Po sledeh neke naloge

Jens Carstensen in Alija Muminagić

Ko se v drugem letniku srednje šole učimo o kvadratni funkciji, običajno srečamo tudi naslednjo nalogo.

Naloga 1. Med vsemi pravokotniki z danim obsegom poiščite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Višino pravokotnika označimo z x, njegovo širino z y, obseg pa z o. Veljati mora

$$2x + 2y = o,$$

pri tem pa morata biti x in y takšna, da je ploščina

$$P(x,y) = xy$$

največja možna.

Iz $2x + 2y = o$ sledi $y = \frac{1}{2}(o - 2x)$ in ploščino lahko zapišemo kot $xy = \frac{x}{2}(o - 2x)$.

Nalogo smo prevedli na določanje maksimuma kvadratne funkcije

$$p(x) = -x^2 + \frac{o}{2}x.$$

Vodilni koeficient je negativen in funkcija ima maksimum pri

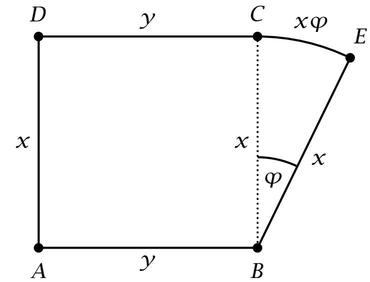
$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-\frac{o}{2}}{2\cdot(-1)} = \frac{o}{4}.$$

Tedaj je $y = \frac{1}{2}\left(o - 2\cdot\frac{o}{4}\right) = \frac{o}{4}$. To pomeni, da ima največjo mogočo ploščino kvadrat s stranico $\frac{o}{4}$ in ploščino $\frac{o^2}{16}$.

Oglejmo si zdaj lik na sliki 1 in rešimo naslednjo nalogo.

Naloga 2. Naj bo dan kot φ. Od vseh likov z danim obsegom o, ki so narisani na sliki 1, poiščite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Ploščina lika na sliki 1 je enaka vsoti ploščine pravokotnika $ABCD$, ki ima višino x in širino y, in ploščine krožnega izseka CBE s polmerom x in središčnim kotom φ. Središčni kot φ lahko izrazimo



SLIKA 1.

v ločnih enotah kot razmerje dolžine loka in polmera krožnice $\varphi = \frac{l}{x}$, zato je $l = x\varphi$. Privzemimo, da je $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Ta privzetek je potreben, da se krožni izsek in pravokotnik ne prekrivata. Obseg lika je enak $o = 2x + 2y + x\varphi$ in od tu sledi

$$y = \frac{1}{2}(o - 2x - x\varphi). \qquad (1)$$

Ploščina krožnega izseka CBE je $\frac{\varphi}{2\pi}\cdot\pi x^2 = \frac{1}{2}\varphi x^2$, ploščina lika na sliki 1 pa

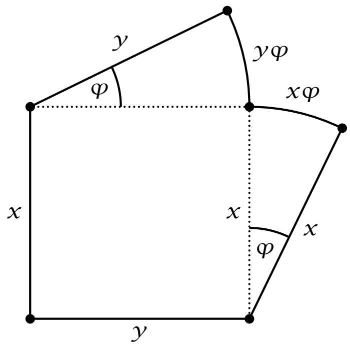
$$\begin{aligned} P &= xy + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &= x\frac{1}{2}(o - 2x - \varphi x) + \frac{1}{2}\varphi x^2 \\ &= \frac{1}{2}x(o - 2x - \varphi x + \varphi x) \\ &= -x^2 + \frac{o}{2}x. \end{aligned}$$

Zelo zanimivo! Primerjajte z nalogo 1 in komentirajte.

Spremenimo nalogo 2 tako: Od vseh likov z danim obsegom, kot na sliki 2, določite tistega z največjo ploščino.

Rešitev. Uporabimo oznake s slike 2 in naj bo $0 < \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Obseg lika je

$$\begin{aligned} o &= 2x + 2y + x\varphi + y\varphi \\ &= 2(x+y) + \varphi(x+y) = (2+\varphi)(x+y). \end{aligned}$$



SLIKA 2.

