 Estimation of the RVE size within the elasticity

Analyses in the elasticity were carried out on polycrystalline aggregates with 14, 23, 53, 110 and 212 grains. Thirty different random orientations of crystal lattices with stress and displacement boundary conditions were analyzed for each polycrystalline aggregate. The analyses were carried out at macroscopic stress $p_1 = 200$ MPa and $p_2 = 100$ MPa (Figure 1). The results were compared with an analytical solution for an isotropic continuum with the material parameters: $E = 210$ GPa and $\nu = 0.29$ [10].

Average values were calculated over 30 different random orientations of the crystal lattice for each polycrystalline aggregate and boundary condition. The results are shown in Figure 3 (left), where s and d refer to the stress and strain boundary conditions respectively, ave refers to the average values and the number following the abbreviation denotes the number of grains in the respective polycrystalline aggregates. The analytical solution (macroscopic equivalent strain $\langle \epsilon_{eq} \rangle = 0.0515$ % and macroscopic equivalent stress $\langle \sigma_{eq} \rangle = 96.2$ MPa) is also shown. A tendency towards a reduced scatter of the results as the number of grains in the polycrystalline



Sl. 3. Raztros makroskopskih primerjalnih napetosti in deformacij (levo) ter konvergenca makroskopske primerjalne napetosti v elastičnem območju (desno)

Fig. 3. Scatter of macroscopic equivalent strain/stress (left) and convergence of macroscopic equivalent stresses in elasticity (right)

polikristalnem skupku. Povprečne vrednosti napetosti in specifičnih deformacij se pri povečevanju števila zrn v polikristalnem skupku bližajo analitični rešitvi.

Za oceno velikosti RPE v elastičnosti so bile izračunane makroskopske primerjalne napetosti pri makroskopski primerjalni specifični deformaciji $\langle \varepsilon_{eq} \rangle = 0,0515 \%$ (v skladu z analitično rešitvijo). Slika 3 (desno) prikazuje makroskopske primerjalne napetosti v odvisnosti od števila zrn v polikristalnem skupku pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (označeno z d) in napetostjo (s). Ekstrapolacijske črte so narisane v skladu z enačbo (9). Iz razhajanja povprečnih vrednosti je razvidno, da RPE ni bil dosežen.

Nagibanje k analitični rešitvi in zmanjševanju razhajanja povprečnih vrednosti pri povečevanju števila zrn je jasno vidno. Velikost RPE je ocenjena iz enačbe (9). Z omejitvijo ostanka na 1 % znaša ocena velikosti RPE v elastičnem območju 280 zrn (kar ustreza polikristalnemu skupku velikosti približno 0,3 mm). Pri ostanku 0,1 % znaša predvidena velikost RPE 450 zrn (0,5 mm). Ugotovimo lahko, da so ocene v okviru pričakovanih iz literature (npr. [21]).

2.3 Ocena velikosti RPE v plastičnem območju

Analize v plastičnem območju so bile opravljene na polikristalnih skupkih s 14, 23, 53, in 110 zrn s po trideset primeri naključne usmeritve kristalnih rešetk (vsak primer z na robu predpisano napetostjo oziroma pomikom). Analize so bile izvedene pri zunanji obremenitvi $p_1 = 1000$ MPa in $p_2 = 500$ MPa (sl. 1).

V koračnih enačbah, ki popisujejo kristalno plastičnost, je bil uporabljen majhen računski korak (1 % celotne obremenitve), kar je povzročilo veliko časovno zahtevnost izračuna. Navkljub majhnemu računskemu koraku je zaradi togosti enačb prišlo do razhajanja in s tem do predčasnega končanja nekaterih analiz. Te težave niso dovoljevale, da bi bilo analiziranih vseh 30 primerov naključnih usmeritev kristalnih rešetk, toda razpoložljivi rezultati vseeno omogočajo, da predstavimo in pojasnimo bistvene težnje. V prihodnosti bo za izračun potreben še manjši korak ali drugačna računška shema [13].

Povprečne vrednosti so bile izračunane za vsak polikristalni skupek in robne pogoje. Rezultati so prikazani na sliki 4 (levo), pri čemer s in d označujeta robne pogoje s predpisano napetostjo oziroma pomikom, *ave* povprečno vrednost, naslednja številka pa število zrn v polikristalnem skupku. Videti je mogoče težnjo k zmanjševanju raztrosa rezultatov ob povečevanju števila zrn v polikristalnih skupkih. Povprečne vrednosti napetosti in specifičnih deformacij se pri

aggregate increases is visible. The average values of the stresses and the strains show a clear trend towards the analytical solution with an increasing number of grains in the polycrystalline aggregate.

To estimate the RVE size in elasticity, macroscopic equivalent stresses were taken at a macroscopic equivalent strain of $\langle \varepsilon_{eq} \rangle = 0.0515 \%$ (in accordance with the analytical solution). Figure 3 (right) shows macroscopic equivalent stresses and scatter depending on the number of grains in the polycrystalline aggregate for displacement- (denoted as d) and stress- (denoted as s) driven boundary conditions. The extrapolation lines are drawn in accordance with equation (9). From the scatter of the average values, one can conclude that the RVE has not been reached.

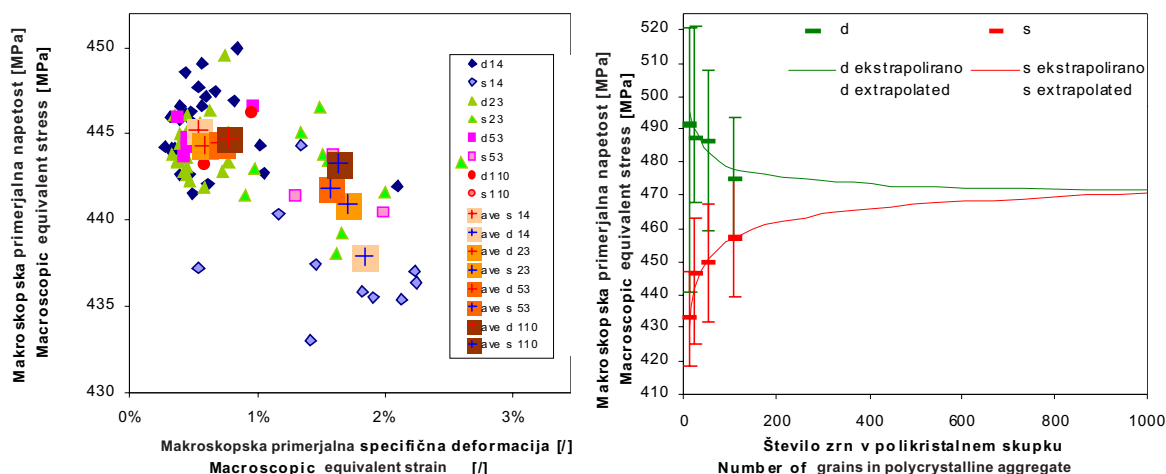
The trend towards the analytical solution and the decrease of scatter with an increasing number of grains is again clearly visible. The RVE size is estimated from equation (9). By limiting the residuum to 1 %, the estimation of the RVE size within the plasticity is 280 grains, which corresponds to a polycrystalline aggregate of about 0.3 mm in size. With a residuum of 0.1 %, the RVE size is estimated to be 450 grains (0.5 mm). One can conclude that the results are within those expected from the literature (e.g. [21]).

2.3 Estimation of RVE size within plasticity

Analyses in plasticity were carried out on a polycrystalline aggregate with 14, 23, 53, and 110 grains. Thirty different random orientations of crystal lattices and two boundary conditions (stress and displacement boundary conditions) were analysed for each polycrystalline aggregate. The analysis was performed at the macroscopic stress $p_1 = 1000$ MPa and $p_2 = 500$ MPa (Figure 1).

A small, incremental step (1 % of the total stress) was utilized in the incremental equations, which are used to describe the crystal plasticity. This caused a high computational demand for the analyses. Despite the small incremental step used, a divergence and therefore a premature end to some analyses appeared due to the equation stiffness. These difficulties did not allow for all 30 different randomly orientated crystal lattices to be analysed. Nevertheless, the available results enable us to show and explain the essential tendencies. An even smaller time step or unconventional time-integration schemes (e.g., [13]) should be used for analyses in the future.

The average values of the macroscopic equivalent stresses and strains were calculated for each polycrystalline aggregate and boundary condition. The results are shown in Figure 4 (left), where s and d refer to the stress and strain boundary conditions respectively, *ave* refers to average values and the number following the abbreviation denotes the number of grains in the respective polycrystalline aggregates. A tendency towards a reduced scatter of the results as the number of grains in the polycrystalline aggregates increases is visible. The average values of the



Sl. 4. Raztros makroskopskih primerjalnih napetosti in specifičnih deformacij (levo) ter konvergenca makroskopske primerjalne napetosti v plastičnem območju (desno)

Fig. 4. Scatter of macroscopic equivalent strain/stress (left) and convergence of macroscopic equivalent stresses in plasticity (right)

povečevanju števila zrn v polikristalnem skupku bližajo skupnemu povprečju.

Pri oceni velikosti RPE v plastičnem območju je bil uporabljen enak postopek kakor pri oceni v elastičnem območju. Makroskopske primerjalne napetosti so bile izračunane pri makroskopski primerjalni specifični deformaciji $\langle \epsilon_{eq} \rangle = 1\%$. Slika 4 (desno) prikazuje makroskopske primerjalne napetosti v odvisnosti od števila zrn v polikristalnem skupku pri robnih pogojih s predpisanim pomikom (označeno z d) in napetostjo (s). Ekstrapolacijske črte za povprečne vrednosti so narisane v skladu z enačbo (9). Razhajanje povprečnih vrednosti je večje kot 1 %, zato menimo, da RPE ni bil dosežen.

Nagibanje k skupnemu povprečju in zmanjševanju razhajanja povprečnih vrednosti pri povečevanju števila zrn je jasno vidno. Z omejitvijo ostanka na 1 % ocena velikosti RPE v plastičnem območju znaša 750 zrn (kar ustreza polikristalnemu skupku velikosti približno 0,6 mm). Pri ostanku 0,1 % znaša načrtovana velikost RPE nad 1000 zrn (0,7 mm).

3 SKLEP

V prispevku je bil predstavljen računski postopek za modeliranje elasto-plastičnega odziva materiala, ki združuje najpomembnejše mezoskopske značilnosti in združljivost s klasično mehaniko trdnin. Uporabljeno je bilo eksplicitno modeliranje naključne zrnate strukture. Zrna modeliramo kot monokristale z anizotropno elastičnostjo in kristalno plastičnostjo. Postopek je bil uporabljen za oceno velikosti RPE polikristalnega skupka, nad katero makroskopska nehomogenost zrnate strukture danega materiala izgine in zato ne pričakujemo, da bi povzročala vpliv velikosti.

stresses and strains show a clear trend towards a common average value with an increasing number of grains in the polycrystalline aggregate.

The same approach to estimate the RVE size as in elasticity was used. The macroscopic equivalent stresses were taken at the macroscopic equivalent strain of $\langle \epsilon_{eq} \rangle = 1\%$. Figure 4 (right) shows the macroscopic equivalent stresses and scatter depending on the number of grains in a polycrystalline aggregate for displacement- (denoted as d) and stress- (denoted as s) driven boundary conditions. The extrapolation lines for the average values are drawn in accordance with equation (9). The scatter of the average values is larger than 1 %, therefore one can conclude that the RVE has not been achieved.

A tendency towards a common average value and a smaller scatter of average values, as the number of grains increases, is clearly visible. By limiting the residuum to 1 %, the RVE size within the plasticity is estimated to 750 grains (which corresponds to a polycrystalline aggregate of around 0.6 mm in size). With a residuum of 0.1 %, the RVE size is estimated to be above 1000 grains (0.7 mm).

3 CONCLUSION

A numerical approach that models the elastic-plastic material response was presented in this paper. The approach combines the most important mesoscale features and compatibility with the conventional continuum mechanics. Explicit modeling of the random grain structure was used. The grains were regarded as monocrystals (modeled with anisotropic elasticity and crystal plasticity). The approach was used to estimate the RVE size of a polycrystalline aggregate above which macroscopic inhomogeneity disappears and is therefore not expected to cause size effects.

Naključna zrnata struktura je vzrok za vpliv velikosti v polikristalnih skupkih, manjših od RPE. Velikost RPE v elastičnem območju je 280 zrn, kar ustreza vzorcu velikosti približno 0,3 mm. Velikost RPE v plastičnem območju je 750 zrn, kar ustreza vzorcu velikosti približno 0,6 mm. Oba podana primera sta izračunana ob predpostavki 1 % ostanka. Dobljeni rezultati so v skladu z rezultati iz literature. Predstavljen računski postopek dobro popisuje vplive zrnate strukture na elasto-plastičen odziv polikristalnega materiala.

V prihodnosti predvidevamo razširitev modela, ki bo vključeval razvoj poškodovanosti materiala in pospešitev izračuna (izdelava drugačne računske časovne sheme).

The random grain structure is the cause for size effects in polycrystalline aggregates smaller than the RVE. The RVE size within elasticity is estimated to be 280 grains, which corresponds to a specimen of about 0.3 mm in size. The RVE size within plasticity is estimated to be over 750 grains, which corresponds to a specimen of about 0.6 mm in size. Both cases were calculated with a residuum of 1% in mind. The proposed numerical approach is suitable for describing the effects of the grain structure on the elastic-plastic response of a polycrystalline aggregate.

Broadening of the approach, which will include the development of damage to be material and speeding up of the calculation (integration of different time-integration scheme) is foreseen in the future.

4 LITERATURA 4 REFERENCES

- [1] Needleman, A. (2000) Computational mechanics at the mesoscale. *Acta Materialia*. 48, 105-124.
- [2] Watanabe, O., H. M. Zbib, and E. Takenouchi (1998) Crystal plasticity, micro-shear banding in polycrystals using Voronoi tessellation. *International Journal of Plasticity*. 14(8), 771-778.
- [3] Kröner, E. (1986) Statistical modelling. in: Gittus, John and Zarka, Joseph, Editors. Modelling small deformations of polycrystals. *Elsevier Applied Science*; 229-291.
- [4] Gittus, J. and J. Zarka (1986) Modelling small deformations of polycrystals. London, *Elsevier*.
- [5] Frost, H. J. and M.F. Ashby (1982) Deformation-mechanism maps. *Pergamon Press*; ISBN, 0-08-029338-7.
- [6] Hafner, J. (2000) Atomic - scale computational materials science. *Acta Materialia*. 48, 71-92.
- [7] Parker, A. (1999) Predicting material behavior from the atomic level up. *Science and Technology Review*. (6), 22-25.
- [8] Kovač, M. Influence of microstructure on development of large deformations in reactor pressure vessel steel. Ljubljana: University of Ljubljana.
- [9] Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc. ABAQUS/Theory Manual, Version 6.2. Pawtucket, R.I., USA: Hibbit (2001) *Karlsson & Sorensen Inc.*
- [10] Cizelj, L. and M. Kovač (2001) Constitutive models for the elastic-plastic polycrystalline aggregate with stochastic arrangement of grains. Rev 0. Ljubljana, *Institut Jožef Stefan*; IJS-DP-8334.
- [11] Aurenhammer, F. (1991) Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*. 23(3), 345-405.
- [12] Riesch-Oppermann, H. (1999) VorTess, generation of 2-D random poisson-Voronoi mosaics as framework for the micromechanical modelling of polycrystalline materials. Karlsruhe, Germany, *Forschungszentrum Karlsruhe*; Report FZKA 6325.
- [13] Nemat-Nasser, S. and M. Hori (1993) Micromechanics: overall properties of heterogeneous materials. Amsterdam: North-Holland.
- [14] Nye, J. F. (1985) Physical properties of crystals. Oxford, *Clarendon Press*.
- [15] Grimvall, G. (1999) Thermophysical properties of materials. Amsterdam: North-Holland.
- [16] Huang, Y. (1991) A user-material subroutine incorporating single crystal plasticity in the ABAQUS finite element program. *Cambridge, Massachusetts, Harvard University*; MECH-178.
- [17] Nemat-Nasser, S.; T. Okinaka, and L. Ni (1998) A physically-based constitutive model for BCC crystals with application to polycrystalline tantalum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 46(6), 1009-1038.
- [18] Asaro, R. J. (1983) Micromechanics of crystals and polycrystals. *Micromechanics in Applied Mechanics*. 23, 2-115.
- [19] Peirce, D.; R.J. Asaro, and A. Needleman (1982) Material rate dependence and localized deformation in crystalline solids. *Acta Metallurgica*. 31, 1951.
- [20] Asaro, R. J. (1983) Crystal plasticity. *Journal of Applied Mechanics*. 50, 921.
- [21] Weyer, S. (2001) Experimentelle Untersuchung und mikromechanische Modellierung des Schädigungsverhaltens von Aluminiumoxid unter Druckbeanspruchung. Karlsruhe, Germany, *University of Karlsruhe*.

- [22] Cizelj, L. ; M. Kovač, Z. Petrič, L. Fabjan, and B. Mavko (2002) Effects of grain structure on elastic-plastic behavior of polycrystalline aggregate. Rev 0. Ljubljana, *Institute Jožef Stefan*; IJS-DP-8547.

Naslov avtorjev: mag. Marko Kovač
dr. Igor Simonovski
prof.dr. Leon Cizelj
Institut Jožef Stefan
Odsek za reaktorsko tehniko
Jamova 39
1000 Ljubljana
marko.kovac@ijs.si
igor.simonovski@ijs.si
leon.cizelj@ijs.si

Authors' Address: Mag. Marko Kovač
Dr. Igor Simonovski
Prof.dr. Leon Cizelj
Jožef Stefan Institute
Reactor Engineering Division
Jamova 39
1000 Ljubljana, Slovenia
marko.kovac@ijs.si
igor.simonovski@ijs.si
leon.cizelj@ijs.si

Prejeto: 24.12.2002
Received:

Sprejeto: 31.1.2003
Accepted:

Optimiranje oblike konstrukcij: tristranični projektni element

Structural Shape Optimization: A Trilateral Design Element

Marko Kegl

Prispevek obravnava izpeljavo tristraničnega projektnega elementa za uporabo pri optimalnem projektiranju oblike konstrukcij. Osnova za izpeljavo novega elementa je tristranična Bézierjeva ploskev, ki je običajno parametrizirana z uporabo težiščnih koordinat. V prispevku je uporabljena drugačna parametrizacija, ki je bolj prilagojena postopkom optimizacije oblike. Na podlagi te ploskve je definiran projektni element - Bézierjevo telo, katerega mreža nadzornih točk ima v topološkem pomenu obliko tristranične prizme. Uporaba izpeljanega elementa je ponazorjena na dveh številčnih zgledih.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: projektiranje konstrukcij, optimiranje oblik, elementi projektni)

This paper considers the derivation of a trilateral design element for the shape optimization of structures. The element derivation is based on a trilateral Bézier patch, usually being parametrized by barycentric coordinates. Here, another type of parametrization is used, which is more convenient for employment in optimization procedures. Based on this patch the design element is derived - a Bézier body whose control points represent a trilateral prism in the topological sense. The use of the derived element is illustrated by two numerical examples.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: structural design, shape optimization, element design)

0 UVOD

Področje optimizacije oblike konstrukcij se je začelo intenzivneje razvijati približno pred dvema desetletjema. Kmalu se je izkazalo, da pri optimizaciji oblike naletimo na nove težave, ki jih pri običajni optimizaciji nismo poznali [1]. Te so bile več ali manj vezane na dejstvo, da se mreža končnih elementov pri optimizaciji oblike spreminja. To pripelje do kvarjenja mreže ter do nenatančnih rezultatov pri analizi odziva in občutljivosti.

Stopnja kvarjenja mreže je zelo odvisna od načina njene parametrizacije. Imam [2] je tako v svojem delu predstavil različne zamisli parametrizacije in enega od njih poimenoval tehnika projektnih elementov. Projektni element je v bistvu primerno parametriziran geometrijski objekt, ki končne elemente oskrbuje s potrebnimi geometrijskimi podatki (koordinate vozlišč itn.). Imam je za projektni element predlagal 20-vozliščni izoparametrični element, malo kasneje pa sta Braibant in Fleury [3] v svojo formulacijo 2D projektnega elementa vpeljala krivulje zlepkov B. V naslednjih letih smo na področju optimizacije oblike lahko opazili vse pogostejšo uporabo osnovnih zasnov

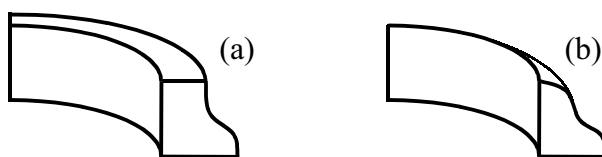
0 INTRODUCTION

The field of structural shape optimization began to develop more rapidly about two decades ago. It soon turned out that shape optimization is accompanied by several new difficulties not known in conventional optimization [1]. These difficulties were more or less caused by the fact that during the process of shape optimization the finite-element mesh changes. This in turn leads to deterioration of the mesh and to inaccuracies in the calculation of the structural response and the sensitivity information.

The extent of the mesh deterioration depends significantly on its parametrization. Imam [2] presented in his work several parametrization concepts, one of them he termed the design-element technique. A design element is essentially a parametrized geometrical object acting as the geometrical data (nodal coordinates, etc.) provider for all the finite elements it contains. Imam proposed to employ a 20-noded isoparametric element as the design-element. Somewhat later Braibant and Fleury [3] introduced B-spline curves into the formulation of their 2D design element. In the following years, the fundamental concepts of the design element technique as well as Bézier and B-spline curves and

tehnike projektnih elementov ter krivulj oziroma ploskev zlepkov B ([4] do [8]).

Pred kratkim je bil v [9] predstavljen osnutek parametrizacije oblike z uporabo tehnike projektnih elementov ter uporabe splošnega projektnega elementa. Predlagan osnutek obravnava zvezne in diskretne konstrukcije na enoten način, projektni element je definiran kot Bézierjevo telo. Topološko ima ta element obliko štiristranične prizme, zato ga bomo imenovali kar *štiristranični projektni element*. Mejna ploskev tega elementa je sestavljena iz šestih štiristraničnih Bézierjevih ploskev. Če je treba, lahko katerokoli od teh ploskev degeneriramo v tristranično ploskev s primernim pozicioniranjem nadzornih točk. To je sicer mogoče, vendar pa ni najbolj smotno, saj pri tem uporabljamo več nadzornih točk, kakor pa jih dejansko potrebujemo. V takem primeru je zato uporaba prave tristranične ploskve mnogo bolj primerna. Glede na to je verjetno primerno definirati (razen štiristraničnega) tudi *tristranični projektni element* (sl. 1). Topološko je ta element tristranična prizma, njegova mejna ploskev pa je sestavljena iz dveh tristraničnih in treh štiristraničnih Bézierjevih ploskev.



Sl. 1. Štiristranični (a) in tristranični (b) prizmatični projektni element
Fig. 1. A quadrilateral (a) and a trilateral (b) prismatic design element

1 TEHNIKA PROJEKTNIH ELEMENTOV

Obravnavajmo konstrukcijo, ki v geometrijskem smislu pomeni telo B v stvarnem 3D prostoru. Pri tehniki projektnih elementov si celo telo B zamislimo kot sestavljeno iz preprostejših delov D_p , ki imajo znane geometrijske lastnosti in jih je preprosto parametrizirati (slika 2). Te sestavne dele imenujemo *projektni elemente*.

Naj simbol D označuje poljuben projektni element. Vzemimo tudi, da D v geometrijskem smislu pomeni Bézierjevo telo. Obliko in lego Bézierjevega telesa določajo lege njegovih nadzornih točk, nanj pa lahko gledamo tudi kot na preslikavo f enotske kocke $U = [0,1]^3$ v stvarni 3D prostor [9]. Preslikava f preslika torej vsako točko $s \in U$ v točko stvarnega 3D prostora s krajevnim vektorjem $r \in D$ (slika 3). Nadzorne točke Bézierjevega telesa imajo v tej preslikavi vlogo parametrov, ki vplivajo na izračun r oziroma na lego in obliko projektnega elementa D. Torej lahko zapišemo $r = f(s, q_{ijk})$, kjer smo s q_{ijk} simbolično označili krajevne vektorje nadzornih točk telesa D.

Spreminjanje oblike telesa D dosežemo preprosto tako, da spreminjamo lege njegovih

surfaces were progressively employed in shape optimization ([4] to [8]).

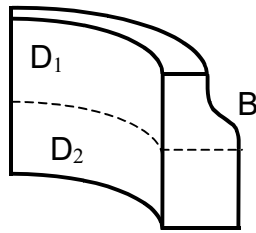
Recently, a concept of shape parametrization was presented [9] using the design-element technique and a general-purpose design element. With the proposed concept, continuum and discrete structures are parametrized in a unified way. The employed design element is a rational Bézier body. Topologically, this convenient element represents a quadrilateral prism, so it will be termed here as the *quadrilateral design element*. The boundary surface of this element consists of six quadrilateral Bézier patches. If necessary, any of these patches can be degenerated to a trilateral patch by adequate positioning of the control points. This is possible, but not very efficient, since one needs to define and employ more control points than are actually needed. In such a case the use of a genuine trilateral patch represents a much better choice. Therefore, it seems to be advantageous to define (except for the quadrilateral) also a *trilateral design element* (Figure 1). Topologically, the trilateral element represents a trilateral prism. Its boundary surface consists of two trilateral and three quadrilateral Bézier patches.

1 THE DESIGN ELEMENT TECHNIQUE

Let us consider a structure, in geometrical sense, being represented by the body B in real 3D space. By the design element technique the whole body B can be thought of as being assembled of simpler parts D_p , which exhibit known geometrical properties and can be parametrized in a simple way. These individual parts are termed the *design elements*.

Let the symbol D denote a generic design element. Let us also assume that in a geometrical sense D represents a Bézier body. The shape and the position of a Bézier body are determined by the positions of its control points. It can also be thought of as a mapping f from the unit cube $U = [0,1]^3$ into the real 3D space [9]. The mapping f maps every point $s \in U$ into a point with a position vector $r \in D$ in the real 3D space (Figure 3). The Bézier body control points act in this mapping as parameters that affect the calculation of r , i.e. the position and shape of the design element D. Thus, we can write $r = f(s, q_{ijk})$, where the symbol q_{ijk} was used to denote symbolically the control point position vectors of the body D.

The change of the shape of D can simply be achieved by changing the positions of its control



Sl. 2. Telo B predstavlja projektna elementa D_1 in D_2

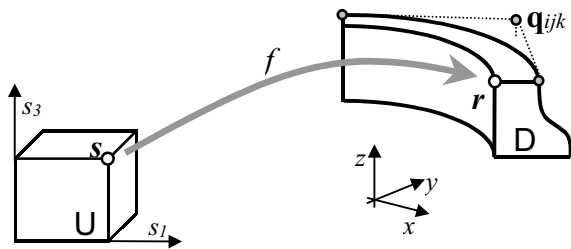
Fig. 2. The body B is represented by the design elements D_1 and D_2

nadzornih točk q_{ijk} . Preostane le še, da na primeren način vključimo uporabo ustrezne diskretizacijske metode, na primer metode končnih elementov. Za uporabo te metode potrebujemo mrežo končnih elementov, ki mora pokrivati celotno območje D. Vendar to ni vse, saj moramo imeti v mislih tudi dejstvo, da bomo obliko telesa D spreminjali – oblika mreže končnih elementov mora tem spremembam ustrezno slediti. To najenostavneje dosežemo tako, da mrežo oziroma vozlišča posameznih končnih elementov definiramo v enotski kocki U. Krajevne vektorje vozlišč mreže v stvarnem prostoru pa izračunamo z uporabo preslikave f (sl. 4). Tako bo mreža končnih elementov avtomatično in povsem natančno sledila spremembam oblike telesa D.

Glede na zgoraj opisano lahko rečemo, da je projektni element podan s preslikavo f . Z izrazom *izpeljava projektnega elementa* mislimo torej na izpeljavo splošnega izraza za f ter na izpeljavo vseh potrebnih izrazov, ki so odvisni od f in jih potrebujemo pri izračunavanju vhodnih geometrijskih podatkov za mrežo končnih elementov. V dosedanjem delu [9] smo izpeljali in na raznih primerih uporabili štiristranični projektni element, ta prispevek pa prikazuje izpeljavo tristraničnega elementa.

2 TRISTRANIČNI PROJEKTNI ELEMENT

Tristranični element je zasnovan na tristranični Bézierjevi ploskvi. Za razliko od štiristranične variante



Sl. 3. Preslikava iz U v D pod vplivom parametrov q_{ijk}

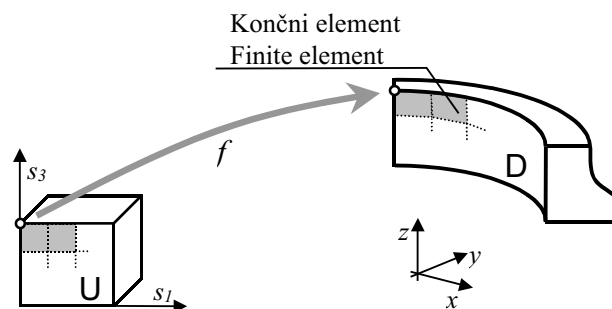
Fig. 3. A mapping from U into D influenced by the parameters q_{ijk}

points q_{ijk} . What still needs to be done is to introduce, in an appropriate way, the use of an adequate discretization method, for example, the finite-element method. In order to employ this method, we need some finite-element mesh, spanning the entire region of D. In doing so, we have to keep in mind that the shape of D will change – the shape of the finite-element mesh must follow those changes accordingly. The easiest way to achieve this is to define the mesh (i.e. the nodes) in the unit cube U. The nodal position vectors in the real space are then calculated by employing the mapping f (Figure 4). In this way the finite-element mesh will automatically and accurately follow the shape changes of the body D.

According to the discussion above one can say that the design element is defined by the mapping f . Thus, by the term *design element derivation* we actually mean the derivation of some generic expression for f as well as the derivation of all the necessary expressions that depend on f , and need to be employed to compute the geometrical data of the finite-element mesh. In our previous work [9] we derived and successfully employed the quadrilateral design element on several examples. This paper presents the derivation of the trilateral design element.

2 THE TRILATERAL DESIGN ELEMENT

The trilateral design element is based on a trilateral Bézier patch. In contrast to the quadrilateral



Sl. 4. Preslikava vozlišč v stvarni prostor

Fig. 4. The mapping of the nodes into the real space

je tristranična Bézierjeva ploskev parametrizirana z uporabo težiščnih koordinat $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$. Te koordinate med sabo niso neodvisne, saj morajo zadoščati pogoju $u+v+w=1$. Krajevni vektor $\mathbf{p}$ poljubne točke na tristranični ploskvi reda n je podan z [10]:

$$\mathbf{p} = \sum_{|\mathbf{i}|=n} B_{ijk}^n \mathbf{q}_{ijk} \quad (1),$$

kjer sta $|\mathbf{i}| = i+j+k$ in $i, j, k \geq 0$. Simbol $\mathbf{q}_{ijk}$ označuje nadzorno točko, $B_{ijk}^n = \hat{B}_{ijk}^n(\mathbf{u})$ pa je bivariantni Bernsteinov polinom reda n , ki je definiran kot:

$$B_{ijk}^n = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad |\mathbf{i}| = n \quad (2).$$

Vendar taka običajna parametrizacija ni najprimernejša za izpeljavo projektnega elementa. Pri tem je namreč najugodnejše, da je parametriziran z neodvisnimi parametri ter da ima primerne karakteristične parametrične smeri v vsaki točki. Da bi zadostili temu pogoju, moramo težiščne koordinate nadomestiti z dvema primernima neodvisnima parametroma.

