Univerza v Ljubljani

FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO

Odsek za matematiko

Josip Globevnik

ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO

Disertacija

Ljubljana 1972

PREDGOVOR

Klasična analitična funkcija, katere absolutna vrednost je na nekem polju konstantna, je tudi sama tam konstanta. Za vektorske analitične funkcije to velja le v primeru, ko so njih vrednosti v specialnih Banachovih prostorih - tistih, v katerih je vsaka točka na enotni krogli kompleksna ekstremna točka (Thorp-Whitley [20]). Taki so n.pr. strogo konveksni Banachovi prostori. Po drugi strani pa obstoji širok razred prostorov, ki omenjene lastnosti nimajo - n.pr. skoraj vse operatorske algebre. Dejstvo, da so operatorske Banachove algebre važen poseben primer Banachovih prostorov, da težo problemu, ki ga je postavil prof. Vidav - karakterizirati analitične funkcije s konstantno normo. V znani literaturi ta problem ni obravnavan. Njega reševanje je namen tega dela.

Delo je razdeljeno na tri poglavja.

V prvem poglavju proučujemo analitične funkcije s konstantno normo, z vrednostmi v Banachovem prostoru. Vsakemu vektorju a prostora X priredimo podprostor E(a) tistih vektorjev, ki pokažejo, da $a/\|a\|$ ni kompleksna ekstremna točka na enotni krogli prostora X. Ta podprostor je osnovni pojem v dveh izrekih o karakterizaciji analitičnih funkcij s konstantno normo, ki ju dokažemo v prvem poglavju.

V drugem poglavju se ukvarjamo z analitičnimi funkcijami s konstantno normo, z vrednostmi v Banachovih algebrah. Metode, uporabljene v prvem poglavju, ne dajo nič novega. Zato uporabimo druge metode, pri čemer se omejimo na specialne primere: C^*-algebre, komutativne Banachove algebre in algebre operatorjev nad enakomerno konveksnimi Banachovimi prostori.

V tretjem poglavju proučujemo analitične funkcije, katerih norma je enaka absolutni vrednosti klasične analitične funkcije. Dokažemo izrek o karakterizaciji takih funkcij in nekaj zanimivih posledic. Nekateri posebni primeri takih funkcij so podrobno proučeni.

Mentor tega dela je bil profesor Ivan Vidav. Vedno je bil pripravljen prisluhniti težavam pri delu, svetovati in pomagati, rad je dal prenekatero idejo in vlival je optimizem ob težkih trenutkih. Za vse to se mu najlepše zahvaljujem.

Menim, da doktorska disertacija predstavlja konec prvega zamaha v študiju. Naj se tu zahvalim vsem, ki so mi pri tem pomagali, zlasti profesorju Vidavu, svojemu prvemu učitelju profesorici Mariji Pilgram, docentu Antonu Suhadolcu, ki me je usmeril v funkcionalno analizo, in kolegom iz Zagreba za temperament in vzdušje, ki sem se ga navzel, ko sem študiral pri njih.

J.G.

Ljubljana, maja 1972

KAZALO

Klasifikacija MOS (AMS) : 30A96, 46L05, 46L20 .

0. UVODNO POGLAVJE

0.0. DOGOVORI IN OZNAKE

Oznake prevzemamo iz standardnih učbenikov funkcionalne analize.

$\mathbb{R}$ je obseg realnih števil, $\mathbb{C}$ obseg kompleksnih števil. *Polje* je odprta povezana množica v kompleksni ravnini. Analitična funkcija f, definirana na polju $\mathcal{D}$ je vedno funkcija, ki je definirana na polju $\mathcal{D}$ in tam analitična. Tedaj z $f(\mathcal{D})$ označimo zalogo vrednosti funkcije f. Klasične analitične funkcije (z vrednostmi v $\mathbb{C}$) imenujemo *skalarne analitične funkcije*.

Če je H topološki prostor in $S \subset H$, z $\overline{S}$ označimo zaprtje množice S.

Naj bo X linearen prostor. Če je $S \subset X$, s $\operatorname{co} S$ označimo konveksno lupino množice S in s $\overline{\operatorname{co}}\, S$ zaprto konveksno lupino množice S. Če je $a,b,\dots,p \in X$, tedaj z $\mathcal{L}(a,b,\dots,p)$ označimo linearno lupino množice elementov $a,b,\dots,p$.

Namesto Banachov prostor, Banachova algebra, Hilbertov prostor pišemo *B-prostor*, *B-algebra*, *H-prostor*. *Kompleksen B-prostor* je B-prostor nad obsegom $\mathbb{C}$. Če je X B-prostor, je $S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, X' je dualni prostor (prostor vseh zveznih linearnih funkcionalov na X s sup normo) in $L(X)$ algebra omejenih linearnih operatorjev, definiranih na prostoru X, z zalogo vrednosti v X, opremljena z enakomerno operatorsko topologijo. Število, ki ga funkcional $u \in X'$ priredi vektorju $x \in X$, označimo z $\langle x,u \rangle$.

Če je a element kompleksne B-algebre z enoto, je $\varrho(a)$ resolventna množica, $\sigma(a)$ spekter, $R(\lambda,a)$ resolventa in $\operatorname{spr} a = \sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}$ spektralni radij elementa a. Če ima B-algebra enoto e, a priori predpostavimo $\|e\| = 1$.

Ko je X Hilbertov prostor, je $\perp$ znak za ortogonalnost in $\oplus$ znak za ortogonalno vsoto. Če je tedaj $T \in L(X)$, označimo z $\mathcal{R}(T)$ zalogo vrednosti operatorja T, z $\mathcal{N}(T)$ jedro operatorja T in s T^* operatorju T adjungirani operator.

Končno, če je neki enakosti (neenakosti) na desni strani pripisano $(\zeta \in \mathcal{D})$, to pomeni, da omenjena enakost (neenakost) velja za vsak $\zeta \in \mathcal{D}$.

0.1. OSNOVNE DEFINICIJE, NEKATERI ZNANI REZULTATI

Znano je (gl. [12]), da za normo vrednosti analitične funkcije f, definirane na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru, velja t.i. princip maksima norme:

Če eksistira točka $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, da velja

$$\|f(\zeta)\| \leq \|f(\zeta_0)\| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) ,$$

tedaj velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv \|f(\zeta_0)\| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) .$$

Med skalarnimi analitičnimi funkcijami, definiranimi na polju $\mathcal{D}$, samo konstante zadoščajo zgornji enakosti: če za skalarno analitično funkcijo f, definirano na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, eksistira konstanta M, da je

$$|f(\zeta)| \equiv M \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) ,$$

tedaj je f konstanta, t.j. eksistira $z_0 \in \mathbb{C}$, da je

$$f(\zeta) \equiv z_0 \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) .$$

0.1.0 DEFINICIJA V kompleksnem B-prostoru X velja strogi princip maksima norme, če ni polja v kompleksni ravnini in na njem definirane nekonstantne analitične funkcije z vrednostmi v X, ki bi imela na tem polju konstantno normo.

0.1.1 DEFINICIJA (gl. [20]) Naj bo X kompleksen B-prostor. Točka $a \in S(X)$ je kompleksna ekstremna točka na $S(X)$, če iz $\|a + \zeta y\| \leq 1$ $(|\zeta| \leq 1)$ sledi $y = 0$.

0.1.2 DISKUSIJA Naj bo X kompleksen B-prostor. Če točka $a \in S(X)$ ni kompleksna ekstremna točka na $S(X)$, tedaj eksistira $y \neq 0$, da je $\|a + \zeta y\| \leq 1$ $(|\zeta| \leq 1)$. Po principu maksima norme od tod sledi $\|a + \zeta y\| \equiv 1$ $(|\zeta| \leq 1)$.

Naslednja definicija je ekvivalentna definiciji 0.1.1 (gl. [20]).

0.1.3 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor. Točka $a \in S(X)$ je kompleksna ekstremna točka na $S(X)$, če iz $\|a + y\| \leq 1$, $\|a - y\| \leq 1$, $\|a + iy\| \leq 1$, $\|a - iy\| \leq 1$ sledi $y = 0$.

Običajne ekstremne točke, ki jih bomo tudi potrebovali, bomo za razliko od kompleksnih ekstremnih točk imenovali realne ekstremne točke.

0.1.4 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor. Točka $a \in S(X)$ je realna ekstremna točka na $S(X)$, če iz $\|a + y\| \leq 1$, $\|a - y\| \leq 1$ sledi $y = 0$.

Naslednji izrek karakterizira prostore, v katerih velja strogi princip maksima norme.

0.1.5 IZREK (Thorp-Whitley [20]) Naj bo X kompleksen B-prostor. Strogi princip maksima norme v X velja natanko takrat, ko je vsaka točka na $S(X)$ kompleksna ekstremna točka na $S(X)$.

Prostorov, v katerih strogi princip maksima norme ne velja, je veliko in nekateri zelo važni primeri so med njimi (n.pr. algebra $L(X)$ nad kompleksnim H-prostorom X, če je $\dim X \geq 2$). Če v nekem prostoru X strogi princip maksima norme ne velja, tedaj eksistirajo nekonstantne analitične funkcije s konstantno normo, z vrednostmi v X. Proučevanje takih funkcij je osnovni namen tega dela.

1. ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO Z VREDNOSTMI V BANACHOVEM PROSTORU

1.0. POMOŽEN REZULTAT IZ TEORIJE SKALARNIH ANALITIČNIH FUNKCIJ

V tem razdelku navedeni lemma 1.0.0 je dokazal L.A. Harris [11] in pokazal, da je z njegovo pomočjo mogoče precej poenostaviti prvotni dokaz osnovnega rezultata Thorpa-Whitleya (izreka 0.1.5). V nadaljnjih razdelkih bomo lemma 1.0.0, oziroma posledico - lemma 1.0.1 uporabili kot ključno orodje pri dokazu izrekov o karakterizaciji analitičnih funkcij s konstantno normo.

<u>1.0.0 LEMMA</u> (L.A.Harris[11]) Naj bo f skalarna analitična funkcija, definirana na odprtem enotnem krogu v kompleksni ravnini, za katero velja

$$|f(\zeta)| \leq 1 \qquad (|\zeta| < 1) .$$

Tedaj velja

$$|f(0)| + \frac{1-|\zeta|}{2|\zeta|}|f(\zeta) - f(0)| \leq 1 \qquad (|\zeta| < 1,\ \zeta \neq 0) .$$

Dokaz. Znana posledica Schwarzovega lemma je

$$|f(\zeta) - f(0)| \leq |\zeta|\,|1 - \overline{f(0)}f(\zeta)| \qquad (|\zeta| < 1) . \tag{1.0.0}$$

Trikotniška neenakost da

$$|1 - \overline{f(0)}f(\zeta)| \leq 1 - |f(0)|^2 + |f(0)|\,|f(0) - f(\zeta)| ,$$

pa iz (1.0.0) sledi

$$|1 - \overline{f(0)}f(\zeta)| \leq 1 - |f(0)|^2 + |f(0)|\,|\zeta|\,|1 - \overline{f(0)}f(\zeta)| \qquad (|\zeta| < 1)$$

in dalje

$$|\zeta|\,|1 - \overline{f(0)}f(\zeta)|\,[1 - |f(0)|\,|\zeta|] \leq |\zeta|\,[1 - |f(0)|^2] \qquad (|\zeta| < 1).$$

S ponovno uporabo (1.0.0) dobimo

$$|f(\zeta) - f(0)|\,[1 - |f(0)||\zeta|] \leq |\zeta|\,[1 - |f(0)|^2] \qquad (|\zeta| < 1).$$

Od tod s pomočjo neenakosti

$$1 - |\zeta| \leq 1 - |\zeta||f(0)| \qquad (|\zeta| < 1)$$

in

$$1 - |f(0)|^2 \leq 2(1 - |f(0)|)$$

sledi

$$|f(\zeta) - f(0)|(1 - |\zeta|) \leq 2|\zeta|(1 - |f(0)|) \qquad (|\zeta| < 1),$$

torej

$$|f(0)| + \frac{1 - |\zeta|}{2|\zeta|}|f(\zeta) - f(0)| \leq 1 \qquad (|\zeta| < 1,\ \zeta \neq 0).$$

Q.E.D.

