

VPLIV VELIKOSTI IN SMERI ZAČETNE HITROSTI NA NATANČNOST DOMETA

Tadej Emeršič¹ in Vladimir Grubelnik²

¹ Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Univerza v Mariboru

² Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, Univerza v Mariboru

Povzetek – V prispevku obravnavamo vpliv začetne hitrosti različnih tipov žog na natančnost dometa. Primer je aktualen pri različnih igrah z žogo, kjer želimo zadeti določeno območje v igrišču. Ob upoštevanju zračnega upora pokažemo, da določena relativna sprememba velikosti začetne hitrosti pri večjih začetnih kotih meta povzroči manjšo spremembo želenega dometa. Za določeno območje dometa predstavimo tudi možne relativne spremembe smeri začetne hitrosti v odvisnosti od velikosti začetne hitrosti.

Abstract – In the paper, we are considering how the initial velocity of different balls affects the precision of the range. The case is actual for various games with the ball, where the goal is to hit the certain zone. We demonstrate, including the air resistance, that certain relative change in initial speed for bigger angles of elevation causes lesser change of desired range. For certain zone of the range, we show the possible relative changes in the direction of initial velocity with regard to its speed.

1 UVOD

Poševni met nam je dobro poznan iz vsakdanjega življenja. Z njegovim fizikalno-matematičnim opisom, brez upoštevanja zračnega upora, se srečamo v srednji šoli pri pouku fizike [1]. O poševnem metu najdemo tudi veliko prispevkov. Avtorji so pokazali, da je met brez upoštevanja zračnega upora ter z upoštevanjem linearnega zračnega upora analitično rešljiv [2, 3]. V primeru upoštevanja kvadratnega zakona upora, kjer imamo sistem nelinearnih diferencialnih enačb, pa je sistem analitično rešljiv samo ob določenih predpostavkah [4, 5], kot je na primer kratek čas leta [5]. Narejene so bile različne analize, kot so čas leta, domet, maksimalna višina itd. V praksi je poševni met raziskan predvsem na področju športa, še posebej iger z žogo [6, 7].

V prispevku se osredotočimo na vpliv velikosti in smeri začetne hitrosti leta različnih tipov žog na natančnost dometa. Obravnavamo poševni met s kvadratnim zakonom upora, saj ta najboljše opiše tire gibanj pri različnih igrah z žogo. Vpliv različnih žog obravnavamo tako, da upoštevamo različne koeficiente zračnega upora.

Na začetku predstavimo matematični model in nekaj primerov koeficientov upora za različne žoge. Nato podamo analitične rezultate za primer, ko lahko upor zanemarimo. V

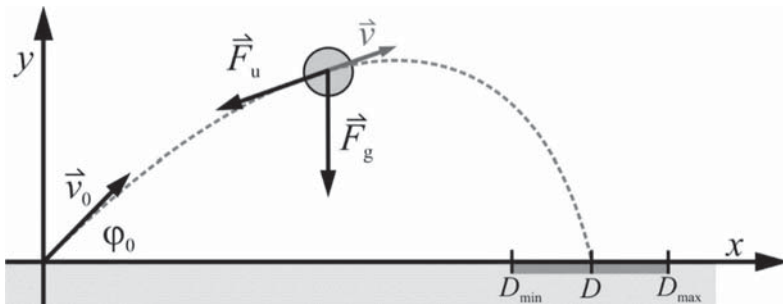
nadaljevanju pa se posebej osredotočimo na vpliv zračnega upora. Podamo numerične rezultate vpliva začetne hitrosti meta različnih tipov žog na natančnost dometa. Posebej obravnavamo vpliv velikosti hitrosti in vpliv začetnega kota leta. Primer je aktualen pri različnih igrah z žogo, kjer želimo z žogo zadeti določeno območje v igrišču.