V ta namen najprej preštevilčimo nadzorne točke in pripadajoče polinome: nadzorni poligon tristranične ploskve je definiran z mrežo $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ nadzornih točk $\mathbf{q}_{ijk}$. Vpeljimo nov dogovor ter nadzorne točke označimo s $\mathbf{q}_i$, $i=1, \dots, N$, kjer je $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}_{00n}$, medtem ko so naslednje nadzorne točke tiste, pri katerih indeksi z leve naraščajo najhitreje (sl. 5a). Enak dogovor sprejmemo tudi za polinome, tako da imamo B_i^N , $i=1, \dots, N$, kjer je $B_1^N \equiv B_{00n}^n$.

Nova neodvisna parametra s_1 in s_2 vpeljimo tako, da dobimo primerne parametrične smeri, in sicer:

$$u = 1 - s_1, \quad v = s_1 - s_1 s_2, \quad w = s_1 s_2 \quad (3),$$

kjer sta $s_1, s_2 \in [0, 1]$. S temi zvezami postavimo odvisnost $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2)$, preprosto pa lahko tudi preverimo, da velja $u, v, w \in [0, 1]$ ter $u+v+w=1$. S tem dogovorom lahko poljubno točko na ploskvi zapišemo kot:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N S_i^N \mathbf{q}_i \quad (4),$$

kjer je $S_i^N = \hat{B}_i^N(\hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2))$, tako da lahko zapišemo $S_i^N = \hat{S}_i^N(s_1, s_2)$ in posledično $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(s_1, s_2)$. S to neodvisno parametrizacijo dobimo primerne parametrične smeri $\mathbf{e}_1 = \partial \mathbf{p} / \partial s_1$ in $\mathbf{e}_2 = \partial \mathbf{p} / \partial s_2$ (sl. 5b), ploskev pa s tem postane primerna tudi za izpeljavo projektnega elementa.

Za tristranično ploskev potrebujemo shemo N nadzornih točk. Če vzamemo M takšnih shem, dobimo tristranično prizmatično shemo $N \times M$ nadzornih točk $\mathbf{q}_{ij}$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$. Te nadzorne

version, a trilateral Bézier patch is conventionally parametrized by employing barycentric coordinates $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$. These coordinates are not independent, since they must fulfill the requirement that $u+v+w=1$. The position vector $\mathbf{p}$ of a generic point on a trilateral patch of the order n is given by [10]

where $|\mathbf{i}| = i+j+k$ and $i, j, k \geq 0$. The symbol $\mathbf{q}_{ijk}$ denotes a control point and $B_{ijk}^n = \hat{B}_{ijk}^n(\mathbf{u})$ is the bivariate Bernstein polynomial of the order n , defined as:

This conventional arrangement, however, is not very convenient for the derivation of a design element. A design element is most conveniently defined as a geometrical body, parametrized by three independent parameters and exhibiting three characteristic parametric directions at each point. In order to meet this requirement, the barycentric coordinates of the trilateral patch have to be replaced by two suitable and independent parameters.

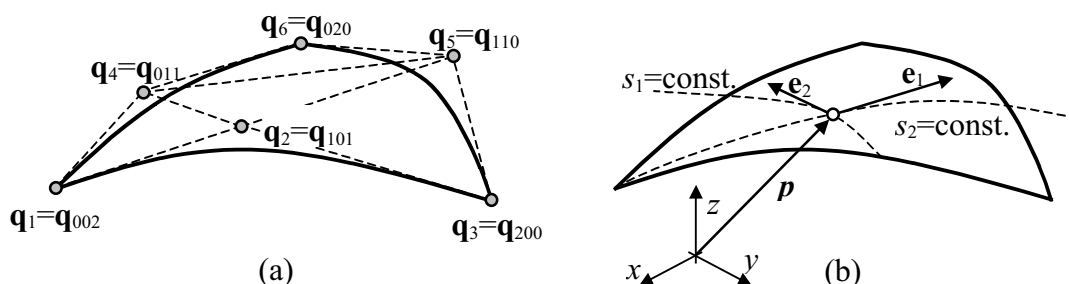
For this purpose we re-numerate the control points and their corresponding polynomials: the control polygon of a trilateral patch is defined by a triangular scheme of $N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ control points $\mathbf{q}_{ijk}$. We introduce a new arrangement, denoting the control points with $\mathbf{q}_i$, $i=1, \dots, N$ so that $\mathbf{q}_1 \equiv \mathbf{q}_{00n}$, while the subsequent control points are the ones with the leftmost index increasing most rapidly (Figure 5a). The same arrangement is adopted for the polynomials, now denoted by B_i^N , $i=1, \dots, N$ where $B_1^N \equiv B_{00n}^n$.

Let us introduce new independent parameters, s_1 and s_2 , so that one gets convenient parametric lines as follows:

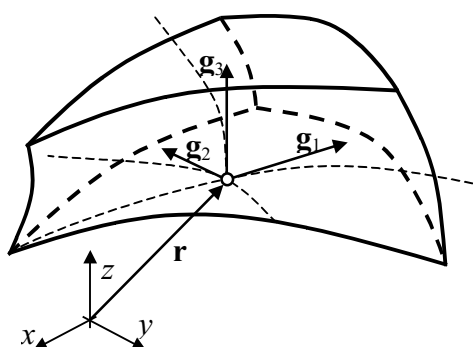
where $s_1, s_2 \in [0, 1]$. These relations establish the dependency $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2)$, and it can easily be verified that $u, v, w \in [0, 1]$ and $u+v+w=1$. By adopting the above arrangement, the position vector of a generic point on the patch can be written as

where $S_i^N = \hat{B}_i^N(\hat{\mathbf{u}}(s_1, s_2))$ so that one can write $S_i^N = \hat{S}_i^N(s_1, s_2)$ and consequently $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}(s_1, s_2)$. This independent parametrization yields convenient parametric directions $\mathbf{e}_1 = \partial \mathbf{p} / \partial s_1$ and $\mathbf{e}_2 = \partial \mathbf{p} / \partial s_2$ (Figure 5b), which makes the patch convenient for the derivation of a design element.

For a trilateral patch one needs a triangular scheme of N control points. If one takes M such schemes, one gets a trilateral prismatic scheme of $N \times M$ control points $\mathbf{q}_{ij}$, $i=1, \dots, N$, $j=1, \dots, M$. These



Sl. 5. Preštevilčenje nadzornih točk (a) in predlagana parametrizacija ploskve (b)
Fig. 5. Renumbering of control points (a) and the proposed parametrization of the patch (b)



Sl. 6. Tristranični projektni element z značilnimi smermi v točki $\mathbf{r}$
Fig. 6. The trilateral design element with characteristic directions at the point $\mathbf{r}$

točke lahko definirajo tristranični projektni element (sl. 6), krajevni vektor njegove poljubne točke pa lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M S_i^N U_j^M \mathbf{q}_{ij} \quad (5),$$

kjer je $U_j^M = \hat{U}_j^M(s_3)$ j-ti univariantni Bernsteinov polinom [10] reda $M-1$, izražen v odvisnosti od $s_3 \in [0,1]$. Parametrične smeri elementa so podane z $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r} / \partial s_i, i=1,2,3$ (sl. 5).

Označimo sedaj s $\mathbf{s}^0 = [s_1^0, s_2^0, s_3^0]^T$ točko, ki določa lego poljubnega vozlišča nekega končnega elementa. Nadalje predpostavimo, da sta lahko $\mathbf{s}^0$ kakor tudi vse nadzorne točke odvisne od projektnih spremenljivk, zbranih v vektorju $\mathbf{b}$. Torej velja $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}(\mathbf{b})$ in $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^0(\mathbf{b})$.

Za analizo konstrukcije potrebujemo v splošnem za vsako vozlišče naslednje geometrijske podatke: krajevni vektor $\mathbf{r}^0$ ter morda smerni vektor $\mathbf{n}^0$ (lupine, nosilci). Če predpostavimo, da lahko $\mathbf{n}^0$ izrazimo v odvisnosti od $\mathbf{g}_i^0$, potrebujemo torej za analizo odziva in občutljivosti izraze za naslednje količine: $\mathbf{r}^0, \mathbf{g}_i^0, d\mathbf{r}^0/d\mathbf{b}$ ter $d\mathbf{g}_i^0/d\mathbf{b}$.

Krajevni vektor izrazimo preprosto kot:

$$\mathbf{r}^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M E_{ij}^{NM} \mathbf{q}_{ij} \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0} \quad (6),$$

kje je $E_{ij}^{NM} = S_i^N U_j^M$. Smerni vektorji so podani z:

control points can be taken to define a trilateral prismatic design element (Figure 6) by defining the position vector of a generic point on the element by

where $U_j^M = \hat{U}_j^M(s_3)$ is the j th univariate Bernstein polynomial [10] of the order $M-1$, expressed in terms of $s_3 \in [0,1]$. The parametric direction vectors of the element are given by $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{r} / \partial s_i, i=1,2,3$ (Figure 5).

Let us now denote by $\mathbf{s}^0 = [s_1^0, s_2^0, s_3^0]^T$ a point that defines the position of a generic node of some finite element. Further, it is assumed that both $\mathbf{s}^0$ as well as all the control points depend on design variables, assembled in the vector $\mathbf{b}$. Thus, we have $\mathbf{q}_{ij} = \mathbf{q}_{ij}(\mathbf{b})$ and $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^0(\mathbf{b})$.

For the structural response analysis we need, in general, for each node, the following geometrical data: its position vector $\mathbf{r}^0$ and maybe some direction vector $\mathbf{n}^0$ (shells, beams). Assuming that $\mathbf{n}^0$ can be expressed in terms of $\mathbf{g}_i^0$, we need for the response and sensitivity analysis expressions for the following quantities: $\mathbf{r}^0, \mathbf{g}_i^0, d\mathbf{r}^0/d\mathbf{b}$ and $d\mathbf{g}_i^0/d\mathbf{b}$.

The position vector is straightforwardly expressed as:

where $E_{ij}^{NM} = S_i^N U_j^M$. The direction vectors are given by:

$$\mathbf{g}_k^0 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \mathbf{q}_{ij} \bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0}, \quad k=1,2,3 \quad (7),$$

kjer je:

$$\text{where:} \quad \frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} = \begin{cases} (\partial S_i^N / \partial s_k) U_j^M, & k=1,2 \\ S_i^N (\partial U_j^M / \partial s_k), & k=3 \end{cases} \quad (8).$$

Odvod krajevnega vektorja vozlišča po projektnih spremenljivkah je podan z:

The design derivatives of the position vector are given by:

$$\frac{d\mathbf{r}^0}{d\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \frac{ds_k^0}{d\mathbf{b}} \right) \mathbf{q}_{ij} + E_{ij}^{NM} \frac{d\mathbf{q}_{ij}}{d\mathbf{b}} \right] \bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0} \quad (9),$$

medtem ko so odvodi smernih vektorjev:

whereas the direction vector derivatives are:

$$\frac{d\mathbf{g}_k^0}{d\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left[\sum_{m=1}^3 \left(\frac{\partial^2 E_{ij}^{NM}}{\partial s_k \partial s_m} \frac{ds_m^0}{d\mathbf{b}} \right) \mathbf{q}_{ij} + \frac{\partial E_{ij}^{NM}}{\partial s_k} \frac{d\mathbf{q}_{ij}}{d\mathbf{b}} \right] \bigg|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}^0}, \quad k=1,2,3 \quad (10).$$

Izrazi (6) do (10) so vse kar potrebujemo za izračun potrebnih geometrijskih podatkov (ter njihovih odvodov po projektnih spremenljivkah) za poljuben končni element.

The expressions (6 to 10) are all we need in order to calculate the required geometric data (as well as the design derivatives) for any finite element.

3 ZGLEDA

3 EXAMPLES

Za ponazoritev teorije bomo obravnavali dva zgleda. Prvi vsebuje preprosto ravninsko konstrukcijo, njegov namen pa je ponazoriti način uporabe tristraničnega projektnega elementa. Drug zgled vsebuje preprosto prostorsko konstrukcijo, njegov namen pa je pokazati uporabo nedegeneriranega tristraničnega elementa. V obeh zgledih sta podatka o materialu enaka: elastični modul znaša $E=210$ GPa, Poissonov količnik je $\nu=0,3$.

Oba zgleda sta zapisana v obliki nelinearnega optimizacijskega problema in rešena z uporabo optimizacijskega modula AMOPT ([11] in [12]).

In order to illustrate the theory, two numerical examples will be considered. The first example involves a simple planar structure and its purpose is to illustrate how to employ the trilateral design element. The second example involves a simple space structure, and it illustrates the use of a nondegenerated trilateral element. In both examples the material data is the same: the Young's modulus is $E=210$ GPa and the Poisson ratio is $\nu=0.3$.

Both examples are formulated in the form of a non-linear constrained optimization problem and solved by the optimization routine AMOPT ([11] and [12]).

Zgled 1. Optimizacija tristranične podporne plošče

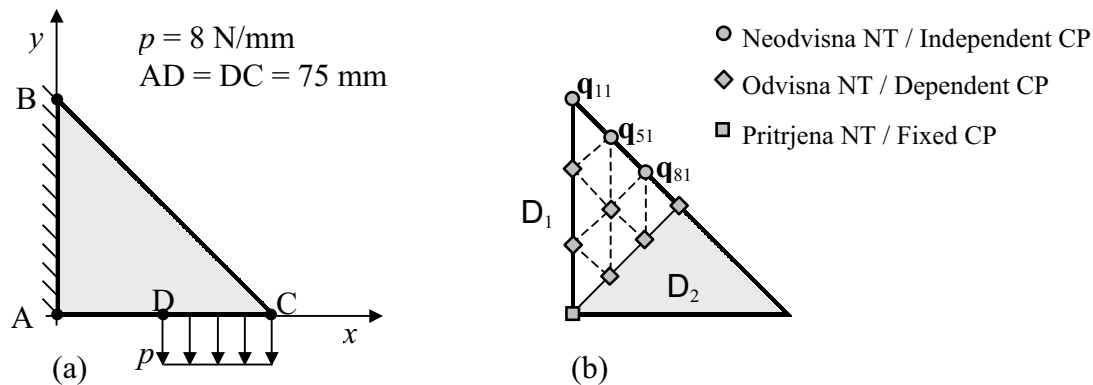
Example 1. Optimization of a trilateral supporting plate

Obravnavajmo tristranično podporno ploščo, prikazano na sliki 7. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o podprtju in obremenitvi so podani na sliki 7a. Naš namen je določiti obliko konstrukcije tako, da bo njena teža najmanjša in bodo hkrati izpolnjeni vsi omejitveni pogoji. Natančneje, želimo spreminjati višino plošče (navpično lego točke B) in obliko obrisa BC tako, da bo teža najmanjša. Postavljeni omejitveni pogoji se nanašajo na navpični pomik točke C in na napetosti vzdolž robov BC in AC.

Da bi lahko definirali optimizacijsko nalogo, konstrukcijo razdelimo na dva projektna elementa (degenerirana v ravninska lika). Zaradi zagotavljanja dovolj velike prilagodljivosti, vzamemo dva elementa, vsak z $10 \times 1 = 10$ nadzornimi točkami (NT). Na sliki 7b so prikazane NT prvega projektnega elementa, medtem ko so NT drugega razporejene na podoben način. Vpeljimo sedaj projektne spremenljivke $\mathbf{b}$, s katerimi definiramo neodvisno gibljive nadzorne točke prvega elementa: $\mathbf{q}_{11}=[0, b_1]^T$, $\mathbf{q}_{51}=[b_2, b_3]^T$ in $\mathbf{q}_{81}=[b_4, b_5]^T$. Če naredimo podobno še pri drugem projektnem

Let us consider the trilateral supporting plate shown in Figure 7. The geometrical and material data as well as the support and loading conditions are given in Figure 7a. Our objective is to determine the shape of the structure so that its weight will be minimal and, at the same time, all of the imposed constraints will be fulfilled. More precisely, we can vary the height of the plate (vertical position of point B) and the shape of the contour BC so that the weight will be minimised. The imposed constraints are related to the vertical displacement of the point C and to the stresses along the edges BC and AC.

In order to define the design problem, we start by partitioning the structure into trilateral design elements (degenerated to a flat surface). For flexibility reasons we take two elements with $10 \times 1 = 10$ control points (CP) each. Figure 7b illustrates the CP of the first design element, while the second one is defined in a similar way. Then we introduce design variables $\mathbf{b}$ by defining the independently movable CP of the first element as: $\mathbf{q}_{11}=[0, b_1]^T$, $\mathbf{q}_{51}=[b_2, b_3]^T$ and $\mathbf{q}_{81}=[b_4, b_5]^T$.



Sl. 7. Tristranična podporna plošča (a) in njena predstavitev z 2 projektnima elementoma (b)
Fig. 7. The trilateral supporting plate (a) and its representation by 2 design elements (b)

elementu, dobimo skupaj 9 projektnih spremenljivk. Omejitvene pogoje postavimo tako: navpični pomik točke C mora biti manjši od 0,2 mm, medtem ko morajo biti Misesove napetosti vzdolž robov BC in AC manjše od 100 MPa. Konstrukcijo modeliramo z 8 vozliščnimi ravninskimi končnimi elementi tipa Serendipity.

Obravnavali bomo dva primera: primer I, kjer vrednosti projektnih spremenljivk niso omejene in primer II, pri katerem (na primer zaradi pritrditve) postavimo naslednje dodatne omejitve: $b_1, b_3 \geq 80 \text{ mm}$ in $b_2, b_4 \geq 20 \text{ mm}$.

Z uporabo lastnega optimizacijskega algoritma lahko oba primera rešimo v manj ko 10 iteracijah (6 iteracij za primer I in 8 za primer II). Pri obeh končnih oblikah (sl. 8) imamo hkrati delujoče tako napetostne pogoje kakor tudi pogoj za pomik. Glede na začetno konstrukcijo, se je prostornina optimalne konstrukcije zmanjšala za 48% v primeru I oziroma za 46% v primeru II.

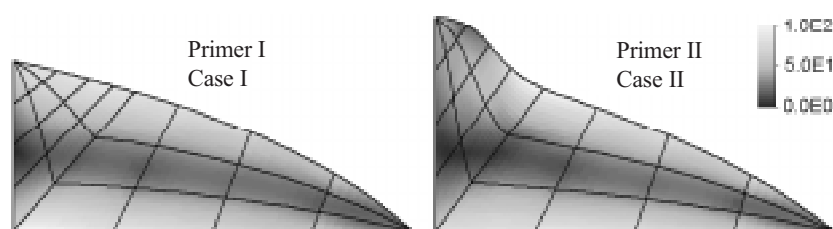
V tem zgledu smo uporabili dva projektna elementa z deset NT. Ker imata elementa štiri skupne NT, smo torej skupaj morali definirati šestnajst NT. Za primerjavo rezultatov smo enak problem rešili tudi z uporabo dveh štiristraničnih projektnih elementov, vsak z $4 \times 4 \times 1 = 16$ NT. Rezultati so bili identični, vendar smo v slednjem primeru morali definirati dvaindvajset NT. V primerjavi s šestnajst NT to pomeni povečanje obsega priprave podatkov za 37,5%. To lahko pomeni bistveno razliko pri zahtevnih optimizacijskih nalogah z zapletenimi oblikami in mnogimi projektnimi spremenljivkami.

$[b_4, b_5]^T$. Adopting a similar arrangement for the second element, we finally get a total of nine design variables. The constraints are imposed as follows: the vertical displacement of point C has to be less than 0.2 mm while the Mises stresses along BC and AC have to be less than 100 MPa. The structure is modeled by 8-node plane finite elements of the Serendipity type.

Two cases will be considered: Case I where the values of the design variables are not limited, and Case II where (e.g. for fixing purposes) we impose the following limits: $b_1, b_3 \geq 80 \text{ mm}$ and $b_2, b_4 \geq 20 \text{ mm}$.

By employing our own optimization algorithm, both problems could be solved successfully within ten iterations (six iterations for Case I and eight for Case II). At the final design (Figure 8), displacement and stress constraints were active in both cases. Compared to the initial volume, the optimum volumes are reduced by 48% and 46% for cases I and II, respectively.

In this example we employed two trilateral design elements with ten CP each. Since four CP are common to both design elements, we had to define a total of sixteen CP. In order to compare the results, we solved the same problem by employing two quadrilateral design elements with $4 \times 4 \times 1 = 16$ CP each. The results were identical, but for this arrangement we had to define a total of twenty-two CP. Compared to sixteen, this is an increase of 37.5%. For complex design problems with sophisticated shapes and many design variables such an increase can represent a substantial difference.



Sl. 8. Optimalne oblike z razporeditvijo napetosti
Fig. 8. Optimal shapes with stress distribution

Zgled 2. Optimizacija tristranične konzole

Obravnavajmo tristranično konzolo, ki jo prikazuje slika 9. Konzola je togo podprta pri $z=0$ (ploskev ABG) in obremenjena na zgornji ploskvi ABCD z eno od dveh enakomerno porazdeljenih sil: (I) $p_y = -40 \text{ N/cm}^2$ in (II) $p_x = 30 \text{ N/cm}^2$. Obe obremenitvi sta ločeno upoštevani v okviru enega optimizacijskega problema.

Naš namen je določiti obliko robov BG in CH kakor tudi obliko ploskve BCHG tako, da bo teža konzole najmanjša. Pri katerikoli od obeh obremenitev Misesove napetosti ne smejo preseči meje 100 MPa.

Za parametrizacijo mreže končnih elementov bomo uporabili en tristranični projektni element s $15 \times 3 = 45$ nadzornimi točkami. Nadzorne točke, ki določajo obliko ploskve BCHG so odvisne od osemnajst projektnih spremenljivk. Konstrukcija je diskretizirana z uporabo 20-vozljičnih končnih elementov tipa Serendipity.

Tudi ta problem smo lahko rešili zelo hitro. Postopek reševanja je bil stabilen, optimalna oblika je bila dobljena po petih iteracijah. Kakor je razvidno iz preglednice, je optimizacijski postopek izpolnil postavljene pogoje (na začetku so ti bili prekoračeni) in hkrati zmanjšal prostornino konstrukcije. Optimalna oblika je prikazana na sliki 10.

Še komentar k izbiri projektnega elementa. Za uporabo tristranične variante smo potrebovali $15 \times 3 = 45$ nadzornih točk. Če bi uporabili štiristranično varianto, bi za enako prilagodljivost potrebovali

Example 2. Optimization of a trilateral cantilever

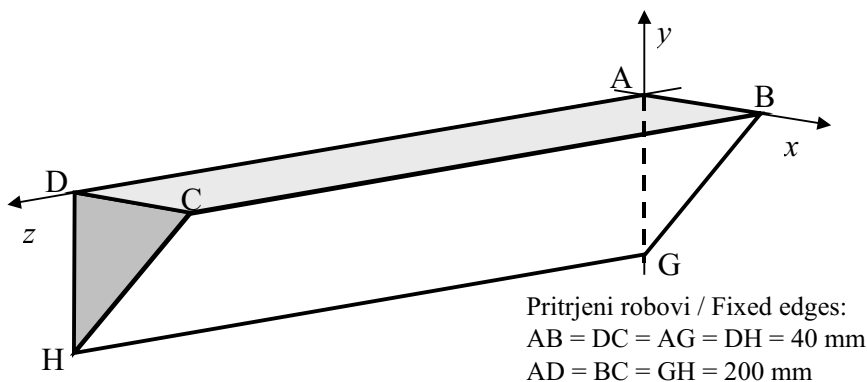
Let us consider the trilateral cantilever shown in Figure 9. The cantilever is rigidly supported at $z=0$ (face ABG) and loaded at the upper face ABCD by either one of two evenly distributed loads: (I) $p_y = -40 \text{ N/cm}^2$ and (II) $p_x = 30 \text{ N/cm}^2$. Both loads are considered simultaneously, within a single design problem.

Our objective is to determine the shape of the edges BG and CH as well as the shape of the face BCHG so that the weight of the cantilever will be minimised. The Mises stresses are allowed to be, at most, 100 MPa when either the first or the second load is applied.

In order to parametrize the mesh, one trilateral design element with $15 \times 3 = 45$ control points is employed. The control points that determine the shape of the surface BCHG are design dependent, which results in a total of eighteen design variables. The structure is modeled by 20-node finite elements of the Serendipity type.

This example was also solved very quickly. The solution process was stable and a near optimum design was obtained after five iterations. As can be seen in the table, the optimization process fulfilled the constraints (initially being violated), and lowered the volume of the structure. The optimal design is depicted in Figure 10.

A comment on the choice of the design element. For the trilateral design element we needed $15 \times 3 = 45$ control points. For the same order of flexibility we would need a quadrilateral design

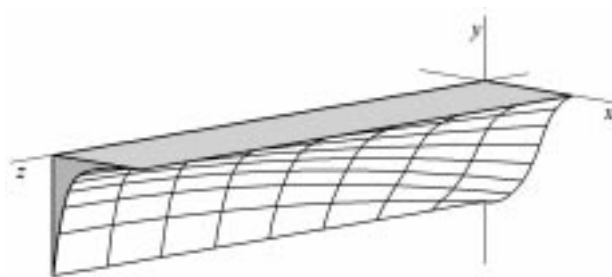


Sl. 9. Tristranična konzola
 Fig. 9. Trilateral cantilever

Preglednica 1. Primerjava začetnega in optimalnega projekta

Table 1. Comparison of the initial and optimised designs

	Začetni Initial	Optimalni Optimum
Prostornina v cm^3 Volume [cm^3]	160,0	93,5
Najv. prekoračitev pogojev v % Max. constraint violation [%]	27,9	0,0



Sl. 10. Optimalna oblika konzole
Fig. 10. Optimal shape of the cantilever

element s $5 \times 5 \times 3 = 75$ nadzornimi točkami. To pa je precej več kakor 45, torej je v danem primeru uporaba tristraničnega elementa precej bolj smotrna.

element with $5 \times 5 \times 3 = 75$ control points. This is substantially more than 45, making, in this example, the trilateral element a far better choice.

4 SKLEP

V prispevku je bil predstavljen tristranični projektni element. Čeprav lahko namesto tristraničnega elementa vedno uporabimo splošnejšega štiristraničnega, tristranična varianta mnogokrat pomeni bolj naravni izbor. Posledica je manjše število potrebnih nadzornih točk, kar pomeni manj priprave vhodnih podatkov in manj geometrijskih pogojev. Tristranične projektne elemente lahko poljubno kombiniramo s štiristraničnimi.

4 CONCLUSION

The trilateral prismatic design element was presented in the paper. Although the quadrilateral prismatic element may be used for the same purpose, the trilateral version often represents a more natural choice. The consequence is a smaller number of required control points, meaning that less input data has to be prepared and that fewer geometrical constraints have to be imposed. The trilateral elements can be used arbitrarily in combination with the quadrilateral elements.

5 LITERATURA 5 REFERENCES

- [1] Haftka, R.T., R.V. Grandhi (1986) Structural shape optimization - a survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57, 91 106.
- [2] Imam, M.H. (1982) Three dimensional shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 18, 661 673.
- [3] Braibant, V., C. Fleury (1984) Shape optimal design using B splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 44, 247 267.
- [4] Shyy, Y.K., C. Fleury, K. Izadpanah (1988) Shape optimal design using high order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 71, 99 116.
- [5] Maute, K., E. Ramm (1995) Adaptive topology optimization. *Structural optimization*; 10, 100 112.
- [6] Ohsaki, M., T. Nakamura, Y. Isshiki (1998) Shape size optimization of plane trusses with designer's preference. *Journal of structural engineering*; 124, 1323 1330.
- [7] Kegl, M., H. Antes (1998) Shape optimal design of elastic space frames with non-linear response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 43, 93 110.
- [8] Wang, X., J. Zhou, Y. Hu (1999) A physics based parametrization method for shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; 175, 41 51.
- [9] Kegl, M. (2000) Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 49, 1571 1588.
- [10] Farin, G. (1993) Curves and surfaces for computer aided geometric design (2nd edn). *Academic Press*, New York.
- [11] Kegl, M., M.M. Oblak (1997) Optimization of mechanical systems: on non linear first order approximation with an additive convex term. *Communications in Numerical Methods in Engineering*; 13, 13 20.
- [12] Kegl, M., B.J. Butinar, B. Kegl (2002) An efficient gradient based optimization algorithm for mechanical systems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*; 18, 363 371.

Avtorjev naslov: doc. dr. Marko Kegl
Fakulteta za strojništvo
Univerza v Mariboru
Smetanova 17
2000 Maribor
marko.kegl@uni-mb.si

Authors' Address: Doc. Dr. Marko Kegl
Faculty of mechanical eng.
University of Maribor
Smetanova 17
2000 Maribor, Slovenia
marko.kegl@uni-mb.si

Prejeto: 23.12.2002
Received:

Sprejeto: 31.1.2003
Accepted:

Optimiranje pogonskega mehanizma stiskalnice za globoki vlek

Optimization of Link-Drive Mechanism for Deep Drawing Mechanical Press

Bojan Vohar · Karl Gotlih · Jože Flašker

V prispevku se ukvarjamo z optimiranjem večzgibnega pogona paha stiskalnice za globoki vlek pločevine. Sedanja konstrukcija ne izpolnjuje vseh postavljenih zahtev, zato jo želimo čimbolj prilagoditi idealnim zahtevam tehnološkega postopka. Osnovni namen je prilagoditi sedanjo hitrostno karakteristiko paha zahtevam delovanja v določenem območju. Zato je bilo treba izdelati analizo pogona in njegov matematični model ter izvesti optimizacijo. Uporabljena metoda za nelinearno optimizacijo je sekvenčno kvadratno programiranje. Ker je postopek časovno odvisen, optimizacijskega modela ni moč uporabiti neposredno, ampak je treba primer prevesti v časovno neodvisno obliko, ki je primerna za reševanje s standardnim optimizacijskim postopkom. Cilj optimiranja je določiti takšne izmere pogonskega mehanizma, ki bi čimbolj izpolnile zahteve. V sklepu je prikazana primerjava doseženih rezultatov optimirane konstrukcije večzgibnega pogona z začetnim stanjem pred optimizacijo.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: globoki vlek, stiskalnice za globoki vlek, optimiranje pogoniv, modeliranje)

This paper deals with an example of a link-drive for a deep-drawing mechanical press. The existing design has proved unsatisfactory and does not meet all the demands and constraints which are required for this metal-forming process. Optimization of the drive is therefore necessary. The intention of this optimization is to achieve the required velocity characteristics in a defined area of movement. Firstly, the drive is analysed and a mathematical model is made. The whole process is time-dependent, so it cannot be used directly in the optimization algorithm. This mathematical model has first to be transformed into a form suitable for the standard non-linear optimization procedure and then the optimization is carried out. We use the method of sequential quadratic programming. The final objective of the optimization process is to find the dimensions of the link-drive members such that the given requirements are satisfied in the best possible manner. In conclusion, the results are described and compared with the initial design.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: deep drawing, deep drawing press, link-drive mechanism, optimization, modelling)

0 UVOD

Globoko vlečenje je zahteven preoblikovalni postopek. Največji vpliv na potek vlečenja ima oblika končnega izdelka in posledično oblika orodja ter vrsta materiala, ki ga obdelujemo. Poleg teh in drugih tehnoloških dejavnikov na kakovost in pravilen potek vlečenja zelo vpliva hitrost vlečenja pločevine. Odvisna je od stiskalnice, na kateri se vlečenje opravlja. Vsak material ima neko optimalno vlečno hitrost. Največja hitrost vlečenja pločevine je tako ena izmed pomembnejših omejitev pri izbiri stiskalnice.