Od tu izrazimo

- $x + y = \dfrac{o}{2+\varphi}$ (2)
- $y = \dfrac{o}{2+\varphi} - x$ (3)

Seveda morata biti števili x in y nenegativni, zato mora veljati še

- $0 \leq x, y \leq \dfrac{o}{2+\varphi}$.

Ploščina lika je

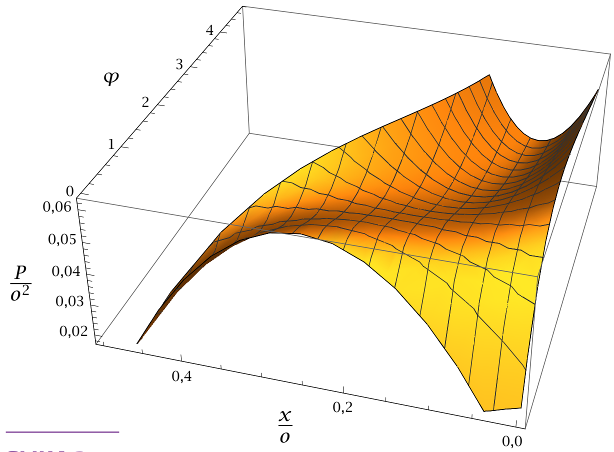
- $$\begin{aligned} P &= xy + \frac{1}{2}\varphi\left(x^2+y^2\right) \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi\left[(x+y)^2 - 2xy\right] \\ &= xy + \frac{1}{2}\varphi\,(x+y)^2 - \varphi xy \\ &= xy(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\,(x+y)^2 \\ &\overset{(2),(3)}{=\!=} x\left(\frac{o}{2+\varphi} - x\right)(1-\varphi) + \frac{1}{2}\varphi\frac{o^2}{(2+\varphi)^2} \\ &= (\varphi-1)x^2 + \frac{o(1-\varphi)}{\varphi+2}x + \frac{\varphi o^2}{2\,(\varphi+2)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Graf ploščine v odvisnosti od kota φ in x je prikazan na sliki 3.

Odvisno od kota φ, obravnavamo primere:

1. Če je $0 < \varphi < 1$, je vodilni koeficient parabole negativen in funkcija ima maksimum pri

   - $$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} = \frac{-\dfrac{o(1-\varphi)}{\varphi+2}}{2(\varphi-1)} \\ &= \frac{o(\varphi-1)}{2(\varphi-1)(\varphi+2)} = \frac{o}{2(\varphi+2)}. \end{aligned} \tag{5}$$



SLIKA 3.

   Takrat je

   - $$\begin{aligned} y &\overset{(3),(5)}{=\!=} \frac{o}{2+\varphi} - \frac{o}{2(\varphi+2)} \\ &= \frac{2o-o}{2(\varphi+2)} = \frac{o}{2(\varphi+2)} \overset{(5)}{=\!=} x. \end{aligned} \tag{6}$$

   Ponovno je pravokotnik kvadrat.

2. Če je $\varphi = 1$, potem je

   - $P = \dfrac{\varphi o^2}{2(\varphi+2)^2} = \dfrac{1 \cdot o^2}{2(1+2)^2} = \dfrac{o^2}{18}$

   in ploščina ni odvisna od razmerja stranic pravokotnika.

3. Če pa je $\varphi > 1$, je vodilni koeficient parabole pozitiven in v temenu dobimo minimum ploščine. Zato je maksimum dosežen nekje na robu območja, torej ali pri $x = 0$ ali pri $x = \frac{o}{2+\varphi}$. V obeh primerih lik na sliki 2 degenerira v krožni izsek s ploščino

   - $P = \dfrac{\varphi o^2}{2(\varphi+2)^2}$.

Literatura

[1] N. Lord, *Two surprising maximization problems*, The mathematical gazette, november 2013.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *En optimeringsopgave, 3*, sprejeto v objavo v LMFK-Bladet.

×××