2 MATEMATIČNI MODEL

Obravnavamo tir gibanja žoge, ki je posledica delovanja zunanjih sil na telo, začetne lege (x_0, y_0) in začetne hitrosti $\vec{v}_0$. V našem primeru postavimo začetek leta v koordinatno izhodišče ($x_0 = 0, y_0 = 0$) ter obravnavamo gibanje žoge pod vplivom teže $\vec{F}_g$ in sile upora $\vec{F}_u$ (slika 1). Uporabimo kvadratni zakon upora in upoštevamo, da deluje sila upora $\vec{F}_u$ v nasprotni smeri gibanja žoge:

$$\vec{F}_u = -k_u v^2 \hat{v}, \quad (1)$$

kjer je k_u koeficient zračnega upora in $\hat{v}$ enotski vektor v smeri hitrosti. Za različne tipe žog (različne k_u) proučujemo vpliv velikosti začetne hitrosti v_0 in začetnega kota leta φ_0 na domet žoge. Zanima nas, pri katerih pogojih zadenemo določeno območje na vodoravni podlagi ($D_{\min} < D < D_{\max}$), ki se nahaja na začetni višini leta $y = 0$ (slika 1).



Slika 1: Gibanje žoge pod vplivom zunanjih sil pri poševnem metu z upoštevanjem zračnega upora.

Zapišemo drugi Newtonov zakon gibanja v posamezni smeri:

$$ma_x = -F_{u,x}, \quad ma_y = -F_g - F_{u,y}, \quad (2a, b)$$

pri čemer je $F_g = mg$, $F_{u,x} = F_u \frac{v_x}{v}$, $F_{u,y} = F_u \frac{v_y}{v}$ in $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$. Enačbi 2a in 2b

nekoliko preuredimo in zapišemo pospešek v posamezni smeri:

$$a_x = -k v_x v, \quad a_y = -k v_y v - g, \quad (3a, b)$$

pri čemer je $k = \frac{k_u}{m}$ [5]. V tabeli 1 so podane vrednosti konstante k za nekaj tipov žog, ki jih uporabljamo pri različnih športih. Pri tem upoštevamo, da je $k_u = cSp/2$, kjer je gostota zraka $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$, $c = 0,5$ in S prečni presek posamezne žoge [1].

Tabela 1. Izračunane vrednosti koeficientov k za različne tipe žog.

vrsta žoge	m [g]	S [10^3 mm^2]	k_u [$10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$]	k [m^{-1}]
namizni tenis	3	1,3	0,4	0,14
golf	46	1,4	0,5	0,01
tenis	58	14	4,6	0,08
košarka	660	46	15,0	0,02
nogomet	410	37	12,0	0,03
rokomet	425	29	9,4	0,02
odbojka	260	34	11,0	0,04

Ob upoštevanju začetnih pogojev ($v_x(0) = v_0 \cos\varphi_0$, $v_y(0) = v_0 \sin\varphi_0$, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$) ter enačb 3a in 3b lahko iz pospeškov in hitrosti:

$$a_x = dv_x/dt, a_y = dv_y/dt, \quad (4a, b)$$

$$v_x = dx/dt, v_y = dy/dt, \quad (5a, b)$$

določimo tir gibanja $x(t)$ in $y(t)$, kar bomo podrobneje predstavili v nadaljevanju.

3 REZULTATI

Predstavljeni so rezultati matematičnega modela (enačbe 4a, b in 5a, b). Proučujemo vpliv velikosti hitrosti v_0 in vpliv kota φ_0 na domet žoge pri različnih vrednostih konstante k (tabela 1).

Najprej obravnavajmo primer, ko lahko vpliv zračnega upora zanemarimo. V enačbah 3a in 3b predpostavimo, da je $k = 0$. Iz poenostavljenega modela lahko s pomočjo enačb 4a, b in 5a, b zapišemo tir gibanja, ki je v tem primeru parabola:

$$y = (\tan\varphi_0)x - \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2 \cos^2\varphi_0}. \quad (6)$$

Ob upoštevanju, da iščemo domet D na višini $y = 0$, enačbo 6 izenačimo z nič in izrazimo $x = D$:

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi_0}{g}. \quad (7)$$

Iz enačbe 7 vidimo, da je domet odvisen od velikosti hitrosti v_0 in kota φ_0 . Na sliki 2a je prikazano, kako je pri določenem dometu velikost hitrosti pogojena s kotom φ_0 :

$$v_0 = \left(\frac{Dg}{\sin 2\varphi_0} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Iz enačbe 8 in slike 2a (črtkana črta) vidimo, da je pri kotu $\varphi_0 = 45^\circ$ potrebna najmanjša hitrost v_0 , da dosežemo določen domet.