Želje po večji produktivnosti preoblikovalnih strojev narekujejo iskanje novih konstrukcijskih rešitev in izboljšav. Najlažji način povečanja produktivnosti stiskalnic za globoki vlek je povečanje

0 INTRODUCTION

Deep drawing is a complex metal-forming process. The quality of the products made with this process is mainly influenced by their required shape and the material used. Many technological parameters influence the quality and the course of the whole process, for example, friction contact and lubrication of the tool. However, the slide velocity is one of the most important factors; this velocity depends only on the press design parameters. Each material has its optimum drawing velocity; therefore, maximum drawing velocity is one of the deciding factors when selecting an appropriate press.

The demands for increased productivity encourage the search for better solutions and improvements in the production of metal-forming machines.

njihove obratovalne hitrosti, torej vrtilne frekvence pogonskega motorja. Vendar hitrosti ni moč poljubno povečevati, ker prevelike vlečne hitrosti povzročajo trganje materiala in druge težave [3], saj material nima na voljo dovolj časa za zadostno tečenje. Hidravlične stiskalnice te probleme zaradi učinkovitega krmiljenja zlahka odpravijo, njihova pomanjkljivost pa je višja cena v primerjavi z mehanskimi stiskalnicami ter drago in zahtevno vzdrževanje. Pri mehanskih stiskalnicah je to težje, ker je pot paha omejena z vnaprej določenim gibom, ki ga določa kinematika in izmere pogonskega mehanizma.

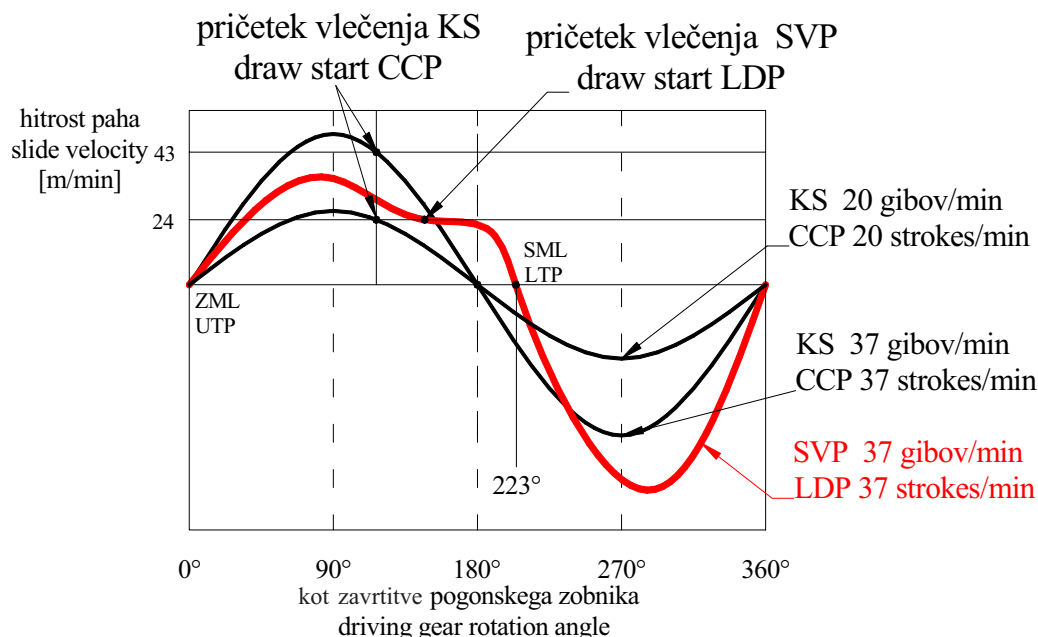
Ena takšnih izboljšav v mehanskih stiskalnicah je večzgibni pogon paha [3]. Takšen pogon je zaradi svojih karakteristik primernejši od običajnega ročičnega pogona, saj je njegovo delovanje mogoče veliko bolje prilagajati zahtevam posameznih preoblikovalnih postopkov. Imenujemo ga tudi mehanizem s pospešenim povratnim gibom. Njegova glavna lastnost je, da je hitrost paha med delovnim gibom tudi za polovico manjša od običajnih ročičnih stiskalnic pri enaki obratovalni hitrosti ter zelo pospešena pri vračanju v izhodno lego. Takšna hitrostna karakteristika je zelo podobna hidravličnim stiskalnicam, le da celoten krog poteka pri mehanskih stiskalnicah občutno hitreje. Ker je največja hitrost vlečenja pločevine hkrati omejitev obratovalne hitrosti stroja, lahko stiskalnice s takšnim pogonom obratujejo veliko hitreje kakor običajne, saj te hitrosti ne bodo prekoračile. Tak primer prikazuje slika 1 [3], kjer je prikazana razlika v obratovalni hitrosti med običajno ročično stiskalnico ter stiskalnico z večzgibnim pogonom. Razvidno je, da lahko v stvarnem primeru na sliki stiskalnica z večzgibnim pogonom obratuje s 37 gibi na minuto, medtem ko običajna ročična stiskalnica obratuje z največ 20 gibi na minuto (da ne pride do prekoračitve vlečne hitrosti); torej dosežemo z večzgibnim pogonom za 85 % večjo produktivnost (na minuto 17 kosov več).

S slike 1 [3] je razvidna še ena prednost večzgebne pogona, namreč skoraj nespremenljiva vlečna hitrost v delovnem področju, kar omogoča občutno boljše razmere za tečenje materiala, izboljša kakovost izdelka ter podaljša dobo trajanja orodja. Takšen večzgibni pogon obravnavamo v prispevku, prikazan je na sliki 2. Pogon je izveden prek pogonskega zobnika z izsrednostjo, na katerega je vezana ojnica, ki je na eni strani prek veznega droga povezana z okrovom stiskalnice, na drugi strani pa se gibanje prenaša na drsnik. Na tega je nato prek drogov pritrjen pah. Mehanizem je 6-zgibni ročični s končnim drsnim členom in je v bistvu sprememba običajnega 4-zgibnega ročičnega mehanizma z drsnikom. Želena hitrostna karakteristika dobimo zaradi podaljšane ojnice in vezave le-te na vezni drog in okrov, kar spremeni sinusoidni potek hitrosti v že prej omenjeni in prikazani krog, značilen za večzgebne pogone.

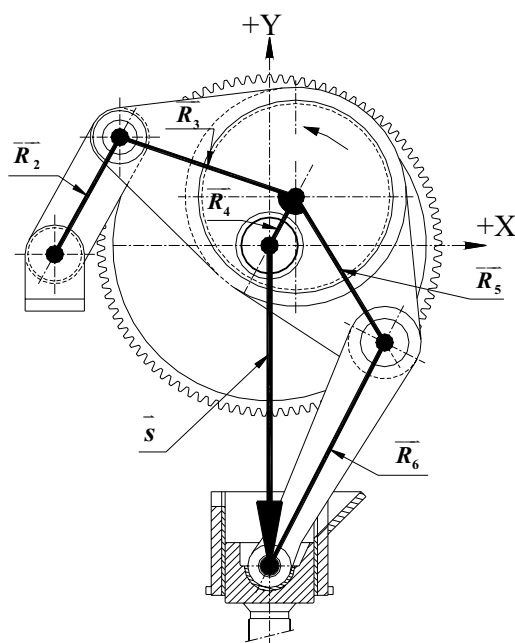
The simplest way to increase the productivity of mechanical presses is to increase their operating speed (the rotational velocity of their driving engine). However, such an increase has its limits, since too high drawing velocities cause tearing of the material and some other problems that occur when there is not enough time available for the material to flow [3]. The issue is not relevant in the case of hydraulic presses due to efficient control and slide control, but their high price and maintenance costs are the main disadvantages. This sort of slide control is hard to implement with mechanical presses, because the motion of the slide is constrained and defined by the dimensions and kinematics of the driving mechanism.

However, during the past few years press manufacturers have begun to incorporate special link-drives into their presses [3]. Because of their characteristics these drives (also called quick-return drives) are much more appropriate than conventional crankshaft and eccentric gear drives, they are more flexible and easier to adapt for each individual metal-forming process. Their main advantage is a much lower slide velocity during the working part of the cycle. This kind of velocity characteristic is very similar to hydraulic presses, except that the whole process runs much faster in mechanical presses. Since the maximum drawing velocity is also the limit of the press's operational speed, the presses with the link-drive can operate at higher speeds than conventional versions without exceeding the maximum drawing-velocity limit. Figure 1 demonstrates the difference in the velocity characteristics between a classic crankshaft press and one with a link-drive [3]. Whereas a link-drive press operates at 37 strokes/min, the crankshaft version can run at 20 strokes/min – at most – before the maximum drawing-speed limit is exceeded. That means 85% more production with the link-drive press (17 pieces/min more than with the conventional press).

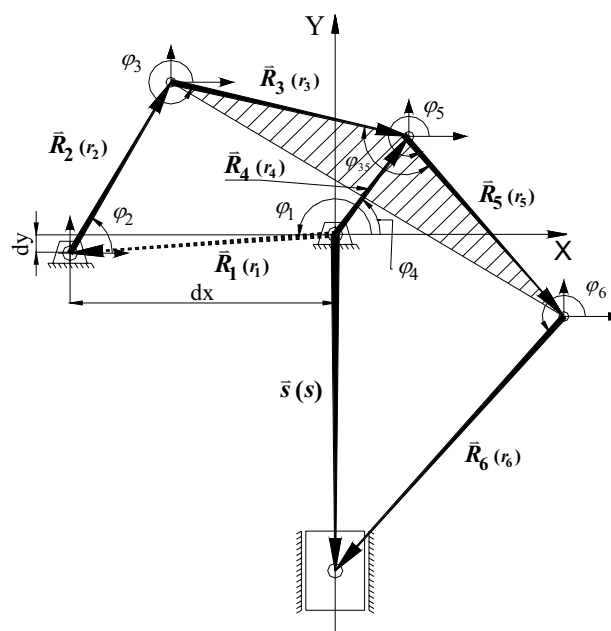
Another important feature of link-drive presses, which is also evident in Figure 1, is the almost constant slide velocity in the working part of the cycle. This considerably improves the conditions for material flow, the quality of the products, and prolongs the lifetime of the tool. Figure 2 presents the link-drive that is considered in this paper. The drive of the press is accomplished through an eccentric driving gear that is linked with a coupler link. On one side the coupler is connected to the press frame via an additional link, and the other end is connected to an output slider-link combination. The mechanism is a 6-bar slider-crank mechanism, which is a modification of a standard 4-bar slider-crank version. A modified velocity characteristic (lower velocity in the working part of the cycle) is achieved through an extended coupler link and its connection to the press frame.



Sl. 1. Primerjava enega kroga klasične stiskalnice (KS) in stiskalnice z večzglobnim pogonom (SVP)
Fig. 1. Comparison of one cycle of the classic crankshaft press (CCP) and the link-drive press (LDP)



Sl. 2. Shema večzglobnega pogona
Fig. 2. Scheme of deep drawing mechanical press link-drive



Sl. 3. Kinematična shema mehanizma
Fig. 3. Kinematic scheme of the link-drive mechanism

Želimo optimirati dani pogon glede na določene kriterije, torej poiskati optimalne izmere ročic in lege vrtišč, da bo ustrezal naslednjim zahtevam:

- Hitrost v delovnem območju naj bo čimbolj nespremenljiva, predvsem v predpisanem območju od okoli 75 do 150 mm pred spodnjo mrtvo lego.
- Mehanizem naj doseže spodnjo mrtvo lego v območju zasuka izsrednika od 190 do 230 stopinj (običajni ročni mehanizem pri 180 stopinjah) – s

The final objective of the optimization is to find the dimensions of the link-drive members such that the following requirements are satisfied in the best possible manner:

- Slide velocity in the working part of the cycle should be as constant as possible, especially in the range from 75 to 150 mm before the lower toggle point (bottom dead centre),
- The mechanism should reach the lower toggle point in the range of the eccentric gear rotation angle from 190° to 230°, so as to achieve a longer

tem je zagotovljen daljši čas dejavnega dela delovnega giba (kakovostno tečenje materiala).

- Hitrost v delovnem krogu naj bo čim manjša (manjša stična hitrost in manjša preoblikovalna hitrost).
- Če je le mogoče, naj bodo spremembe izmer čim manjše; izmere ročic naj variirajo v območju okoli $\pm 20\%$, prav tako naj se čim manj spreminja gib paha.

Za sam postopek optimiranja je treba izdelati matematični model mehanizma ter izbrati namensko funkcijo, ki jo bomo optimirali. Zato moramo najprej opraviti kinematično analizo mehanizma, kjer bodo prikazane funkcijske odvisnosti med vsemi spremenljivkami, ki bodo udeležene v optimizacijskem postopku.

1 KINEMATIČNA ANALIZA POGONA

Na podlagi kinematične sheme (sl. 3) izpeljemo kinematično analizo mehanizma. Z $\bar{R}_2$ do $\bar{R}_6$ smo označili vse ročice ($\bar{R}_3$ in $\bar{R}_5$ sta skupaj ena ročica – ojnica $\bar{R}_{3-5}$), $\bar{R}_1$ pomeni podlago, $\bar{s}$ pa vektor lege paha (dolžina $\bar{s}$ se spreminja s časom). V oklepajih so označene dolžine posameznih vektorjev. Mehanizem ima samo eno prostostno stopnjo – torej je njegovo gibanje moč opisati s funkcijo ene same spremenljivke; v našem primeru bo to kot pogonske ročice $\bar{R}_4 - \varphi_4$. Zanima nas potek gibanja paha ter njegove hitrosti in pospeškov, zato moramo poiskati zvezo med vhodno in izhodno veličino, torej funkcijsko odvisnost $\bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$. Analizo gibanja mehanizma smo izvedli s kompleksnimi števili. Mehanizem obravnavamo v dveh stopnjah: prva stopnja je 4-zgibni ročični mehanizem ($\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4$), druga pa 4-zgibni ročični mehanizem z drsnikom ($\bar{R}_4 - \bar{R}_5 - \bar{R}_6 - \bar{s}$), pri čemer je kot ročice $\bar{R}_5$ odvisen od kota ročice $\bar{R}_3$. Najprej analiziramo prvo stopnjo, ker je rešitev tega mehanizma vhodni podatek za drugo stopnjo.

Za sklenjeno zanko prve stopnje lahko zapišemo (sl. 3):

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 + \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = 0 \quad (1)$$

oz. v kompleksnem zapisu:

$$r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 e^{i\varphi_2} + r_3 e^{i\varphi_3} - r_4 e^{i\varphi_4} = 0 \quad (2)$$

Po ločitvi na realni in imaginarni del dobimo sistem dveh enačb z dvema neznankama (kota φ_2 in φ_3), znane so vse dolžine ročic r_2 do r_4 , φ_4 je kot pogonske ročice r_4 in je odvisen od časa t in vrtilne frekvence ω ($\varphi_4 = \omega t$). Rešitev tega sistema je:

duration of the working part of the cycle and therefore higher quality of deformed material (classic crankshaft mechanism at 180°),

- The slide velocity in the working part of the cycle should be as low as possible, within the given constraints,
- The changes of the member lengths should not exceed $\pm 20\%$ of the original values, and the change of the stroke length should be as small as possible.

For the optimization procedure a mathematical model of the link-drive has to be made, and an appropriate cost function has to be chosen. To do this the kinematic analysis of the drive has to be carried out first in order to derive the functional relations between all the variables included in the optimization process.

1 KINEMATIC ANALYSIS OF THE DRIVE

Figure 3 shows the kinematic scheme of the drive. Vectors $\bar{R}_2$ to $\bar{R}_6$ represent the drive members ($\bar{R}_3$ and $\bar{R}_5$ together represent one member – the coupler link $\bar{R}_{3-5}$), $\bar{R}_1$ is the foundation (press frame) and $\bar{s}$ is the vector of the slide position (variable length – time dependent). In the brackets are the appropriate member lengths. The mechanism has one degree of freedom and its motion can therefore be described with a function of a single variable. In our case this variable is the rotational angle of the driving eccentric gear $\bar{R}_4 - \varphi_4$. The slide motion is of concern here, so the desired relation we are looking for is the dependency of the output variable $\varphi_4 : \bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$. The kinematic analysis is made with complex-numbers notation. The mechanism is analyzed in two steps: the first step is the analysis of the 4-bar mechanism ($\bar{R}_1 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4$); and the second is the analysis of the 4-bar slider-crank mechanism ($\bar{R}_4 - \bar{R}_5 - \bar{R}_6 - \bar{s}$), where the output results of the first analysis are the input data for the second analysis.

For a closed loop in the first step we can write the following relation (figure 3):

or in complex-numbers notation:

After separation of the real and imaginary parts we get a system of two equations with two unknowns (rot. angles φ_2 and φ_3). The member lengths r_2, r_3, r_4 are known, the rotational angle of the driving eccentric gear φ_4 is the input variable, which is dependent on the time t and the rotational velocity ω ($\varphi_4 = \omega t$). The solution of this system is:

$$\varphi_{2,1,2} = 2 \arctan \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \right), \varphi_{3,1,2} = 2 \arctan \left(\frac{-E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}}{2D} \right) \quad (3),$$

kjer so uporabljene oznake:

where the following notations are used:

$$\begin{aligned} A &= K_1 - K_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) - K_4 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_4 & K_1 &= \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 + r_4^2}{2r_2r_4} \\ B &= 2(K_4 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_4) & K_2 &= \frac{r_1}{r_2} \\ C &= K_1 - K_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + K_4 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_4 & K_3 &= \frac{r_1}{r_3} \\ D &= K_5 + K_4 \cos \varphi_1 + K_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) - \cos \varphi_4 & K_4 &= \frac{r_1}{r_4} \\ E &= 2(K_4 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_4) & K_5 &= \frac{-r_1^2 + r_2^2 - r_3^2 - r_4^2}{2r_3r_4} \\ C &= K_5 - K_4 \cos \varphi_1 + K_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_4) + \cos \varphi_4 \end{aligned} \quad (4).$$

Za vsak kot (φ_2 in φ_3) sta mogoči dve rešitvi (obe realni in enaki, kompleksno konjugirani ali realni in različni), ustrezno določimo s kinematično shemo. Prva stopnja je v celoti določena, za poljubni čas t lahko izračunamo vse potrebne parametre in sledi analiza druge stopnje.

Iz kinematične sheme 2. stopnje (sl. 4) je razvidno, da je kot φ_5 vezan na kot φ_3 , saj ročici $\bar{R}_3$ in $\bar{R}_5$ sestavljata eno ročico – ojnico $\bar{R}_{3-5}$. Zato ga zapišemo kot:

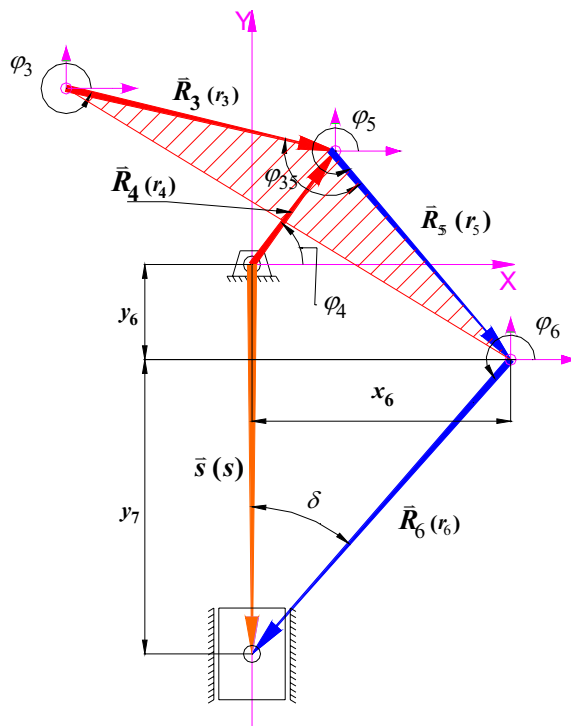
For every angle φ_2 and φ_3 two solutions are possible (both real and equal, complex conjugated or real and different). The appropriate solution is chosen according to the kinematic scheme. The first stage of the mechanism is completed, for an arbitrary time t all the parameters can be computed.

The second step of the kinematic analysis follows according to the kinematic scheme of the second stage of the mechanism (Fig. 4). The members $\bar{R}_3$ and $\bar{R}_5$ together form one member – the coupler link $\bar{R}_{3-5}$, therefore the angle φ_5 is dependent on the angle φ_3 , and can be written as:

$$\varphi_5 = \varphi_3 + \varphi_{35} - \pi \quad (5),$$

kjer je φ_{35} kot trikotne ojnice, torej kot med ročicama $\bar{R}_3$ in $\bar{R}_5$. Izhodna veličina, katere funkcijsko

where φ_{35} is the angle of the triangular coupler (the angle between members $\bar{R}_3$ and $\bar{R}_5$). The output quan-



Sl. 4. Kinematična shema 2. stopnje mehanizma
Fig. 4. Kinematic scheme of the second stage

odvisnost potrebujemo, je gib oz. pozicija paha (drsnika) – dolžina vektorja $\vec{s}$.

Zapišemo lahko naslednje zveze:

$$\begin{aligned} s &= y_6 + y_7, & y_6 &= r_4 \sin \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5, & y_7 &= \frac{x_6}{\tan \delta}, & x_6 &= r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5, \\ \delta &= \arcsin \left(\frac{x_6}{r_6} \right), & y_7 &= \frac{x_6}{\tan \delta} = \frac{r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5}{\tan \left(\arcsin \left(\frac{x_6}{r_6} \right) \right)} \end{aligned} \quad (6),$$

oziroma:

$$s = r_4 \sin \varphi_4 + r_5 \sin \varphi_5 + \frac{r_4 \cos \varphi_4 + r_5 \cos \varphi_5}{\tan \left(\arcsin \left(\frac{x_6}{r_6} \right) \right)} \quad (7).$$

Vse odvisne veličine na desni strani enačbe (7) so funkcije kota φ_4 in smo tako dobili željeno zvezo med vhodno ter izhodno veličino: $\vec{s} = f(\varphi_4)$.

Hitrosti in pospeške paha je sedaj moč preprosto dobiti z odvajanjem (7). Iz rezultatov analize je razvidno, da je zveza (7) nelinearna, kar pogojuje način optimiranja. Rezultate kinematične analize prikazujejo krivulje: gib, hitrost in pospešek paha v odvisnosti od vhodnega kota φ_4 (in s tem posredno časa t) na sliki 5.

Iz grafov je vidna tipična karakteristika večzgibnega pogona: SML se pojavi kasneje kakor pri običajnem ročičnem pogonu, v območju delovnega giba je hitrost manjša in ima enakomernjši potek, čemur sledi skokovito povečanje hitrosti pri vračanju paha navzgor. Za obravnavani pogon smo izdelali računalniški program v programskem jeziku

tity, whose functional relation we are looking for, is the slide position – the length of the vector $\vec{s}$.

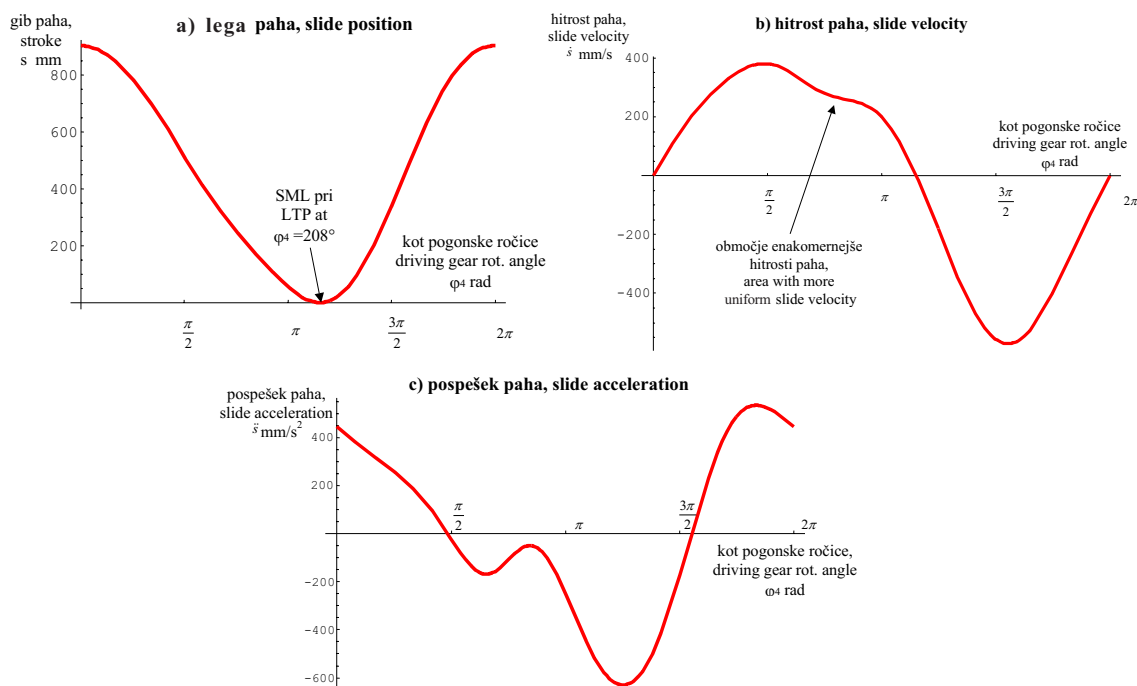
The following relations can be written:

hence:

The desired relation $\vec{s} = f(\varphi_4)$ is derived, and all the quantities on the right-hand side of the equation are dependent only on the angle φ_4 .

The slide velocity and the acceleration can now be easily obtained with a derivation of (7). It is clear that the relation (7) is highly nonlinear and therefore a nonlinear optimization procedure has to be chosen. The results of the kinematic analysis are shown in Figure 5.

The typical characteristics of the link-drive are clear from the graphs: the lower toggle point occurs much later than with the classic crankshaft drive; the slide velocity in the working part of the cycle is lower and more constant; there is a rapid velocity increase in the returning part of the cycle. A FORTRAN algorithm was made which, for given input



Sl. 5. Rezultati kinematične analize večzgibnega pogona (a - lega, b - hitrost, c - pospešek)
Fig. 5. Results of the kinematic analysis (a - position, b - velocity, c - acceleration)

FORTTRAN, ki za dane vhodne podatke izračunava kinematične veličine (lego, hitrost, pospešek in gib paha, lego SML, največji absolutni pospešek in njegovo lego). Izračunani podatki za obravnavani mehanizem so naslednji:

- SML pri $\varphi_4 = 208^\circ$,
- gib mehanizma = 903,48 mm,
- predpisano območje (okoli 75 do 150 mm pred SML): $\varphi_4 = 155^\circ \div 176^\circ$,
- največji absolutni pospešek na predpisanem območju = $198,8 \text{ mm/s}^2$ ($\varphi_4 = 176^\circ$).

Kinematična analiza pogona je končana, znani so vsi potrebni parametri, ki jih potrebujemo za optimizacijo.

2 OPTIMIRANJE POGONA

A) Splošni optimizacijski model

Osnovni cilj vsakega optimizacijskega postopka, ki temelji na metodah matematičnega programiranja, je poiskati odgovor na vprašanje "kaj je najboljši?" pri problemih, pri katerih lahko kakovost odgovora izrazimo kot numerično vrednost. Ali drugače: poiskati takšno kombinacijo parametrov (projektnih spremenljivk), ki bodo minimizirali izbrano veličino (namensko funkcijo). Optimizacijski problem je najprej treba spremeniti v matematično obliko.

Splošni model optimizacijskega problema zapišemo v obliki:

poišči tak vektor projektnih spremenljivk $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
ki bo minimiziral namensko funkcijo $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n$,
ob upoštevanju pogojev:

$$\begin{aligned} x_i^{sp} \leq x_i \leq x_i^{zg} \quad i = 1, 2, \dots, k \\ \text{(omejitve projektnih spremenljivk/constraints of design variables, lower/upper bounds)} \\ g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \text{(omejitvene funkcije/inequality constraints)} \\ h_l(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0 \quad l = 1, 2, \dots, m' \\ \text{(odzivne enačbe sistema/equality constraints, system-response equations)} \end{aligned} \quad (8),$$

kjer $\mathbf{z}$ pomeni vektor odzivnih oz. sistemskih spremenljivk (hitrosti, pospeški, reakcije itn.), $\mathbf{x}$ pa vektor projektnih spremenljivk (parametri, katerih optimalne vrednosti iščemo, da zadostimo zahtevanim kriterijem). Namenska funkcija je tista, ki jo izberemo kot merilo za uspešnost optimiranja in katere minimum iščemo. Če je katerakoli od definiranih funkcij (namenska, omejitvene itn.) nelinearna, imamo opravka z nelinearnim optimiranjem. Optimizacijski problem rešujemo iterativno, za njegov zagon pa potrebujemo začetno točko $\mathbf{x}^0$ (ocena ali sedanja varianta projekta, ki ga želimo izboljšati).

Optimizacijski problem v obliki (8) ni neposredno uporaben, kadar imamo opravka z dinamičnimi sistemi, kakor je npr. večzgibni pogon, ki ga obravnavamo. Pri takšnih sistemih se pojavlja nova neodvisna spremenljivka – čas, zaradi česar postane

data (the drive geometry), calculates the required kinematic quantities (slide position, velocity and acceleration, stroke, position of the lower toggle point, maximum absolute acceleration and its position) in the required resolution step. The calculated values are:

- lower toggle point at $\varphi_4 = 208^\circ$
- stroke = 903.48 mm
- desired working part of the cycle approximately 75 to 150 mm before the lower toggle point: $\varphi_4 = 155^\circ$ to 176°
- maximum absolute slide acceleration in the desired range = 198.8 mm/s^2 ($\varphi_4 = 176^\circ$)

The kinematic analysis of the drive is finished, and all the parameters required for the optimization procedure are known.

2 OPTIMIZATION OF THE LINK-DRIVE

A) General optimization model

The basic objective of every optimization procedure based on methods of mathematic programming is to find an answer to the question "What is the best?" concerning problems where the quality of the solution can be expressed and evaluated as a numerical value. In other words: to find such a combination of parameters (design variables) that will minimize the chosen quantity (cost function). But first, the optimization problem has to be transformed into a mathematical formulation.

The general optimization model can be expressed in the following form:

find such a vector of design variables $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
which minimizes the cost function $f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n$,
subjected to following constraints:

where $\mathbf{z}$ is the state variable vector of the system-response variables (velocity, acceleration, reaction forces, etc.) and $\mathbf{x}$ is the vector of the design variables (parameters for which optimum values are to be found to satisfy given criteria and constraints). The cost function is the one which is chosen accordingly as a measure of the efficiency of the optimization procedure. If any of the defined functions (cost, constraint, etc.) are nonlinear, the nonlinear optimization algorithm has to be used. The optimization problem is solved iteratively, for its start the starting point $\mathbf{x}^0$ is required (current project status or estimation).