1.0.1 LEMMA Naj bo f skalarna analitična funkcija, definirana na krogu $|\zeta - \zeta_0| < r$, za katero velja

$$|f(\zeta)| \leq M \qquad (|\zeta - \zeta_0| < r).$$

Tedaj velja

$$|f(\zeta_0)| + \frac{r - |\zeta - \zeta_0|}{2|\zeta - \zeta_0|}|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq M \qquad (|\zeta - \zeta_0| < r,\ \zeta \neq \zeta_0).$$

Specialno, pri $|\zeta - \zeta_0| \leq r/3$ velja

$$|f(\zeta_0)| + |f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq M \qquad (|\zeta - \zeta_0| \leq r/3).$$

Dokaz. Če pišemo

$$g(\zeta) = \frac{1}{M}.f(\zeta_0 + \zeta r) \qquad (|\zeta| < 1),$$

funkcija g izpolnjuje predpostavke lemma 1.0.0, ki dokaže trditev.

Q.E.D.

1.1. PODPROSTOR E(a) IN NJEGOVE LASTNOSTI

1.1.0 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Množico $E(a) \subset X$ definiramo na naslednji način: $x \in E(a)$, če eksistira $r>0$, da velja

$$\|a + \zeta x\| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq r) .$$

1.1.1 DISKUSIJA Površno povedano, če je X kompleksen B-prostor in $a \in S(X)$, so v $E(a)$ vsi tisti vektorji, ki pokažejo, da a ni kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Tedaj je $E(a) = \{0\}$ očitno natanko takrat, ko je a kompleksna ekstremna točka na $S(X)$.

1.1.2 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Tedaj je $x \in E(a)$ natanko takrat, ko eksistira konstanta M_x, da velja

$$|\langle x,u\rangle| \leq M_x(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')) .$$

Dokaz. Naj eksistira konstanta M_x, da velja

$$|\langle x,u\rangle| \leq M_x(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')) .$$

Sledi

$$|\langle \zeta x,u\rangle| \leq \|a\| - |\langle a,u\rangle| \qquad (|\zeta| \leq 1/M_x , \quad u \in S(X')),$$

torej

$$\|a + \zeta x\| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq 1/M_x) .$$

Obrat. Naj eksistira $r>0$, da je

$$\|a + \zeta x\| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq r) .$$

To pomeni

$$|\langle a,u\rangle + \zeta\langle x,u\rangle| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq r , \quad u \in S(X')) ,$$

od koder sledi

$$|\langle a,u\rangle| + r|\langle x,u\rangle| \leq \|a\| \qquad (u \in S(X')),$$

torej

$$|\langle x,u\rangle| \leq \frac{1}{r}(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')) .$$

Q.E.D.

1.1.3 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Tedaj je $E(a)$ linearen podprostor prostora X.

Dokaz. Naj bo $x \in E(a)$. Po propoziciji 1.1.2 eksistira M_x, da je

$$|\langle x,u\rangle| \leq M_x(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')).$$

Če je $\alpha \in \mathbb{C}$ poljuben, sledi

$$\begin{aligned}|\langle \alpha x,u\rangle| &= |\alpha|\,|\langle x,u\rangle| \\ &\leq |\alpha| M_x(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')),\end{aligned}$$

in po propoziciji 1.1.2 je $x \in E(a)$.

Če je tudi $y \in E(a)$, eksistira M_y, da je

$$|\langle y,u\rangle| \leq M_y(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')),$$

pa sledi

$$\begin{aligned}|\langle x + y, u\rangle| &\leq |\langle x,u\rangle| + |\langle y,u\rangle| \\ &\leq (M_x + M_y)(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u \in S(X')).\end{aligned}$$

Po propoziciji 1.1.2 sledi $x + y \in E(a)$. Q.E.D.

1.1.4 DISKUSIJA Podprostor $E(a)$ je števna unija zaprtih množic:

$$E(a) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{x\colon |\langle x,u\rangle| \leq k(\|a\| - |\langle a,u\rangle|)\} \qquad (u \in S(X')) .$$

Sam podprostor $E(a)$ pa v splošnem ni zaprt, kar kaže naslednji primer: naj bo X kompleksna B-algebra zveznih kompleksnih funkcij na intervalu $[-1,1]$ s sup normo. Če je $a \in X$, takoj vidimo, da je $b \in E(a)$ natanko takrat, ko eksistira konstanta M_b, da je

$$|b(t)| \leq M_b(\|a\| - |a(t)|) \qquad (t \in [-1,1]) .$$

Naj bo sedaj

$$a(t) = 1 - t^2 , \quad b(t) = |t| , \quad b_n(t) = \min\{|t|, nt^2\}$$
$$(t \in [-1,1];\ n = 1,2,\ldots)$$

Tedaj je lahko videti, da je $b_n \in E(a)$ $(n=1,2,\ldots)$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, pri čemer pa je $b \notin E(a)$.

<u>1.1.5 DEFINICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. <u>Oporni podprostor</u> $P(a)$ elementa a je presek jeder vseh tistih funkcionalov $u \in S(X')$, za katere velja $\langle a,u\rangle = \|a\|$.

<u>1.1.6 PROPOZICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Naj bo $x \in P(a)$. Tedaj je $\|a + x\| \geq \|a\|$.

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da je $\|a + x\| < \|a\|$. Po Hahn-Banachovem izreku eksistira $u \in S(X')$, da je $\langle a,u\rangle = \|a\|$. Ker je po predpostavki $x \in P(a)$, je $\langle x,u\rangle = 0$, torej $\langle a + x, u\rangle = \|a\|$, kar pa je v protislovju z $\|a + x\| < \|a\|$. Q.E.D.

<u>1.1.7 PROPOZICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Tedaj je $\overline{E(a)} \subset P(a)$.

Dokaz. Ker je $P(a)$ kot presek zaprtih hiperravnin zaprt, je za dokaz propozicije dovolj, če dokažemo $E(a) \subset P(a)$. Naj bo $x \notin P(a)$. Tedaj po definiciji podprostora $P(a)$ eksistira $u \in S(X')$, da je $\langle a,u\rangle = \|a\|$ in $\langle x,u\rangle \neq 0$. Od tod sledi, da je za vsak $\zeta \neq 0$ vsaj eno od števil $|\langle a + \zeta x, u\rangle|$, $|\langle a - \zeta x, u\rangle|$ večje od $\|a\|$, torej $x \notin E(a)$. Q.E.D.

<u>1.1.8 PROPOZICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a \in X$. Če je $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, tedaj je $E(\alpha a) = E(a)$.

Dokaz. Trivialen.

<u>1.1.9 PROPOZICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor, $a,b \in X$ in $co\{a,b\} \subset S(X)$. Tedaj podprostor $E[\alpha a + (1-\alpha)b]$ ni odvisen od $\alpha \in (0,1)$, t.j.

$$E[\alpha a + (1-\alpha)b] \equiv E \qquad (0<\alpha<1) ,$$

pri čemer velja $E(a) \subset E$, $E(b) \subset E$.

Dokaz. Naj bo $co\{u,v\} \subset S(X)$ in naj bo $x \in E(u)$. Tedaj eksistira $r>0$, da je $\|u + \zeta x\| \leq 1$ $(|\zeta| \leq r)$. Pišimo

$$\begin{aligned} g(\zeta) &= \alpha(u + \zeta x) + (1 - \alpha)v \\ &= \alpha u + (1 - \alpha)v + \zeta\alpha x \end{aligned} ,$$

pri čemer naj bo $0<\alpha\leq 1$. Tedaj velja

$$\|g(\gamma)\| \leq \alpha\|u + \gamma x\| + (1 - \alpha)\|v\| \leq 1 \qquad (|\gamma| \leq r).$$

Ker je po predpostavki $co\{u,v\}\subset S(X)$, je $\|\alpha u + (1 - \alpha)v\| = 1$, torej je $\alpha x \in E[\alpha u + (1 - \alpha)v]$. Po privzetku je $\alpha \neq 0$, pa po propoziciji 1.1.3 sledi $x \in E[\alpha u + (1 - \alpha)v]$. Tako smo dobili, da je $E(u) \subset \subset E[\alpha u + (1 - \alpha)v]$ $(0<\alpha\leq 1)$. Če vlogi u in v zamenjamo, dobimo $E(v) \subset E[\alpha u + (1 - \alpha)v]$ $(0\leq\alpha<1)$.

Naj bo sedaj $0<\alpha_1<\alpha_2<1$. Postavimo $\alpha_1 a + (1-\alpha_1)b = u$ in $b = v$. Ker je po predpostavki $co\{a,b\}\subset S(X)$, po zgornjem sledi $E[\alpha_1 a + (1-\alpha_1)b] \subset E[\alpha_2 a + (1-\alpha_2)b]$. Če postavimo $u = a$ in $v = \alpha_2 a + (1-\alpha_2)b$, sledi $E[\alpha_2 a + (1-\alpha_2)b] \subset E[\alpha_1 a + (1-\alpha_1)b]$. Tako smo dobili $E[\alpha a + (1-\alpha)b] \equiv E$ $(0<\alpha<1)$. Če postavimo $u = a$ in $v = b$, dobimo še $E(a)\subset E$ in $E(b)\subset E$. Q.E.D.

<u>1.1.10 DEFINICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a\in X$. Če je $x\in E(a)$, definiramo

$$\|x\|_a = \inf\{M: |\langle x,u\rangle| \leq M(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X'))\}$$

<u>1.1.11 PROPOZICIJA</u> Naj bo X kompleksen B-prostor in $a\in X$. Tedaj je $\{E(a), \|\ \|_a\}$ (z linearno strukturo, inducirano z linearno strukturo v X) normiran prostor.

Dokaz. Po propoziciji 1.1.3 je $E(a)$ linearen prostor. Očitno je $\|x\|_a \geq 0$ za vsak $x\in E(a)$. Dalje, če je $\|x\|_a = 0$, to pomeni $\langle x,u\rangle = 0$ $(u\in S(X'))$, torej $x = 0$.
Če je $\lambda \in \mathbb{C}$, je

$$\begin{aligned}\|\lambda x\|_a &= \inf\{M: |\langle \lambda x,u\rangle| \leq M(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X'))\} \\ &= \inf\{|\lambda|N : |\langle x,u\rangle| \leq N(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X')\} \\ &= |\lambda|\|x\|_a .\end{aligned}$$

Dalje, iz

$$|\langle x,u\rangle| \leq \|x\|_a(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X')),$$

$$|\langle y,u\rangle| \leq \|y\|_a(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X'))$$

sledi

$$|\langle x + y, u\rangle| \leq (\|x\|_a + \|y\|_a)(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \qquad (u\in S(X')),$$

kar da

$$\|x + y\|_a \leq \|x\|_a + \|y\|_a \quad . \qquad \text{Q.E.D.}$$

1.1.12 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a\in X$. Če je $x\in E(a)$, definiramo

$$r_a(x) = \sup\{r: \|a + \zeta x\| \leq \|a\| \quad (|\zeta| \leq r)\} \quad .$$

1.1.13 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a\in X$. Tedaj velja

$$r_a(x) = 1/\|x\|_a \qquad (x\in E(a)) \ .$$

Dokaz. Naj bo

$$\|a + \zeta x\| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq r) \ . \tag{1.1.0}$$

To pomeni

$$|\langle a,u\rangle + \zeta\langle x,u\rangle| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq r \ , \ u\in S(X')),$$

od koder sledi

$$|\langle a,u\rangle| + r|\langle x,u\rangle| \leq \|a\| \qquad (u\in S(X')) \ ,$$

torej

$$|\langle x,u\rangle| \leq \frac{1}{r}(\|a\| - |\langle a,u\rangle|) \quad (u\in S(X')) \ . \tag{1.1.1}$$

Ker isto lahko napravimo v obratni smeri, sta neenakosti (1.1.0) in (1.1.1) ekvivalentni. Od tod takoj sledi $r_a(x) = 1/\|x\|_a$. Q.E.D.

1.1.14 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor in $a\in X$. Naj bo $y\in E(a)$ in $\|y\|_a < 1/2$. Tedaj velja $E(a + y) = E(a)$.

Dokaz. Najprej dokažimo, da iz $y\in E(a)$ in $\|y\|_a < 1$ sledi $E(a + y)\supset E(a)$. Naj bo torej $y\in E(a)$ in $\|y\|_a < 1$. Po definiciji 1.1.12 in po propoziciji 1.1.13 to pomeni, da je $\|a + \zeta y\| \leq \|a\| \quad (|\zeta| \leq r_a(y))$ in po diskusiji 0.1.2, da je $\|a + \zeta y\| \equiv \|a\| \ (|\zeta| \leq r_a(y))$, pri čemer je $r_a(y) = 1/\|y\|_a > 1$. Sledi $\|a + y\| = \|a\|$. Naj bo sedaj $x\in E(a)$,

$x \neq 0$, in naj bo $0 < r < (1 - \|y\|_a)/\|x\|_a$. Po propoziciji 1.1.11 je $\| \ \|_a$ norma, zato sledi

$$\|y + \zeta x\|_a \leq \|y\|_a + [(1 - \|y\|_a)/\|x\|_a]\|x\|_a$$
$$= 1 \qquad (|\zeta| \leq r) ,$$

torej

$$\|y + \zeta x\|_a < p < 1 \qquad (|\zeta| \leq r) .$$

To pomeni, da je

$$\|a + \xi(y + \zeta x)\| \leq \|a\| \quad (|\zeta| \leq r , \ |\xi| \leq 1/p) ,$$

od koder pri $\xi = 1$ dobimo

$$\|a + y + \zeta x\| \leq \|a\| = \|a + y\| \qquad (|\zeta| \leq r).$$

Sledi $x \in E(a + y)$, torej je res $E(a + y) \supset E(a)$.