V nadaljevanju si pogledimo primer, ko zračni upor ni več zanemarljiv. Primer rešimo numerično s preprosto Eulerjevo metodo [8], kjer ob upoštevanju enačb 3a, b zapišemo enačbe 4a, b in 5a, b v diferenčni obliki:

$$x_{i+1} = x_i + v_x \Delta t, y_{i+1} = y_i + v_y \Delta t, \quad (9a, b)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - kv_x v \Delta t, v_{y,i+1} = v_{y,i} - (kv_y v + g) \Delta t. \quad (10a, b)$$

Za simulacijo enačb (9a, b in 10a, b) lahko uporabimo tabelarično orientirane računalniške programe, kot je Microsoft Excel, ki z vnosom enačb omogoča izračun posameznih vrednosti po časovnih korakih Δt v obliki tabele.

Za različne vrednosti konstante k so rezultati prikazani na slikah 2a–d. Iz slik je razvidno, da z večanjem vpliva upora potrebujemo večje hitrosti, da dosežemo določeno razdaljo. Kot, pri katerem lahko z najmanjšo hitrostjo v_0^* dosežemo želeno razdaljo, se z večanjem vpliva upora in z velikostjo dometa manjša ($\varphi_0 < 45^\circ$, slika 2b–d, črtkana črta).

V kolikor je velikost hitrosti večja od minimalne ($v_0 > v_0^*$), lahko želeni domet dosežemo pri dveh različnih kotih ($\varphi_{0,I}$ in $\varphi_{0,II}$). V primeru, ko smo upor zanemarili (slika 2a), gre za popolnoma simetričen problem. Domet je namreč enak, ko je $\sin(2\varphi_{0,I}) = \sin(2\varphi_{0,II})$ (glej enačbo 7).

Oglejmo si še, v katerih mejah mora biti velikost hitrosti v_0 in kota φ_0 , da dosežemo zeleno območje dometa $D_{\min} < D < D_{\max}$. Kot primer je na sliki 2 sivo obarvano območje, ki določa velikost hitrosti in kota, da dosežemo območje dometa $10 \text{ m} < D < 15 \text{ m}$. Razberemo lahko, da je pri določeni velikosti hitrosti v_0 mogoče precejšnje odstopanje v kotu φ_0 . Z večanjem vpliva upora opazimo tudi (slika 2d), da je pri večjih kotih $\varphi_{0,II}$ v primerjavi z manjšimi koti $\varphi_{0,I}$ možno večje odstopanje v velikosti začetne hitrosti v_0 . Natančneje si bomo to ogledali v nadaljevanju, ko bomo ločeno obravnavali vpliv spremembe velikosti in smeri začetne hitrosti na domet.

Proučili bomo vpliv spremembe velikosti hitrosti v_0 in kota φ_0 na spremembo dometa. Zanima nas relativno povečanje velikosti hitrosti:

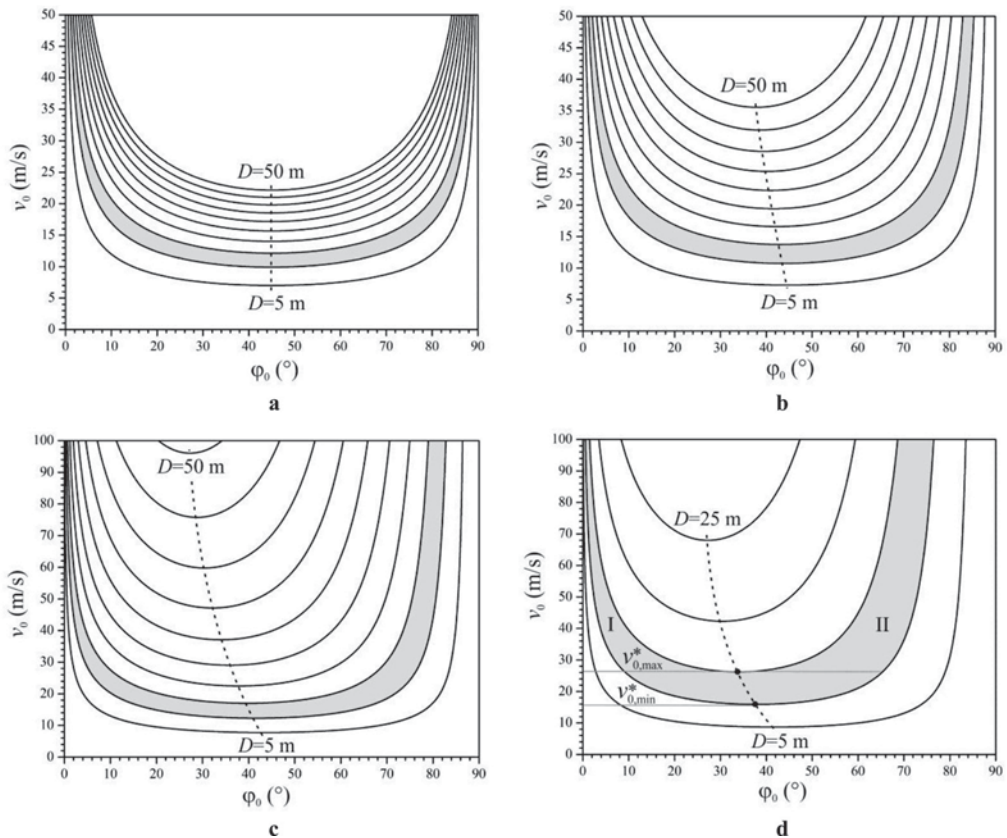
$$r_v = (v_{o,\max} - v_{o,\min}) / v_{o,\min} \quad (11)$$