However, the optimization model in the form of (8) cannot be used directly in the cases of dynamical systems, for example, in a link-drive. With these systems a new independent variable arises, time t , which makes the vector of the system variables, $\mathbf{z}$,

vektor odzivnih spremenljivk $\mathbf{z}$ odvisen od časa t . Obstaja več metod, kako časovno odvisen problem predelati v splošno obliko, ki bo primerna za reševanje. Ena od možnosti ([1] in [2]) je npr., da tak problem prevedemo v zaporedje časovno neodvisnih problemov. V našem primeru smo izbrali metodo z uvedbo nove spremenljivke [1]. Ker nas pri analizi dinamičnih sistemov v nekem časovnem razponu običajno zanima največja vrednost odziva sistema, ki jo želimo zmanjšati oz. optimirati (največji pospeški, hitrosti itn.), lahko namensko funkcijo za tak problem zapišemo kot:

$$\psi_0 = \max_{0 \leq t \leq \tau} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) \quad (9).$$

Da bi takšno namensko funkcijo lahko uporabili v splošnem optimizacijskem modelu (8), se moramo znebiti funkcije $\max$ iz namenske funkcije ter časovne odvisnosti iz omejitev. To dosežemo z uvedbo nove umetne spremenljivke x_{k+1} , ki pomeni zgornjo mejo f_0 , za katero velja:

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) - x_{k+1} \leq 0 \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (10).$$

S tem postane vektor konstrukcijskih spremenljivk oblike:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1}]^T \quad (11),$$

ponovno pa tudi določimo namensko funkcijo:

$$\overline{\psi}_0 = x_{k+1} \quad (12).$$

Omejitvene funkcije, odzivne enačbe sistema ter omejitev namenske funkcije (10) zamenjamo z ustreznimi integralnimi omejitvami. Za poljubno zvezno funkcijo $f(t)$ lahko neenakost v obliki $f(t) \leq 0$ za $0 \leq t \leq \tau$ zamenjamo z ustrezno integralsko omejitvijo [1]:

$$\int_0^\tau \langle f(t) \rangle dt = 0, \quad \langle f(t) \rangle = \begin{cases} f(t) & ; f(t) \geq 0 \\ 0 & ; f(t) < 0 \end{cases} \quad (13).$$

Spremenjeni problem dobi s tem naslednjo obliko: poišči tak vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ki bo minimiziral $x_{k+1} \in \mathbb{R}$, ob upoštevanju pogojev:

$$\begin{aligned} x_i^{sp} &\leq x_i \leq x_i^{zg} & i &= 1, 2, \dots, k, k+1 \\ \psi &= \int_0^\tau \langle f_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) - x_{k+1} \rangle dt = 0 \\ \psi_j &= \int_0^\tau \langle g_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) \rangle dt = 0 & j &= 1, 2, \dots, m \\ h_l(\mathbf{x}, \mathbf{z}(t), t) &= 0 & l &= 1, 2, \dots, m' \end{aligned} \quad (14).$$

Tako smo dobili obliko, ki jo predpisuje splošni optimizacijski model (8) in jo lahko uporabimo v postopku optimiranja.

time dependent. There are various methods for transforming time-dependent problems into a suitable form for the general optimization model. Some methods ([1] and [2]) translate the time-dependent problem into a sequence of time-independent problems. In our case the method of introducing a new artificial variable [1] was chosen. In the analyses of dynamical systems the maximum values of a measure of the system response in a certain time interval are usually the required quantities (maximum velocity, accelerations, etc.) and these also tend to be the quantities to be optimized. Therefore, the cost function for such a dynamic system can be expressed as:

To use the above form of the cost function in the general optimization model (8), the maximum value function from the cost function and the time dependency of the constraint functions have to be removed. This can be achieved with the introduction of a new, artificial variable x_{k+1} , which represents the upper limit f_0 , subjected to:

Hence the new form of the vector of project variables is now:

and the new definition of the cost function is now:

The constraint functions, the system-response equations and the constraint of the cost function (10) are replaced with equivalent integral constraints, as follows. For an arbitrary continuous function $f(t)$ the inequality in the form of $f(t) \leq 0, 0 \leq t \leq \tau$ can be replaced with the equivalent integral constraint [1]:

The transformed problem is now stated in the following form: find such a vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, which minimizes $x_{k+1} \in \mathbb{R}$, subjected to following constraints:

The optimization problem is now formulated according to the general optimization model (8), and can be used with the standard optimization procedure.

B) Optimizacijski model večz gibnega pogona

Najprej je treba izbrati namensko funkcijo. Osnovni cilj našega optimiranja je določiti parametre mehanizma tako, da bo hitrost paha v predpisanem območju čim bolj nespremenljiva. Zato bi morali biti pospeški na tem območju enaki nič ali pa se temu čim bolj približati. Kot namensko funkcijo zato določimo največji absolutni pospešek na predpisanem območju, naš cilj pa je ta pospešek zmanjšati v največji mogoči meri. Namenska funkcija za obravnavani problem se torej glasi:

$$f = \max |\ddot{s}(\mathbf{x}, \varphi_4)| \quad \varphi_{4\min} \leq \varphi_4 \leq \varphi_{4\max} \quad \varphi_4 = \varphi_4(t) \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \quad (15).$$

Kot omejitve smo postavili omejitve dolžin ročic r_2 do r_6 , lego vrtilišča ročice $\bar{R}_2$ (izmere dx , dy) ter omejitev giba pehala. Pri tem je pomembno poudariti, da je zadnja omejitev giba nelinearna, saj izvira iz nelinearne zveze $\bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$.

Vektor projektnih spremenljivk dobi s tem obliko:

$$\mathbf{x} = [r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, dx, dy]^T \quad (16).$$

Ker pa problem v takšni obliki ni neposredno uporaben za optimizacijski postopek (namenska funkcija posredno odvisna od časa), uvedemo novo dejansko spremenljivko x_8 in spremenimo namensko funkcijo v:

$$\bar{\psi} = x_8 \quad (17).$$

Spremenjeni problem se tako glasi: poišči tak vektor $\mathbf{x} = [r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, dx, dy, x_8]^T$, ki minimizira $x_8 \in \mathbb{R}$, ob upoštevanju pogojev:

$$\begin{aligned} r_{i,\min} &\leq r_i \leq r_{i,\max} & i &= 2, 3, 4, 5, 6 \\ dx_{\min} &\leq dx \leq dx_{\max} & dy_{\min} &\leq dy \leq dy_{\max} & gib_{\min} &\leq gib \leq gib_{\max} \\ \int_{t,\min}^{t,\max} \langle |\ddot{s}(\varphi_4(t))| - x_8 \rangle dt &= 0 \end{aligned} \quad (18).$$

Zaradi oblike namenske funkcije ter obeh nelinearnih omejitev (omejitev giba ter namenske funkcije), smo se odločili za uporabo optimizacijskega postopka, ki temelji na metodi sekvenčnega kvadratnega programiranja (SQP). Ta metoda spada med prilagojene Newton-ove metode, je torej gradientna. Uporabili smo algoritem iz knjižnice numeričnih rutin in programov NAG. Velika prednost uporabljenega algoritma je, da uporabniku ni treba podati vseh odvodov funkcije, torej Jacobijevega gradienta in Hessejeve matrike, če so ti preveč zapleteni. Program si jih sam aproksimira z metodo končnih razlik. Uporabnik mora zagotoviti vse potrebne podprograme, v katerih so določene namenska in omejitvene funkcije, druge omejitve ter kolikor je mogoče prvih odvodov funkcije. Vse potrebne podprograme smo napisali v programskem

B) Link-drive optimization model

First, the cost function has to be chosen. The primary objective of this link-drive optimization is to determine the link-drive parameters in such a way that the slide velocity in the defined range of movement is as constant as possible. This means that the slide acceleration in this range has to be zero or close to zero. Therefore, a suitable cost function for this problem is defined as the maximum absolute slide acceleration, and the purpose is to lower this acceleration as much as possible. The cost function is:

The constraints are as follows: the bounds of the link-drive members' lengths (r_2 to r_6), the position of the member $\bar{R}_2$ cylindrical joint (dimensions dx , dy), and the nonlinear constraint for the stroke, which is derived from the nonlinear relation $\bar{s} = \bar{s}(\varphi_4)$.

The vector of the project variables takes the following form:

Because of the dynamic nature of the problem this model cannot be used directly in the optimization procedure (time-dependent cost function), and has to be transformed. Therefore, a new artificial, real variable x_8 is introduced, which changes the cost function into:

The transformed problem is then: find such a vector $\mathbf{x} = [r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, dx, dy, x_8]^T$, which minimizes $x_8 \in \mathbb{R}$, subjected to:

Because of the form of the cost function and both nonlinear constraints (constraints of stroke and cost function) we decided to use an optimization procedure based on the method of sequential quadratic programming (SQP). This method is a modified Newton method and belongs to the group of gradient methods. The algorithm was chosen from the NAG library of numerical routines and programs NAG (The Numerical Algorithms Group). A major advantage of this algorithm is that the user does not need to supply all the derivatives of the cost function (the Jacobian gradient vector and the Hessian matrix). Instead, the program approximates them with numerical differentiation. The only thing the user needs to supply is the subroutines that define and calculate the cost and constraint functions (equality and inequality), the variable constraints, and as many de-

jeziku FORTRAN, v enakem jeziku kakor je napisana tudi knjižnica NAG.

Kot začetno točko optimiranja smo vzeli sedanje stanje pogona. Za konstrukcijske spremenljivke smo določili njihove začetne omejitve z mejami $\pm 20\%$ glede na njihovo trenutno vrednost; gib optimiranega pogona naj bo čim bližje sedanjemu, zato smo ga omejili z mejama $\pm 3\%$ začetne vrednosti. Najpomembnejša je zagotovo prva nelinearna omejitev, ki v praksi predstavlja razliko med izbrano namensko funkcijo (največjim absolutnim pospeškom) ter uvedeno umetno spremenljivko. Da bi funkcijo minimirali, mora biti ta razlika čim manjša, v idealnem primeru enaka nič. Zato smo jo omejili na vrednost nič, kateri se bo algoritem poskušal čim bolj približati. S tem so bili določeni vsi začetni pogoji in izvedeno je bilo optimiranje.

3 REZULTATI IN RAZPRAVA

Začetni vektor projektnih spremenljivk za sedanji pogon ima naslednje vrednosti:

$$\mathbf{x} = [774.6466, 1067, 320, 987, 1453, 1233, 51, 198.8]^T$$

Prvih 7 vrednosti pomeni dolžine ročic v mm, zadnja pa vrednost umetne spremenljivke x_8 v mm/s^2 . Torej je $x_{8,zac} = 198,8 \text{ mm/s}^2$ naša začetna vrednost, ki jo moramo čim bolj zmanjšati in katere končna vrednost bo merilo za uspešnost optimiranja. Optimiranje smo izvedli v več poskusih, z različnimi nastavitvami algoritma (toleranca konvergence) in uporabo prejšnjih rešitev v novem poskusu. Potek optimiranja prikazuje slika 6.

Optimiranje v okviru zastavljenih ciljev je bilo uspešno, saj nam je v 5. poskusu uspelo znižati vrednost namenske funkcije na približno 61% prvotne vrednosti. Vsaka od teh 6 rešitev da eno kombinacijo parametrov, ki določajo obravnavani večzgbni pogon.

Optimalno rešitev (s stališča kinematike) pomeni rešitev 5:

rivative functions as possible. All the required sub-routines were written in FORTRAN, the same as the NAG library.

The current design of the drive was the starting point for the optimization. The design parameters can vary within $\pm 20\%$ of the original values and for the stroke a $\pm 3\%$ limit was chosen. The most important constraint is the nonlinear constraint of the cost function (the difference between the maximum absolute slide acceleration and the artificial variable). To minimize the cost function in the best possible manner, this difference has to be as close to zero as possible (zero in the ideal case); therefore, the constraint value was set to zero.

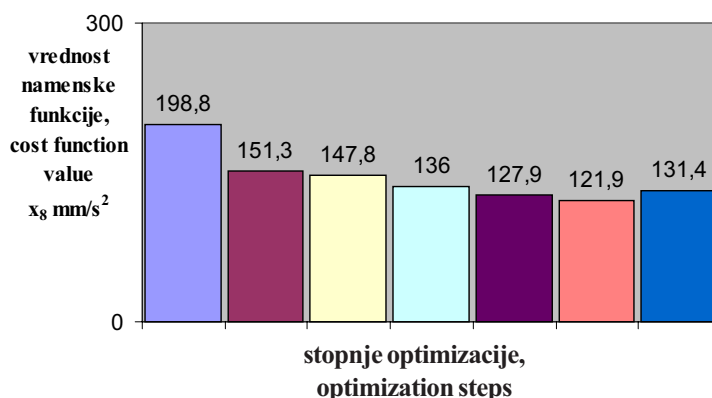
3 RESULTS AND REMARKS

The initial vector of the design variables had the following numerical values:

The first seven components are the link-drive member lengths in mm, the last one is the value of the artificial variable x_8 in mm/s^2 . Hence, $x_{8,zac} = 198.8$ was the initial value that the optimization algorithm was trying to minimize. The optimization process was run in several attempts, with different options (convergence tolerance, the use of previous solutions in the subsequent steps). The optimization history is shown in Figure 6.

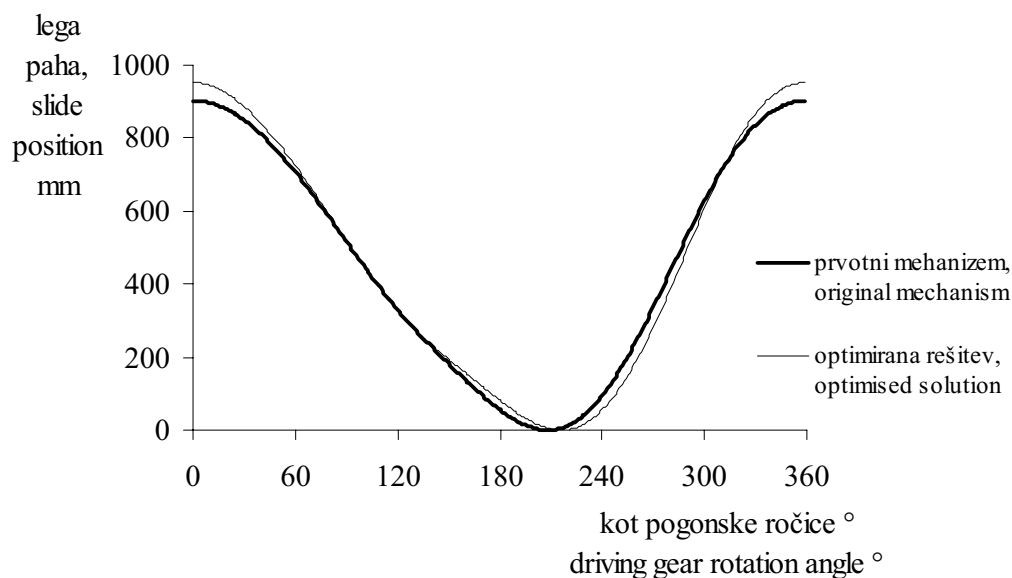
It is clear that the cost function was minimized to be approximately 61% of its original value at the fifth attempt. Thus the optimization was quite successful. Each of these six solutions represents one set of design variables that define the geometry of the link-drive.

The fifth solution is the optimum one (from the kinematic point of view):

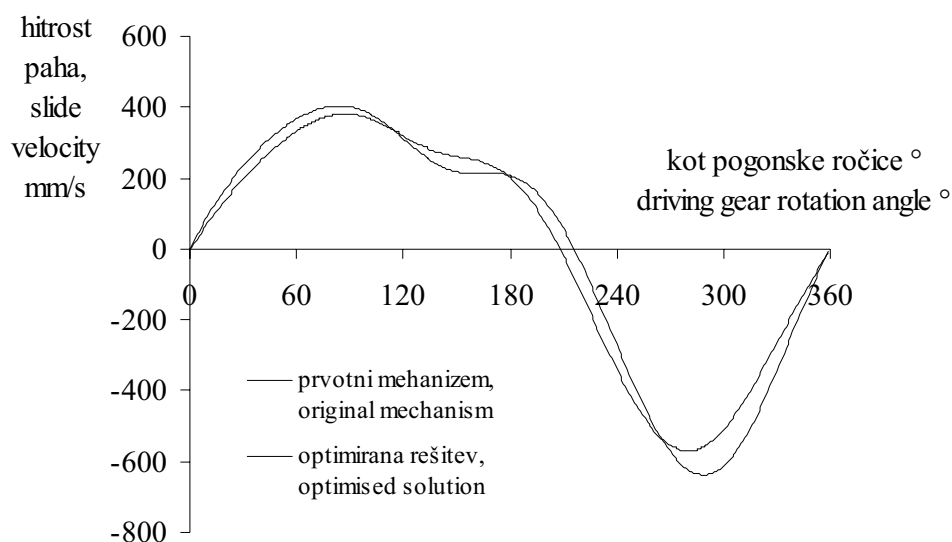


Sl. 6. Potek optimizacije - optimalna rešitev je v 5. poskusu
Fig. 6. Optimization process – optimal solution obtained in 5th step

$r_2 = 730 \text{ mm}$ (-44,6466 mm)	$r_3 = 985 \text{ mm}$ (-82 mm)	$r_4 = 280 \text{ mm}$ (-40 mm)
$r_5 = 1250 \text{ mm}$ (+263 mm)	$r_6 = 1198 \text{ mm}$ (+255 mm)	
$dx = 1150 \text{ mm}$ (-83 mm)	$dy = 43,5 \text{ mm}$ (-7,5 mm)	



Sl. 7. Gib paha v odvisnosti od kota pogonske ročice (primerjava rešitev)
Fig. 7. Slide position curve (comparison between original and optimised solution)



Sl. 8. Hitrost paha v odvisnosti od kota pogonske ročice (primerjava rešitev)
Fig. 8. Slide velocity curve (comparison between original and optimised solution)

V oklepajih je navedena sprememba proti začetnim vrednostim.

Dejanski pomen dobljene rešitve se pokaže, če jo prikažemo v obliki grafov poti in hitrosti pehala za en sklenjen krog ter primerjamo z začetnim stanjem pogona (slika 7).

In the brackets the difference from the original values is shown.

The true meaning of this minimization appears if we look at the slide position and the slide-velocity curves (Figure 7) and compare them with the original drive.

Iz grafov vidimo, da je optimirana rešitev zelo blizu začetnemu stanju, iz česar lahko sklepamo, da je sedanji pogon že dokaj blizu lokalnemu optimumu. SML je pri vseh rešitvah pomaknjena proti večjim zasukom pogonske gredi 215 do 220°. Vseh 6 rešitev ima v dejavnem delu kroga veliko bolj nespremenljivo in nižjo hitrost – v povprečju za okoli 15%. Torej je bila izbira namenske funkcije in načina optimiranja ustrezna. Ne smemo pa pozabiti, da smo se v delu omejili samo na kinematični vidik večz gibnega pogona, nič pa ni bilo govora o preoblikovalnih silah, ki se prenašajo čezenj, o njihovih karakteristikah, kje morajo doseči svoj vrh, na kakšnem območju morajo delovati in podobno. Zato ni nujno, da bo optimalna rešitev s kinematičnega vidika hkrati tudi optimalna v končni fazi, kjer bo treba upoštevati tudi dinamiko postopka. Dobljene optimirane rešitve so le podlaga za nadaljnje analize, pri katerih bo upoštevana celotna dinamika postopka.

It is clear that all the obtained solutions are very close to the original state. Thus we can conclude that the original geometry of the drive was already very well chosen. The slide velocity in the working part of the cycle is, in all six solutions, approximately 15% lower and more constant than with the original drive. The lower toggle point has shifted towards the larger rotation angles of the driving gear (from 215° to 220°; original drive 208°), which causes the extended range of the constant slide velocity and subsequently more time is available for the deformation and flow of the material. Hence, the choice of the cost function and the optimization algorithm was appropriate. However, this work considered only the kinematic aspects of the link-drive, no dynamic characteristics were considered (the operational forces in the process of deep drawing, which the link-drive has to transmit, the maximum forces required and their dependence on the slide position, the joint forces, etc.). It is possible that the kinematic optimum solution may not satisfy the dynamic constraints. Hence, the obtained solutions are a good basis for further analyses, optimization and development of the link-drive, where all the above-mentioned features are to be explored.

4 LITERATURA

4 REFERENCES

- [1] Haug, E.J., J.S.Aurora (1979) Applied optimal design: Mechanical and structural systems, 1.izd., *John Wiley & Sons*, New York.
- [2] Kegl, M. (1990) Optimiranje mehanskih sistemov z metodo kriterija optimalnosti, magistrsko delo, *Tehniška fakulteta*, Maribor.
- [3] Vohar, B. (2001) Optimiranje in sinteza pogona stiskalnice za globoki vlek, diplomsko delo, *Fakulteta za strojništvo*, Maribor.
- [4] Baze podatkov na internetu: www.aida-america.com, www.metalforming-online.com

Naslov avtorjev: Bojan Vohar

dr. Karl Gotlih
dr. Jože Flašker
Univerza v Mariboru
Fakulteta za strojništvo
Smetanova 17
2000 Maribor
bojan.vohar@uni-mb.si
gotlih@uni-mb.si
joze.flasker@uni-mb.si

Author's Address: Bojan Vohar

Dr. Karl Gotlih
Dr. Jože Flašker
University of Maribor
Faculty of Mechanical Eng.
Smetanova 17
2000 Maribor, Slovenia
bojan.vohar@uni-mb.si
gotlih@uni-mb.si
joze.flasker@uni-mb.si

Prejeto: 27.12.2002
Received:

Sprejeto: 31.1.2003
Accepted:

Določanje kritične obremenitve krožnih kolobarjev v elasto-plastičnem območju

Determination Of the Buckling Loads of Circular Annular Plates in the Elastic-Plastic Region

Boštjan Bremec - Franc Kosel

Prispevek opisuje eksperimentalno določanje kritične obremenitve ter izbočitvenega koeficienta krožnega kolobarja konstantne debeline iz materiala z utrjevalno karakteristiko. Kolobar je na zunanjem robu členkasto podprt ter obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo, notranji rob pa je prost in neobremenjen. Nestabilno stanje se pojavi, ko je napetostno stanje v kolobarju že v elasto-plastičnem področju. Opisan je postopek merjenja, preskuševališče, način izbire materiala ter določitve geometrijske oblike preskušancev, ki zagotavlja, da pride pri preskusu do izbočitve v elasto-plastičnem območju. Rezultate preskusov primerjamo z rezultati matematičnega modela, v katerem upoštevamo idealizirano elastično linearno utrjevalno karakteristiko materiala ali izmerjeno dejansko karakteristiko materiala. Rezultati meritev in izračunov se razlikujejo za 5,5%.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: kolobarji krožni, območja elastoplastična, obremenitve kritične, metode eksperimentalne)

This paper presents an experimental determination of the buckling load and the buckling coefficient of a circular, annular plate with constant thickness that is made of an elastic-plastic hardening material. The annulus is simply supported and uniformly loaded on the outer edge, the inner edge is free and not loaded. The unstable state appears when the stress state is already in the elastic-plastic domain. The experimental results are compared to the results obtained from a mathematical model, which can take into account an idealized elastic, linear hardening, rheological model or a measured stress-strain curve. The paper describes the measuring procedure, the equipment and the choice of the material and the geometry of the specimens, which ensure that elastic-plastic buckling occurs during the experiment. The difference between the experimental and numerical results is 5.5 %.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: annular circular plates, elastic-plastic region, buckling loads, experimental methods)

0 UVOD

Eksperimentalno določanje kritične obremenitve temelji na merjenju pomikov plošče v prečni smeri w v odvisnosti od obremenitve. Meritve izvajamo na preskuševališču za preučevanje stabilnosti okroglih plošč, ki omogoča obremenjevanje krožnih plošč po zunanjem in/ali notranjem robu in je bilo zasnovano za raziskave stabilnosti plošč v elastičnem področju ([1] do [4]). Na podlagi izmerjene zveze med obremenitvijo in prečnim pomikom w lahko z uporabo ustreznih metod (Southwellova metoda [5] in metoda prevojne točke [4]) določimo obremenitev, pri kateri krožna plošča preide iz stabilnega v nestabilno stanje. Pri izbočitvi plošče v elastičnem področju, ki se pojavi pri dovolj vitkih - tankih ploščah, pride do elastičnih deformacij in plošča se po razbremenitvi vrne v začetno stanje, trajnih deformacij ni. Pri izbočitvi v elasto-plastičnem področju, pride do trajnih deformacij, po razbremenitvi se vzpostavi novo deformirano

0 INTRODUCTION

The experimental investigation into buckling loads is based on a measurement of the lateral deflection, w , of the plate with regard to the applied load. The experiments were done using a special testing unit for circular plates, which allows the loading of circular plates on the outer and/or inner edge and was first built for studies of elastic buckling ([1] to [4]). When the relationship between the load and the lateral deflection, w , is measured, appropriate methods (Southwell's method [5] and the deflection-point method [4]) are used to determine the buckling load at which the circular plate passes from a stable to the unstable state. During elastic buckling, which is usual for slender, thin plates, only elastic deformations take place, and the plate returns to its original state after the loads are removed. With elasto-plastic buckling, plastic deformations appear, and after unloading a new, deformed, equilibrium state is

ravnotežno stanje. Namen preskusov je primerjava z rezultati matematičnega modela ([6] in [7]), pri katerem kritične obremenitve računamo z uporabo ravnotežne metode reševanja stabilnostnih problemov ob upoštevanju dveh teorij plastičnosti.

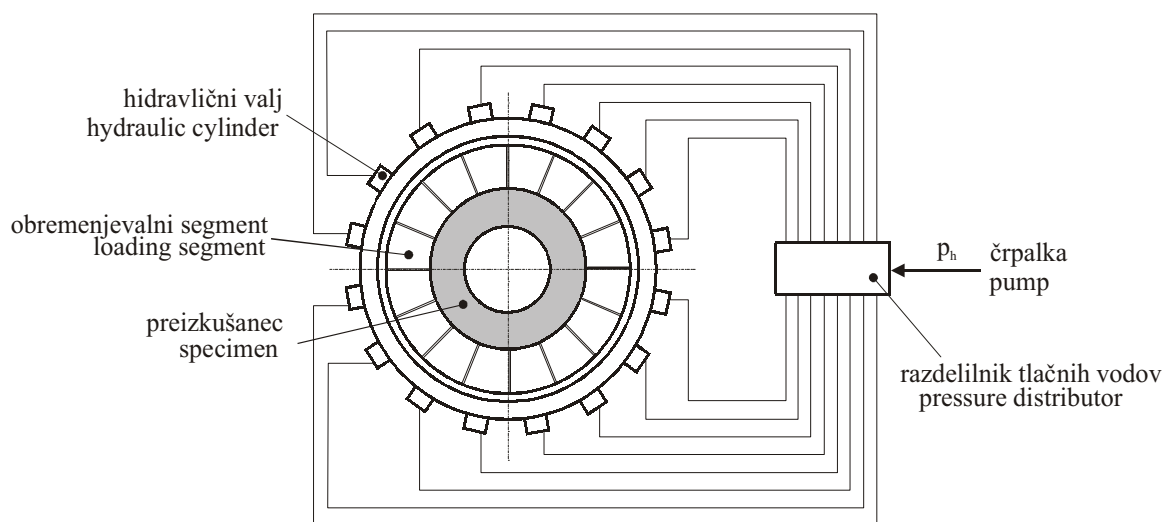
1 PRESKUŠEVALIŠČE

Sestavljeno je iz *vpenjalnega dela* (sl. 1) s 16 krožnimi obremenjevalnimi segmenti s hidravličnimi valji, hidravlično črpalko, krmilnikom in krmilnim vezjem za krmiljenje tlaka ter *elektronskega merilnega sklopa* (sl. 2), ki obsega zaznavalo tlaka HBM P19, LVDT zaznavalo pomika HBM WA 50 z ojačevalnikom MES HPSC 3102 ter osebni računalnik s kartico A/D INTELLIGENT INSTRUMENTATION PCI-20428W-1 za zbiranje podatkov ter programsko opremo *Visual Designer*.

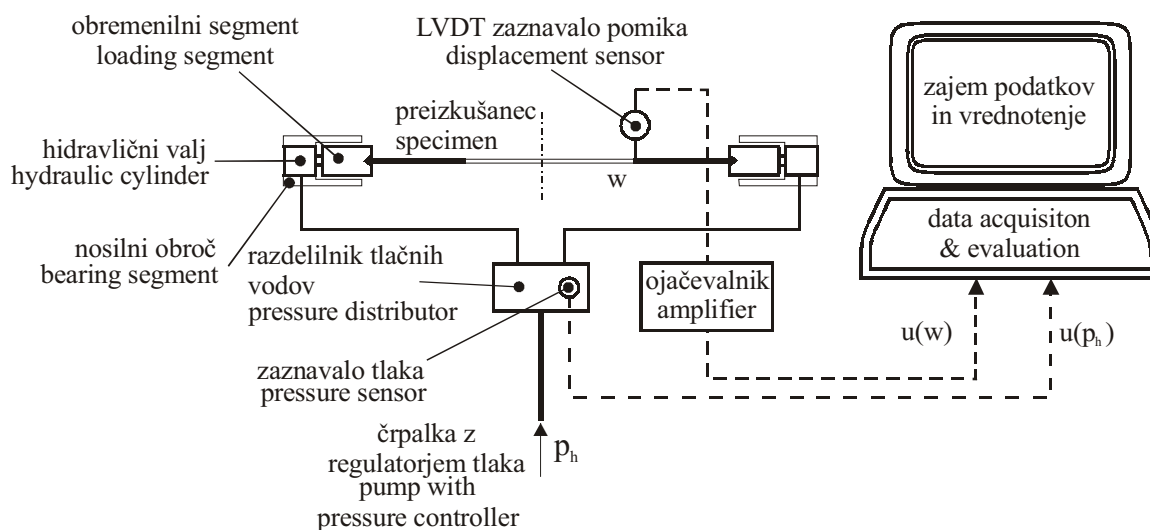
formed. The purpose of the experiments was to compare the experimental results with theoretical predictions ([6] and [7]). The theoretical results were obtained using the equilibrium approach and two different theories of plasticity.

1 TESTING UNIT

The testing unit comprises the *fastening assembly* (Fig. 1), with 16 circular loading segments and hydraulic cylinders, a hydraulic pump with pressure control unit; and the *electronic measuring assembly*, with an HBM P19 pressure gauge, an LVDT HBM WA 50 displacement sensor with an MES HPSC 3102 carrier amplifier and a desktop computer equipped with an INTELLIGENT INSTRUMENTATION PCI-20428W-1 data-acquisition card and *Visual Designer* software.



Sl. 1. Shema preskuševališča
Fig. 1. Testing unit



Sl. 2. Shema merilne verige
Fig. 2. Measuring set-up

Obremenitev roba plošče izračunamo posredno iz izmerjenega tlaka v hidravličnem sistemu $p_h(w)$. Pri preskusu merimo odvisnost $p_h(w)$. Zvezo med obremenitvijo in tlakom v hidravličnem sistemu določimo z umerjanjem tako, da z ustreznim merilnikom sile merimo silo obremenjevalnih segmentov (hidravličnih valjev) v odvisnosti od tlaka. Meritve večkrat ponovimo, rezultate pa poenostavimo z regresijsko premico. Tlak v hidravličnem sistemu p_h merimo na razdelilniku tlačnih vodov, pomike v prečni smeri w pa z LVDT zaznavalom. To je nameščeno na posebno konstrukcijo (šestilo), ki je pritrjena na zunanji obroč preskuševališča in omogoča merjenje pomikov na izbranem polmeru tudi v obodni smeri. Izhodne analogne signale merimo in shranjujemo na osebnem računalniku prek kartice A/D za zbiranje podatkov.

Preskušanci (krožne plošče) so lahko polne ali pa z izrezi poljubne oblike. Obremenitev je mogoča na zunanjem robu, notranji rob pa je običajno neobremenjen in prost, razen pri ploščah z notranjimi krožnimi odprtini, ko s posebno pripravo obremenimo tudi notranji rob. Rob krožne plošče mora biti posebej obdelan, tako da vpetje čimbolj ustreza členkasti podpori. Pomembnejši tehnični podatki preskuševališča so: polmer segmentov (zunanji polmer preskušancev) $b=150$ mm ali $b=300$ mm; število hidravličnih valjev in obremenjevalnih segmentov $N_s=16$; dolžina loka segmenta $L_s=58,9$ mm pri $b=150$ mm; hidravlični pogonski agregat HPA-2B/320-16-2,2, največji tlak 32 MPa, pretok 2 l/min; nazivni prerez hidravličnega valja $A_{nom}=126$ mm².