Naj bo sedaj $\|y\|_a < 1/2$. Po prvem delu dokaza je tedaj $E(a + y) \supset E(a)$ in $\|a + y\| = \|a\|$. Po propoziciji 1.1.13 iz $\|y\|_a < 1/2$ sledi, da za nek $R>2$ velja

$$\|a + \zeta y\| \leq \|a\| \qquad (|\zeta| \leq R) ,$$

torej eksistira $r>1$, da je

$$\|a + y + \zeta y\| \leq \|a\| = \|a + y\| \qquad (|\zeta| \leq r) ,$$

kar pomeni, da je $y \in E(a + y)$ in $\|y\|_{a+y} < 1$. Po prvem delu dokaza sledi $E(a) \supset E(a+y)$. Q.E.D

1.2. LOKALNA KARAKTERIZACIJA ANALITIČNIH FUNKCIJ S KONSTANTNO NORMO

1.2.0 IZREK (Lokalna karakterizacija) Naj bo

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

analitična funkcija, definirana v okolici točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X.

Tedaj eksistira okolica $\mathcal{U}(0)$ točke 0, v kateri je

$$\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\| \qquad (\zeta \in \mathcal{U}(0))$$

natanko takrat, ko velja

(i) $a_i \in E(a_0)$ $\quad (i = 1,2,\dots)$

(ii) vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|_{a_0} . r^i$ konvergira pri nekem $r > 0$.

Dokaz. Naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$ $(|\zeta| \leq R)$. To pomeni, da je

$$|\langle a_0,u\rangle + \langle a_1,u\rangle\zeta + \dots| \leq \|a_0\| \qquad (|\zeta| \leq R,\ u \in S(X')),$$

od koder po lemma 1.0.1 sledi

$$|\langle a_1,u\rangle\zeta + \langle a_2,u\rangle\zeta^2 + \dots| \leq \|a_0\| - |\langle a_0,u\rangle| \qquad (|\zeta| \leq R/3,\ u \in S(X')). \tag{1.2.0}$$

Če je φ poljubna skalarna analitična funkcija, definirana pri $|\zeta| < r$, za katero je $|\varphi(\zeta)| \leq M$ $(|\zeta| < r)$, po Cauchy-ju velja ocena

$$|\varphi^{(n)}(0)| \leq M . r^{-n} . n! \qquad (n = 1,2,\dots).$$

Če to oceno uporabimo v (1.2.0), dobimo

$$|\langle a_i,u\rangle| \leq \left(\tfrac{3}{R}\right)^i (\|a_0\| - |\langle a_0,u\rangle|) \qquad (u \in S(X');\ i = 1,2,\dots).$$

Po propoziciji 1.1.2 to pomeni, da je $a_i \in E(a_0)$ $(i = 1,2,\dots)$ in

$$\|a_i\|_{a_0} \leq \left(\tfrac{3}{R}\right)^i \qquad (i = 1,2,\dots).$$

Sledi, da pri $r < R/3$ vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i\|_{a_0} \cdot r^i$ konvergira.

Obrat. Naj bo $a_i \in E(a_0)$ $(i = 1,2,\ldots)$ in naj bo pri nekem $r>0$ $\sum_{i=1}^{\infty}\|a_i\|_{a_0} \cdot r^i = M < \infty$. To po definiciji 1.1.10 pomeni, da je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle a_i r^i, u\rangle| \leq M(\|a_0\| - |\langle a_0, u\rangle|) \qquad (u \in S(X')) ,$$

oziroma

$$|\langle a_0, u\rangle| + \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{\infty} |\langle a_i r^i, u\rangle| \leq \|a_0\| \qquad (u \in S(X')) .$$

Če je $N = \max\{1, 1/M\}$, sledi

$$|\langle a_0, u\rangle| + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle a_i (\tfrac{r}{N})^i, u \rangle| \leq \|a_0\| \qquad (u \in S(X')) ,$$

oziroma

$$\|a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \zeta^i\| \leq \|a_0\| \qquad (|\zeta| \leq r/N) ,$$

torej po principu maksima norme

$$\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\| \qquad (|\zeta| \leq r/N) . \qquad \text{Q.E.D.}$$

1.2.1 DISKUSIJA V skladu s propozicijo 1.1.13 je mogoče pogoj (ii) v izreku 1.2.0 zamenjati z (morda laže razumljivim) pogojem

(ii') vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} [r^i / r_{a_0}(a_i)]$ konvergira pri nekem $r > 0$.

1.2.2 KOROLAR Naj bo X kompleksen B-prostor in $a_i \in X$ $(i = 0,1,2,..,m)$. Tedaj za polinom

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_m\zeta^m$$

eksistira okolica $\mathcal{U}(0)$ točke 0, v kateri je

$$\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\| \qquad (\zeta \in \mathcal{U}(0))$$

natanko takrat, ko je

$$a_i \in E(a_0) \qquad (i = 1,2,..,m) .$$

Dokaz. Trivialen.

1.2.3 KOROLAR Naj bo X kompleksen B-prostor in $a_i \in X$ $(i = 0,1,2,\ldots,m)$. Naj za polinom

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_m\zeta^m$$

eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$.

Če so vektorji $b_1, b_2, \ldots, b_n$ v linearni lupini $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, tedaj tudi za polinom

$$g(\zeta) = a_0 + b_1\zeta + \ldots + b_n\zeta^n$$

eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|g(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$.

Dokaz. Uporabimo izrek 1.2.0 in upoštevamo, da je po propoziciji 1.1.3 $E(a_0)$ linearen prostor. Q.E.D.

1.2.4 KOROLAR Naj bo X kompleksen B-prostor, $a \in X$ in $a_i \in E(a)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Tedaj eksistirajo pozitivna števila α_i $(i = 1,2,\ldots)$ z naslednjo lastnostjo: če za kompleksna števila γ_i $(i = 1,2,\ldots)$ velja

$$|\gamma_i| \leq |\alpha_i| \quad (i = 1,2,\ldots),$$

tedaj za funkcijo

$$g(\zeta) = a + \zeta(\gamma_1 a_1) + \zeta^2(\gamma_2 a_2) + \ldots$$

eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv \|a\|$.

Dokaz. Števila α_i tako izberemo, da vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} \|\alpha_i a_i\|_{a_0} \cdot r^i$ konvergira pri nekem $r > 0$. Upoštevamo, da je $\|\ \|_a$ norma (torej homogena) in uporabimo izrek 1.2.0 . Q.E.D.

1.2.5 DISKUSIJA V izreku 1.2.0 lahko pogoj (ii) izpustimo, če je analitična funkcija, ki jo proučujemo, polinom (korolar 1.2.2). Naslednji izrek pove, da isto lahko napravimo v primeru, ko je ustrezni podprostor $E(a)$ končnodimenzionalen.

1.2.6 IZREK Naj bo $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$ analitična funkcija, definirana v okolici točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X. Naj bo $\dim E(a_0) < \infty$.
Tedaj eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$ natanko takrat, ko je $a_i \in E(a_0)$ $(i=1,2,\ldots)$.

Slednje torej velja v posebnem primeru, ko je prostor X končnodimenzionalen.

Dokaz. Če je $\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$ v neki okolici točke 0, tedaj po izreku 1.2.0 sledi $a_i \in E(a_0)$ $(i = 1,2,\ldots)$.

Obrat. Naj bo $a_i \in E(a_0)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Naj vrsta $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$ konvergira v krogu $|\zeta|<R$. Označimo $g(\zeta) = a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$. $E(a_0)$ je kot končnodimenzionalen podprostor prostora X zaprt, torej je $g(\zeta) \in E(a_0)$ $(|\zeta| < R)$. V $E(a_0)$ eksistira baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset S(X)$, po kateri razstavimo $g(\zeta)$:

$$g(\zeta) = \gamma_1(\zeta)e_1 + \gamma_2(\zeta)e_2 + \ldots + \gamma_n(\zeta)e_n \qquad (|\zeta| < R) \tag{1.2.1}$$

Naj bo $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Po Hahn-Banachovem izreku eksistira $e_i' \in S(X')$, da je $\langle e_j, e_i' \rangle = \delta_{ji}$ $(j=1,2,\ldots,n)$. Če na obeh straneh v (1.2.1) uporabimo ta funkcional, dobimo $\gamma_i(\zeta) = \langle g(\zeta), e_i' \rangle$ $(|\zeta| < R)$, kar pove, da so funkcije γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ na krogu $|\zeta| < R$ analitične. Dalje, ker je $e_i \in E(a_0)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, po propoziciji 1.1.2 eksistirajo konstante M_i $(i=1,2,\ldots,n)$, da je

$$|\langle e_i, u \rangle| \leq M_i(\|a_0\| - |\langle a_0, u \rangle|) \qquad (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ u \in S(X')),$$

torej eksistira konstanta M, da je

$$|\langle e_i, u \rangle| \leq M(\|a_0\| - |\langle a_0, u \rangle|) \qquad (i = 1,2,\ldots,n \ ; \ u \in S(X')).$$

Analitične funkcije γ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ so zvezne. Ker velja $\gamma_i(0) = 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, eksistira krog $|\zeta|<r\leq R$, da je

$$|\gamma_i(\zeta)| \leq \frac{1}{nM} \qquad (|\zeta| < r \ ; \ i = 1,2,\ldots,n) .$$

Sledi

$$\begin{aligned} |\langle g(\zeta), u \rangle| &= \Big|\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(\zeta)\langle e_i, u \rangle\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(\zeta)| M(\|a_0\| - |\langle a_0, u \rangle|) \\ &\leq \|a_0\| - |\langle a_0, u \rangle| \qquad (|\zeta| < r \ ; \ u \in S(X')) , \end{aligned}$$

torej $\|f(\zeta)\| = \|a_0 + g(\zeta)\| \leq \|a_0\|$ $(|\zeta| < r)$, od koder po principu maksima norme sledi $\|f(\zeta)\| \equiv \|a_0\|$ $(|\zeta|<r)$. Q.E.D

1.3. GLOBALNA KARAKTERIZACIJA ANALITIČNIH FUNKCIJ S KONSTANTNO NORMO

1.3.0 IZREK (Globalna karakterizacija) Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X. Naj bo $\|f(\zeta)\|$ konstantna na polju $\mathcal{D}$. Tedaj velja

(i) podprostor $E[f(\zeta)]$ ni odvisen od $\zeta\in\mathcal{D}$, t.j.

$$E[f(\zeta)] \equiv E \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) ,$$

(ii) $f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \in E \qquad (\zeta_1\in\mathcal{D},\ \zeta_2\in\mathcal{D})$.

Obratno, naj velja

(i') zaprtje podprostora $E[f(\zeta)]$ ni odvisno od $\zeta\in\mathcal{D}$, t.j.

$$\overline{E[f(\zeta)]} \equiv F \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) ,$$

(ii') $f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \in F \qquad (\zeta_1\in\mathcal{D},\ \zeta_2\in\mathcal{D})$.

Tedaj je $\|f(\zeta)\|$ konstantna na $\mathcal{D}$.

