PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **29** (2001/2002)
Številka 3
Strani 152–153

Martin Juvan:

O PRIBLIŽKIH ZA ŠTEVILO π

Ključne besede: matematika, iracionalna števila, približki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/29/1478-Juvan.pdf

O PRIBLIŽKIH ZA ŠTEVILO π

V prvi številki tekočega letnika Preseka je Peter Petek zastavil zanimivo nagradno nalogo o iskanju najboljšega približka za število π ob omejitvi, da je približek izražen le z naravnimi števili, seštevanjem, množenjem in največ dvema kvadratnima korenoma. Priznati moram, da sprva nisem opazil, kako premišljeno so izbrane omejitve. Naj vam pojasnim, zakaj trdim, da so omejitve izbrane premišljeno.

Od štirih osnovnih računskih operacij sta dovoljeni le dve. Deljenja in odštevanja ne smemo uporabiti. Zakaj ne smemo uporabiti deljenja, ni težko ugotoviti. Če bi dovolili deljenje, bi lahko naredili vsa pozitivna racionalna števila (ulomke), z njimi pa se lahko poljubno približamo številu π. Najbolj znana tovrstna približka za π sta ulomka $\frac{22}{7}$ in $\frac{355}{113}$. Prvi je od π večji za dobro tisočino in četrt, drugi pa za nekaj manj kot $3 \cdot 10^{-7}$. Dobre približke za π z (relativno) majhnimi imenovalci dobimo s pomočjo *verižnih ulomkov*. Poleg že omenjenih dveh sta taka še npr. $\frac{104348}{33215}$ in $\frac{312689}{99532}$. Drugi je od π večji za manj kot $3 \cdot 10^{-11}$. Več o verižnih ulomkih in sorodnih temah iz teorije števil lahko preberete v knjigi *J. Grasselli, Diofantski približki*, ki je pred leti izšla v zbirki Knjižnica Sigma.

Nekoliko težje se je prepričati, da nam tudi odštevanje (skupaj z enim kvadratnim korenom) omogoča dobiti poljubno dobre približke za π. Velja namreč naslednja trditev, ki jo navajam brez dokaza.

Za vsako iracionalno število a je množica števil $\{na - \lfloor na \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$ "gosta" v intervalu $[0, 1]$. Pri tem $\lfloor na \rfloor$ označuje celi del izraza na.

Trditev torej pravi, da lahko za vsako število $x \in [0, 1]$ in vsako še tako majhno število $\varepsilon > 0$ najdemo tako naravno število n, da se število $na - \lfloor na \rfloor$ po absolutni vrednosti razlikuje od x za manj kot ε. Ker je $\sqrt{2}$ iracionalno število, iz trditve sledi, da že množica števil $\{m\sqrt{2} - n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ vsebuje poljubno dobre približke za π. Če m in n izbiramo med števili do 1000, sta najboljša $10\sqrt{2} - 11$, ki je od π večji za približno $5.4 \cdot 10^{-4}$, in $418\sqrt{2} - 588$, ki je od π manjši za okoli $3.2 \cdot 10^{-4}$. Seveda lahko namesto $\sqrt{2}$ vzamemo kvadratni koren kateregakoli drugega naravnega števila, ki ni popolni kvadrat.

Ostane še omejitev o uporabi največ dveh kvadratnih korenov. Če bi smeli uporabiti neomejeno mnogo kvadratnih korenov, bi zopet lahko dobili poljubno natančen približek za π. To vidimo na primer takole:

Začnemo z intervalom od števila $a \geq 1$ do malo večjega števila $a + \varepsilon$. Če vsa števila z intervala kvadriramo, dobimo interval od a^2 do $(a + \varepsilon)^2$. Novi interval je vsaj še enkrat daljši od začetnega, saj je $(a + \varepsilon)^2 - a^2 = 2a\varepsilon + \varepsilon^2 > 2\varepsilon$. Če kvadriranje ponavljamo, po nekaj korakih dobimo interval z dolžino vsaj 1. Tak interval pa vsebuje neko naravno število. Če to število sedaj korenimo tolikokrat, kolikorkrat smo kvadrirali začetni interval, dobimo število, ki je od a večje kvečjemu za ε. Preprost približek opisane oblike, ki ga dobimo z zaporedno uporabo treh kvadratnih korenov, je osmi koren iz 9489. Od π je večji za manj kot $2 \cdot 10^{-5}$ in je tako kar precej natančnejši od najboljšega približka, ki ga lahko dobimo z uporabo le dveh kvadratnih korenov. Zanimivo je tudi, kako lahko le z nekaj kvadratnimi koreni dobimo zelo natančne približke za π. Tako se 1024. koren (tega dobimo z 10 zaporednimi kvadratnimi koreni) iz celega dela števila π^{1024} od π razlikuje za manj kot 10^{-512}, kar je res zelo zelo malo. Naj še omenim, da je število, ki nastopa pod koreni, π^{1024}, ogromno, saj ima kar 510 desetiških števk.

In zakaj sta bila v nalogi dovoljena ravno dva kvadratna korena? Če dovolimo le enega, je naloga prelahka in zato ne preveč zanimiva. Če pa dopustimo tri korene (ali morda celo kakšnega več), pa je različnih oblik izrazov, ki jih lahko sestavimo iz njih, že kar preveč za "udobno" reševanje. Omejitev na dva korena je torej ravno pravšnja, da je naloga zanimiva, a ne pretežka.

Ena od možnosti, ki bi jo morda tudi lahko dopustili v nalogi, bi bila uporaba višjih korenov, na primer kubičnih, četrtih itd. Naj samo omenim, da je najboljši približek za π, ki ga lahko dobimo z uporabo enega kubičnega korena, kar tretji koren iz 31 (ta je od π manjši za dobri dve desettisočini). Seveda pa bi bilo to še vedno samo iskanje približka, saj števila π ni moč izraziti s končnim številom osnovnih računskih operacij in korenov nad naravnimi števili. Celo več, število π je *transcendentno*, kar pomeni, da ni ničla nobenega polinoma, katerega koeficienti so cela (ali pa racionalna) števila. Dokaz tega dejstva je leta 1882 našel nemški matematik Lindemann (in dokaz ni prav preprost).

Gotovo ste med branjem ugotovili, da številskih primerov, ki sem jih navedel, nisem izračunal s svinčnikom in papirjem, pa tudi ne z navadnim računalom. Uporabil sem osebni računalnik, pri računanju pa sem si pomagal s programskim paketom *Mathematica*, ki je med matematiki kar priljubljen, poleg numeričnega računanja pa zmore še marsikaj drugega.

Martin Juvan