2 IZBIRA PRESKUŠANCEV

Preučevanje izbočitve v elasto-plastičnem področju zahteva razmeroma debele preskušance. Če definiramo vitkost kot razmerje med zunanjim premerom kolobarja in debelino $\eta=2b/h$, to pomeni preskušance ustrezno majhne vitkosti η . Konstrukcija preskuševališča s hidravličnimi elementi ter največji hidravlični tlak, ki znaša $p_{h,max}=32$ MPa, določajo največjo razpoložljivo zunanjo obremenitev $P_{z,max}=63,8$ N/mm.

Mejna vitkost η_{mej} , pod katero se plošča izboči v elasto-plastičnem področju, je odvisna od načina obremenitve, podprtja, razmerja polmerov $\delta=a/b$ in materialnih lastnosti (σ_{pl} , E , ν). Določimo jo lahko, če poznamo elastično napetostno stanje ter izbočitveni koeficient κ_{el} za elastično izbočitev. V našem primeru podrobneje analiziramo osnosimetrično elastično napetostno stanje σ_r , σ_ϕ v kolobarju, ki je na zunanjem robu obremenjen z enakomerno tlačno obremenitvijo $p_z=\beta p=-p$, notranji rob pa je neobremenjen $p_n=\alpha p=0$. Osnosimetrično elastično napetostno stanje popisujeta enačbi:

$$\sigma_r = -p \frac{1-(a/r)^2}{1-\delta^2}, \quad \sigma_\phi = -p \frac{1+(a/r)^2}{1-\delta^2}$$

During the experiment, the relation $p_h(w)$ was measured. The load applied to the edge of the plate was calculated from the measured pressure in the hydraulic system p_h . The relationship between the load and the pressure was obtained with a calibration, which consists of measurements of the loading segments' (hydraulic cylinders) load with respect to the pressure. A series of measurements must be made, and the relationship is obtained with a linear regression. The pressure in the hydraulic system, p_h , was measured on the pressure lines' distributor, whereas the lateral displacement, w , was measured with an LVTD displacement sensor. This is installed on a special device (similar to a pair of compasses) mounted on the outer ring of the testing unit, allowing displacement measurements in the circumferential direction on a preselected radius. The analog output signals were measured and stored on a desktop computer using the A/D acquisition card.

The specimens (circular plates) can be with or without cut-outs of an arbitrary shape. The loads can be applied to the outer edge, while the inner edge is usually free and not loaded, except for the plates with circular cut-outs, where a special device can be used to apply loads to the inner edge. The edge of the plate must be accurately machined to provide a support that meets the conditions of a simply supported edge. Other significant technical data include: loading segments radius (specimen outer radius) $b=150$ mm or $b=300$ mm; number of hydraulic cylinders and loading segments $N_s=16$; the loading segment's arc length $L_s=58.9$ mm at $b=150$ mm; the hydraulic pump HPA-2B/320-16-2.2; the maximum pressure, 32 MPa; oil flow, 2 l/min; hydraulic cylinder nominal cross section, $A_{nom}=126$ mm².

2 CHOICE OF SPECIMENS

The study of elasto-plastic buckling requires relatively thick specimens. Defining the slenderness of the plate as the ratio between the outer diameter and the thickness $\eta=2b/h$, slender specimens are needed. The design of the testing unit and the maximum pressure, $p_{h,max}=32$ MPa, define the maximum outer load $P_{z,max}=63.8$ N/mm.

The slenderness limit η_{mej} , where the plate buckles in the elasto-plastic region, depends on the load case, the type of supports, the inner and outer radius ratio $\delta=a/b$ and the material properties (σ_{pl} , E , ν). This can be calculated from the known elastic stress distribution and the elastic buckling coefficient κ_{el} . In our case the axi-symmetric elastic stress state σ_r , σ_ϕ in the annulus, loaded with the constant compressive load $p_z=\beta p=-p$ on the outer edge while the inner edge is not loaded $p_n=\alpha p=0$, is analysed. The axi-symmetric stress state is given by the following equations:

Največja Misesova primerjalna napetost σ_M^{max} se pojavi na notranjem robu ($r=a$), kjer se, ko primerjalna napetost doseže mejo plastičnosti σ_{pl} , prične plastifikacija. Obremenitev pričetka plastifikacije izračunamo iz pogoja $\sigma_M^{max}=\sigma_{pl}$:

$$\sigma_M^{max} = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2} = \frac{2p}{1-\delta^2}$$

$$p_{pl} = \frac{\sigma_{pl}(1-\delta^2)}{2}$$

Izbočitev v elasto-plastičnem področju dobimo, ko je kritična obremenitev p_{cr}^{el} večja od obremenitve pričetka plastifikacije p_{pl} oziroma $p_{cr}^{el} \geq p_{pl}$. Ker je izbočitveni koeficient za elastično izbočitev κ_{el} znan, lahko izračunamo mejno vitkost in s tem najmanjšo debelino preskušanca:

$$\eta_{mej} = \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{2\kappa_{el}^2}{3(1-\delta^2)}} \quad , \quad h_{min} \geq 2b\eta_{mej}$$

Največjo debelino preskušanca izračunamo iz pogoja, da kritična obremenitev ob izbočitvi ne preseže največje obremenitve preskuševališča $P_{z,max}$. Ker je kritična obremenitev v elasto-plastičnem območju manjša od tiste za elastično območje, najbolj neugoden primer izberemo tako, da predpostavimo elastično izbočitev kolobarja. Ocena za največjo debelino preskušanca oziroma najmanjšo vitkost, ki izhaja iz pogoja $p_{cr}^{el} h_{max} \leq P_{z,max}$, je:

$$h_{max} \leq \sqrt[3]{\frac{12P_{z,max}(1-\nu^2)b^2}{\kappa_{el}^2 E}}$$

$$\eta_{min} \leq \sqrt[3]{\frac{2 \kappa_{el}^2 E b}{3P_{z,max}(1-\nu^2)}}$$

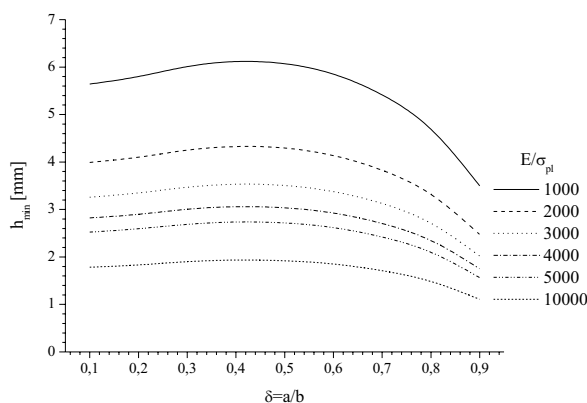
Debelino preskušancev izberemo med $h_{min} \leq h \leq h_{max}$. Diagram na sliki 3 prikazuje najmanjše debeline za kolobarja s prostim notranjim in členkasto podprtim zunanjim robom ter obremenitvijo, določeno z $\alpha=0$, $\beta=-1$. Debeline so podane za različna razmerja polmerov δ in razmerja E/σ_{pl} . Ker je največja obremenitev $P_{z,max}$, ki jo na preskuševališču dosežemo, razmeroma majhna, moramo izbrati material z razmeroma majhnim modulom elastičnosti E in ustrezno

The greatest Mises equivalent stress σ_M^{max} appears on the inner edge ($r=a$), where, when the equivalent stress reaches the yield stress σ_{pl} , plastification starts. The load at the beginning of plastification is calculated from the condition $\sigma_M^{max}=\sigma_{pl}$:

Elasto-plastic buckling occurs when the buckling load p_{cr}^{el} is greater than the load at the beginning of plastification p_{pl} or $p_{cr}^{el} \geq p_{pl}$. Because the elastic buckling coefficient is known, the slenderness limit and the minimum thickness of the specimen can be calculated:

The maximum thickness of the specimen is calculated from the condition that the buckling load should not exceed the maximum load of the testing unit $P_{z,max}$. Because the buckling load in the elasto-plastic region is smaller than the elastic buckling load, the worst case is considered if elastic buckling is taken into account. The estimation for the maximum thickness of the specimen or the minimum slenderness, based on the condition $p_{cr}^{el} h_{max} \leq P_{z,max}$, is:

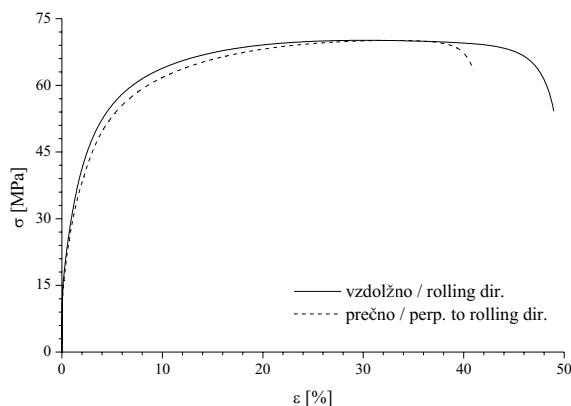
The thickness of the specimens is chosen to be between $h_{min} \leq h \leq h_{max}$. Fig. 3 shows the minimum thicknesses for annular plates with a free inner and a simply supported outer edge, and loading defined by $\alpha=0$, $\beta=-1$. Thicknesses are given for different ratio of radii δ and E/σ_{pl} . Because of the relatively small testing-unit maximum load a strain-hardening material with a



Sl. 3. Mejne debeline h_{min} pri različnih razmerjih δ in E/σ_{pl} , $\nu=0,3$
Fig. 3. Minimum thickness h_{min} at different ratios δ and E/σ_{pl} , $\nu=0,3$

mejo plastičnosti σ_{pl} ki mora poleg primernih mehanskih lastnosti imeti tudi elastično utrjevalno karakteristiko.

Po pregledu standardov smo izbrali Al pločevino debeline $h=4$ mm v osnovnem mehkem stanju (oznaka po standardu EN AW-1050A [Al99,5] oziroma po standardu DIN Al99,5 stanje O/H111), za katero je podana meja plastičnosti $R_{p0,2}$ najmanj 20 MPa. Dejanske mehanske lastnosti smo izmerili pozneje z enoosnimi nateznimi preskusi. Preskušance smo izdelali tako, da so bili usmerjeni v smeri valjanja ter prečno na smer valjanja pločevine. Na ta način smo preverili anizotropijo materiala.



Sl. 4. Izmerjeni diagram σ - ε materiala preskušancev

Fig. 4. Measured σ - ε diagram of the specimens material

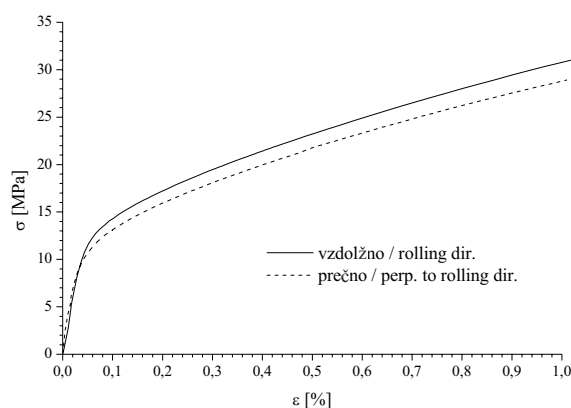
Diagrama na slikah 4 in 5 prikazujeta srednje vrednosti nateznih preskusov za prečno in vzdolžno usmerjenost preskušancev glede na smer valjanja. Razvidno je, da ima material izrazito utrjevalno karakteristiko. V smeri valjanja so napetosti tečenja nekoliko večje, modul elastičnosti in meja plastičnosti pa sta približno enaka. Diagram na sliki 5 prikazuje točko začetka plastifikacije, kjer vidimo, da je meja plastičnosti σ_{pl} precej manjša od $R_{p0,2}$ in $R_{p0,1}$. Izmerjene mehanske lastnosti so: elastični modul $E=30800$ MPa; meja plastičnosti $\sigma_{pl}=10$ MPa; meja plastičnosti $R_{p0,1}=15,3$ MPa; meja $R_{p0,2}=17,9$ MPa. Če poenostavimo diagram v elasto-plastičnem področju do skupne deformacije 5% z linearno utrjevalnim reološkim modelom, je faktor linearnega utrjevanja materiala približno $f=0,4$.

3 REZULTATI MERITEV

Izdelali smo šest preskušancev z zunanjim polmerom $b=150$ mm in razmerjem polmerov $\delta=0,4$. Pred preskusi smo izmerili dejanske velikosti ter preverili začetno neravnost preskušancev, za katero se je pri predhodnih raziskavah izkazalo, da ima precejšen vpliv na rezultate meritev ([1], [2] in [4]). Nadzor smo izvedli na dva načina, in sicer optično z ravno letvijo ter z merjenjem relativne neravnosti zunanjega ($r=b$) in notranjega ($r=a$) roba kolobarja (tabela 1) glede na izbrano začetno točko. Preskušane smo vpeli v preskuševališče tako, da smo

small elastic modulus E and yield stress σ_{pl} must be chosen.

After reviewing the standards, an Al, $h=4$ mm-thick sheet metal in an elementary soft state (standard designation EN AW-1050A [Al99,5] or DIN standard DIN Al99,5 state O/H111) with a declared yield stress $R_{p0,2min}=20$ MPa was chosen. The actual mechanical properties were subsequently determined by uniaxial tensile tests. The specimens were oriented in, and perpendicular to, the rolling direction to check the eventual material anisotropy.



Sl. 5. Izmerjeni diagram σ - ε , območje do 1% skupne deformacije

Fig. 5. Measured σ - ε diagram, region up to 1% total strain

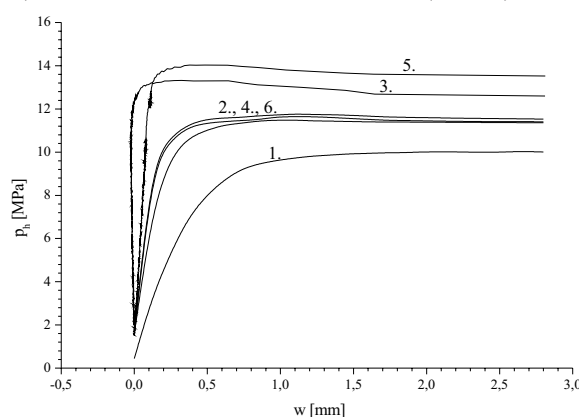
Fig. 4 and 5 show the average values of the tensile tests for the crosswise and alongside specimen orientations. It is clear that the material has a well-defined hardening characteristic. In the direction of rolling the stresses in the plastic region are slightly greater, while the elastic modulus and the yield stress are almost the same. Fig. 5 shows the actual yielding stress σ_{pl} which is significantly smaller than $R_{p0,2}$ and $R_{p0,1}$. The measured mechanical properties are: elastic modulus $E=30800$ MPa; yield stress $\sigma_{pl}=10$ MPa; $R_{p0,1}=15,3$ MPa; $R_{p0,2}=17,9$ MPa. If the elasto-plastic region of the diagram up to 5% of the total strain is approximated by a linearly hardening rheological model, the linear hardening coefficient is $f=0,4$.

3 EXPERIMENTAL RESULTS

Six specimens with outer radius $b=150$ mm and inner-to-outer radii ratio $\delta=0,4$ were made. Before the experiment the actual dimensions and the initial displacements, which in the previous studies showed a great influence on the experimental results ([1], [2] and [4]), were measured. The initial displacements were checked optically with a ruler and by measuring the relative unevenness of the outer ($r=b$) and inner ($r=a$) edges of the specimen (Table 1). The specimens were placed into the testing

izničili morebitne zračnosti na mestih podpor in tako zagotovili čimbolj enakomerno zunanjo obremenitev. Pri tem ima pomembno vlogo natančnost priprave roba preskušanca.

Diagrami na sliki 6 prikazujejo izmerjene funkcije $p_h(w)$. Vidimo, da se z večanjem obremenitve tlaka p_h večajo tudi pomiki v prečni smeri w . Zanimivo je, da v nasprotju s preskusi, pri katerih pride do elastične izbočitve, ne dobimo diagrama s prevojno točko, temveč kolobar pri kritični obremenitvi zelo hitro preide v novo stabilno stanje, za katero je po razbremenitvi značilen trajni pomik w_{izb} , ki znaša od 11 do 13,5 mm (preglednica 1).



Sl. 6. Izmerjeni diagrami $p_h(w)$
Fig. 6. Measured diagrams $p_h(w)$

V nasprotju s predhodnimi raziskavami, pri katerih so kritično obremenitev iz rezultatov meritev določali z metodo prevojne točke [4] ali s Southwellovo metodo ([5], [1] in [2]), smo lahko točko prehoda kolobarja iz stabilnega v nestabilno stanje natančno določili že iz diagramov. Pri tem smo za kritično obremenitev $p_{h,cr}$ upoštevali največjo izmerjeno obremenitev pri posameznem preskusu.

Diagrami meritev preskušancev 2, 4 in 6 se med seboj dobro ujemajo. Meritev preskušanca 1 prikazuje hitrejše povečevanje deformacije v prečni smeri ter manjšo vrednost tlaka ob izbočitvi, kar lahko pripišemo izmerjeni večji začetni neravnosti od drugih preskušancev. Pri meritvah preskušancev 3 in 5 je značilen majhen prečni pomik w vse do točke, v kateri je tlak skoraj enak kritičnemu tlaku, sledi pa trenuten prehod v novo deformirano stabilno stanje, pri čemer tlak celo nekoliko pade. Čeprav se začetna neravnost preskušancev 3 in 5 bistveno ne razlikuje od preskušancev 2, 4 in 6, predvidevamo, da sta preskušanca v teh primerih pokazala nadkritično obnašanje. To lahko potrdimo z dejstvom, da znaša teoretična obremenitev za elastično izbočitev 22,153 N/mm, obremenitvi, pri kateri sta preskušanca 3 in 5 izbočila, pa sta za 21,2% oziroma za 27,5% večji.

Če vzamemo za odločilne preskuse 2, 4 in 6, znaša povprečni hidravlični tlak ob izbočitvi $p_{h,cr} = 11,633$ MPa, kar ustreza zunanji enotski kritični obremenitvi

unit very carefully to prevent play and to ensure as much as possible a constant outer load. The accuracy of the outer-edge preparation has an important role at this stage.

Fig. 6 shows the measured functions $p_h(w)$. It is evident that by increasing the load-pressure p_h the lateral displacements, w , also increase. It is interesting that, for the difference with the experiments where elastic buckling occurs, the diagrams do not show the inflection point and the annulus as the buckling load passes very quickly into a new stable state, characterised by a permanent deflection w_{izb} of 11 to 13.5 mm (Table 1).

In contrast with previous research, where the buckling loads were determined from the measured data by the method of the inflection point [4] or Southwell's method ([5], [1] and [2]), in our case the point of buckling was exactly determined, directly from the diagrams. The buckling load $p_{h,cr}$ was determined by considering the maximum measured load during a single experiment.

The diagrams of specimens 2, 4 and 6 are in good agreement. The diagram of specimen 1 shows a greater increment of the lateral displacement and a smaller pressure value during buckling, which can be attributed to a greater measured initial displacement compared to other specimens. Specimens 3 and 5 show very small lateral displacements, w , to almost up the critical pressure, followed by immediate passage into a new, deformed, stable state, during which the pressure even drops a little. Though the initial displacements of specimens 3 and 5 do not differ significantly from specimens 2, 4 and 6 we believe that the specimens exhibited post-critical behavior. This can be substantiated by the fact that the theoretical elastic buckling load is 22.153 N/mm and the buckling loads of specimens 3 and 5 are 21.2% and 27.5% greater.

If experiments 2, 4 and 6 are considered as characteristic, the average hydraulic pressure during buckling is $p_{h,cr} = 11.633$ MPa, which is equivalent to

Preglednica 1. Relativna neravnost kolobarja, največja razlika

Table 1. Relative initial unevenness, greatest difference

Pr.	r=a mm	r=b mm	w _{izh} mm
1.	0,65	0,56	11,0
2.	0,38	0,25	12,0
3.	0,26	0,20	13,5
4.	0,33	0,29	13,2
5.	0,35	0,25	13,0
6.	0,11	0,27	12,8

Preglednica 3. Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, linearno utrjevalni reološki model

Table 3. Calculated buckling loads and buckling coefficients, linearly hardening rheological model

	KNDZ FSSR	DNDZ DSSR
p_{cr}/σ_{pl}	0,5179	0,5186
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0,5542	0,5542
P_{cr} N/mm	20,699	20,730
P_{cr}^{el} N/mm	22,153	22,153
ΔP_{cr}	-6,6%	-6,4%
κ	1,6134	1,6146
κ_{el}	1,6691	1,6691
$\Delta \kappa$	-3,3%	-3,3%

$P_{z,cr} = 23,15$ N/mm oziroma izbočitvenemu koeficientu $\kappa = 1,706$. Ugotovljeni absolutni odstopok merjenja zunanje enotske obremenitve znaša $\pm 1,03$ N/mm, kar pri izmerjeni zunanji enotski obremenitvi $P_{z,cr} = 23,15$ N/mm ustreza relativnemu odstopku meritve $\pm 4,5\%$.

4 IZRAČUNI PRESKUŠANCEV

Za geometrijsko obliko in mehanske lastnosti preskušancev $a=59,017$ mm, $b=150,5$ mm, $h=3,997$ mm $E=30800$ MPa, $\nu=0,3$, $\sigma_{pl}=10$ MPa) izvedemo primerjalne izračune z matematičnim modelom ([6] in [7]). Pri tem upoštevamo linearni utrjevalni reološki model materiala s faktorjem utrjevanja $f=0,4$, za primerjavo pa izvedemo izračune tudi z upoštevanjem izmerjenega diagrama $\sigma-\varepsilon$ (sl. 4, 5). Upoštevamo dve teoriji plastičnosti, in sicer končne napetostno deformacijske zveze (**KNDZ**, Hencky—jeve enačbe) ter diferencialne napetostno deformacijske zveze (**DNDZ**, Reuss—Prandtlove enačbe).

Rezultati izračunov so prikazani v preglednicah 3 in 4, kjer je podana tudi primerjava elasto-plastičnih kritičnih obremenitev in izbočitvenih koeficientov z elastičnimi kritičnimi obremenitvami in izbočitvenimi koeficienti. Razlike izračunov po eni oziroma drugi teoriji plastičnosti so majhne, pri čemer izračuni z upoštevanjem diferencialnih napetostno deformacijskih zvez dajejo nekoliko višje kritične obremenitve kakor v primeru končnih napetostno deformacijskih zvez. Če primerjamo izračunane vrednosti z izmerjenim izbočitvenim koeficientom $\kappa=1,706$, $\pm 4,5\%$, ugotovimo, da znaša razlika 5,5%.

Preglednica 2. Izmerjene kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti

Table 2. Measured buckling loads and buckling coefficients

Pr.	$p_{h,cr}$ MPa	$P_{z,cr}$ N/mm	κ
1.	10,02	19,77	1,577
2.	11,49	22,85	1,695
3.	13,40	26,85	1,838
4.	11,77	23,44	1,717
5.	14,06	28,24	1,884
6.	11,64	22,16	1,707

Preglednica 4. Izračunane kritične obremenitve in izbočitveni koeficienti, dejanski diagram $\sigma-\varepsilon$

Table 4. Calculated buckling loads and buckling coefficients, actual $\sigma-\varepsilon$ diagram

	KNDZ FSSR	DNDZ DSSR
p_{cr}/σ_{pl}	0,5200	0,5226
$(p_{cr}/\sigma_{pl})^{el}$	0,5542	0,5542
P_{cr} N/mm	20,783	20,889
P_{cr}^{el} N/mm	22,153	22,153
ΔP_{cr}	-6,2%	-5,7%
κ	1,6167	1,6208
κ_{el}	1,6691	1,6691
$\Delta \kappa$	-3,1%	-2,9%

the outer unit buckling load $P_{z,cr} = 23.15$ N/mm or the buckling coefficient $\kappa = 1.706$. The established absolute measuring error of the outer load is ± 1.03 N/mm, which gives, at the measured outer load of $P_{z,cr} = 23.15$ N/mm, a relative measuring error of $\pm 4.5\%$.

4 THEORETICAL PREDICTIONS

Comparative calculations were carried out for the geometry and the mechanical properties of the specimens ($a=59.017$ mm, $b=150.5$ mm, $h=3.997$ mm, $E=30800$ MPa, $\nu=0.3$, $\sigma_{pl}=10$ MPa) using a mathematical model ([6] and [7]). A linearly hardening rheological model with the hardening coefficient $f=0.4$ was used. For comparison, calculations considering the measured $\sigma-\varepsilon$ diagram, Fig. 4 and 5, were also carried out. Two theories of plasticity, the finite stress-strain relations (**FSSR**, Hencky equations) and the differential stress-strain relations (**DSSR**, Reuss—Prandtl equations), were used.

The calculated results are shown in tables 3 and 4, where a comparison of the elasto-plastic and elastic buckling loads and coefficients can be seen. The differences between the two theories of plasticity are minimal where the differential stress-strain relations give slightly greater buckling loads compared to the finite stress-strain relations. If the calculated buckling coefficients are compared to the measured $\kappa=1.706$, $\pm 4.5\%$, a difference of 5.5% is obtained.

5 SKLEP

Glede na predhodne eksperimentalne raziskave stabilnosti krožnih kolobarjev v elastičnem področju, pri katerih so prehod iz stabilnega v nestabilno stanje določali z metodo prevojne točke ali s Southwellovo metodo, so preskusi, pri katerih je prišlo do elasto-plastične izbočitve, pokazali drugačno obnašanje. Kolobar preide v nestabilno stanje skoraj v trenutku pri relativno majhnem prečnem pomiku, ki se nato poveča do velikega trajnega pomika pri skoraj nespremenjeni obremenitvi. Ta lastnost omogoča neposredno določanje kritične obremenitve iz diagrama meritve. Eksperimentalno določeni izbočitveni koeficienti so 5,5% večji od izračunanih, pri čemer znaša ugotovljena merilna natančnost eksperimentalnih rezultatov $\pm 4,5\%$. Ocenjujemo, da je ujemanje rezultatov zadovoljivo, čeprav bi z uporabo natančnejšega merilnika sile pri določanju zveze med silo valja in hidravličnim tlakom merilno natančnost eksperimentalnih rezultatov lahko še povečali. Pri izračunih, pri katerih smo upoštevali linearno utrjevalni reološki model ter izmerjeni diagram σ - ε materiala, vidimo, da približek z linearnim utrjevalnim modelom daje primerljive rezultate.

5 CONCLUSION

Considering the previous experimental buckling investigations of circular annular plates in the elastic region, where the buckling load must be determined using the inflection-point method or by Southwell's method, the elasto-plastic buckling experiments showed a different behavior. The annular plate buckles almost immediately at a small lateral deflection, which afterwards increases to a large, permanent lateral deflection at almost constant load. This characteristic allows a direct determination of the buckling load from the measurement diagram. The experimentally determined buckling coefficients are 5.5% greater than the calculated, where the measuring accuracy is $\pm 4.5\%$. It is estimated that the agreement between the results is satisfactory, although the measuring accuracy could be improved by using a more accurate force transducer for the determination of the force-to-hydraulic-pressure relation. The calculations, where the linearly hardening rheological model and the measured σ - ε diagram of the material was used, showed that the approximation with a linear model yields comparable results.

6 LITERATURA

6 REFERENCES

- [1] Kumelj, T. (1977) Stabilnost ploskovnih elementov. Master's thesis, *Fakulteta za strojništvo*, Univerza v Ljubljani.
- [2] Baebler, M. (1979) Eksperimentalno določanje stabilnosti ploskovnih elementov. Master's thesis, *Fakulteta za strojništvo*, Univerza v Ljubljani.
- [3] Baebler, M., F. Kosel (1982) Experimental investigation of the stability of a plate with hole. In *Anton Kuhelj memorial volume*, 205–214. SAZU, Ljubljana.
- [4] Kosel, F., Jin Chen (1997) Buckling of a thin annular plate subjected to two apposite locally acting pressures and supported at two opposite points. *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(12):1325–1343.
- [5] Timoshenko, S.P., J.M. Gere (1961) Theory of elastic stability. *Mc-Graw Hill*, New York.
- [6] Bremec, B., F. Kosel (2001) Izbočitev krožnega kolobarja v elastičnem-plastičnem področju z upoštevanjem utrjevalne karakteristike. In Leopold Škerget, editor, *Zbornik del – Kuhljevi dnevi '01*, pages 65–72. Slovensko društvo za mehaniko.
- [7] Bremec B., F. Kosel (2001) Buckling of a circular annular plate in the elastic-plastic region: an elastic linear hardening rheological model. *Journal of Mechanical Engineering-Strojniški vestnik*, 47(9):554–565.

Naslov avtorjev: Boštjan Bremec

prof.dr. Franc Kosel
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana
bostjan.bremec@fs.uni-lj.si
franc.kosel@fs.uni-lj.si

Author's Address: Boštjan Bremec

Prof.Dr. Franc Kosel
Faculty of Mechanical Eng.
University of Ljubljana
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana, Slovenia
bostjan.bremec@fs.uni-lj.si
franc.kosel@fs.uni-lj.si

Prejeto:
Received: 20.1.2003

Sprejeto:
Accepted: 31.1.2003

Izboljšana razpoznava dušenja z uporabo zvezne valčne transformacije

Enhanced identification of damping using continuous wavelet transform

Janko Slavič - Miha Boltežar

Pri določitvi parametrov dinamičnih sistemov z več prostostnimi stopnjami se izkaže, da je razpoznava dušilnih parametrov težja kakor razpoznavanje masnih in togostnih parametrov. V tem prispevku se osredotočimo na razpoznavanje dušenja z uporabo hitro razvijajoče se zvezne valčne transformacije (ZVT). Gaborjeva ZVT je temelj za tri izboljšane postopke identifikacije: metodo zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije, metodo enakovredne površine okna in metodo zrcaljenja okna. Predstavljene metode so posebej primerne za kratke in močno dušene sisteme, pri katerih je vpliv roba moteč. Predstavljeni postopki so prikazani na dejanskem eksperimentu, pri katerem smo izmerili razmernik dušenja prvih šestih lastnih frekvenc.

© 2002 Strojniški vestnik. Vse pravice pridržane.

(Ključne besede: sistemi dinamični, ugotavljanje dušenja, transformacija valčkov, postopki ugotavljanja)

A continuous wavelet transform (CWT) based on the Gabor wavelet function is used to identify the damping of a multi-degree-of-freedom system. The basic procedures are already known, especially the identification with a Morlet CWT. This paper enhances the already known procedures in the sense of reducing the edge-effect. This makes it possible to identify the damping of high-frequency modes. Three methods are shown: the reduced time spread of the wavelet function method, the equivalent window area method and the reflected window method. The procedures are demonstrated on signals acquired from the lateral vibration of a uniform beam. We were able to identify the damping up to the sixth natural frequency.

© 2002 Journal of Mechanical Engineering. All rights reserved.

(Keywords: dynamical systems, damping identification, wavelet transformation, identification methods)

0 UVOD

Raztros vibracijske energije imenujemo dušenje. Pretežni del vibracijske energije se porazgubi znotraj sistema, predvsem v obliki toplote; preostali del energije se porazgubi v obliki akustičnega sevanja, prenosa energije na druge sisteme itn.