Dokaz. Naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv M \quad (\zeta\in\mathcal{D})$. Naj bo $\{\zeta: |\zeta-\zeta_0|<r\}\subset\mathcal{D}$. Tedaj je

$$|\langle f(\zeta),u\rangle| \leq M \qquad (|\zeta-\zeta_0| < r\ ;\ u\in S(X')) ,$$

od koder po lemma 1.0.1 sledi

$$|\langle f(\zeta_0),u\rangle| + \frac{r-|\zeta-\zeta_0|}{2|\zeta-\zeta_0|}\,|\langle f(\zeta)-f(\zeta_0),u\rangle| \leq M$$
$$(|\zeta-\zeta_0| < r\ ,\ \zeta\neq\zeta_0;\ u\in S(X')) .$$

To pomeni

$$|\langle f(\zeta)-f(\zeta_0),u\rangle| \leq \frac{2|\zeta-\zeta_0|}{r-|\zeta-\zeta_0|}(\|f(\zeta_0)\| - |\langle f(\zeta_0),u\rangle|)$$
$$(|\zeta-\zeta_0| < r\ ,\ \zeta\neq\zeta_0;\ u\in S(X')) .$$

Po propoziciji 1.1.2 sledi

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) \in E[f(\zeta_0)] \qquad (|\zeta-\zeta_0| < r) \tag{1.3.0}$$

in

$$\|f(\zeta)-f(\zeta_0)\|_{f(\zeta_0)} \leq \frac{2|\zeta-\zeta_0|}{r-|\zeta-\zeta_0|} \qquad (|\zeta-\zeta_0| < r) ,$$

torej je

$$\|f(\zeta) - f(\zeta_0)\|_{f(\zeta_0)} < 1/2 \qquad (|\zeta - \zeta_0| < r/5) .$$

Po propoziciji 1.1.14 je tedaj

$$E[f(\zeta)] = E[f(\zeta_0) + f(\zeta) - f(\zeta_0)] = E[f(\zeta_0)]$$

$$(|\zeta - \zeta_0| < r/5) .$$

Zgornje lahko napravimo za vsako točko $\zeta_0 \in \mathcal{D}$. Ker je poljubni dve točki polja $\mathcal{D}$ mogoče povezati s kompaktnim lokom, po definiciji kompaktnosti sledi $E[f(\zeta)] \equiv E \quad (\zeta \in \mathcal{D})$. Dalje, E je linearen podprostor v X, pa iz (1.3.0) po definiciji kompaktnosti sledi tudi

$$f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \in E \qquad (\zeta_1 \in \mathcal{D}, \zeta_2 \in \mathcal{D}) .$$

Obrat. Naj velja (i') in (ii'). Naj bo $\zeta_1 \in \mathcal{D}$, $\zeta_2 \in \mathcal{D}$. Tedaj iz $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) + [f(\zeta_1) - f(\zeta_2)]$ in iz $f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \in F = \overline{E[f(\zeta_2)]}$ po propozicijah 1.1.7 in 1.1.6 sledi $\|f(\zeta_1)\| \geqq \|f(\zeta_2)\|$. Ker sta $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{D}$ poljubna, sledi, da je $\|f(\zeta)\|$ konstantna na polju $\mathcal{D}$. Q.E.D.

<u>1.3.1 KOROLAR</u> (Thorp-Whitley[20]) Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X. Naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv 1 \quad (\zeta \in \mathcal{D})$. Če eksistira taka točka $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, da je $f(\zeta_0)$ kompleksna ekstremna točka na S(X), tedaj je f konstanta. Obratno, naj $a \in S(X)$ ne bo kompleksna ekstremna točka na S(X). Tedaj eksistira nekonstantna analitična funkcija g, definirana v neki okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $g(0) = a$ in $\|g(\zeta)\| \equiv 1 \quad (\zeta \in \mathcal{U}(0))$.

Dokaz. Prvi del. Iz $\|f(\zeta)\| \equiv 1 \quad (\zeta \in \mathcal{D})$ po izreku 1.3.0 sledi $E[f(\zeta)] \equiv E \quad (\zeta \in \mathcal{D})$. Če je $f(\zeta_0)$ kompleksna ekstremna točka na S(X), je po diskusiji 1.1.1 $E[f(\zeta_0)] = \{0\}$, torej $E = \{0\}$. Po izreku 1.3.0 iz $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$ sledi tudi $f(\zeta_1) - f(\zeta_2) \in E \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{D})$, kar da $f(\zeta_1) = f(\zeta_2) \quad (\zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{D})$.

Drugi del. Naj $a \in S(X)$ ne bo kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Po diskusiji 1.1.1 je $E(a)=\{0\}$. Eksistira torej $x \in E(a)$, $x \neq 0$. Funkcija $\zeta \mapsto g(\zeta) = a + \zeta x$ ima po izreku 1.2.0 zahtevane lastnosti. Q.E.D.

1.3.2 KOROLAR (Thorp-Whitley [20]) Naj bo X kompleksen B-prostor. Tedaj v X velja strogi princip maksima norme natanko takrat, ko je vsaka točka na $S(X)$ kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Specialno, v strogo konveksnem B-prostoru velja strogi princip maksima norme.

Dokaz. Trivialen.

1.3.3 DISKUSIJA V preostanku tega razdelka bomo posplošili osnovni rezultat Thorpa-Whitleya (korolar 1.3.1).

1.3.4 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor, $a, b \in X$ in $co\{a,b\} \subset S(X)$. Naj bo $b - a \in E(a) \cap E(b)$. Tedaj podprostor $E[\alpha a + (1-\alpha)b]$ ni odvisen od $\alpha \in [0,1]$, t.j.

$$E[\alpha a + (1-\alpha)b] \equiv E \qquad (0 \leq \alpha \leq 1) .$$

Dokaz. Po propoziciji 1.1.9 je $E(a) \cap E(b) \subset E[\alpha a + (1-\alpha)b]$ $(0<\alpha<1)$, pa od tod in iz $b-a \in E(a) \cap E(b)$ sledi $b-a \in E[\alpha a + (1-\alpha)b]$ $(0 \leq \alpha \leq 1)$. Oglejmo si funkcijo $\zeta \mapsto h(\zeta) = a + \zeta(b-a) = a + \zeta_0(b-a) + (\zeta - \zeta_0)(b-a)$. Po zgornjem je $b - a \in E[a + \zeta_0(b-a)]$ $(0 \leq \zeta_0 \leq 1)$, pa po definiciji podprostora $E(\ )$ eksistira kompleksna okolica točke ζ_0, v kateri je $\|h(\zeta)\| \equiv 1$. To lahko napravimo za vsak ζ_0: $0 \leq \zeta_0 \leq 1$. Tako najdemo polje $\mathcal{D}$, ki vsebuje interval $[0,1]$ in na katerem velja $\|h(\zeta)\| \equiv 1$. Po izreku 1.3.0 je tedaj $E[h(\zeta)] \equiv E$ $(\zeta \in \mathcal{D})$. Q.E.D.

1.3.5 LEMMA Naj bo X linearen prostor in $a_1, a_2, \ldots a_n \in X$. Naj bo $a \in co\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Tedaj lahko zapišemo $a = \lambda u + (1-\lambda)a_n$, kjer je $u \in co\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ in $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dokaz. Trivialen.

1.3.6 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor,

$a_1, a_2, \dots, a_n \in X$ in $\mathrm{co}\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset S(X)$. Naj bo

(i) $E(a_i) \equiv E \qquad (i = 1,2,\dots,n)$

(ii) $a_i - a_j \in E \qquad (i,j = 1,2,\dots,n)$.

Tedaj velja

$$E(a) \equiv E \qquad (a \in \mathrm{co}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}) .$$

Dokaz. Najprej za vsak $i = 1,2,\dots, n-1$ in $u \in \mathrm{co}\{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ velja $a_{i+1} - u \in E$. Imamo namreč

$$a_{i+1} - u = a_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j a_j = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j a_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \alpha_j a_j =$$

$= \sum_{j=1}^{i} \alpha_j (a_{i+1} - a_j)$. Po predpostavki je $a_{i+1} - a_j \in E$ $(j = 1,2,\dots,i)$, pa zaradi linearnosti podprostora E sledi $\sum_{j=1}^{i} \alpha_j (a_{i+1} - a_j) \in E$.

Naj bo sedaj $a \in \mathrm{co}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Po lemma 1.3.5 lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
a = u_0 &= \lambda_1 u_1 + (1-\lambda_1) a_n \text{ ; tu je } 0 \leq \lambda_1 \leq 1;\ u_1 \in \mathrm{co}\{a_1, \dots, a_{n-1}\}, \\
u_1 &= \lambda_2 u_2 + (1-\lambda_2) a_{n-1} \text{ -"- } 0 \leq \lambda_2 \leq 1;\ u_2 \in \mathrm{co}\{a_1, \dots, a_{n-2}\}, \\
&\dots\dots\dots \\
u_{n-2} &= \lambda_{n-1} u_{n-1} + (1-\lambda_{n-1}) a_2 \text{ -"- } 0 \leq \lambda_{n-1} \leq 1;\ u_{n-1} \in \mathrm{co}\{a_1\} \\
&= \lambda_{n-1} a_1 + (1-\lambda_{n-1}) a_2 .
\end{aligned}
$$

Če gremo sedaj od zadaj korak za korakom, vidimo, da so na vsakem koraku izpolnjeni pogoji propozicije 1.3.4, pa dobimo

$$E = E(a_1) = E(u_{n-1}) = E(u_{n-2}) = \dots = E(u_0) = E(a). \qquad \text{Q.E.D.}$$

<u>1.3.7 PROPOZICIJA</u> (Thorp-Whitley[20]) Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $\|f(\zeta)\| = 1 \quad (\zeta \in \mathcal{D})$. Tedaj velja $\mathrm{co}\, f(\mathcal{D}) \subset S(X)$.

Dokaz. (Thorp-Whitley[20]). Naj bo $y \in \mathrm{co}\, f(\mathcal{D})$. Tedaj eksistirajo $\alpha_i \geq 0$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ in točke $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$, da je $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\zeta_i) = y$. Po Hahn-Banachovem izreku eksistira $u \in S(X')$, da je $\langle f(\zeta_1),u\rangle = 1$. Ker je $|\langle f(\zeta),u\rangle| \leq \|f(\zeta)\|.\|u\| = 1$ $(\zeta\in\mathcal{D})$, po strogem principu maksima norme za skalarne analitične funkcije sledi $\langle f(\zeta),u\rangle \equiv 1$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Torej je $\langle y,u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle f(\zeta_i),u\rangle = 1$, kar pomeni, da je $\|y\| \geq 1$. Po drugi strani pa je $\|y\| \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\|f(\zeta_i)\| = 1$. Q.E.D.

1.3.8 IZREK Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Tedaj velja

$$E(a) \equiv E \qquad (a\in \operatorname{co} f(\mathcal{D}))\ .$$

Dokaz. Po propoziciji 1.3.7 je $\operatorname{co} f(\mathcal{D})\subset S(X)$. Naj bo $a\in \operatorname{co} f(\mathcal{D})$. Tedaj eksistirajo točke $\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n\in\mathcal{D}$, da je $a\in \operatorname{co}\{f(\zeta_1),f(\zeta_2),\dots,f(\zeta_n)\}$. Po izreku 1.3.0 je $E[f(\zeta)] \equiv E$ $(\zeta\in\mathcal{D})$ in $f(\zeta')-f(\zeta'')\in E$ $(\zeta',\zeta''\in\mathcal{D})$. To pomeni, da so izpolnjeni pogoji propozicije 1.3.6, ki dokaže trditev. Q.E.D.

1.3.9 KOROLAR Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $\|f(\zeta)\| = 1$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Če $\operatorname{co} f(\mathcal{D})$ vsebuje kompleksno ekstremno točko na $S(X)$, tedaj je f konstanta.

Dokaz. Po izreku 1.3.8 je $E(a) \equiv E$ $(a\in \operatorname{co} f(\mathcal{D}))$. Naj bo $a_0\in \operatorname{co} f(\mathcal{D})$ kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Po diskusiji 1.1.1 je tedaj $E(a_0) = \{0\}$, torej $E = \{0\}$. To pomeni, da je vsaka točka množice $f(\mathcal{D})$ kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Po korolarju 1.3.1 je f konstanta. Q.E.D.

1.3.10 DISKUSIJA Korolar 1.3.9 (ne pa izreka 1.3.8) moremo enostavneje dokazati z uporabo naslednje propozicije.

1.3.11 PROPOZICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor, $a_1,a_2,\dots,a_n\in X$ in $\operatorname{co}\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\subset S(X)$. Tedaj velja

$$\bigcap_{i=1}^{n} E(a_i) \subset E(a) \qquad (a\in \operatorname{co}\{a_1,a_2,\dots,a_n\})\ .$$

Dokaz. Naj bo $a \in co\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, torej $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ ($\alpha_i \geq 0$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$). Naj bo $x \in \bigcap_{i=1}^{n} E(a_i)$. Po definiciji prostora $E(\ )$ eksistirajo konstante $r_i > 0$ $(i = 1,2,\dots,n)$, da je

$$\|a_i + \zeta x\| \leq 1 \qquad (|\zeta| \leq r_i \ (i = 1,2,\dots,n)).$$

Sledi

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \zeta x\Big\| &= \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a_i + \zeta x)\Big\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \|a_i + \zeta x\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ &= 1 \qquad (|\zeta| \leq \min_{1\leq i\leq n} r_i) , \end{aligned}$$

kar pomeni, da je $x \in E(a)$. Q.E.D.