in relativno povečanje kota φ_0 :

$$r_\varphi = (\varphi_{o,\max} - \varphi_{o,\min}) / \varphi_{o,\min}, \quad (12)$$

ki povzroči povečanje dometa iz $D_{\min}$ na $D_{\max}$. Rezultate bomo prikazali za sivo obarvano območje na sliki 2 ($10 \text{ m} < D < 15 \text{ m}$). Pri tem hitrost $v_{o,\min}$ pri določenem kotu φ_0 določa domet $D_{\min}$, hitrost $v_{o,\max}$ pa domet $D_{\max}$. Podobno $\varphi_{o,\min}$ pri določeni velikosti hitrosti določa domet $D_{\min}$ in $\varphi_{o,\max}$ domet $D_{\max}$.

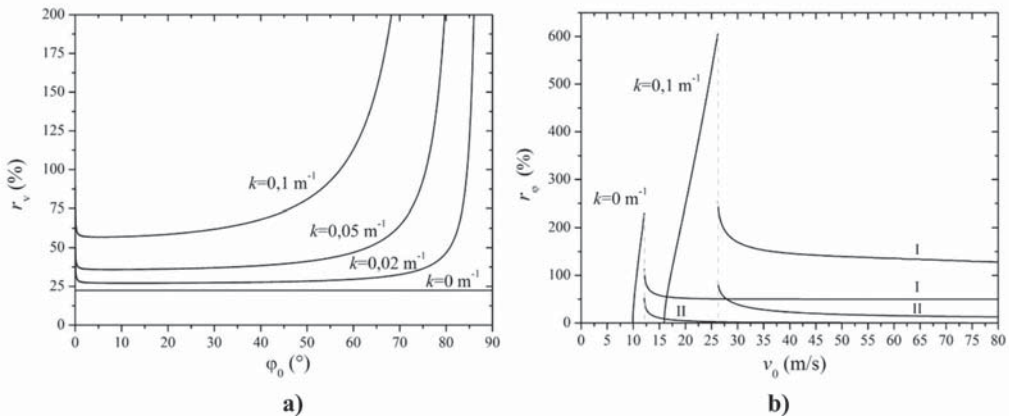
Slika 3 prikazuje rezultate za različne vplive upora. V primeru zanemarljivega upora ($k = 0$) je relativno povečanje začetne hitrosti neodvisno od njene smeri. V primeru vpliva zračnega upora ($k > 0$) pa se relativno povečanje hitrosti povečuje z večanjem kota φ_0 (slika 3a). Določena relativna sprememba velikosti začetne hitrosti v_0 ima torej pri večjih kotih φ_0 manjši vpliv na spremembo dometa. Učinek je izrazitejši pri večji vrednosti koeficienta k .