Delo, ki ga naredi nihajoča sila dušenja pri enem krogu, imenujemo raztros energije enega kroga. Poskusi so pokazali, da je raztros energije kroga za večino konstrukcijskih materialov — kakor sta jeklo in aluminij — v širokem frekvenčnem spektru neodvisna od frekvence nihanja in da je raztros proporcionalen kvadratu amplitude nihanja. Tako notranje dušenje imenujemo strukturno dušenje [1]. V dinamiki nihanj najpogosteje uporabljen model (zaradi enostavnosti) *viskozne* dušenja ne ustreza tem kriterijem, saj je sila dušenja sorazmerna hitrosti nihanja in posledično je raztros energije dušenja odvisen od frekvence nihanja. Da se torej zadovolji kriterijem strukturnega dušenja, se vpelje

0 INTRODUCTION

The damping of dynamic systems is the dissipation of vibration energy. Usually, a considerable amount of this energy dissipates inside the system, mostly in the form of heat, while the rest dissipates outside the system in the form of acoustic radiation, transmission to other dynamic systems, etc.

Compared to an estimation of the stiffness and the mass properties of multi-degree-of-freedom (MDOF) systems, an estimation of the damping parameters is more difficult. The factors affecting damping mechanisms include friction on the atomic/molecular level, dry friction, viscous friction in fluids, etc., and so it is often difficult to describe in detail the real physical background using mathematical means. As a consequence of this, a number of simplified models were developed. Of these models, the model of *viscous damping* is the most widely used, it assumes that the damping force is proportional to

enakovredno viskozno dušenje. Ustrezno viskozno dušenje se dobi tako, da se (ob predpostavki harmoničnega nihanja) teoretično raztros energije kroga viskoznega dušenja izenači z dejanskim raztrosom energije enega kroga neviskoznega nihanja.

Kakorkoli, dušenja ne moremo izmeriti neposredno, ampak ga dobimo z vrednotenjem odziva dinamičnega signala. To lahko naredimo v časovnem ali v frekvenčnem območju. Logaritmični dekrement je najpreprostejši postopek in se izvaja v časovnem območju; uporaben je predvsem za sisteme z eno prostostno stopnjo (EPS). Bolj zapleteni metodi v časovnem območju, ki sta uporabni tudi za sisteme z več prostostnimi stopnjami (VPS), sta metoda najmanjših kvadratov po Smith-u in metoda najmanjših kvadratov s kompleksnim eksponentom — obe podrobneje opisani v [2]. Pogosto uporabljena časovna metoda je tudi Hilbertova transformacija [3], ki spremeni realno funkcijo v kompleksno.

Med metodami v frekvenčnem območju je znana t.i. metoda 3dB [4], ki temelji na pasovni širini resonančnega vrha. Za izboljšanje rezultatov te metode so razvite tudi bolj izpopolnjene metode in so navedene v [5].

Sicer pa Staszewski [5] navaja, da lahko dušenje ocenimo tudi z uporabo časovno-frekvenčne Wigner-Ville-ove porazdelitve.

Drugačen način predstavlja uporaba valčne transformacije; primer takega načina je predstavil Staszewski [5]. Gre za uporabo časovno in frekvenčno omejenih funkcij, ki jih premikamo po časovni osi in stopnjevanje po frekvenčni osi. S superpozicijo takih funkcij lahko opišemo celoten signal. V tem primeru ne govorimo o časovno-frekvenčnem območju, temveč o območju čas-stopnjevanje. Tako pridemo do valčne transformacije, ki jo je leta 1980 predstavil Morlet [6] in jo uporabil za seizmološke raziskave. Matematični formalizem za zvezno valčno transformacijo sta razvila skupaj Grossman in Morlet [7]. Od takrat naprej se je zvezna valčna transformacija (ZVT) hitro razvijala in se danes uporablja na zelo širokem področju: od opazovanja neustaljenih in nelinearnih pojavov, prek identifikacije napak in uporabe v kombinaciji z nevronskimi mrežami, do reševanja diferencialnih enačb z uporabo valčne transformacije. Podrobnejši pregled uporabe je predstavljen v [8].

Prednost uporabe valčne transformacije je prav v njeni časovni in frekvenčni omejenosti, ki omogoča preprosto analiziranje sistemov z VPS; lokalna omejenost valčne transformacije namreč omogoča, da analiziramo posamezne lastne frekvence neodvisno od drugih. Prednost valčne transformacije je tudi njena odpornost proti šumu v signalu [9].

V poglavju 1 bodo predstavljene osnove valčne transformacije in uporabe valčne transformacije za razpoznavo dušenja. V poglavju 2 bo na kratko predstavljen vpliv roba. V poglavju 4 bomo predstavili tri metode razpoznave določitve

the velocity of oscillation; and so it follows that the work done by one oscillation cycle depends on the frequency of the oscillation. Another often-used model is the model of *structural damping*, where the work done in one cycle is independent of the oscillation frequency and where the dissipation of the vibrational energy is proportional to the square of the amplitude [1]. To overcome the shortcomings of the different models the model of equivalent viscous damping is used. In this paper the damping is discussed in terms of the damping ratio, i.e. the fraction of critical damping.

Because the damping is hidden in the response of a dynamic system it cannot be measured directly. A number of damping measures and criteria in the time and frequency domains are used to characterize structural damping. Logarithmic decrement — probably the simplest method in the time domain — is useful for single-degree-of-freedom (SDOF) systems. Often-used time-domain methods, suitable for identifying the damping of multi-degree-of-freedom (MDOF) systems are: the Smith least squares [2], the least-squares complex exponential [2] and the Hilbert transform [3].

The simplest frequency domain method is the 3dB method [4]. The damping is estimated from the frequency-response width; however, because of the low accuracy some enhancements have been developed [5].

The third way is the time-frequency domain. For example the Wigner-Ville distribution [5].

A different method in the time-scale domain is the use of the continuous wavelet transform (CWT) [5]. The CWT is based on functions limited in time and frequency that are translated on the time axis and scaled on the frequency axis. With a superposition of such functions the whole signal can be described. The CWT was introduced in 1980 by Morlet [6]. The mathematical definitions were developed by Grossman and Morlet [7]. Today, the CWT is rapidly developing and has spread to a wide range of applications [8]: the observation of nonstationary and nonlinear processes, the identification of faults in complex systems, applications in neural networks and differential equations, etc.

The major advantage of the CWT is the locality in time and frequency that can be used to individually analyze each degree of freedom of a MDOF system. The CWT was shown to be very efficient with noisy signals [9].

In the second section some basics of the CWT, and the identification of damping with the help of the CWT, will be presented. The third section gives a short explanation of the edge-effect. In the fourth section three new methods for the identification of damping with the help of the CWT are given: the reduced time spread of the wavelet function method,

dušenja: metoda zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije, metodo zrcaljenja okna in metodo enakovredne površine okna. V poglavju 4 so predstavljeni rezultati preskusa ter v 5 sklepi.

1 RAZPOZNAVA RAZTROSA ENERGIJE Z VALČNO TRANSFORMACIJO

1.1 Osnove valčne transformacije

Tukaj navajamo zgolj nekatere osnovne definicije zvezne valčne transformacije, za podrobnejšo predstavitev se naj bralec obrne na drugo literaturo; npr.: [8], [10] in [11].

ZVT funkcije $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ je določena kot:

$$Wx(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (1),$$

kjer sta u in s parametra premika in stopnjevanja [12]. $\psi^*(t)$ je kompleksno konjugirana osnovna valčna funkcija (VF) $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

Valčna funkcija je normirana (njena norma je enaka 1). Povprečna vrednost VF je 0:

$$\|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt = 1 \quad (2)$$

$$\bar{\psi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (3).$$

Preglednica 1 prikazuje normo in povprečno vrednost Morletove in Gaborjeve VF [13]. Medtem ko je v obeh primerih povprečna vrednost ob primerni izbiri parametrov σ in η zelo blizu nič, je norma Gaborjeve VF enaka 1, norma Morletove VF pa π . Morletovo VF lahko normiramo z množenjem z $1/\sqrt{\pi}$. V tem primeru dobimo Gaborjevo VF s parametrom $\sigma = 1$. Parameter σ omogoča, da prilagodimo časovni in frekvenčni raztros, to lastnost bomo pozneje podrobneje predstavili.

Premaknjena in stopnjevana VF je definirana kot:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) \quad (4)$$

Gaborjeva VF kot:

$$\psi_{Gabor}(t) = \underbrace{\frac{1}{(\sigma^2 \pi)^{1/4}}}_{\text{Gaussovo okno}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{i\eta t} \quad (5),$$

the reflected window method and the equivalent window area method. The fifth section presents an experiment and the last section presents the conclusions.

1 IDENTIFICATION OF THE DISSIPATION ENERGY BY CWT

1.1 Basics of the wavelet transform

In this subsection only a few basic definitions are presented, for an exhaustive study the reader should refer to other literature, e.g. [8], [10] and [11].

The CWT of the signal $x(t) \in L^2(\mathbf{R})$ is defined as:

where u and s are the translation and scale/dilation parameters, respectively [12], and $\psi^*(t)$ is the complex conjugate of the basic wavelet function $\psi(t) \in L^2(\mathbf{R})$.

The wavelet function is a normalized function (i.e. the norm is equal to 1) with an average value of zero:

Table 1 shows the norm and the mean values of the Morlet and Gabor wavelet functions [13]. In both cases the selection of suitable parameters σ and η makes the mean value very close to zero. While the norm of the Gabor wavelet is equal to 1, the norm of the Morlet wavelet is π . However, we can normalize the Morlet wavelet function by multiplying it by $1/\sqrt{\pi}$. The normalized Morlet wavelet function is identical to the Gabor wavelet function with the parameter $\sigma = 1$. The additional parameter σ of the Gabor wavelet function gives us the possibility to adapt the time and frequency spread and will be discussed later in this paper.

The translated and dilated wavelet function is defined as:

The Gabor wavelet function is defined as:

Preglednica 1. Norma in povprečna vrednost Morletove in Gaborjeve valčne funkcije
Table 1. The norm and the mean value of the Morlet and Gabor wavelet function

Lastnost/Property	Gabor	Morlet
$\ \psi(t)\ ^2$	1	1
$\bar{\psi}(t)$	$\sqrt[4]{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{\eta^2\sigma^2}{2}}$	$e^{-\frac{\eta^2}{2}\sqrt{2\pi}}$

kjer parameter σ in začetna skala definirata časovni in frekvenčni raztros Gaborjeve VF [14]; η je parameter frekvenčne prilagoditve.

Zaradi lažje primerjave bomo v nadaljevanju uporabljali tudi izraz “normiran parameter σ ” ($\sigma_{1\text{Hz}}$), ki pove, kakšen parameter σ bi uporabili, če bi analizirali signal s frekvenco 1 Hz. Dejansko uporabljen parameter σ dobimo z množenjem: $\sigma_{1\text{Hz}} \cdot \Delta t$, kjer je Δt časovna diskretizacija.

Povezava med stopnjevanjem Gaborjeve VF s in krožno frekvenco ω definira izraz:

$$\omega(s) = \frac{\eta}{s} \quad (6).$$

Tukaj lahko navedemo še zelo uporabno lastnost ZVT, namreč njeno linearnost:

$$\left(W \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \right) (u, s) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left(W x_i \right) (u, s) \quad (7).$$

Linearnost omogoči, da analiziramo i -to komponento x_i večkomponentne funkcije $\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$ posebej, ločeno od drugih; α_i je stalnica.

1.2 Razpoznavna raztrosa energije z uporabo Gaborjeve zvezne valčne transformacije

Razpoznavna temelji na predpostavki, da sistem niha s harmonsko funkcijo $x(t)$ (8) in da je taka funkcija asimptotična, to je, da se amplituda glede na fazo spreminja počasi [15]:

$$x(t) = A(t) \cos \varphi(t) \quad (8).$$

ZVT tako definirane harmonske funkcije lahko poenostavimo; Staszewski [5] in Ruzzene s sodelavci [16] sta uporabila Morletovo VF in sta ZVT poenostavila v izraz, ki ga je predstavil Delprat s sodelavci [17]. Poenostavitev ZVT za Gaborjevo VF smo že predstavili [9], tako bo tukaj izpisan samo izpeljan izraz:

$$Wx(u, s) = \frac{1}{2} A(u) \hat{\psi}_{\text{Gabor}_{u,s}}(\varphi'(u), \sigma, \eta) e^{i\varphi(u)} + \text{Er}(A'(t), \varphi''(u)) \quad (9),$$

kjer je Fourierjeva transformacija premaknjene in povečane Gaborjeve VF definirana kot:

$$\hat{\psi}_{\text{Gabor}_{u,s}}(\omega, \sigma, \eta) = (4\pi \sigma^2 s^2)^{1/4} e^{-\frac{(\omega - \frac{\eta}{s})^2 \sigma^2 s^2}{2}} e^{-i\omega u} \quad (10).$$

Napako poenostavitve $\text{Er}(A'(t), \varphi''(u))$ lahko zanemarimo, če je prvi odvod faze (kotna hitrost) večji od pasovne širine VF $\Delta\omega$ [10, 9]:

$$\varphi'(u) \geq \Delta\omega \quad (11).$$

Pasovna širina Gaborjeve VF $\Delta\omega$ je definirana [10] in [9]:

where parameter σ and the initial scale define the time and frequency spreads of the Gabor wavelet function [14]; η is the parameter of frequency modulation.

In this study the term “normalized parameter σ ” ($\sigma_{1\text{Hz}}$) is used, this is the σ that would be used in the case of a signal with a frequency of 1 Hz. The appropriate parameter σ for any other frequency is: $\sigma_{1\text{Hz}} \cdot \Delta t$, where Δt is the time step of the discretization.

The relation between the instantaneous scale s and the instantaneous angular velocity ω of the Gabor wavelet function is defined as:

A very useful property of the CWT is its linearity:

which makes it possible to analyze each i -th component x_i of a multi-component signal $\sum_{i=1}^N \alpha_i x_i$, where α_i is a constant.

1.2 Damping identification using a wavelet transform

We assume that the signal $x(t)$ is sinusoidal (8) and asymptotic, i.e. the signal's amplitude varies slowly compared to the variation of its phase [15]:

In the case of such a signal its CWT can be approximated by a simple function. Staszewski [5] and Ruzzene et al. [16] used the Morlet wavelet function, and as a consequence they used the CWT approximation as defined by Delprat et al. [17]. In this paper the approximation of the CWT based on the Gabor wavelet function is used [9]:

where the Fourier transform of the translated-and-scaled Gabor wavelet function is defined as:

The approximation error $\text{Er}(A'(t), \varphi''(u))$ can be neglected if the derivative of the phase is greater than the bandwidth $\Delta\omega$ [10, 9]:

The bandwidth $\Delta\omega$ of the translated-and-scaled Gabor wavelet function is defined as [10]:

$$\Delta\omega(s) = \sqrt{\frac{-2z_1}{\sigma^2 s^2}} \quad (12).$$

Izraz je izpeljan relativno, glede na velikost Gaussovega okna na sredini (največja vrednost) in na robu. Parameter z_1 predstavlja mero, kako daleč od sredine okna gledamo. V tem prispevku je bila uporabljena vrednost $z_1 = -8$ (takrat je vrednost na robu okna 0,034% vrednosti na sredini).

Da se dve sosednji harmonski funkciji i in j v ZVT ne motita, mora biti večja pasovna širina od obeh ($\Delta\omega(s_i)$ in $\Delta\omega(s_j)$) manjša, kakor je frekvenčna razlika obeh funkcij [10]:

$$(\varphi'_i(u) - \varphi'_j(u)) \geq \max\{\Delta\omega(s_i), \Delta\omega(s_j)\} \quad (13).$$

ZVT neke harmonske funkcije v prikazu čas-stopnjevanje se kaže kot zgostitev energije pri frekvenci te harmonske funkcije. To zgostitev energije imenujemo greben [8] in jo opišemo s krivuljami $s=s(u)$. Greben je funkcija premika (časa). Vrednosti ZVT, ki so vezane na greben, imenujemo ogrodje ZVT – $Wx(u, s(u))$.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na odziv dušenega nihanja [1]:

$$x(t) = A_0 e^{-\zeta\omega_d t} \cos(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \quad (14).$$

Z uporabo ZVT smo zmožni določiti samo dušeno lastno krožno frekvenco $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$, ki se po navadi od lastne krožne frekvence ω_0 (ki jo potrebujemo za izračun razmernika dušenja) razlikuje zelo malo. V nadaljevanju bomo tako uporabili ω_d namesto ω_0 , saj je razmernik dušenja ζ navadno zelo majhen ($\zeta \ll 1$) in napaka, ki jo s tem naredimo, zanemarljiva. Taka poenostavitev je v dinamiki pogosta.

Od sedaj naprej je postopek do razmernika dušenja enak kakor v primeru Morletove VF [5]. Najprej izraz (10) vstavimo v izraz (9) in zanemarimo napako. Ker nas zanima ZVT na mestu grebena ($s=s(u)$), je krožna frekvenca Gabor VF ($\omega=\eta/s$) enaka krožni frekvenci dušenega nihanja (ω_d); posledično je člen $e^{\frac{(\omega_d - \eta/s)^2 \sigma^2 s_0^2}{2}}$ enak 1. Tako izpeljemo naslednji izraz:

$$\ln \left(\frac{2 |Wx(u, s(u))|}{(4\pi \sigma^2 s(u)^2)^{1/4}} \right) \approx -\zeta \omega_d u + \ln A_0 \quad (15).$$

Ko imamo enkrat izračunano ZVT, so vsi členi enačbe (15), razen razmernika dušenja ζ in stalnice A_0 , znani. Ker gre za linearno funkcijo, lahko iz strmine te funkcije ocenimo razmernik dušenja.

Nihanje lahko rekonstruiramo z uporabo naslednjih izrazov:

$$\varphi(u) = \arctan \frac{\text{Im}(Wx(u, s(u)))}{\text{Re}(Wx(u, s(u)))} \quad (16)$$

$$A(u) \approx \frac{2 |Wx(u, s(u))|}{(4\pi \sigma^2 s(u)^2)^{1/4}} \quad (17).$$

where the parameter z_1 needs to be chosen; if we choose $z_1 = -8$ (the value used in this study) then the value of the wavelet at the bandwidth is only 0.034% of the maximum value.

For the CWT of any two components i and j of a multi-component signal not to interfere, the maximum of the bandwidth ($\Delta\omega(s_i)$ and $\Delta\omega(s_j)$) should be smaller than the frequency difference of i and j [10]:

The time-scale representation of the energy concentration of the CWT is called the ridge. Ridges are described with the use of curves $s=s(u)$. In other words, ridges represent the frequency content of the analyzing signal with a high density of energy, which is dependent on the time (translation u). The values of the CWT that are restricted to the ridge are called the skeleton of the CWT – $Wx(u, s(u))$.

From now on we focus on the free response of a damped signal [1]:

With the CWT we are able to determine only the damped angular velocity $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}$, which differs slightly from the undamped natural angular velocity ω_0 . In future derivations we are forced to use ω_d instead of ω_0 ; however, because the damping ratio ζ is usually small ($\zeta \ll 1$) the error is insignificant. In dynamics this substitution is usual.

The procedure for damping-ratio extraction is now just the same as in the case of the Morlet wavelet [5]. First, equation (10) is inserted into equation (9), and the error part is neglected. Because we paid attention to the ridge, the angular velocity of the Gabor wavelet function ($\omega=\eta/s$) is equal to the angular velocity of the signal (ω_d), and as a consequence the term $e^{\frac{(\omega_d - \eta/s)^2 \sigma^2 s_0^2}{2}}$ is equal to 1. Finally, the following expression is derived:

It is clear that this equation represents a linear function and from its slope the damping ratio ζ can be estimated.

To reconstruct the signal the following functions can be derived:

Edina naloga pri zgornjem postopku je določitev grebena $s(u)$.

1.3 Določevanje grebena

Podrobnejše informacije o različnih metodah določevanja grebena so zbrane v literaturi ([5], [15] do [18]). Tukaj bomo uporabili metodo prečnega preseka, ki temelji na vnaprej znani dušeni lastni frekvenci ω_d . Greben je tako definiran z:

$$s(u) = \frac{\eta}{\omega_d} \quad (18).$$

2 VPLIV ROBA

V našem preteklem delu [9] smo podrobneje proučili vpliv roba. Tukaj bomo za definiranje področja, kjer je vpliv roba opazen, uporabili polmer zaupanja, ki ga definiramo kot [19]:

$$R(k, s, \sigma) = k \sigma_{t_{u,s}} = k \frac{\sigma s}{2} \quad (19),$$

kjer k pomeni večkratnik časovnega raztrosa Gaborjeve valčne funkcije. Z večanjem parametra k se večja površina valčne funkcije znotraj signala. Enota polmera zaupanja R je s (sekunda) in pomeni razpon vpliva roba v času.

3 IZBOLJŠANA RAZPOZNAVA DUŠENJA

Zaradi napake roba smo prisiljeni v razpoznavo dušenja na tistem delu valčne transformacije, kjer je vpliv roba zanemarljiv ([9] in [5]).

Tukaj bomo predstavili tri nove metode, s katerimi bomo poskušali zmanjšati vpliv roba. Te tri metode so: zmanjšane raztrosa valčne funkcije, metoda zrcaljenja okna in metoda enakovredne površine okna.

3.1 Metoda zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije – ZČR

Glede na izraz (19) lahko vpliv okna zmanjšamo z zmanjšanjem parametra σ . Tega lahko zmanjšamo do približno $\sigma_{1Hz} = 1,5$ [19], vendar pa to ni edina omejitev, pri zmanjševanju moramo biti pazljivi tudi na premik frekvenčnega vrha [9]:

$$\Delta\omega(s, \sigma, \eta) = \frac{\eta - \sqrt{2/\sigma^2 + \eta^2}}{2s} \quad (20)$$

in na povečan frekvenčni raztros valčne funkcije; to pomeni da moramo bolj paziti, da se sosednje lastne frekvence ne motijo (13).

3.2 Metoda zrcaljenja okna – ZO

Gre za metodo, ki je podobna metodi zrcaljenja signala [19], vendar tukaj zrcalimo okno valčne

Now the only problem is the characterization of the ridge $s(u)$.

1.3 Ridge detection

Detailed explanations of the various methods for ridge extraction can be found elsewhere ([5], [15] to [18]). The cross-sections method is the simplest method and will be used in this paper. The ridge is defined by:

2 THE EDGE-EFFECT

In our previous work [9] we studied the edge-effect in detail. The range where the edge-effect cannot be neglected is defined by the radius of trust [19]:

where k defines the multiple of the time spread. With a higher k the area of wavelet function inside the signal rises. The unit of the radius of trust R is s (second).

3 ENHANCED IDENTIFICATION OF DAMPING

Because of the edge-effect error of the CWT we cannot identify the damping on a whole time interval ([9] and [5]).

We will show three new methods that reduce the edge-effect. These three methods are: the reduced-time spread of the wavelet function method (RTS), the reflected window method (RFW) and the equivalent window area (EWA) method.

3.1 Reduced-time spread of the wavelet function method – RTS

With the help of the parameter σ of the Gabor wavelet function we can easily control the desired time or frequency spread. The minimum value of the parameter can be approximately $\sigma_{1Hz} = 1.5$ [19]. However, we must have in mind the frequency shift of the ridge [9]:

and the higher frequency spread of the wavelet function. Consequently we have to pay more attention to the close modes (13).

3.2 The reflected window method – RFW

This method tries to improve the symmetry of the non-symmetrical window on the edge [10]. The

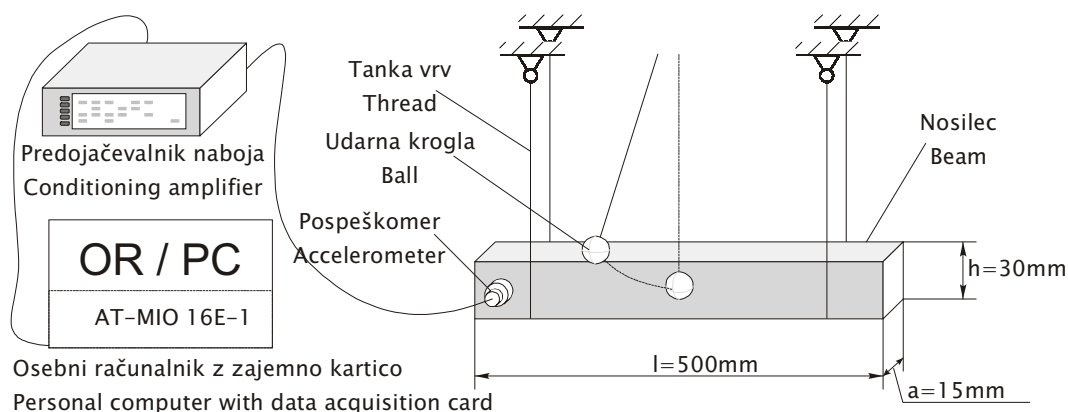
transformacije. Če vpliva roba ne upoštevamo, potem izračun delamo z nesimetrično valčno funkcijo, kar je v nasprotju s pogojem, da bi naj valčna funkcija bila simetrična [10]. Z zrcaljenjem to nesimetričnost izničimo. Izraz za izračun valčne transformacije je:

$$W_{\text{RFW}} f(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{\text{RFW}_{u,s}}^*(t) dt \quad (21),$$

kjer je T dolžina signala. Spremenjena Gaborjeva valčna funkcija je:

where $\psi_{\text{RFW}_{u,s}}$ is the modified Gabor wavelet function:

$$\psi_{\text{RFW}_{u,s}}(t, \sigma, \eta) = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{1}{(\pi \sigma^2)^{1/4}} \left(e^{-\left(\frac{t-u}{\sqrt{2}s\sigma}\right)^2} + e^{-\left(\frac{t+u}{\sqrt{2}s\sigma}\right)^2} + e^{-\left(\frac{t-(2T-u)}{\sqrt{2}s\sigma}\right)^2} \right) e^{i\eta \frac{t-u}{s}} \quad (22).$$



Sl. 1. Shema preskusa
Fig. 1. Experimental set-up

3.3 Metoda enakovredne površine okna – EPO

Pri tej metodi poskušamo nadomestiti del signala, ki manjka tako, da povečamo vpliv tistega, ki ga imamo na voljo. Kot merilo povečanja vzamemo delež površine okna znotraj signala.

Na začetku signala (časovno gledano) je ta delež enak:

$$P_0(u, s, \sigma) = \frac{\int_0^{+\infty} |\psi_{\text{Gabor}_{u,s}}(t, \sigma, \eta)| dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\text{Gabor}_{u,s}}(t, \sigma, \eta)| dt} = \frac{1 + \text{Erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}s\sigma}\right)}{2} \quad (23)$$

in na koncu (v okolici časa T):

$$P_T(u, s, \sigma) = \frac{\int_{-\infty}^{+T} |\psi_{\text{Gabor}_{u,s}}(t, \sigma, \eta)| dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\text{Gabor}_{u,s}}(t, \sigma, \eta)| dt} = \frac{1 + \text{Erf}\left(\frac{T-u}{\sqrt{2}s\sigma}\right)}{2} \quad (24).$$

Izraz za izračun valčne transformacije je:

3.3 The equal window area method – EWA

With this method we try to keep the proportionality of the absolute value of the wavelet transform. On the edge a part of the window is outside the signal, therefore we increase the value of the wavelet transform by the fraction between the whole window area and the window area inside the signal.

At the beginning of the signal the part of the window inside the signal is:

and at the end of the signal (time T):

The definition of the modified continuous wavelet transform is:

$$W_{\text{EWA}} f(u, s) = P_0(u, s, \sigma)^{-1} P_T(u, s, \sigma)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{u,s}^*(t) dt \quad (25).$$

4 PRESKUS

Cilj preskusa je bil določiti dušenje nevpetega nosilca ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$) (sl. 1). Upogibno nihanje smo vzbudili s sunkovito motnjo. Čas zajemanja je bil $1/8 \text{ s}$, zajeli smo 2^{16} točk.

4 EXPERIMENT

The presented procedures were tested on a measured signal from the lateral vibrations of a uniform free-free beam ($\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$). Figure 1 shows the experimental set-up. The length of the impulse response was $1/8 \text{ s}$, and the number of discrete points: 2^{16} .

Za dušenje nosilca smo uporabili model histereznega dušenja. Z uporabo modela enakovrednega viskoznega dušenja lahko predstavljene postopke uporabimo brez sprememb. Povezava med razmernikom dušenja in faktorjem histereznega dušenja je [20]: $\zeta = \dot{\eta}/2$, kjer smo z $\dot{\eta}$ označili faktor histereznega dušenja.

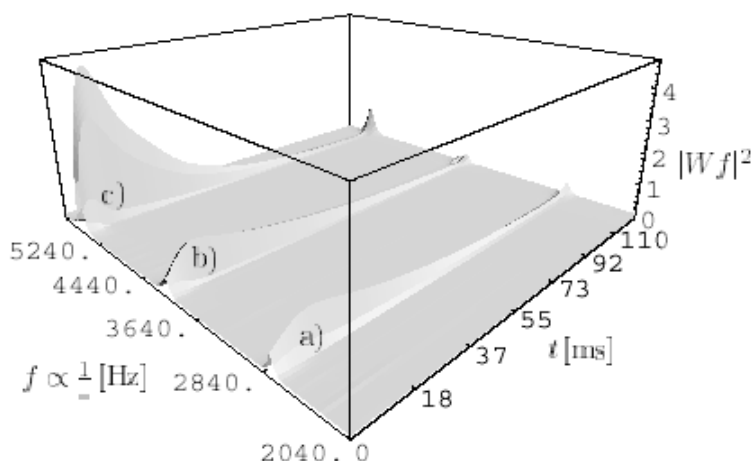
Tak nosilec smo že analizirali ([9], [21] in [22]), vendar nam je takrat uspelo razpoznati dušenje samo prvih treh lastnih frekvenc ($\dot{\eta}_1 = 240 \cdot 10^{-6}$, $\dot{\eta}_2 = 330 \cdot 10^{-6}$, $\dot{\eta}_3 = 780 \cdot 10^{-6}$). Tukaj bomo poiskali še razmernike dušenja za 4., 5. in 6. lastno frekvenco.

Slika 2 prikazuje skalogram izmerjenega odziva, kjer so prikazane samo frekvence od 2000 Hz do 6000 Hz.

The model of hysteretic damping was used. The connection between the damping factor and the hysteretic damping factor $\dot{\eta}$ is defined by [20]: $\zeta = \dot{\eta}/2$.

The damping features of the first three natural frequencies were already analyzed ([9], [21] and [22]). These damping factors are: $\dot{\eta}_1 = 240 \cdot 10^{-6}$, $\dot{\eta}_2 = 330 \cdot 10^{-6}$, $\dot{\eta}_3 = 780 \cdot 10^{-6}$. In this work we will identify the damping of the further three higher natural frequencies (4th, 5th and 6th).

In Figure 2 the scalogram of the measured signal in the scale/frequency range from 2000 Hz up to 6000 Hz is shown.



Sl. 2. Izmerjeni odziv v frekvenčnem področju od 2000 Hz do 6000 Hz. a) 4. lastna frekvenca, b) 5. lastna frekvenca, c) 6. lastna frekvenca

Fig. 2. Measured signal in the frequency range from 2000 Hz up to 6000 Hz. a) 4th natural frequency, b) 5th natural frequency, c) 6th natural frequency

Postopek za oceno dušenja je:

- določitev dušene lastne frekvence (npr. s klasično diskretno Fourierjevo transformacijo),
- določitev grebena ZVT z metodo prečnega prereza (več metod v [9]), določitev ogrinja ZVT,
- izračun ovojnice odziva (17),
- določitev razmernika dušenja (15).