<u>1.3.12 DISKUSIJA</u> Korolar 1.3.9 (in izrek 1.3.8) ne velja, če $co\, f(\Delta)$ zamenjamo s $\overline{co}\, f(\Delta)$. Primer, da to vidimo, je v prostoru X dvojic kompleksnih števil s sup normo funkcija $f(\zeta) = [1, \zeta]$. Tedaj je $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(|\zeta| < 1)$, pa je $f(1) = [1,1]$ kompleksna ekstremna točka na $S(X)$. Torej že $\overline{f(\Delta)}$ lahko vsebuje kompleksno ekstremno točko na $S(X)$, pa ni nujno, da je f konstanta.

2. ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO Z VREDNOSTMI V BANACHOVIH ALGEBRAH

2.0. O EKSTREMNIH TOČKAH NA ENOTNI KROGLI V C^*-ALGEBRAH

V tem razdelku bomo navedli nekaj znanih rezultatov o realnih in kompleksnih ekstremnih točkah na enotni krogli v C^*-algebrah.

2.0.0 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen H-prostor. Algebra $\mathcal{A} \subset L(X)$ je sebi adjungirana, če iz $A \in \mathcal{A}$ sledi $A^* \in \mathcal{A}$.

2.0.1 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen H-prostor. C^*-algebra je sebi adjungirana, kompleksna algebra omejenih linearnih operatorjev na prostoru X, zaprta v enakomerni operatorski topologiji.

2.0.2 IZREK (Kadison [13]) Naj bo X kompleksen H-prostor. Naj C^*-algebra $\mathcal{A} \subset L(X)$ vsebuje identični operator I. Tedaj je operator $U \in \mathcal{A}$ realna ekstremna točka na $S(\mathcal{A})$ natanko takrat, ko je

(i) U je parcialno izometričen operator

(ii) velja $(I - UU^*)\mathcal{A}(I - U^*U) = \{0\}$.

Dalje, normalen operator, ki je realna ekstremna točka na $S(\mathcal{A})$, je unitaren. Obrnljiv operator, ki je realna ekstremna točka na $S(\mathcal{A})$, je unitaren.

Izreka 2.0.2 ne bomo dokazovali. V primeru, ko je $\mathcal{A} = L(X)$, se izrek 2.0.2 reducira na enostavnejši izrek 2.0.4.

2.0.3 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen H-prostor. Operator $A \in L(X)$ je semiunitaren, če je ali $A^*A = I$ ali pa $AA^* = I$, kjer je I identični operator (t.j. če je ali A izometričen operator, ali A^* izometričen operator).

2.0.4 IZREK (Kadison[13], Halmos[10]) Naj bo X kompleksen H-prostor. Operator $U \in L(X)$ je realna ekstremna točka na $S[L(X)]$ natanko takrat, ko je semiunitaren.

Za izrek 2.0.4 sta znana dva dokaza. Kadison[13] ga dokaže kot posledico svojega izreka o karakterizaciji realnih ekstremnih točk (izreka 2.0.2), pri čemer za dokaz slednjega uporabi Gelfand-Neumark-ov izrek o reprezentaciji komutativnih C^*-algeber. Halmos[10] ga dokaže direktno, pri čemer uporabi polarno dekompozicijo operatorja nad H- prostorom.

Za nas bo važen predvsem naslednji izrek, ki sta ga pred kratkim dokazala Akemann-Russo[3].

2.0.5 IZREK (Akemann-Russo[3]) Če je $\mathcal{A}$ C^*-algebra, tedaj realne ekstremne točke na $S(\mathcal{A})$ sovpadajo s kompleksnimi ekstremnimi točkami na $S(\mathcal{A})$.

Akemann in Russo sta za dokaz izreka 2.0.5 uporabila malce posplošen (gl. Miles[15]) Kadisonov dokaz izreka 2.0.2, ki funkcionira tudi za kompleksne ekstremne točke.

Naslednji izrek je posledica izrekov 2.0.4 in 2.0.5. Mi ga bomo dokazali na drug način, direktno, z uporabo spektralne teorije za sebi adjungirane operatorje.

2.0.6 IZREK Naj bo X kompleksen H-prostor. Tedaj realne ekstremne točke na $S[L(X)]$ sovpadajo s kompleksnimi ekstremnimi točkami na $S[L(X)]$ - to so natanko vsi semiunitarni operatorji.

Dokaz. Naj bo A semiunitaren operator. Ker je H-prostor X strogo konveksen, kratek račun pokaže, da je A realna ekstremna točka na $S[L(X)]$, torej tudi kompleksna ekstremna točka na $S[L(X)]$.
Obrat. Naj bo A kompleksna ekstremna točka na $S[L(X)]$.

Najprej bomo dokazali, da je A^*A projektor. Predpostavimo nasprotno, da A^*A ni projektor. Tedaj eksistira $\lambda_0 \in \sigma(A^*A)$, $0<\lambda_0<1$. Naj bo $\lambda_0 < \lambda < 1$ in naj bosta P in Q spektralna projektorja, ki za operator A^*A ustrezata intervaloma $[0,\lambda]$ in $[\lambda,1]$. Jasno je $PX \oplus QX = X$. Naj bo $\delta > 0$. Definirajmo operator $B \in L(X)$ takole: $BQ = 0$ in $BP = \delta P$. Očitno je $BA^*A = A^*AB$. Naj bo sedaj $z \in S(X)$, $z = x + y$ $(x \in PX,\ y \in QX)$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
\|(A^*A + A^*AB^2)(x+y)\|^2 &= \|A^*A(1+\delta^2)x + A^*Ay\|^2 \\
&= \|A^*A(1+\delta^2)x\|^2 + \|A^*Ay\|^2 \\
&\leq \lambda^2(1+\delta^2)^2\|x\|^2 + \|y\|^2
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
\|A^*A(I\pm B)^2(x+y)\|^2 &= \|A^*A(I\pm B)^2x + A^*Ay\|^2 \\
&= \|A^*A(1\pm\delta)^2x\|^2 + \|A^*Ay\|^2 \\
&\leq \lambda^2(1\pm\delta)^4\|x\|^2 + \|y\|^2 .
\end{aligned}
$$

Ker je $\lambda < 1$, lahko izberemo $\delta > 0$, da je $\lambda(1+\delta^2) \leq 1$ in $\lambda(1\pm\delta)^2 \leq 1$. Če v definiciji operatorja B uporabimo tako izbran δ, sledi $\|A^*A(I+B^2)\| \leq 1$ in $\|A^*A(I\pm B)^2\| \leq 1$, torej $\|A\pm iAB\| \leq 1$, $\|A\pm AB\| \leq 1$. Od tod, ker je A po predpostavki kompleksna ekstremna točka na $S[L(X)]$, sledi $AB = 0$, torej $ABP = \delta AP = 0$. To pomeni, da je $A^*AP = 0$, kar pa je v protislovju s predpostavko, da interval $(0,\lambda)$ vsebuje točko $\lambda_0 \in \sigma(A^*A)$. Protislovje dokazuje, da je A^*A projektor.

Predpostavimo sedaj, da je A kompleksna ekstremna točka na $S[L(X)]$ in da pri tem A ni semiunitaren operator. Po prvem delu dokaza to pomeni, da je A parcialna izometrija, za katero je $\mathcal{N}(A) \neq \{0\}$ in $\mathcal{R}(A) \neq X$. Tedaj lahko konstruiramo operator $B \in S[L(X)]$ na naslednji način: izberemo $x_0 \in \mathcal{N}(A) \cap S(X)$ in $y_0 \in \mathcal{R}(A)^{\perp} \cap S(X)$ in definiramo $Bx_0 = y_0$ in $Bx_0 = 0$ $(x \perp x_0)$. Razstavimo

$$X = \mathcal{N}(A)^{\perp} \oplus [\mathcal{N}(A) \ominus \{\lambda x_0; \lambda \in \mathbb{C}\}] \oplus \{\lambda x_0; \lambda \in \mathbb{C}\}$$

in v istem smislu razstavimo poljuben vektor $z \in S(X)$:

$z = p + q + r$

Dobimo $(A\pm B)z = Ap \pm Br$ in $(A\pm iB)z = Ap \pm iBr$. Ker je $Br \perp Ap$, sledi $\|A\pm B\| \leq 1$, $\|A\pm iB\| \leq 1$. To pa je v nasprotju z dejstvom, da je A kompleksna ekstremna točka na $S[L(X)]$. Q.E.D.

2.1. ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO Z VREDNOSTMI V C^*-ALGEBRAH

Cilj tega razdelka je proučiti analitične funkcije s konstantno normo, z vrednostmi v C^*-algebrah, še posebej pa v algebri $L(X)$ nad kompleksnim H-prostorom X.

<u>2.1.0 IZREK</u> Naj bo X kompleksen H-prostor in naj C^*-algebra $\mathcal{A} \subset L(X)$ vsebuje identični operator. Naj bo f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{A}$, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$. Če co $f(\mathcal{D})$ vsebuje semiunitaren operator, tedaj je f konstanta.
Obratno, če je $A \in S(\mathcal{A})$ normalen neunitaren operator ali obrnljiv neunitaren operator, tedaj eksistira nekonstantna analitična funkcija g, definirana v neki okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{A}$, za katero velja $\|g(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{U}(0))$ in $g(0) = A$.

Dokaz. Trivialen. Uporabimo izreka 2.0.2 in 2.0.5 ter korolarja 1.3.9 in 1.3.1 . Q.E.D.

V specialnem primeru, ko je $\mathcal{A} = L(X)$, izrek 2.1.0 preide v naslednji izrek.

<u>2.1.1 IZREK</u> Naj bo X kompleksen H-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $L(X)$, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$. Če co $f(\mathcal{D})$ vsebuje semiunitaren operator, te-

daj je f konstanta.

Obratno, če $A \in S[L(X)]$ ni semiunitaren operator, tedaj eksistira nekonstantna analitična funkcija g, definirana v neki okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X), za katero velja $\|g(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{U}(0))$ in $g(0) = A$.

Dokaz. Trivialen. Uporabimo izrek 2.0.6 ter korolarja 1.3.9 in 1.3.1 . Q.E.D.

2.1.2 IZREK (Brown-Douglas [6]) Naj bo X kompleksen H-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X), za katero velja $\|f(\zeta)\| \leq 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$.

(i) Če eksistirata $\zeta_0 \in \mathcal{D}$ in $x \in X$, $x \neq 0$, da je $\|f(\zeta_0)x\| = \|x\|$, tedaj je funkcija $\zeta \mapsto f(\zeta)x$ konstanta. Specialno, če eksistira $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, da je operator $f(\zeta_0)$ izometričen, tedaj je funkcija f konstanta.

(ii) Če je γ, $|\gamma| = 1$ v spektru $\sigma[f(\zeta_0)]$ pri nekem $\zeta_0 \in \mathcal{D}$, tedaj je $\gamma \in \sigma[f(\zeta)]$ $(\zeta \in \mathcal{D})$.

Na tem mestu izreka 2.1.2 ne bomo dokazali, ker ga bomo kasneje posplošili na analitične funkcije, katerih vrednosti bodo operatorji nad nekaterimi B-prostori, pri čemer bomo tudi več povedali o naravi spektralnih točk, omenjenih v (ii).

Naslednji izrek je osrednji rezultat tega razdelka.

2.1.3 IZREK Naj bo X kompleksen H-prostor in

$$f(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \dots \qquad (2.1.0)$$

analitična funkcija, definirana v okolici točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X). Naj bo $\|A_0\| = 1$.

Za eksistenco neke okolice točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv 1$, je potreben pogoj

(i) $A_i Q = A_i^* P = 0 \quad (i = 1,2,\ldots)$, (2.1.1)

kjer je Q spektralni projektor, ki ustreza točki $\lambda = 1$ za operator $A_0^* A_0$ in P spektralni projektor, ki ustreza točki $\lambda = 1$ za operator $A_0 A_0^*$.
Za eksistenco neke okolice točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv 1$, je zadosten pogoj

(ii) eksistira nek $\delta > 0$, da je

$$A_i(I - F_{1-\delta}) = A_i^*(I - E_{1-\delta}) = 0 \quad (i = 1,2,\ldots),$$

kjer sta E_λ in F_λ spektralni družini za operatorja $A_0 A_0^*$ in $A_0^* A_0$, I pa identični operator.
V posebnem primeru, ko je $\lambda = 1$ izolirana točka spektra operatorja $A_0 A_0^*$, je pogoj (i) potreben in zadosten.