Slika 2. Velikosti hitrosti v_0 v odvisnosti od kota ϕ_0 za različne vrednosti dometa D . Krivulje označujejo določen domet, ki se veča po koraku 5 m. Sivo območje označuje pogoje, pri katerih je domet $10 \text{ m} < D < 15 \text{ m}$. Črtkana črta označuje kot ϕ_0^* , pri katerem je potrebna najmanjša hitrost v_0^* , da dosežemo določen domet.

a) $k = 0 \text{ m}^{-1}$, b) $k = 0,02 \text{ m}^{-1}$, c) $k = 0,05 \text{ m}^{-1}$, d) $k = 0,1 \text{ m}^{-1}$.

Iz rezultatov relativne spremembe kota (r_ϕ) v odvisnosti od velikosti hitrosti v_0 vidimo (slika 3b), da obstaja optimalna hitrost, pri kateri je možna največja relativna sprememba kota. Gre za najmanjšo hitrost pri dometu $D_{\max}$ ($v_{0,\max}^*$). Relativna sprememba kota torej narašča z večanjem hitrosti od $v_{0,\min}^*$ do $v_{0,\max}^*$. Z nadaljnjim večanjem hitrosti nastaneta dve območji kotov (I in II), ki omogočata željen domet (slika 2d). Iz slike 3b vidimo, da območje I zaradi manjših kotov omogoča večjo relativno spremembo r_ϕ kot območje II, čeprav so pri določeni hitrosti v območju II možne večje absolutne spremembe kotov (glej sliko 2d). Ob možni natančni določitvi velikosti začetne hitrosti je torej najbolje izbrati $v_{0,\max}^*$, saj ta omogoča največja odstopanja v kotih tako v relativnem kot absolutnem smislu.



Slika 3. Relativne spremembe velikosti hitrosti v_0 (r_v) in kota φ_0 (r_φ) za sivo obarvano območje na sliki 2 ($10 \text{ m} < D < 15 \text{ m}$).

a) Relativna sprememba velikosti hitrosti v_0 v odvisnosti od kota φ_0 .

b) Relativna sprememba kota φ_0 v odvisnosti od velikosti hitrosti v_0 .

4 ZAKLJUČEK

V prispevku smo proučili vpliv spremembe velikosti in smeri začetne hitrosti leta različnih tipov žog na natančnost dometa. Rezultate smo prikazali za različne vplive upora, kar je aktualno pri različnih igrah z žogo, kjer želimo zadeti določeno območje v igrišču. Ugotovili smo, da relativno povečanje začetne hitrosti neodvisno od njene smeri povzroči enake spremembe v dometu, če je zračni upor med letom zanemarljiv. Ob upoštevanju zračnega upora pa smo pokazali, da določena relativna sprememba velikosti začetne hitrosti pri večjih začetnih kotih leta povzroči manjšo spremembo dometa. Pokazali smo tudi, da obstaja optimalna hitrost, pri kateri je možno največje odstopanje v smeri začetne hitrosti. V primeru, ko lahko natančno določimo začetno hitrost, je najbolje izbrati najmanjšo hitrost, ki je potrebna, da dosežemo oddaljen del zelenega območja dometa, saj so v tem primeru lahko odstopanja v smeri začetne hitrosti največja. Predstavljeni rezultati dokaj realno opisujejo razmere pri letu žoge in jih lahko s pridom uporabimo pri različnih igrah z žogo.

VIRI:

- [1] R. Kladnik, *Fizika za srednješolce. 1, Gibanje, sila, snov*. Ljubljana: DZS, 2008.
- [2] P. J. Brancazio, „Trajectory of a fly ball,“ *The Physics Teacher*, vol. 23, pp. 20–23, 1985.
- [3] R. Borghi, „Trajectory of a body in a resistant medium: an elementary derivation,“ *European Journal of Physics*, vol. 34, p. 359, 2013.
- [4] P. S. Chudinov, „The motion of a point mass in a medium with a square law of drag,“ *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 65, pp. 421–426, // 2001.
- [5] G. W. Parker, „Projectile motion with air resistance quadratic in the speed,“ *American Journal of Physics*, vol. 45, pp. 606–610, 07/00/ 1977.
- [6] J. Gablonsky and A. Lang, „Modeling Basketball Free Throws,“ *SIAM Review*, vol. 47, pp. 775–798, 2005.
- [7] A. Tan and G. Miller, „Kinematics of the free throw in basketball,“ *American Journal of Physics*, vol. 49, pp. 542–544, 1981.
- [8] Z. Bohte, *Numerične metode*. Ljubljana: DZS, 1976.