V preglednici 2 so zbrani pomembnejši podatki razpoznave dušenja za 4. lastno obliko. Opazimo, da je vpliv roba pri parametru $k=6$ širok 27,3 ms (na vsaki strani). Ker je signal dolg 125 ms, pri referenčni metodi [9] ostane še 70,4 ms koristnega signala (sl. 3a).

Logaritmi amplitude valčne transformacije (17) 4. lastne frekvence glede na izračun po različnih metodah so prikazani na sliki 3.

Rezultati razpoznave dušenja s predstavljenimi postopki, ki vpliv roba zmanjšajo tako, da lahko razpoznavo opravljamo na celotni dolžini signala 125 ms, so povzeti v preglednici 3. Opazimo, da so predlagane izboljšave primerno orodje za zmanjševanje vpliva roba na razpoznavo dušenja.

Tukaj je še pomembno opozoriti na dejstvo, da metoda zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije bistveno poveča frekvenčni raztros. V

The procedure for the damping identification is as follows:

- extract the natural frequency (can be done with a classical Fourier transform),
- extract the ridge with the cross-sections method (further methods in [9]), extract the skeleton,
- calculate the envelope (equation (17)),
- extract the damping ratio (equation (15)).

In Table 2 the parameters used in identifying the damping of the 4th natural frequency are shown. When the parameter $k = 6$ is used the radius of trust is 27.3 ms. If we use the reference method [9] we have only 70.4 ms of the 125 ms of the wavelet transform left to identify the damping, see Figure 3a.

The results of equation (17) for the different methods – RTS, EWA, and RFW – for the 4th natural frequencies are shown in Figure 3.

The identification of the damping with the enhanced methods was calculated on the whole length of the signal (125 ms). The results are given in Table 3. We can conclude that the new methods can be used as a substitute for the reference method.

We must point out that the reduction of the time width used in the RTS method increases the

Preglednica 2. Razpoznavna dušenja 4. lastne oblike

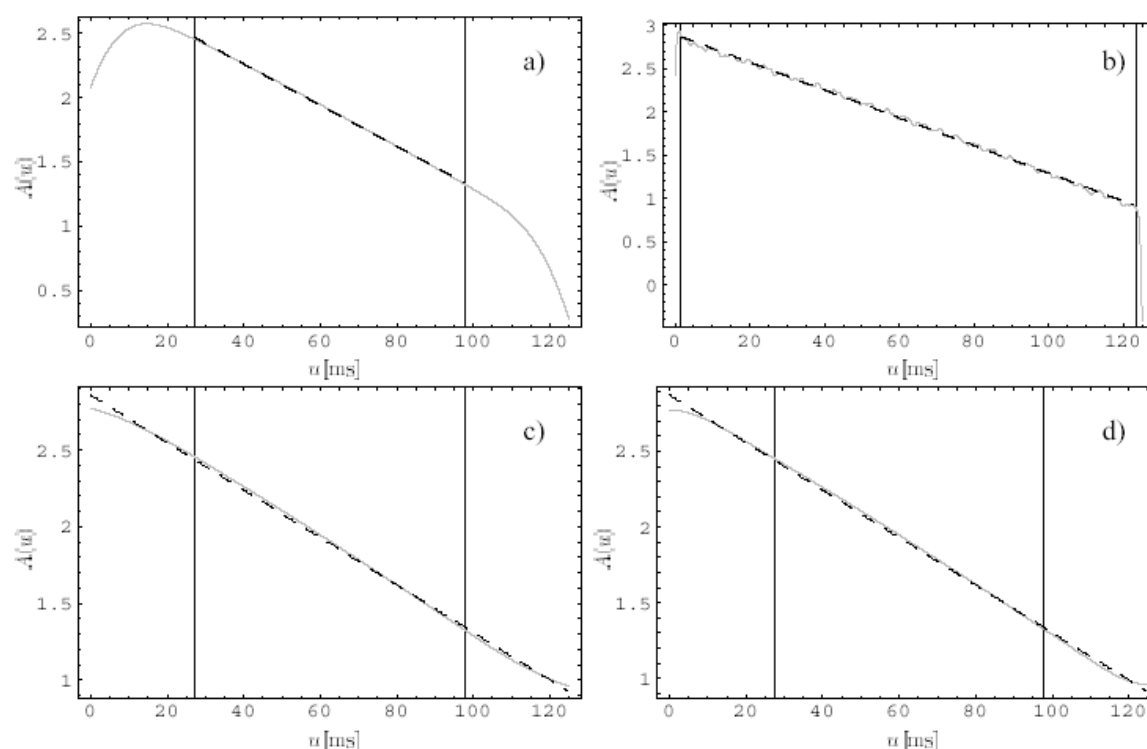
Table 2. Identification of damping of the 4th natural frequency

Parameter	Ref.	ZČR / RTS	EPO / EWA	ZO / RFW
η [Hz]		411775		
$\sigma_{1\text{Hz}}$	25	1,5	25	25
R [ms]	27,3	1,7	27,3	27,3
$\Delta\omega$ [Hz]	70	1167	70	70

Preglednica 3. Pregled dušenja 4., 5. in 6. lastne frekvence

Table 3. Overview of the damping factors of 4th, 5th and 6th natural frequency

Lastna frek./Natural freq.	ω_d [Hz]	Ref.	ZČR / RTS	EPO / EWA	ZO / RFW
4.	2752	$1856 \cdot 10^{-6}$	$1880 \cdot 10^{-6}$	$1792 \cdot 10^{-6}$	$1817 \cdot 10^{-6}$
5.	4056	$941 \cdot 10^{-6}$	$962 \cdot 10^{-6}$	$934 \cdot 10^{-6}$	$942 \cdot 10^{-6}$
6.	5592	$1408 \cdot 10^{-6}$	$1434 \cdot 10^{-6}$	$1405 \cdot 10^{-6}$	$1412 \cdot 10^{-6}$

Sl. 3. Logaritem amplitude (17) za 4. lastno frekvenco. - - - navpične črte označujejo področje vpliva roba ($k=6$)Fig. 3. Logarithm of the amplitude (17) for the 4th natural frequency. - - - vertical lines denote the radius of trust ($k=6$).

a) Ref., b) ZČR / RTS, c) EPO / EWA, d) ZO / RFW.

preglednici 2 vidimo, da se v primeru razpoznavne 4. lastne frekvence le-ta poveča s 70 na 1167 Hz. To pomeni določeno omejitev, saj se lahko sosednje lastne frekvence v frekvenčnem prostoru medsebojno prekrivajo (13).

frequency spread. The frequency spread at the 4th natural frequency of the RTS method is 1167 Hz, while the frequency spread of the other methods is 70 Hz, see Table 2. However, the 4th natural frequency does not interfere with the 3th and 5th (13).

5 SKLEP

Prispevek je nadgradnja našega preteklega dela [9], v katerem smo podrobneje predstavili različne načine določevanja grebena za razpoznavo dušenja z uporabo zvezne valčne transformacije: metodo

5 CONCLUSION

This paper continues our previous efforts on damping identification [9] where we have studied different methods for ridge detection: the cross-sections method, the amplitude method and the phase

prečnega prereza, amplitudno metodo in fazno metodo. V omenjenem delu smo razpoznavo izvajali samo na področju, kjer je vpliv roba zanemarljiv. Ker pa to ni vedno mogoče, smo tukaj predstavili tri izboljšane metode za razpoznavo dušenja, ki temeljijo na zmanjšanju vpliva roba: metodo zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije, metodo enakovredne površine okna in metodo zrcaljenja okna.

Na preskusu smo pokazali, da so nove metode, ki so učinkovite tudi na robu, primerna zamenjava za primerjalno metodo, ki je na področju roba neučinkovita. Med rezultati posameznih metod in primerjalno metodo nismo zaznali večjih odstopanj.

Metoda zmanjšane časovnega raztrosa valčne funkcije ima to pomanjkljivost, da povečuje frekvenčni raztros valčne funkcije, kar pomeni, da moramo paziti na prekrivanje lastnih frekvenc v frekvenčnem prostoru.

Med metodo enakovredne površine okna in metodo zrcaljenja okna nismo zaznali bistvenih razlik, vendar pa velja omeniti, da je slednja numerično zahtevnejša.

Rezultati preskusa se razmeroma dobro ujemajo s podatki iz literature [23].

method. While in previous studies we identified the damping on the part of the CWT that was not effected by edge-effect, we introduced here three new, enhanced methods for the enhanced damping identification: the reduced time spread of the wavelet function method, the reflected window method and the equivalent window area method.

The tests of these new methods showed that they can be used as a good substitute for the old method. We have not detected any significant differences in the identification quality between the reference/old method and the new methods that proved to be efficient on the edge.

The reduced time width of the wavelet-function method is very efficient in reducing the edge effect, but it increases the frequency spread, therefore it is not appropriate for the identification of damping in the presence of close modes.

The differences in the identification of damping between the equivalent window area method and the reflected window method are small; however, the reflected window method demands more computer resources.

The experimental results are in good agreement with those found in the literature [23].

6 LITERATURA

6 REFERENCES

- [1] Thomson, W.T. (1993) Theory of vibration with applications. London: *Chapman and Hall*, 4th edition.
- [2] Cooper, J.E. (1995) Parameter estimation methods for flutter testing. In *SMP Meeting. AGARD*.
- [3] Randall, R.B. (1987) Vibration measurement equipment and signal analyzers. In C.M. Harris, editor, *Shock and Vibration Handbook*, chapter 13, pages 13.1–13.50. *McGraw-Hill*, 3rd edition.
- [4] Nashif, A.D., D.I.G. Jones, and J.P. Henderson (1985) Vibration damping, chapter 4.3, pages 130–145. *John Wiley & Sons*, 2nd edition.
- [5] Staszewski, W.J. (1997) Identification of damping in MDOF systems using time-scale decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 203(2), 283–305.
- [6] Morlet, J. (1980) Sampling theory and wave propagation. In *Proceedings of the 51st Annual Meeting*. Soc. Explor. Geophys.
- [7] Grossman, A., and J. Morlet (1985) Lecture on recent results. In L. Streit, editor, *Mathematics and Physics. World Scientific*.
- [8] Simonovski, I. and M. Boltežar (2002) The norms and variances of the Gabor, Morlet and General harmonic wavelet functions. *Journal of Sound and Vibration*. In Press.
- [9] Slavič, J., I. Simonovski, and M. Boltežar (2002) Damping identification using a continuous wavelet transform: application to real data. *Journal of Sound and Vibration*. In Press.
- [10] Mallat, S. (1999) A wavelet tour of signal processing. *Academic Press*, 2nd edition.
- [11] Torrence, C. and G.P. Compo (1998) A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the Americal Meteorological Society*, 79(1), 61–78.
- [12] Grossman, A. and J. Morlet (1984) Decomposition of hardy function into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 15(4), 723–736.
- [13] Boltežar, M., I. Simonovski, and M. Furlan (2002) Fault detection in DC electro motors using the continuous wavelet transform. *Meccanica*. In Press.
- [14] Simonovski, I. and M. Boltežar (2001) Monitoring the instantaneous frequency content of a washing machine during startup. *Strojniški vestnik-Journal Of Mechanical Engineering*, 47(1), 28–44.
- [15] Tchamitchian, P. and B. Torresani (1992) Ridge and skeleton extraction from the wavelet transform. In M. B. Ruskai, editor, *Wavelets and Their Applications*, 123–151. Jones and Bartlett Publishers International, Boston, London.

- [16] Ruzzene, M., A. Fasana, L. Garibaldi, and B. Piombo (1997) Natural frequencies and dampings identification using wavelet transform: Application to real data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(2), 207–218.
- [17] Delprat, N., B. Escudie, P. Guillemain, R.K. Martinet, Ph Tchamitchian, and B. Torresani (1992) Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of Instantaneous Frequencies. *IEEE Trans. Inf. Th.* 38, *special issue on Wavelet and Multiresolution Analysis*, 2, 644–664.
- [18] Carmona, R.A., W. L. Hwang and B. Torresani (1997) Characterization of signals by the ridges of their wavelet transform. *IEEE Transactions On Signal Processing*, 45(10), 2586–2590.
- [19] Simonovski, I. (2002) Valčna analiza nelinearnih nestacionarnih nihanj elektromotorja (Wavelet Analysis of Nonlinear and Non-stationary Electro-motor Vibrations). PhD thesis, *Fakulteta za strojništvo Ljubljana*, In Slovenian.
- [20] Beards, C.F. (1996) Structural vibration: analysis and damping. *Arnold*.
- [21] Slavič, J. (2001) Identifikacija dušenja nihajočih sistemov z več prostostnimi stopnjami z uporabo valčne transformacije (Identification of damping in multi-degree-of-freedom systems using wavelet transformation). Graduation thesis, *Fakulteta za strojništvo Ljubljana*, In Slovenian.
- [22] Boltežar, M. and J. Slavič (2002) Use of the continuous wavelet transform for the identification of damping. In N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, and A.M.R. Ribeiro, editors, *International Conference on Structural Dynamics Modelling*, 53–62. Vibrations Group - DEM, Funchal, Madeira, Portugal.
- [23] Cremer, L. and M. Heckl (1973) Structure-borne sound, chapter III, 205–217, *Springer*.

Naslov avtorjev: Janko Slavič

doc.dr. Miha Boltežar
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za strojništvo
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana
janko.slavic@fs.uni-lj.si
miha.boltezar@fs.uni-lj.si

Authors' Address: Janko Slavič

Doc.Dr. Miha Boltežar
University of Ljubljana
Faculty of Mechanical Eng.
Aškerčeva 6
1000 Ljubljana, Slovenia
janko.slavic@fs.uni-lj.si
miha.boltezar@fs.uni-lj.si

Prejeto: 18.12.2002
Received:

Sprejeto: 31.1.2003
Accepted:

Poročila

Reports

Prof.dr. Anton Kuhelj

Akademik, doktor tehničnih znanosti Anton Kuhelj, dipl. inž., je bil rojen 11. novembra 1902. leta na Opčinah pri Trstu kot najstarejši od petih otrok v družini pristaniškega delavca. Mati je bila Tržačanka, rojena Živec, oče pa je bil po rodu iz Žužemberka. Kot otrok je moral v sicer urejeni družini živeti precej skromno; posebnih skrbi pa ni imel, saj sta oče in mati sama skrbela za družino in jo vzgajala v strogem katoliškem prepričanju ter v duhu slovenske narodnostne pripadnosti in zavesti.

Že pred prvo svetovno vojno, leta 1912, ga je kot osnovnošolca navdušil za letalstvo francoski letalec, ki je izvajal akrobacije nad mestom. Ko je 1914 izbruhnila prva svetovna vojna, je v tržaškem pristanišču pristal hidroavion, ki ga je zelo občudoval in ga tudi večkrat narisal. V tem času je sestavljal različne letalske modele, ki so tudi jadrali po zraku.

Takrat v Trstu ni bilo slovenskih srednjih šol, zato so ga starši po končani osnovni šoli vpisali na nemško gimnazijo, dobro in strogo urejeno šolo, katere delo pa je ovirala vojna, zlasti lakota in bombardiranje. Zaradi nastalih razmer, pa tudi zaradi pomanjkanja materialnih sredstev, po končani vojni ni mogel študirati v Sloveniji, tako da je bil peti razred gimnazije prisiljen študirati v Trstu na pol privatno. Zadnje tri razrede gimnazije je dokončal v Kranju, kjer so primorski in koroški študentje naleteli na prijazen sprejem učnega osebja kakor tudi prebivalstva. V Kranju je maturiral leta 1922 in se v študijskem letu 1922/23 vpisal na Oddelek za elektrotehniko na Tehniški fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer je 7. novembra 1927 diplomiral iz elektrotehnike. Takoj po končanem študiju elektrotehnike se je začel posvečati študiju mehanike ter hkrati uresničevati svoje otroško navdušenje za letalstvo.

Po odsluženju kadrovskega roka je 1. novembra 1928 nastopil svojo prvo redno službo na Tehniški srednji šoli v Ljubljani. V letih 1929-1930 je izvedel aerodinamične in statične preračune za športno motorno letalo Bloudek XV in v tesnem sodelovanju z inženirjem Bloudkom načrtoval letali "Sraka" in "Lojze". Uvedla sta precej aerodinamičnih in statičnih novosti,



med drugim sta krila prevlekla namesto s platnom z vezanimi ploščami. "Lojze" je poletel prvič junija 1930 na tedanjem letališču Polje pri Ljubljani. Ob svojih rednih dolžnostih je v letih 1929-1930 sodeloval kot konstrukter in statik pri takratnih Strojnih tovarnah in livarnah v Ljubljani. Dne 20. aprila 1932 je naredil pred izpitno komisijo takratnega Ministrstva za gradnje v Beogradu izpit za pooblaščenega inženirja elektro-strojnega področja. Dne 27. maja 1932 je naredil izpit inženirja-profesorja na tehničnih srednjih šolah. Pet let je poučeval na Tehniški srednji šoli v Ljubljani kot honorarni učitelj, suplent in profesor za

mekaniko in splošno elektrotehniko. 7. oktobra 1933 je nastopil službo kot docent za teoretično mehaniko na Tehniški fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer je v letih 1934 do 1938 prevzel predavanja iz fizike. V teh letih je skupaj s prof. F. Lobetom sodeloval pri načrtovanju samostojnega strojniškega laboratorija, ki je obsegal hidrostrojno in aerodinamično preskušališče z vetrnim kanalom. Svoje prvo letalo "Janez" je načrtoval v letih 1933 do 1935, to je s finančno pomočjo Janeza Hribarja končno poletelo. To je bil dvokrilc enosed s šestmetrskim razponom kril in zelo primeren za akrobatiko s francoskim 29,4 kW močnim motorjem, ki pa je bil vendarle preslaboten za vse, kar bi "Janez" zmogel, tako da je bilo treba kupiti angleški motor s 55,2 kW. V letih 1936 do 1937 je konstruiral in preračunaval športni dvokrilnik "Janez 11", ki je poletel leta 1937. "Janezu" je leta 1935 sledil "Tonček", enosed nizkokrilec. Izdelani sta bili dve letali, nakar se je lotil "Minime" z ozkim trupom, s katerim je hotel doseči aerodinamičnost in čim večjo hitrost. Tik pred drugo svetovno vojno se je po "Minimi" lotil novega dvoseda "Alka", ki so ga izdelali v tovarni v Sremski Mitrovici. Po osvoboditvi je bilo izdelano še eno letalo "Janez", za katero je značilno, da je bilo lepljeno s hladnim in ne s kuhanim lepilom.

Na podlagi referatov prof. dr. A. Krala in prof. dr. R. Župančiča je fakultetni svet Tehniške fakultete Univerze v Ljubljani na svoji seji 22. maja 1936 potrdil temo Kuhljeve doktorske disertacije „o elastični stabilnosti krivih plošč“ s poudarkom na torzijski stabilnosti krožnega valja. Disertacijo je uspešno

zagovarjal in bil 6. novembra 1936 promoviran za doktorja tehničnih znanosti. Na podlagi svojih del je bil 1. oktobra 1938 imenovan za izrednega profesorja. Dejavno je sodeloval na kongresu Mednarodne študijske komisije za jadralno letalstvo (Istus) v Varšavi in Lvovu maja 1939. leta.

Med drugo svetovno vojno je jasno dokazal svojo pripadnost slovenskemu narodu, tako da je bil po vojni med prvimi, ki mu je bil podaljšan pedagoški status. Dne 7. januarja 1946 je bil imenovan za rednega profesorja mehanike. Z reorganizacijo strojniškega študija je v študijskem letu 1946/47 prevzel Inštitut za zrakoplovstvo. V študijskem letu 1947/48 je bil izvoljen za dekana Tehniške fakultete Univerze v Ljubljani. V prvi polovici leta 1948 je predaval o problemih elastomehanike lupin pred strokovnimi krogi na Češkoslovaškem.

Kot vodilni jugoslovanski strokovnjak na področju letalstva je bil v času od 1. oktobra 1948 do 30. novembra 1949 imenovan za znanstvenega svetnika na Zrakoplovnem inštitutu v Zemunu, za kar mu je Ministrstvo za prosveto LR Slovenije dalo enoletni dopust. Kljub oddaljenosti se je v tem obdobju vozil v Ljubljano predavat na Tehniško fakulteto. V času bivanja v Zemunu in Beogradu je leta 1949 po znanih zgodovinskih zapletih z Rusi, ki so odnesli vse načrte, preračunal statiko 242 metrov visokega antenskega stolpa za potrebe radia Beograd v Obrenovcu. Sama konstrukcija je bila zelo zahtevna, ker na tem mestu piha košava tudi s hitrostjo 180 km/h.

Po vrnitvi v Ljubljano, na lastno željo in z osebnim dovoljenjem predsednika republike, je nato na več tehniških fakultetah predaval mehaniko, teoretično mehaniko točk, togih teles in kontinuov, dinamiko, hidromehaniko ter letalstvo. Po vrnitvi v Ljubljano je še naprej delal kot znanstveni sodelavec Zrakoplovnega inštituta, hkrati pa je kot znanstveni vodja akademijskega turboinštituta usmeril svoje raziskovalno delo na področje mehanike tekočin in k problemom gradnje turbin. Zaradi velikih znanstvenih dosežkov, bogatega pedagoškega dela in zaslug pri graditvi Univerze v Ljubljani, ga je Slovenska akademija znanosti in umetnosti izvolila za svojega člana na slavnostni skupščini dne 12. decembra 1949 z naslednjo utemeljitvijo:

Kot izredno eksakten mislec se je Kuhelj zgodaj usmeril v zamotane probleme elastičnosti, ki so posebno pomembni za gradnjo letal. Po tej poti se je bolj in bolj poglobljal v letalsko stroko in tako nazadnje postal vodilni svetovalec Državnega zavoda za zrakoplovstvo v Zemunu pri Beogradu. Dr. Kuhelj je bil ne samo odličen inženir zrakoplovstva, ampak hkrati tudi odličen znanstvenik, ki je uporabljal vse pripomočke sodobne fizike, pa tudi težje pripomočke matematike. Po vseh svojih sposobnostih sodi med najodločnejše predstavnike naše tehnike in jugoslovanske tehnične znanosti.

Po letu 1950 v Ljubljanskem konstrukcijskem biroju, kjer so mladi inženirji z velikim navdušenjem

načrtovali motorna in jadralna letala, je sodeloval kot izvedenec – nadzornik. Moral je pregledovati načrte, modele in prototipe, večkrat pa tudi vroče razpravljati z mladimi konstrukterji.

V študijskih letih 1950/51 in 1951/52 je bil predstojnik Oddelka za splošne predmete, hkrati pa je vodil v študijskem letu 1951/52 poseben kolokvij iz mehanike elastičnih teles. V letih 1951 do 1973 je bil stalni sodelavec mednarodne referatne revije Applied Mechanics Reviews, ki jo izdaja American Society of Mechanical Engineers. Avgusta 1952 je sodeloval na IV. kongresu Mednarodnega združenja za mostove in konstrukcije (AIPCI) v Cambridgeu. V študijskih letih 1952 do 1954 je bil rektor Tehniške visoke šole, od 1954 do 1956 rektor Univerze v Ljubljani, v letih 1956 do 1958 pa prorektor Univerze v Ljubljani. Leta 1952 do 1954 je konstruiral in preračunal zadnje izdelano turistično štirisedežno letalo "Alka". Sodeloval je na sestanku letalskih zvez Balkanskega sporazuma v Atenah leta 1954; istega leta se je udeležil kongresa za mehaniko tekočin v Zürichu. Leta 1955 je sodeloval v Stockholmu na mednarodnem kolokviju o utrjevanju materialov, istega leta pa se je udeležil kongresa za mehaniko tekočin v Göttingenu ter predaval na Poljskem o problemih elastomehanike lupin. V letih 1954 do 1958 je bil član ljubljanskega univerzitetnega sveta. Leta 1958 se je v Hannoveru z referatom udeležil letnega sestanka društva Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

V študijskem letu 1959/60 je predaval in vodil vaje na III. stopnji iz predmeta hidromehanika na Oddelku za gradbeništvo. V letih 1955 do 1960 je skupaj s prof.dr. Dörrom iz Darmstadta sodeloval kot stalni sodelavec referatne revije Zentralblatt für Mathematik iz Berlina. Od študijskega leta 1960/61 je predaval predmet mehanike in višje tehnične mehanike na Matematično-fizikalnem oddelku Fakultete za naravoslovje in tehnologijo ter dinamiko, hidromehaniko in letalstvo, za slušatelje tretjega oziroma četrtega letnika Fakultete za strojništvo. V poletnem semestru 1961 je predaval višjo matematiko na Fakulteti za elektrotehniko. V študijskih letih 1960/61 in 1961/62 je predaval predmet splošne mehanike trdnih teles na Oddelku za gradbeništvo FAGG in v poletnem semestru predmet teorija plastičnosti na Fakulteti za gradbeništvo v Sarajevu.

Od 22. decembra 1961 dalje pa do svoje smrti je bil s ponovnimi izvolitvami izvoljen za podpredsednika Slovenske akademije znanosti in umetnosti. V priznanje njegovim visokim znanstvenim kakovostim ga je Srpska akademija nauka i umetnosti v Beogradu leta 1961 izvolila za dopisnega člana. Od 1. decembra 1961 do 31. julija 1963 je bil direktor Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Dne 9. novembra 1962 je bil odlikovan z redom dela z rdečo zastavo. Udeležil se je VI. Jugoslovanskega kongresa za teoretično in uporabno mehaniko v Splitu 1962. leta. Od 3. junija 1964 dalje je bil predsednik

jugoslovanskega društva za teoretično in uporabno mehaniko, istega leta se je udeležil VII. jugoslovanskega kongresa za teoretično in uporabno mehaniko v Vrnjački Banji ter konference za vodne stroje v Temišvaru z zelo odmevnim referatom: Über die Strömungsverhältnisse im Übergangsraum von Kaplan-turbinen. Dne 29. novembra 1965 je bil odlikovan z redom zaslug za narod z zlato zvezdo. V študijskih letih od 1965 do 1967 je bil predsednik sveta Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Leta 1966 se je udeležil VIII. jugoslovanskega kongresa za teoretično in uporabno mehaniko v Splitu. V letih 1966 do 1970 je bil predsednik jugoslovanskega društva za mehaniko, v katerem je bil prvi častni predsednik. Z referatom se je udeležil IX. jugoslovanskega kongresa za teoretično in uporabno mehaniko od 3. do 8. februarja 1968. Kot dober poznavalec razvoja Univerze v Ljubljani je od 30. oktobra 1968 do novembra 1969 sodeloval v odboru za pripravo zbornika "Petdeset let slovenske Univerze v Ljubljani". Uredil je poglavje o Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in napisal uvod. Skupaj s prof.dr. Dušanom Avscem je napisal odstavek o mehaniki.

Leta 1968 in 1969 je predaval na Tehniški univerzi v Budimpešti o problemih hidrodinamičnega preračuna vodnih strojev. V študijskem letu 1970/71 je na III. stopnji Oddelka za gradbeništvo FAGG predaval predmeta matematična sredstva v tehniki in mehaniko. V poletnem semestru 1971 je imel pri podiplomskem študiju na gradbeni fakulteti v Sarajevu vrsto predavanj iz teorije plastičnosti. Leta 1973 je prejel Kidričevo nagrado za življenjsko delo in istega leta ga je Akademija nauka i umetnosti Bosne i Hercegovine izvolila za svojega dopisnega člana, Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik v Zürichu za dosmrtnega člana; od leta 1973 pa je bil član plenuma sveta akademij znanosti in umetnosti SFRJ. V šolskem letu 1974/75 je predaval mehaniko tekočin na Visoki tehniški šoli v Mariboru, in sicer v poletnem VII. semestru študija na strojnem oddelku. Julija 1975 je v Vidmu v mednarodnem centru

za mehaniko vodil tečaj o širjenju elastičnih valov in uporabah pri preračunu konstrukcij.

Dne 22. oktobra 1975 je bil odlikovan z redom bratstva in enotnosti z zlatim vencem. Leta 1976 je predaval o elastomehaniki lupin na Gradbeni fakulteti Univerze v Skopju. Kot redni profesor je delal do 30. oktobra 1976. leta, ko je po 48 letih svojega predanega in neutrudnega pedagoškega dela stopil v zaslužni pokoj. Po upokojitvi mu je fakultetni svet dne 12. novembra 1976 podelil naslov zaslužni profesor. Do konca leta 1976 je bil predsednik komisije za podeljevanje Kidričevih nagrad in nagrad sklada.

Bil je častni član Zveze strojnih in elektrotehniških inženirjev Jugoslavije, častni član Zveze gradbenih inženirjev in tehnikov Jugoslavije in častni član Zveze strojnih inženirjev in tehnikov Slovenije. Univerza v Ljubljani mu je nazadnje dne 12. decembra 1979 izkazala hvaležnost s podelitvijo najvišjega naslova častnega doktorata za znanstvene dosežke na področju teoretične in uporabne mehanike. Prof. Kuhelj je po odhodu v pokoj ostal še vedno dejaven predavatelj, skoraj do svoje smrti, skupno beležimo 52 let njegove pedagoške dejavnosti.

Enako nesebično in zavzeto je profesor Kuhelj sodeloval tudi pri širjenju in poglobljanju prirodoslovnega in tehniškega znanja zunaj šolskega pouka kot pisec poljudnoznanstvenih knjig, kot pogost predavatelj pri prirodoslovnem društvu, ki mu je tudi nekaj let predsedoval, in kot član uredniškega odbora Proteusa. Za posledicami prometne nesreče se je 31. julija leta 1980 v Kliničnem centru v Ljubljani v osemindesetem letu iztekla življenjska pot izjemnega slovenskega inženirja, znanstvenika, pedagoga in mentorja. S smrtjo profesorja Kuhlja smo izgubili zadnjo osebnost slovenske znanosti, ki je s takšno natančnostjo obvladovala tako široka in zahtevna področja znanosti. Spoštovanja vredno je tudi dejstvo, da je profesor Kuhelj vse življenje znanstveno deloval doma, čeprav mu je tujina v času njegovega največjega znanstvenega vzpona ponujala več kakor mu je lahko tedaj dajala domovina.

Obisk pri graditelju letal in vodnih turbin

Pisati o inženirju Kuhlju pomeni obenem obnavljati poglavje iz zgodovine slovenskega in jugoslovanskega letalstva, borbo s težavami, ki se postavljajo majhnemu, deloma zamudniškemu narodu nasproti, borbo s pomanjkanjem sredstev, z iskanjem poti, da se kljub temu načrti vsaj do neke mere uresničijo, skratka, pionirsko borbo za napredek in razvoj sodobne tehnike v domovini. Pravijo, da čez sedem let vse prav pride. V našem primeru bi rekel, da lahko kdaj tudi čez trideset. Kajti prav toliko let bo skoraj minilo, odkar sva z inž. Kuhljem služila v

Petrovaradinu in v Novem Sadu vojake pri letalcih (leta 1928). Zato mi je razgovor z njim od nekdaj pomenil tudi obnavljanje starih spominov in mi snov, o kateri sva se pogovarjala, ni bila povsem neznana. Če sva se z Antonom Kuhljem pri letalcih поблиže spoznala, pa sega najino poznanstvo še dalje, nazaj v dijaška leta, ko sva oba obiskovala pred in med prvo svetovno vojno nemško gimnazijo v Trstu, čeprav nisva bila sošolca. Prvi ožji stik med nama je bil potem, ko so Italijani okupirali Trst ter razpustili nemško, a tudi slovensko gimnazijo, ki se je bila med prvo

svetovno vojno zatekla iz Gorice v Trst, in so prešli njeni razredi v ilegalo. Ko je bilo tudi teh tečajev konec, je Anton Kuhelj dokončal klasično gimnazijo v Kranju in tam tudi maturiral.