Dokaz prvega dela izreka. Znano je, da velja $\sigma(A_0 A_0^*) = \sigma(A_0^* A_0)$. Po predpostavki je $\|A_0\| = 1$, torej je točka $\lambda = 1$ v spektru operatorjev $A_0 A_0^*$ in $A_0^* A_0$. Sedaj imamo dve možnosti:
(a) $\lambda = 1$ je lastna vrednost operatorja $A_0 A_0^*$. Tedaj je (trivialno) $\lambda = 1$ lastna vrednost operatorja $A_0^* A_0$.
(b) $\lambda = 1$ je v zveznem spektru operatorja $A_0 A_0^*$ in tudi v zveznem spektru operatorja $A_0^* A_0$.
V primeru (b) je $P = Q = 0$ in je zato (i) trivialno izpolnjeno. Predpostavimo torej, da je $\lambda = 1$ lastna vrednost operatorjev $A_0 A_0^*$ in $A_0^* A_0$.
Naj vrsta (2.1.0) konvergira v krogu $|\zeta| < \delta$. Tedaj vrsta iz norm členov vrste (2.1.0) v vsakem manjšem krogu enakomerno konvergira (gl.[12]). Naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv 1 \quad (|\zeta| < \delta)$.
Če vrsti za $f(\zeta)$ in $f(\zeta)^*$ členoma zmnožimo, dobimo

$$f(\zeta)^* f(\zeta) = A_0^* A_0 + A_0^* A_1 \zeta + A_1^* A_0 \bar{\zeta} + \ldots \quad .$$

Členska integracija da

$$\frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})^* f(re^{i\theta}) r \, d\theta = A_0^* A_0 + A_1^* A_1 r^2 + \ldots \quad (r<\delta) ,$$

torej je

$$\| A_0^* A_0 + A_1^* A_1 r^2 + \ldots \| \leq \frac{1}{2\pi r} . 2\pi r = 1 \quad (r<\delta) .$$

Operatorji $A_i^* A_i r^{2i}$ $(i = 1,2,\ldots)$ so pozitivni, torej prišteti k pozitivnemu operatorju $A_0^* A_0$ norme ne morejo zmanjšati. Ker je $\|A_0^* A_0\| = \|A_0\|^2 = 1$, sledi

$$\|A_0^* A_0 + A_1^* A_1 r^2 + \ldots\| = 1 \qquad (0 \leq r < \delta) . \tag{2.1.2}$$

Podobno dobimo

$$\|A_0 A_0^* + A_1 A_1^* r^2 + \ldots\| = 1 \qquad (0 \leq r < \delta) . \tag{2.1.3}$$

Naj bo sedaj $x \in \mathcal{R}(Q)$. Ker je po predpostavki točka $\lambda = 1$ lastna vrednost operatorja $A_0^* A_0$, sledi

$$(A_0^* A_0 x, x) = (x,x) = \|x\|^2 . \tag{2.1.4}$$

Enakost (2.1.2) lahko prepišemo v obliko

$$\sup_{\|y\|=1} \{ (A_0^* A_0 y, y) + (A_1^* A_1 y, y) r^2 + \ldots \} = 1 \qquad (r < \delta) ,$$

pa sledi

$$(A_i^* A_i x, x) = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) ,$$

torej

$$(A_i x, A_i x) = \|A_i x\|^2 = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) .$$

Ker je bil $x \in \mathcal{R}(Q)$ poljuben, to pomeni, da je

$$A_i Q = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) .$$

Prav tako s pomočjo (2.1.3) dokažemo

$$A_i^* P = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) . \qquad \text{Q.E.D.}$$

Za dokaz drugega dela izreka 1.2.3 najprej dokažemo naslednji lemma.

<u>2.1.4 LEMMA</u> Naj bo X kompleksen H-prostor, $T \in L(X)$ in E_λ, F_λ spektralni družini za operatorja TT^*, T^*T. Naj bo $\alpha < \beta$. Če je $x \in \mathcal{R}(F_\beta - F_\alpha)$, je $Tx \in \mathcal{R}(E_\beta - E_\alpha)$.

Dokaz. Znano je (gl. [7]), da lahko pišemo

$$T = W(T^*T)^{1/2} , \tag{2.1.5}$$

kjer je W parcialna izometrija : $\|Wx\| = \|x\|$ $(x \in \mathcal{R}((T^*T)^{1/2}))$, $Wx = 0$ $(x \perp \mathcal{R}((T^*T)^{1/2}))$. Torej je $W = WW^*W$ in W^*W je ortogonalni projektor na $\overline{\mathcal{R}((T^*T)^{1/2})}$. Ker je $(T^*T)^{1/2}$ sebi adjungiran operator, sledi, da W^*W komutira s $(T^*T)^{1/2}$.

Iz (2.1.5) sledi $T^* = (T^*T)^{1/2}W^*$, torej $TT^* = W(T^*T)W^*$. Ker je $\mathcal{R}(T^*T) \subset \mathcal{R}((T^*T)^{1/2})$, sledi

$$W^*TT^* = T^*TW^* \quad . \tag{2.1.6}$$

Od tod dobimo

$$F_\lambda W^* = W^* E_\lambda \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

in

$$\begin{aligned} F_\lambda T^* &= F_\lambda (T^*T)^{1/2} W^* \\ &= (T^*T)^{1/2} F_\lambda W^* \\ &= W^*W(T^*T)^{1/2} F_\lambda W^* \\ &= W^*W(T^*T)^{1/2} W^* E_\lambda \\ &= (T^*T)^{1/2} W^*WW^* E_\lambda \\ &= (T^*T)^{1/2} W^* E_\lambda \\ &= T^* E_\lambda \quad . \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Sledi $(F_\beta - F_\alpha)T^* = T^*(E_\beta - E_\alpha)$, torej $T(F_\beta - F_\alpha) = (E_\beta - E_\alpha)T$. Naj bo $x \in \mathcal{R}(F_\beta - F_\alpha)$. Tedaj lahko zapišemo $x = (F_\beta - F_\alpha)y$, pa dobimo $Tx = T(F_\beta - F_\alpha)y = (E_\beta - E_\alpha)Ty \in \mathcal{R}(E_\beta - E_\alpha)$. Q.E.D.

Dokaz drugega dela izreka 2.1.3. Naj bo izpolnjen pogoj (ii) in naj bo $x \in \mathcal{R}(I - F_{1-\delta})$. Tedaj iz (ii) sledi $f(\zeta)x = A_0 x$. Dalje, po lemma 2.1.4 je $A_0 x \in \mathcal{R}(I - E_{1-\delta})$. Zaradi (ii) tedaj pri nekem $R>0$ velja

$$f(\zeta)^* f(\zeta)x \equiv A_0^* A_0 x \qquad (x \in \mathcal{R}(I - F_{1-\delta}); \quad |\zeta| < R) \ .$$

Naj bo sedaj $z \in S(X)$ poljuben. Pišimo

$$z = x + y \quad , \text{kjer je } x \in \mathcal{R}(I - F_{1-\delta}) \ , \quad y \perp x \ .$$

Jasno je

$$\|A_0^* A_0 y\| \le (1 - \delta)\|y\| \quad . \tag{2.1.7}$$

Sledi

$$\|f(\zeta)z\|^2 = (f(\zeta)z, f(\zeta)z)$$
$$= (f(\zeta)^* f(\zeta)z, z)$$
$$= (f(\zeta)^* f(\zeta)x, x) + (f(\zeta)^* f(\zeta)x, y)$$
$$+ (f(\zeta)^* f(\zeta)y, x) + (f(\zeta)^* f(\zeta)y, y)$$
$$= (f(\zeta)^* f(\zeta)x, x) + (f(\zeta)^* f(\zeta)x, y)$$
$$+ (y, f(\zeta)^* f(\zeta)x) + (f(\zeta)^* f(\zeta)y, y) \qquad (|\zeta|<R).$$

Ker je $\mathcal{R}(I - F_{1-\delta})$ invarianten za $A_0^* A_0$, je

$$(A_0^* A_0 x, y) = (y, A_0^* A_0 x) = 0 \quad ,$$

pa sledi

$$\|f(\zeta)z\|^2 = (A_0^* A_0 x, x) + (f(\zeta)^* f(\zeta)y, y) \ .$$

Če zapišemo vrsto za $f(\zeta)^* f(\zeta)$, takoj vidimo, da za dovolj majhen $r>0$ eksistira $M(r)$, da velja

$$\|f(\zeta)^* f(\zeta)y\| \leqq (1-\delta)\|y\| + |\zeta| M(r)\|y\| \qquad (|\zeta|<r<R) \ .$$

To pomeni, da je

$$\|f(\zeta)z\|^2 \leqq \|x\|^2 + (1-\delta)\|y\|^2 + |\zeta| M(r)\|y\|^2$$
$$= \|z\|^2 + (|\zeta| M(r) - \delta)\|y\|^2 \qquad (|\zeta|<r) \ .$$

Če je sedaj $|\zeta| < r_0 = \min\{ r, \delta/M(r)\}$, sledi

$$\|f(\zeta)z\| \leqq \|z\| \qquad (z \in S(X) ; \ |\zeta|<r_0) \ ,$$

torej

$$\|f(\zeta)\| \leqq 1 \qquad (|\zeta| < r_0) \ .$$

Ker je $\|f(0)\| = \|A_0\| = 1$, po principu maksima norme sledi

$$\|f(\zeta)\| \equiv 1 \qquad (|\zeta| < r_0) \ ,$$

kar smo želeli dokazati.

Dalje, v posebnem primeru, ko je $\lambda = 1$ izolirana točka spektra operatorjev $A_0 A_0^*$ in $A_0^* A_0$, takoj vidimo, da sta pogoja (i) in (ii) ekvivalentna. S tem je tudi drugi del izreka 2.1.3 v celoti dokazan. Q.E.D.

2.1.5 KOROLAR Naj bo X kompleksen H-prostor in

$$f(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots$$

analitična funkcija, definirana v okolici točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X). Naj bo operator A_0 kompakten. Naj bo Q spektralni projektor, ki pripada največji lastni vrednosti operatorja $A_0^* A_0$ in P analogni projektor za operator $A_0 A_0^*$. Tedaj eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv \|A_0\|$ natanko takrat, ko je

$$A_i Q = A_i^* P = 0 \qquad (i = 1,2,\ldots) .$$

Dokaz. Iz predpostavk sledi, da je $A_0^* A_0$ kompakten operator. Ker je po znanem izreku (gl. [7]) spekter kompaktnega operatorja iz lastnih vrednosti, katerih edino možno stekališče je točka 0, sledi, da je $\lambda = \|A_0^* A_0\|$ izolirana točka spektra operatorja $A_0^* A_0$. Trditev korolarja tedaj sledi iz izreka 2.0.4, uporabljenega za funkcijo $\zeta \mapsto f(\zeta)/\|A_0\|$. Q.E.D.

2.2. ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO Z VREDNOSTMI V KOMUTATIVNIH BANACHOVIH ALGEBRAH

V tem razdelku bomo dobili nekaj bolj podrobnih rezultatov o analitičnih funkcijah s konstantno normo, z vrednostmi v komutativnih B-algebrah. Pri tem bomo uporabili Gelfandovo teorijo o reprezentaciji komutativnih B-algeber.

2.2.0 LEMMA Naj bo X kompleksen B-prostor in f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$. Naj bo funkcional $u \in S(X')$ tak, da pri nekem $\zeta_0 \in \mathcal{D}$ velja $|\langle f(\zeta_0), u\rangle| = 1$.

Tedaj eksistira φ: $0 \leq \varphi < 2\pi$, da je $\langle f(\zeta),u\rangle \equiv e^{i\varphi}$ $(\zeta\in\mathcal{D})$.

Dokaz. Po predpostavki je $\zeta\mapsto\langle f(\zeta),u\rangle$ skalarna analitična funkcija na $\mathcal{D}$, za katero velja

$$|\langle f(\zeta),u\rangle| \leq \|f(\zeta)\|\|u\| = 1 \quad (\zeta\in\mathcal{D})$$

in $|\langle f(\zeta_0),u\rangle| = 1$. Trditev lemma sedaj sledi po strogem principu maksima norme za skalarne analitične funkcije. Q.E.D.

2.2.1 LEMMA Naj bo X kompleksen B-prostor in

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

analitična funkcija, definirana v okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v X, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta\in\mathcal{U}(0))$.
Če za nek funkcional $u\in S(X')$ velja $|\langle a_0,u\rangle| = 1$, tedaj je

$$\langle a_i,u\rangle = 0 \qquad (i = 1,2,\dots) .$$

Dokaz. Trivialen, uporabimo lemma 2.2.0 . Q.E.D.

2.2.2 DEFINICIJA Naj bo $\mathcal{B}$ kompleksna komutativna B-algebra z enoto. $\mathfrak{M}(\mathcal{B})$ je razred vseh linearnih multiplikativnih funkcionalov na $\mathcal{B}$ (= razred vseh maksimalnih idealov algebre $\mathcal{B}$).

2.2.3 IZREK Naj bo $\mathcal{B}$ kompleksna komutativna B-algebra z enoto. Naj bo

$$f(\zeta) = a_0 + a_1(\zeta - \zeta_0) + a_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots$$

analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}\ni\zeta_0$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{B}$, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta\in\mathcal{D})$.

(i) Naj bo točka α, $|\alpha| = 1$ v spektru elementa a_0 . Tedaj je $\alpha\in\sigma[f(\zeta)]$ $(\zeta\in\mathcal{D})$ in $0\in\sigma(a_i)$ $(i=1,2,\dots)$.

(ii) Specialno, naj bo ves spekter elementa a_0 na enotni krožnici. Tedaj so vsi elementi a_i $(i=1,2,\dots)$

kvazinilpotentni in velja

$$\sigma[f(\zeta)] \equiv \sigma(a_0) \qquad (\zeta\in\mathcal{D}).$$

Dokaz. Naj točka α, $|\alpha| = 1$, leži v $\sigma(a_0)$. Po Gelfandu eksistira $m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$, da je

$$\langle a_0,m\rangle = \langle f(\zeta_0),m\rangle = \alpha \tag{2.2.0}$$

Ker je $\|m\| = 1$, po lemma 2.2.0 sledi $\langle f(\zeta),m\rangle \equiv \alpha$ $(\zeta\in\mathcal{D})$, kar po Gelfandu pomeni, da je $\alpha\in\sigma[f(\zeta)]$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Dalje, po lemma 2.2.1 iz (2.2.0) sledi $\langle a_i,m\rangle = 0$ $(i = 1,2,\dots)$, torej je po Gelfandu $0\in\sigma(a_i)$ $(i=1,2,\dots)$.

Naj bo sedaj ves spekter elementa a_0 na enotni krožnici. To po Gelfandu pomeni, da je

$$|\langle a_0,m\rangle| = 1 \qquad (m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})), \tag{2.2.1}$$

od koder po lemma 2.2.1 sledi $\langle a_i,m\rangle = 0$ $(m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$; $i = 1,2,\dots)$, torej so elementi $a_i (i=1,2,\dots)$ res kvazinilpotentni. Dalje, ker je $f(\zeta_0) = a_0$, iz (2.2.1) sledi $|\langle f(\zeta_0),m\rangle| = 1$ $(m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B}))$, od koder po lemma 2.2.0 dobimo $\langle f(\zeta),m\rangle \equiv \langle f(\zeta_0),m\rangle$ $(m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$; $\zeta\in\mathcal{D})$, kar po Gelfandu pomeni, da je $\sigma[f(\zeta)] \equiv \sigma(a_0)$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Q.E.D.

<u>2.2.4 IZREK</u> Naj bo $\mathcal{B}$ kompleksna B-algebra z enoto, v kateri velja $\|a\| = \operatorname{spr} a$ $(a\in\mathcal{B})$. Naj bo

$$f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots$$

analitična funkcija, definirana v okolici točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{B}$. Naj bo $\|a_0\| = 1$ in naj eksistira $\delta>0$, da je kolobar $1-\delta<|\zeta|<1$ v resolventni množici elementa a_0.
Tedaj eksistira neka okolica točke 0, v kateri je $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ natanko takrat, ko je $\langle a_i,m\rangle = 0$ $(i=1,2,\dots)$ za vse tiste funkcionale $m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$, za katere je $|\langle a_0,m\rangle| = 1$.

Dokaz. Najprej iz $\|a\| = \operatorname{spr} a$ $(a\in\mathcal{B})$ sledi, da je algebra $\mathcal{B}$ komutativna (gl. [5]). Naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ v neki okolici točke 0 in naj bo $|\langle a_0,m\rangle| = 1$ za nek $m\in\mathfrak{M}(\mathcal{B})$. Za vsak tak m tedaj po lemma 2.2.1 velja $\langle a_i,m\rangle = 0$ $(i=1,2,\dots)$.

Obrat. Naj bo funkcija f definirana v okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0. Naj bo $\langle a_i, m\rangle = 0$ $(i=1,2,\dots)$ za vse tiste $m \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$, za katere je $|\langle a_0, m\rangle| = 1$. Če je sedaj $m \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ tak, da je $|\langle a_0, m\rangle| = 1$, sledi

$$\begin{aligned} |\langle f(\zeta), m\rangle| &\geqq |\langle a_0, m\rangle + \langle a_1, m\rangle \zeta + \dots | \\ &\geqq |\langle a_0, m\rangle| . \end{aligned}$$

Naj bo sedaj $m \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$ tak, da je $|\langle a_0, m\rangle| < 1$. Po Gelfandu tedaj iz prepostavk izreka sledi $|\langle a_0, m\rangle| \leqq 1 - \delta$. Dalje, očitno eksistira $R > 0$, da velja $\{\zeta : |\zeta| < R\} \subset \mathcal{U}(0)$ in $\|f(\zeta) - f(0)\| \leqq \delta$ $(|\zeta| < R)$. Sledi

$$\begin{aligned} |\langle f(\zeta), m\rangle| &\leqq |\langle a_0, m\rangle| + |\langle f(\zeta) - f(0), m\rangle| \\ &\leqq 1 - \delta + \delta \\ &= 1 \qquad (|\zeta| < R) . \end{aligned}$$

Če vse to upoštevamo, dobimo

$$\begin{aligned} \|f(\zeta)\| &= \operatorname{spr} f(\zeta) \\ &= \sup_{m \in \mathfrak{M}(\mathcal{B})} |\langle f(\zeta), m\rangle| \\ &\leqq 1 \qquad (|\zeta| < R) . \end{aligned}$$

Ker je $\|f(0)\| = \|a_0\| = 1$, po principu maksima norme sledi $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(|\zeta| < R)$. Q.E.D.

<u>2.2.5 KOROLAR</u> Naj bo $\mathcal{B}$ kompleksna komutativna B-algebra z enoto brez radikala. Naj bo f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{B}$, za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathcal{D})$. Če pri nekem $\zeta_0 \in \mathcal{D}$ spekter elementa $f(\zeta_0)$ leži na enotni krožnici, tedaj je f konstanta.

Dokaz. Razvijmo funkcijo f v okolici točke ζ_0 v vrsto

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + a_1(\zeta - \zeta_0) + a_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots .$$

Po izreku 2.2.3 so tedaj elementi a_i $(i = 1,2,\dots)$ v radikalu algebre $\mathcal{B}$. Po predpostavki je $\mathcal{B}$ brez radikala, pa sledi $a_i = 0$ $(i = 1,2,\dots)$, torej je f v okolici točke ζ_0 konstanta. Trditev korolarja sledi od tod po principu o analitičnem nadaljevanju. Q.E.D.

Z uporabo rezultatov razdelka 2.0. dobimo še naslednji izrek.

2.2.6 IZREK Naj bo X kompleksen H-prostor in $\mathcal{A} \subset L(X)$ komutativna C^*-algebra, ki vsebuje identični operator. Naj bo f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{A}$, za katero velja $\|f(\gamma)\| \equiv 1$ $(\gamma \in \mathcal{D})$. Če co $f(\mathcal{D})$ vsebuje unitaren operator, tedaj je f konstanta.
Obratno, naj $A \in S(\mathcal{A})$ ne bo unitaren operator. Tedaj eksistira nekonstantna analitična funkcija g, definirana v neki okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $\mathcal{A}$, za katero velja $\|g(\gamma)\| \equiv 1$ $(\gamma \in \mathcal{U}(0))$ in $g(0) = A$.

Dokaz. Po izreku 2.0.2 je zaradi komutativnosti algebre $\mathcal{A}$ operator $A \in \mathcal{A}$ realna ekstremna točka na $S(\mathcal{A})$ natanko takrat, ko je unitaren. Trditev izreka tedaj sledi s pomočjo izreka 2.0.5 in korolarjev 1.3.9 in 1.3.1.
Q.E.D.

2.3. ANALITIČNE FUNKCIJE S KONSTANTNO NORMO Z VREDNOSTMI V OPERATORSKIH ALGEBRAH

Namen tega razdelka je razširiti rezultate Brown-Douglasa [6] (izrek 2.1.2) na analitične funkcije, katerih vrednosti so omejeni linearni operatorji nad enakomerno konveksnim B-prostorom.

2.3.0 DEFINICIJA Naj bo X kompleksen B-prostor. Točka λ je v aproksimativnem točkastem spektru operatorja $A \in L(X)$, če eksistira zaporedje $\{x_n\} \subset S(X)$, da je $\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$.

2.3.1 LEMMA Naj bo X kompleksen B-prostor in λ robna točka spektra operatorja $A \in L(X)$. Tedaj je λ v aproksimativnem točkastem spektru operatorja A.

Dokaz. Znano je (gl. [7]), da velja

$$\|R(\lambda,A)\| \geq 1/\mathrm{dist}\{\lambda, \sigma(A)\} \qquad (\lambda \in \varrho(A)) \quad . \tag{2.3.0}$$

Naj bo λ_0 robna točka spektra $\sigma(A)$ in $\{\lambda_n\} \subset \varrho(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Zaradi (2.3.0) je mogoče najti zaporedje vektorjev $\{x_n\} \subset S(X)$, da je $R(\lambda_n,A)x_n \neq 0$ $(n=1,2,..)$ in

$$\lim_{n\to\infty} 1/\|R(\lambda_n,A)x_n\| = 0 \ . \tag{2.3.1}$$

Sedaj je $(\lambda_n - A)R(\lambda_n,A)x_n = x_n$ $(n=1,2,...)$, torej

$$\lambda_n R(\lambda_n,A)x_n \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\| - AR(\lambda_n,A)x_n \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\| =$$
$$= x_n/\|R(\lambda_n,A)x_n\| \qquad (n = 1,2,...) \ .$$

Sledi

$$\lambda_0 R(\lambda_n,A)x_n \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\| - AR(\lambda_n,A)x_n \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\| =$$
$$= x_n/\|R(\lambda_n,A)x_n\| + (\lambda_0 - \lambda_n) \ R(\lambda_n,A)x_n \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\|$$
$$(n = 1,2,...) \ .$$

Pri $n \to \infty$ desna stran v zadnji enakosti konvergira k 0 zaradi (2.3.1), zaradi $\|x_n\| = 1$ $(n = 1,2,...)$ ter zaradi $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda_0| = 0$. Če sedaj pišemo $y_n = R(\lambda_n,A)x_n \ / \ /\|R(\lambda_n,A)x_n\|$ $(n=1,2,...)$, velja $y_n \in S(X)$ $(n=1,2,...)$ in $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ay_n - \lambda_0 y_n\| = 0$. Q.E.D.

<u>2.3.2 LEMMA</u> Naj bo X enakomerno konveksen kompleksen B-prostor. Naj bo $x_n \in X$, $\|x_n\| \leq 1$ $(n=1,2,...)$ in $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. Tedaj velja

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\sup_{\|x_n \pm y\| \leq 1} \|y\| \Big] = 0 \ . \tag{2.3.2}$$

Dokaz. Predpostavimo, da (2.3.2) ne velja. To pomeni, da eksistira podzaporedje $\{x_{n_k} ; k=1,2,...\}$ in $\varepsilon > 0$, da je

$$\sup_{\|x_{n_k} \pm y\| \leq 1} \|y\| \geq \varepsilon \qquad (k = 1,2,...) \ .$$

Od tod sledi, da eksistira zaporedje $\{y_k\} \subset X$, da je

$$\|y_k\| \geq \varepsilon/2 \qquad (k = 1,2,...) \tag{2.3.3}$$

pri čemer je

$$\|x_{n_k} \pm y_{n_k}\| \leq 1 \qquad (k = 1,2,\ldots) . \tag{2.3.4}$$

Ker je prostor X po predpostavki enakomerno konveksen, eksistira $\delta(\varepsilon) > 0$, da iz (2.3.3) in (2.3.4) sledi

$$\|x_{n_k}\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \qquad (k = 1,2,\ldots) ,$$

kar pa je v nasprotju s predpostavko $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. Q.E.D.

2.3.3 LEMMA Naj bo X enakomerno konveksen kompleksen B-prostor in $A \in L(X)$. Naj bo $B \in E(A)$. Tedaj je točka 0 v aproksimativnem točkastem spektru operatorja B.