Anton Kuhelj izhaja iz tržaške delavske družine. Njegov oče je bil dolga leta delavec v javnih skladiščih (Maggazzini generali) v Trstu, dokler ni leta 1931 pod fašizmom izgubil službe in se je moral preseliti z družino vred za sinom Antonom v Jugoslavijo. Anton je zgodaj izgubil mamo. Imel je še brata in tri sestre, od katerih je ena medtem umrla.

Vzgoja v tržaških slovenskih delavskih družinah bi zahtevala poglavje zase. Če obnavljam danes spomine na svoja srečanja z Antonom Kuhljem, potem moram reči, da nisem zlepa srečal človeka, ki bi kazal tako dobro domačo vzgojo, ki bi bil vselej tako do skrajnosti ljubezniv, takten, razumevajoč in tovariški. Vojaščina je trda šola, v kateri se ne samo krešejo, temveč se tudi izkažejo značaji. Ne spominjam se niti enega samega primera, da bi bil inž. Kuhelj kdaj nestrpen do kogar koli ali da bi bil do kogar koli popustil v svoji tovariški ljubeznivosti.

Anton Kuhelj je eden od tistih značajev, ki se uveljavijo šele postopoma, predvsem z znanjem, a tudi z urejenostjo, doslednostjo in potrpežljivostjo do vseh. Čeprav visokorasel in močan po postavi, je ostal precej časa v četi šole rezervnih letalskih oficirjev precej neopažen zaradi svoje skromnosti in nevsiljivosti. Toda postopoma se je izkazalo, da je bil med nami vsemi v svoji stroki najboljše podkovan, kar se teoretičnega poznavanja aerodinamike tiče, tudi bolj od samih naših inštruktorjev. Toda vse to se je odkrilo šele počasi, pri izpraševanju in končno pri praktični uporabi na samem letališču v Novem Sadu.

Mislim, da sva bila oba presenečena, kot sva se lepega dne srečala kot vojaka v petrovaradinski trdnjavi. Vedel sem sicer, da je študiral tehniko na ljubljanski univerzi (takrat, v Petrovaradinu in Novem Sadu, je bil že inženir), toda tehnikov je bilo veliko in le malo se jih je prijavilo za odsluženje vojaškega roka k letalcem. Zato sem se začudil, ko sem zagledal prav tega tihega, mirnega fanta sredi hrupnih mladeničev iz vseh koncev države, ki jih je povečini pritegnila v letalstvo malce pustolovska radovednost in veselje do tveganja. Prav tako je utegnil biti začuden tudi on, ko je zagledal med temi mladeniči mene - vase zamaknjenega filozofa.

Ko sem ga obiskal zdaj na Inštitutu za turbinske stroje, ki mu je upravnik in vodja, sem ga vprašal, od kdaj pravzaprav datira njegovo zanimanje za letalstvo.

»Iz otroških, oziroma iz dijaških let. Ali se spominjaš, kako je med prvo svetovno vojno zajel dijake pravi val navdušenja za izdelovanje letalskih modelov? Za gimnazijo je bila trgovinica, kjer si lahko dobil vse, kar si potreboval za konstruiranje letalskih modelov, zlasti elastiko, ki je poganjala propeler. Začel sem tudi sam konstruirati letalske modele, najprej po



Prof. dr. inž. Anton Kuhelj in Vladimir Bartol

načrtih drugih, na primer Bleriotovih, a kmalu sem prešel tudi sam k zamišljanju lastnih modelov. Na Opčinah sem jih potem spuščal v zrak in preizkušal njihovo učinkovitost.«

»Vidim, da je postalo tebi, kar je bilo nam, drugim dijakom, prehodna manija, življenjska strast.«

»Res je tako. Letalstvo, to je moja mladostna ljubezen. Na tehniški fakulteti sem študiral elektrotehniko pri prof. Milanu Vidmarju, toda privatno sem se ukvarjal tudi z aerodinamiko in z letalskimi konstrukcijami.«

»Torej med tvojo ‚mladostno ljubeznijo‘ in služenjem vojaškega roka pri letalcih ni bilo nobenega presledka v tvojem zanimanju za letalstvo?«

»Nobenega. Že ko sem študiral na tehniški fakulteti, sem bil vpisan v ljubljanski Aeroklub, čeprav se še nisem tam aktivno udeleževal, kakor sem se po povratku od vojaščine. Pač pa sem preštudiral konstrukcijo Bloudkovega letala ‚Sraka‘. Motor je imel samo dvajset konjskih sil in je pripadal motociklu angleške konstrukcije.«

»Ali je to isti Bloudek, ki je konstruiral ‚mamutsko skakalnico‘ v Planici?«

»Isti. Bil je tudi pionir našega letalstva in je že pred prvo svetovno vojno konstruiral nekaj lastnih modelov.«

S prof. Kuhljem sva sedela v njegovi sobi v Inštitutu za turbinske stroje, ki se je bil leto prej preselil

iz tesnih prostorov v Šiški v novo impozantno stavbo v Vižmarjih. Šla sva skozi veliko halo, ki zavzema večji del stavbe in sega v višino prav pod streho. Montirane so bile že naprave za preskušanje vodnih turbin in turbinskih pihal, glede nadaljnjih naprav pa so bili v dogovoru z Litostrojem. V veži sem videl v vitrini vrsto modelov vodnih turbin, ki so bile izdelane doma in ki jih preskušajo po njihovi učinkovitosti. V vitrini poleg sem opazil, vrsto majhnih kovinskih valjev, ki so vsi na določeni točki bolj ali manj razjedeni. »Te vdolbine so posledica pojava, ki ga imenujemo kavitacija. Povzroča jih vodni curek, ki udarja venomer na kovino. Od kakovosti te je odvisna odpornost, kar je velike gospodarske važnosti, kajti ni vseeno, kolikšna je doba trajanja neke vodne turbine.«

Prof. Kuhelj mi je razložil fizikalni princip tega »votlinčenja«, nakar sem mu zastavil vprašanje:

»Ali je kakšna tesnejša zveza med letalstvom in vodnimi turbinami?«

»Hočeš reči: med zakoni aerodinamike in zakoni hidrodinamike. Taka sorodniška zveza je in se tudi zmerom bolj uveljavlja v teoriji in praksi, čeprav seveda aerodinamika in hidrodinamika nista istovetni. Vendar preizkušamo vodne stroje z zrakom, a profile letalskih kril z vodo, pri čemer te utegne zanimati to, da je aerodinamika v bistvu bolj preprosta od hidrodinamike. Vzemimo primer letalo, ki ima eno samo krilo, v nasprotju z vodno turbino, ki ima veliko število lopat in tekačev, od katerih stroja in lege je odvisna učinkovitost turbine in ki jih je treba eksperimentalno preskuševati, kajti teoretične zakonitosti veljajo samo na splošno in samo v principu.«

V pisarni sva nadaljevala pogovor o njegovem delu in izkušnjah v našem letalstvu.

»Ko si se vrnil od vojaščine, si se torej začel aktivno udeleževati v našem Aeroklubu?« sem navezal pogovor.

»Da. Takrat je inž. Bloudek konstruiral svoje famozno letalo ‚Lojze‘ (Bloudek II) in napravil tudi sam preračune.

Toda za Vazduhoplovno komando je bila potrebna točna statična in aerodinamična dokumentacija, ki sem jo po Bloudkovih podatkih sam napravil (leta 1928/1929).«

»Prešli smo nato h gradnji jadralnih letal. Najprej smo nekaj teh zgradili po tujih načrtih. Tako smo iz teh prvih jadralnih in iz prvih motornih letal (‚Lojze‘, Ljubljana) dobili potrebne izkušnje, da smo mogli preiti h konstrukciji lastnih letalskih modelov ter preračunali in izvedli nekaj lastnih letalskih tipov. Z nekaterimi navdušenimi piloti smo si zamislili najprej lahko letalo, ki bi pa moralo biti sposobno za najrazličnejše akrobacije. Okrog leta 1934 smo zgradili čisto majhen dvokrilec z motorjem 75 konjskih sil. Ime mu je bilo ‚Janez‘, morda se ga spominjaš? Razpetina kril je znašala samo 6 metrov, bilo je zelo dobro enosedežno letalo, sposobno za vse akrobacije.«

Čeprav mi inž. Kuhelj ni omenil niti z besedo težav, skozi katere se je moralo preriniti naše domače letalstvo, da bi vsaj v glavnem obdržalo korak z razvojem letalstva drugod po svetu, sem vendarle čutil iz pogovora, da je bilo pri konstrukciji lastnih tipov potrebno venomer misliti, da zgradiš s čim manjšimi sredstvi tem učinkovitejši aparat.

»Tedad so se lotili amaterji pri Aeroklubu gradnje letala po francoskem modelu ‚Pou du ciel‘ (‚Nebesna uš‘), ki pa se ni obneslo, ker je bil motor preslaboten. Posebej za ta motor sem konstruiral lastno letalo, in sicer športno enosedežno letalo, v katerega smo potem omenjeni motor montirali.«

»Nato sem prešel h konstrukciji šolskega letala za jadralne pilote ‚Alka‘. Naloga je bila zgraditi z materialom, ki nam je bil doma na razpolago, lahko letalo, ki smo ga skoraj v celoti prevlekli s platnom. Letalo se je dobro obneslo, tako da smo potem zgradili še nekaj primerkov istega tipa.«

»Leta 1936 se je začelo v naših prizadevanjih novo obdobje. Za nalogo sem si postavil, da bi zgradil letalo, ki bi potrebovalo čim manjši motor, da bi doseglo čim večjo hitrost in bi bilo usposobljeno za čim večjo višino. To je bilo turistično letalo in je bilo po zamisli zelo komplicirano. Motor je imel samo 45 konjskih sil, a hitrost bi znašala 190 km na uro.«

»To je vsekakor drzna zamisel,« sem pripomnil. »Kajti naša nekdanja šolska letala tipa ‚Hanriot‘ in tipa ‚Brandenburg‘ so imela okrog 100 konjskih sil in so dosegla komaj 120 km na uro.«

»Načrt je bil zares precej drzen. Vsak prostorček je bil smotrno izrabljen in kabina za pilota tako tesna, da je bil na primer prostor za ramena vgrajen v krila. Zato si ga nisem upal konstruirati neposredno po preračunu, temveč sem prej preizkusil glavni nosilec. Preizkušnja se je obnesla in zgradili smo nekaj primerkov. To letalo je bilo ‚Pionir‘ in pilot, ki je po vojni z njim letel, je bil zelo navdušen.«

Pripovedoval mi je razne prigode, ki so jih imeli piloti z njegovimi letali, ko naju je prišel eden izmed inženirjev v inštitutu obvestiti, da so stroji v obratu in da bo zdaj zadnja preskušnja Francisove turbine za hidrocentralo Peruča pri Splitu.

Stopila sva navzdol v halo, kjer naju je zajel oglušujoč ropot delujočih strojev: preskuševalna naprava za turbine na srednji pritisk je tekla. Model po nekem švicarskem osnutku bi izkoriščal samo nekaj nad 80% vodne energije. Naloga inštituta je bila: razviti model, katerega izkoristek bi se dvignil tja v bližino 90%. Izdelali so več takih modelov in preskušali njihovo donostnost. Zdaj se preskuša poslednji končni model. (Kopijo tega zaključnega modela sem si pozneje ogledal v delavnici.)

Ko sva se vrnila iz hrupa delujočih strojev spet v inž. Kuhljevo delovno sobo, sem povprašal prijatelja po njegovih osebnih doživetjih in izkušnjah v letalstvu. Kajti takrat, ko sva služila vojaški rok, je bil inž. Kuhelj zaradi kratkovidnosti dodeljen

tehničnemu (mehaničnemu) oddelku, čeprav sem dobro vedel, da ga je mikalo tudi samo pilotiranje. Namuznil se je kakor navihan otrok.

»Da, tudi vzletel sem sam in to šele leta 1940, ko mi je bilo že 38 let. Malce zrela doba za pilotažo, kajne? Učil sem se pilotiranja pravzaprav »kontraband« in imel sem nekaj prav nevarnih doživetij. A končno sem le »laširal« in sem vzletel.«

Pri tem sem se spomnil zgodbe o Dedalu in Ikaru in recitiral začetek Ovidove pesnitve, kako sta bila Dedalu, ki je s sinom Ikarom umiral na Kreti od hrepenenja po daljni domovini, zaprta zemlja in morje in kako je tedaj zasnoval pobeg skozi zrak: -.. Ibimus illac.

Omnia possideat, non possidet aera Minos.

Pogledala sva si z inž. Kuhljem v oči in se začudila, da sva danes še tu in da nisva končala kot Ikarus, prvi letalec. Kajti roko na srce: bilo je dovolj priložnosti za tak konec.

Dolga in težavna je bila pot, ki jo je prehodil dijaček, ko je spuščal svoje prve modele na gmajnah pri Opčinah nad Trstom, do prvega letalskega strokovnjaka pri nas.

Vladimir Bartol

(Povzeto po knjigi *Obiski pri slovenskih znanstvenikih*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1961)

SLOTRIB '02

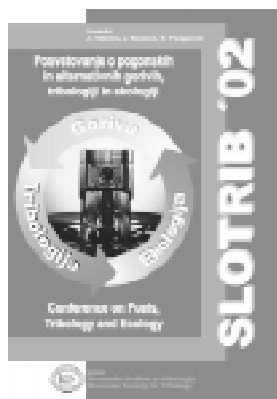
Posvetovanje o pogonskih in alternativnih gorivih, tribologiji in ekologiji (21.-22.11.2002, Portorož)

Slovensko društvo za tribologijo je 21. in 22. novembra 2002 v kongresnem centru Hotelov Morje v Portorožu organiziralo **Posvetovanje o pogonskih in alternativnih gorivih, tribologiji in ekologiji**, ki so ga finančno podprli Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport Republike Slovenije, OLMA d.d. – Ljubljana, OMV Istrabenz d.o.o. – Koper, PETROL d.d. – Ljubljana, SŽ Acroni d.d. – Jesenice in Center za tribologijo in tehnično diagnostiko iz Ljubljane. Posvetovanje je bilo že peto po vrsti v sklopu posvetovanj pod imenom SLOTRIB, ki ga Slovensko društvo za tribologijo organizira vsaki dve leti.



Sl. 1. Odprtje posvetovanja - predsednik društva za tribologijo, Prof.dr. Jože Vižintin

Na posvetovanju so bili predstavljeni rezultati znanstveno-raziskovalnega dela slovenskih strokovnjakov s področja goriv, tribologije in ekologije. Zelo spodbudno je, da je bilo izmed 26 zelo kakovostnih prispevkov, objavljenih v zborniku posvetovanja kar 16 prispevkov iz industrije. Tematsko so bila predavanja razvrščena v pet sekcij, in sicer v Klasična goriva (4), Alternativna goriva (6), Maziva (5), Materiali (5) in Tehnična diagnostika (6).



Sl. 2. Zbornik posvetovanja

Letošnjega posvetovanja se je udeležilo prek 130 udeležencev s slovenskih inštitutov in obeh univerz, še posebej pa je vzpodbudno, da je bila večina udeležencev iz slovenskih podjetij.



Sl. 3. Prijava udeležencev posvetovanja

Številčna udeležba posvetovanja in več ko polovica predavateljev iz industrije jasno kažeta, da je bila odločitev o razširitvi tematike posvetovanja na področje pogonskih in alternativnih goriv ter ekologije pravilna, po drugi strani pa daje vedeti, da so v slovenski industriji vedno večje zahteve po razširjanju znanja in poznavanju obrabnih in tornih pojavov. Močna zasedenost sekcij klasičnih in alternativnih goriv in maziv ter ekološko naravnana tematika velikega števila prispevkov tudi kažeta, da se ekološka osveščenost in skrb za naše okolje zvišuje, kar je več ko vzpodbudno.



Sl. 4. Posvetovanje o pogonskih in alternativnih gorivih, tribologiji in ekologiji

Posvetovanje se je končalo z okroglo mizo, ki so se je, poleg udeležencev posvetovanja, dejavno udeležili predstavniki sponzorjev (R. Glavina - OMV Istrabenz, B. Hrobat in B. Kus - OLMA, S. Simčič – PETROL) ter predstavnik Slovenskega nacionalnega naftnega komiteja (A. Peternel).

Okrogla miza je poskušala odgovoriti na vprašanje ***Proizvodnja goriv in maziv v Sloveniji – DA ali NE?*** Sklep okrogle mize je bil, da proizvodnja klasičnih goriv na podlagi nafte v Sloveniji nima perspektive, ima pa zato Slovenija možnosti, predvsem pa potencial za proizvodnjo alternativnih goriv, kakršna sta lesna biomasa in biodizel. Na drugi strani se maziva v Sloveniji že proizvajajo in je proizvodnja na področju industrijskih maziv tudi v prihodnje potrebna, saj tako ostajamo neodvisni od uvoza. Tako na področju goriv, kakor tudi na področju maziv pa bo za proizvodnjo in predvsem uporabo alternativnih in okolju prijaznih goriv in maziv nujno potrebna “pomoč” države, in sicer v smislu stimuliranja uporabe ekoloških goriv in maziv, izdelanih iz obnovljivih virov (lesna biomasa, biodizel, repično olje), kakor tudi v

smislu ustrezne zakonodaje o obvezni uporabi alternativnih goriv in ekološko primernih maziv v panogah, ki najbolj obremenjujejo okolje.

Vsem, ki so sponzorirali ali kakorkoli prispevali k takemu uspehu posvetovanja, se na tem mestu iskreno zahvaljujemo.

B. Podgornik¹, J. Vižintin², J. Bedenk³, R. Glavina⁴

¹ Predsednik organizacijskega odbora, Center za tribologijo in tehnično diagnostiko, Bogišičeva 8, 1000 Ljubljana

² Predsednik Slovenskega društva za tribologijo, Bogišičeva 8, 1000 Ljubljana

³ Petrol d.d., Dunajska c. 50, 1000 Ljubljana

⁴ OMV Istrabenz d.o.o., Ferrarska 7, 6000 Koper

Osebnosti

Personal Events

Magisteriji, diplome

MAGISTERIJI

Na Fakulteti za strojništvo Univerze v Ljubljani so z uspehom zagovarjali svoja magistrska dela, in sicer:

dne 4. novembra 2002: **Matjaž Dvoršek**, z naslovom: "Optimiranje hladilnega sistema parnega postrojenja";

dne 27. novembra 2002: **Alojz Perpar**, z naslovom: "Načrtovanje procesov izdelave sestavnih delov v distribuiranem proizvodnem sistemu" in

dne 28. novembra 2002: **Tomaž Roblek**, z naslovom: "Optimiranje zmogljivosti visokohitrostnih odrezovalnih strojev".

S tem so navedeni kandidati dosegli akademsko stopnjo magistra tehničnih znanosti.

DIPLOMIRALISO

Na Fakulteti za strojništvo Univerze v Ljubljani so pridobili naziv univerzitetni diplomirani inženir strojništva:

dne 29. novembra 2002: Andrej AUBER, Aleš HROVARIN, Matjaž MULC, Sašo STUDEN.

Na Fakulteti za strojništvo Univerze v Mariboru so pridobili naziv univerzitetni diplomirani inženir strojništva:

dne 28. novembra 2002: Borut GODEC, Marjana KARNEŽA, Matej ROŠKAR, Tomaž ŠILEC.

*

Na Fakulteti za strojništvo Univerze v Ljubljani so pridobili naziv diplomirani inženir strojništva:

dne 14. novembra 2002: Patricjo BOŽIČ, Robert TISOVEC, Miha VOJIR;

dne 19. novembra 2002: Andraž ANŽIČ, Sandi KEGU, Miran PENIČ, Matjaž ROT, Matej ŠLIBAR.

Na Fakulteti za strojništvo Univerze v Mariboru je pridobil naziv diplomirani inženir strojništva:

dne 28. novembra 2002: Srečko GOMBOC, Drago MEH, Ivan PEŠAK, Erwin PUCH.

Navodila avtorjem

Instructions for Authors

Članki morajo vsebovati:

- naslov, povzetek, besedilo članka in podnaslove slik v slovenskem in angleškem jeziku,
- dvojezične preglednice in slike (diagrami, risbe ali fotografije),
- seznam literature in
- podatke o avtorjih.

Strojniški vestnik izhaja od leta 1992 v dveh jezikih, tj. v slovenščini in angleščini, zato je obvezen prevod v angleščino. Obe besedili morata biti strokovno in jezikovno med seboj usklajeni. Članki naj bodo kratki in naj obsegajo približno 8 tipkanih strani. Izjemoma so strokovni članki, na željo avtorja, lahko tudi samo v slovenščini, vsebovati pa morajo angleški povzetek.

Vsebina članka

Članek naj bo napisan v naslednji obliki:

- Naslov, ki primerno opisuje vsebino članka.
- Povzetek, ki naj bo skrajšana oblika članka in naj ne presega 250 besed. Povzetek mora vsebovati osnove, jedro in cilje raziskave, uporabljeno metodologijo dela, povzetek rezultatov in osnovne sklepe.
- Uvod, v katerem naj bo pregled novejšega stanja in zadostne informacije za razumevanje ter pregled rezultatov dela, predstavljenih v članku.
- Teorija.
- Eksperimentalni del, ki naj vsebuje podatke o postavitvi preskusa in metode, uporabljene pri pridobitvi rezultatov.
- Rezultati, ki naj bodo jasno prikazani, po potrebi v obliki slik in preglednic.
- Razprava, v kateri naj bodo prikazane povezave in posplošitve, uporabljene za pridobitev rezultatov. Prikazana naj bo tudi pomembnost rezultatov in primerjava s poprej objavljenimi deli. (Zaradi narave posameznih raziskav so lahko rezultati in razprava, za jasnost in preprostejše bralčevo razumevanje, združeni v eno poglavje.)
- Sklepi, v katerih naj bo prikazan en ali več sklepov, ki izhajajo iz rezultatov in razprave.
- Literatura, ki mora biti v besedilu oštevilčena zaporedno in označena z oglatimi oklepaji [1] ter na koncu članka zbrana v seznamu literature. Vse opombe naj bodo označene z uporabo dvignjene številke¹.

Oblika članka

Besedilo naj bo pisano na listih formata A4, z dvojnimi presledki med vrstami in s 3 cm širokim robom, da je dovolj prostora za popravke lektorjev. Najbolje je, da pripravite besedilo v urejevalniku Microsoft Word. Hkrati dostavite odtis članka na papirju, vključno z vsemi slikami in preglednicami ter identično kopijo v elektronski obliki.

Prosimo, da ne uporabljate urejevalnika LaTeX, saj program, s katerim pripravljamo Strojniški vestnik, ne uporablja njegovega formata. V urejevalniku LaTeX oblikujte grafe, preglednice in enačbe in jih stiskajte na kakovostnem laserskem tiskalniku, da jih bomo lahko presneli.

Enačbe naj bodo v besedilu postavljene v ločene vrstice in na desnem robu označene s tekočo številko v okroglih oklepajih

Enote in okrajšave

V besedilu, preglednicah in slikah uporabljajte le standardne označbe in okrajšave SI. Simbole fizikalnih veličin v besedilu pišite poševno (kurzivno), (npr. v , T , n itn.). Simbole enot, ki sestojijo iz črk, pa pokončno (npr. ms^{-1} , K, min, mm itn.).

Vse okrajšave naj bodo, ko se prvič pojavijo, napisane v celoti v slovenskem jeziku, npr. časovno spremenljiva geometrija (CSG).

Papers submitted for publication should comprise:

- Title, Abstract, Main Body of Text and Figure Captions in Slovene and English,
- Bilingual Tables and Figures (graphs, drawings or photographs),
- List of references and
- Information about the authors.

Since 1992, the Journal of Mechanical Engineering has been published bilingually, in Slovenian and English. The two texts must be compatible both in terms of technical content and language. Papers should be as short as possible and should on average comprise 8 typed pages. In exceptional cases, at the request of the authors, speciality papers may be written only in Slovene, but must include an English abstract.

The format of the paper

The paper should be written in the following format:

- A Title, which adequately describes the content of the paper.
- An Abstract, which should be viewed as a miniversion of the paper and should not exceed 250 words. The Abstract should state the principal objectives and the scope of the investigation, the methodology employed, summarize the results and state the principal conclusions.
- An Introduction, which should provide a review of recent literature and sufficient background information to allow the results of the paper to be understood and evaluated.
- A Theory
- An Experimental section, which should provide details of the experimental set-up and the methods used for obtaining the results.
- A Results section, which should clearly and concisely present the data using figures and tables where appropriate.
- A Discussion section, which should describe the relationships and generalisations shown by the results and discuss the significance of the results making comparisons with previously published work. (Because of the nature of some studies it may be appropriate to combine the Results and Discussion sections into a single section to improve the clarity and make it easier for the reader.)
- Conclusions, which should present one or more conclusions that have been drawn from the results and subsequent discussion.
- References, which must be numbered consecutively in the text using square brackets [1] and collected together in a reference list at the end of the paper. Any footnotes should be indicated by the use of a superscript¹.

The layout of the text

Texts should be written in A4 format, with double spacing and margins of 3 cm to provide editors with space to write in their corrections. Microsoft Word for Windows is the preferred format for submission. One hard copy, including all figures, tables and illustrations and an identical electronic version of the manuscript must be submitted simultaneously.

Please do not use a LaTeX text editor, since this is not compatible with the publishing procedure of the Journal of Mechanical Engineering. Graphs, tables and equations in LaTeX may be supplied in good quality hard-copy format, so that they can be copied for inclusion in the Journal.

Equations should be on a separate line in the main body of the text and marked on the right-hand side of the page with numbers in round brackets.

Units and abbreviations

Only standard SI symbols and abbreviations should be used in the text, tables and figures. Symbols for physical quantities in the text should be written in Italics (e.g. v , T , n , etc.). Symbols for units that consist of letters should be in plain text (e.g. ms^{-1} , K, min, mm, etc.).

All abbreviations should be spelt out in full on first appearance, e.g., variable time geometry (VTG).

Slike

Slike morajo biti zaporedno oštevilčene in označene, v besedilu in podnaslovu, kot sl. 1, sl. 2 itn. Posnete naj bodo v kateremkoli od razširjenih formatov, npr. BMP, JPG, GIF. Za pripravo diagramov in risb priporočamo CDR format (CorelDraw), saj so slike v njem vektorske in jih lahko pri končni obdelavi preprosto povečujemo ali pomajšujemo.

Pri označevanju osi v diagramih, kadar je le mogoče, uporabite označbe veličin (npr. t , v , m itn.), da ni potrebno dvojezično označevanje. V diagramih z več krivuljami, mora biti vsaka krivulja označena. Pomen oznake mora biti pojasnjen v podnapisu slike.

Vse označbe na slikah morajo biti dvojezične.

Za vse slike po fotografskih posnetkih je treba priložiti izvirne fotografije ali kakovostno narejen posnetek. V izjemnih primerih so lahko slike tudi barvne.

Preglednice

Preglednice morajo biti zaporedno oštevilčene in označene, v besedilu in podnaslovu, kot preglednica 1, preglednica 2 itn. V preglednicah ne uporabljajte izpisanih imen veličin, ampak samo ustrezne simbole, da se izognemo dvojezični podvojitvi imen. K fizikalnim veličinam, npr. t (pisano poševno), pripišite enote (pisano pokončno) v novo vrsto brez oklepajev.

Vsi podnaslovi preglednic morajo biti dvojezični.

Seznam literature

Vsa literatura mora biti navedena v seznamu na koncu članka v prikazani obliki po vrsti za revije, zbornike in knjige:

- [1] Tarnag, Y.S., Y.S. Wang (1994) A new adaptive controller for constant turning force. *Int J Adv Manuf Technol* 9(1994) London, pp. 211-216.
- [2] Čuš, F., J. Balič (1996) Rationale Gestaltung der organisatorischen Abläufe im Werkzeugwesen. *Proceedings of International Conference on Computer Integration Manufacturing*, Zakopane, 14.-17. maj 1996.
- [3] Oertli, P.C. (1977) Praktische Wirtschaftskybernetik. *Carl Hanser Verlag*, München.

Podatki o avtorjih

Članku priložite tudi podatke o avtorjih: imena, nazive, popolne poštne naslove, številke telefona in faksa ter naslove elektronske pošte.

Sprejem člankov in avtorske pravice

Uredništvo Strojniškega vestnika si pridržuje pravico do odločanja o sprejemu članka za objavo, strokovno oceno recenzentov in morebitnem predlogu za krajšanje ali izpopolnitev ter terminološke in jezikovne korekture.

Avtor mora predložiti pisno izjavo, da je besedilo njegovo izvirno delo in ni bilo v dani obliki še nikjer objavljeno. Z objavo preidejo avtorske pravice na Strojniški vestnik. Pri morebitnih kasnejših objavah mora biti SV naveden kot vir.

Rokopisi člankov ostanejo v arhivu SV.

Vsa nadaljnja pojasnila daje:

Uredništvo
STROJNIŠKEGA VESTNIKA
p.p. 197/IV
1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4771-757
Telefaks: (01) 2518-567
E-mail: strojnikski.vestnik@fs.uni-lj.si

Figures

Figures must be cited in consecutive numerical order in the text and referred to in both the text and the caption as Fig. 1, Fig. 2, etc. Figures may be saved in any common format, e.g. BMP, GIF, JPG. However, the use of CDR format (CorelDraw) is recommended for graphs and line drawings, since vector images can be easily reduced or enlarged during final processing of the paper.

When labelling axes, physical quantities, e.g. t , v , m , etc. should be used whenever possible to minimise the need to label the axes in two languages. Multi-curve graphs should have individual curves marked with a symbol, the meaning of the symbol should be explained in the figure caption.

All figure captions must be bilingual.

Good quality black-and-white photographs or scanned images should be supplied for illustrations. In certain circumstances, colour figures may be considered.

Tables

Tables must be cited in consecutive numerical order in the text and referred to in both the text and the caption as Table 1, Table 2, etc. The use of names for quantities in tables should be avoided if possible: corresponding symbols are preferred to minimise the need to use both Slovenian and English names. In addition to the physical quantity, e.g. t (in Italics), units (normal text), should be added in new line without brackets.

All table captions must be bilingual.

The list of references

References should be collected at the end of the paper in the following styles for journals, proceedings and books, respectively:

- [1] Tarnag, Y.S., Y.S. Wang (1994) A new adaptive controller for constant turning force. *Int J Adv Manuf Technol* 9(1994) London, pp. 211-216.
- [2] Čuš, F., J. Balič (1996) Rationale Gestaltung der organisatorischen Abläufe im Werkzeugwesen. *Proceedings of International Conference on Computer Integration Manufacturing*, Zakopane, 14.-17. maj 1996.
- [3] Oertli, P.C. (1977) Praktische Wirtschaftskybernetik. *Carl Hanser Verlag*, München.

Author information

The following information about the authors should be enclosed with the paper: names, complete postal addresses, telephone and fax numbers and E-mail addresses.

Acceptance of papers and copyright

The Editorial Committee of the Journal of Mechanical Engineering reserves the right to decide whether a paper is acceptable for publication, obtain professional reviews for submitted papers, and if necessary, require changes to the content, length or language.

Authors must also enclose a written statement that the paper is original unpublished work, and not under consideration for publication elsewhere. On publication, copyright for the paper shall pass to the Journal of Mechanical Engineering. The JME must be stated as a source in all later publications.

Papers will be kept in the archives of the JME.

You can obtain further information from:

Editorial Board of the
JOURNAL OF MECHANICAL ENGINEERING
P.O.Box 197/IV
1001 Ljubljana, Slovenia
Telephone: +386 (0)1 4771-757
Fax: +386 (0)1 2518-567
E-mail: strojnikski.vestnik@fs.uni-lj.si