Dokaz. Ker je $E(0) = \{0\}$, po propoziciji 1.1.8 lahko brez izgube splošnosti predpostavimo, da je $\|A\| = 1$. Iz $B \in E(A)$ sledi, da eksistira $r>0$, da je $\|A + \zeta B\| \leq 1$ $(|\zeta| \leq r)$, torej specialno $\|Ax \pm rBx\| \leq 1$ $(x \in S(X))$. Iz $\|A\| = 1$ pa sledi, da eksistira zaporedje $\{x_n\} \subset S(X)$, za katero je $\lim_{n\to\infty}\|Ax_n\| = 1$. Iz $\|A\| = 1$ sledi $\|Ax_n\| \leq 1$ $(n=1,2,\ldots)$, torej po lemma 2.3.2 iz $\|Ax_n \pm rBx_n\| \leq 1$ $(n=1,2,\ldots)$ sledi $\lim_{n\to\infty} r\|Bx_n\| = 0$, torej $\lim_{n\to\infty} \|Bx_n\| = 0$. Slednje pove, da je točka 0 v aproksimativnem točkastem spektru operatorja B. Q.E.D.

2.3.4 IZREK Naj bo X enakomerno konveksen kompleksen B-prostor in

$$f(\zeta) = A_0 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \ldots$$

analitična funkcija, definirana v neki okolici $\mathcal{U}(0)$ točke 0 v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X), za katero velja $\|f(\zeta)\| \equiv \|A_0\|$ $(\zeta \in \mathcal{U}(0))$. Tedaj je točka 0 v aproksimativnem točkastem spektru vsakega operatorja A_i $(i = 1,2,\ldots)$.

Dokaz. Po izreku 1.2.0 iz predpostavk sledi $A_i \in E(A_0)$ $(i = 1,2,\ldots)$. Trditev izreka tedaj sledi po lemma 2.3.3 . Q.E.D.

2.3.5 IZREK (i) Naj bo X kompleksen B-prostor in

$$f(\zeta) = A_0 + A_1(\zeta - \zeta_0) + A_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \ldots$$

analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}\ni\zeta_0$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v $L(X)$, za katero velja

$$\|f(\zeta)\| \leq 1 \quad (\zeta\in\mathcal{D}) . \tag{2.3.5}$$

(ii) Naj velja (i), pri čemer naj bo prostor X strogo konveksen. Če tedaj za nek $x\in X$, $x\neq 0$ velja $\|f(\zeta_0)x\| = \|x\|$, tedaj je funkcija $\zeta\mapsto f(\zeta)x$ konstanta. Specialno, če je operator $f(\zeta_0)$ izometričen, tedaj je funkcija f konstanta.

(iii) Naj velja (i), pri čemer naj bo prostor X enakomerno konveksen. Tedaj je točka 0 v aproksimativnem točkastem spektru vsakega operatorja A_i $(i = 1,2,\ldots)$. Dalje, naj bo λ, $|\lambda| = 1$, v spektru operatorja A_0. Tedaj je λ v aproksimativnem točkastem spektru vsakega operatorja $f(\zeta)$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Natančneje, tedaj iz $\{x_n\}\subset S(X)$ in $\lim_{n\to\infty}\|A_0x_n - \lambda x_n\| = 0$ sledi $\lim_{n\to\infty}\|f(\zeta)x_n - \lambda x_n\| = 0$ in $\lim_{n\to\infty}\|A_ix_n\| = 0$ $(i=1,2,\ldots)$.

Dokaz. Iz (2.3.5) sledi $A_i\in E(A_0)$ $(i=1,2,\ldots)$ po izreku 1.2.0. Torej eksistirajo $r_i>0$ $(i=1,2,\ldots)$, da je $\|A_0 \pm r_iA_i\| \leq 1$ $(i=1,2,\ldots)$ in specialno $\|A_0x\pm r_iA_ix\|\leq 1$ $(i=1,2,\ldots;\ x\in S(X))$. Če je $\|A_0x\| = \|x\| = 1$ in prostor X strogo konveksen, je $r_iA_ix = 0$ $(i=1,2,\ldots)$ torej $A_ix = 0$ $(i=1,2,\ldots)$, s čimer je (ii) dokazano.

Dokaz (iii). Izrek 2.3.4 pove, da je 0 v aproksimativnem točkastem spektru vsakega operatorja A_i $(i=1,2,\ldots)$. Naj bo sedaj λ, $|\lambda|= 1$, v spektru operatorja A_0. Ker je $\|A_0\| = 1$, je λ robna točka spektra in kot taka v aproksimativnem točkastem spektru operatorja A_0. To pomeni, da eksistira zaporedje $\{x_n\} \subset S(X)$, da je $\lim_{n\to\infty}\|A_0x_n- \lambda x_n\|= 0$. Dokazali bomo, da za vsako tako zaporedje velja $\lim_{n\to\infty}\|f(\zeta)x_n - \lambda x_n\| = 0$ (ker vsaj eno tako zaporedje eksistira, bo s tem dokazano, da je λ v aproksimativnem točkastem spektru vsakega operatorja $f(\zeta)$ $(\zeta\in\mathcal{D})$.). Naj bo

torej $\{x_n\}$ poljubno tako zaporedje.
Iz (2.3.5) sledi, da za funkcijo $\zeta \mapsto f(\zeta) = A_0 + g(\zeta)$ eksistira nek $r>0$, da velja $\{\zeta: |\zeta-\zeta_0|<r\} \subset \mathcal{D}$, torej $\|f(\zeta)\| \leqq 1$ $(|\zeta-\zeta_0|<r)$, oziroma $\|A_0x + g(\zeta)x\| \leqq 1$ $(|\zeta-\zeta_0|<r;\ x\in S(X))$, kar pomeni, da je

$$|\langle A_0x,u + g(\zeta)x,u\rangle| \leqq 1 \quad (|\zeta-\zeta_0|<r;\ x\in S(X),\ u\in S(X')).$$

Od tod po lemma 1.0.1 sledi

$$|\langle A_0x,u\rangle| + |\langle g(\zeta)x,u\rangle| \leqq 1 \quad (|\zeta-\zeta_0|\leqq r/3;\ x\in S(X),\ u\in S(X')),$$

in dalje

$$\|A_0x \pm g(\zeta)x\| \leqq 1 \quad (|\zeta-\zeta_0|\leqq r/3;\ x\in S(X)).$$

Iz $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_0x_n - \lambda x_n\| = 0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_0x_n\| = 1$. Ker velja po zgornjem

$$\|A_0x_n \pm g(\zeta)x_n\| \leqq 1 \quad (|\zeta-\zeta_0|\leqq r/3;\ n=1,2,\ldots),$$

po lemma 2.3.2 sledi

$$\lim_{n\to\infty}[\sup_{|\zeta-\zeta_0|\leq \frac{r}{3}} \|g(\zeta)x_n\|] = 0,$$

torej zaporedje $\{g(\zeta)x_n\}$ pri $|\zeta-\zeta_0|\leqq r/3$ enakomerno konvergira k 0. S pomočjo Cauchy-jeve formule za koeficiente v Taylorjevem razvoju od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} \|A_ix_n\| = 0 \quad (i = 1,2,\ldots).$$

Dalje, iz zgornjega sledi, da zaporedje funkcij

$$\varphi_n(\zeta) = f(\zeta)x_n - \lambda x_n = g(\zeta)x_n + A_0x_n - \lambda x_n$$

pri $|\zeta-\zeta_0|\leqq r/3$ enakomerno konvergira k 0. Dokazali bomo, da velja $\lim\limits_{n\to\infty} \|f(\zeta)x_n - \lambda x_n\| = 0$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Predpostavimo nasprotno, da eksistirata $\zeta_1\in\mathcal{D}$ in podzaporedje $\{\varphi_{n_k}: k=1,2,.\}$, da je $\|\varphi_{n_k}(\zeta_1)\|\geqq\varepsilon>0$ $(k=1,2,\ldots)$. Po Hahn-Banachovem izreku tedaj eksistira zaporedje $\{u_k\}\subset S(X')$, da za skalarne analitične funkcije $\psi_k(\zeta) = \langle\varphi_{n_k}(\zeta),u_k\rangle$ velja

$$|\psi_k(\zeta_1)| \geqq \varepsilon > 0. \tag{2.3.6}$$

Dalje, velja še

$$|\psi_k(\zeta)| = |\langle\varphi_{n_k}(\zeta),u_k\rangle| \leqq$$

$$\leq \|f(\zeta)\|\|x_{n_k}\| + |\lambda|\|x_{n_k}\|$$

$$\leq 2 \qquad (k = 1,2,\ldots) . \qquad (2.3.7)$$

Zaradi (2.3.7) je $\{\psi_k\}$ normalna familija (gl. [2]), pa lahko najdemo podzaporedje $\{\psi_{k_i} ; i=1,2,\ldots\}$, ki enakomerno konvergira na vsaki kompaktni podmnožici polja $\mathcal{D}$ ($\Rightarrow$ k neki analitični funkciji). Po drugi strani zaporedje $\{\varphi_n(\zeta)\}$ pri $|\zeta-\zeta_0|\leq r/3$ enakomerno konvergira k 0, pa velja isto tudi za zaporedje $\{\psi_{k_i} ; i=1,2,\ldots\}$. Po principu o analitičnem nadaljevanju dobimo $\lim \psi_{k_i}(\zeta) = 0$ $(\zeta\in\mathcal{D})$, kar pa je v nasprotju z (2.3.6). Protislovje dokaže, da je $\lim_{n\to\infty} \|f(\zeta)x_n - \lambda x_n\| = 0$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. Q.E.D.

3. ANALITIČNE FUNKCIJE Z NORMO, ENAKO ABSOLUTNI VREDNOSTI SKALARNE ANALITIČNE FUNKCIJE

3.0. KARAKTERIZACIJA ANALITIČNIH FUNKCIJ Z NORMO, ENAKO ABSOLUTNI VREDNOSTI SKALARNE ANALITIČNE FUNKCIJE

V naslovu omenjeno karakterizacijo da naslednji izrek.

3.0.0 IZREK Naj bo f analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X.
Tedaj eksistira skalarna analitična funkcija φ, definirana na polju $\mathcal{D}$, za katero velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}), \tag{3.0.0}$$

natanko takrat, ko eksistira nek $u\in S(X')$, da velja

$$|\langle f(\zeta),u\rangle| \equiv \|f(\zeta)\| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}).$$

Vse skalarne analitične funkcije, za katere velja (3.0.0), so tedaj določene z

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\langle f(\zeta),u\rangle \qquad (\zeta\in\mathcal{D}),$$

kjer je $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Dokaz. Naj eksistira $u\in S(X')$, da je

$$|\langle f(\zeta),u\rangle| \equiv \|f(\zeta)\| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}). \tag{3.0.1}$$

Definirajmo

$$\varphi(\zeta) = \langle f(\zeta),u\rangle \qquad (\zeta\in\mathcal{D}).$$

Iz analitičnosti funkcije f sledi, da je φ skalarna analitična funkcija, za katero zaradi (3.0.1) velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}).$$

Obrat. Naj bo

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) , \tag{3.0.2}$$

kjer je φ skalarna analitična funkcija. Če je $\varphi(\zeta)\equiv 0$ $(\zeta\in\mathcal{D})$, izrek očitno velja. Naj bo torej $\varphi(\zeta)\not\equiv 0$. Tedaj eksistira polje $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{D}$, da je $\varphi(\zeta)\neq 0$ $(\zeta\in\mathcal{U})$.
Funkcija $\zeta\mapsto \frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta)$ je tedaj na polju $\mathcal{U}$ analitična in zanjo velja

$$\left\|\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\right\| \equiv 1 \qquad (\zeta\in\mathcal{U}) . \tag{3.0.3}$$

Naj bo $\zeta_0\in\mathcal{U}$ poljuben. Po Hahn-Banachovem izreku eksistira $u\in S(X')$, da je

$$\left<\frac{1}{\varphi(\zeta_0)}f(\zeta_0), u\right> = \left\|\frac{1}{\varphi(\zeta_0)}f(\zeta_0)\right\| = 1 . \tag{3.0.4}$$

Ker razen tega za skalarno analitično funkcijo
$\zeta\mapsto\left<\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta),u\right>$ zaradi (3.0.3) velja še

$$\left|\left<\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta),u\right>\right| \leq 1 \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) ,$$

po strogem principu maksima norme za skalarne analitične funkcije eksistira β, $0\leq\beta<2\pi$, da je

$$\left<\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta),u\right> \equiv e^{i\beta} \qquad (\zeta\in\mathcal{U}) .$$

Zaradi (3.0.4) je $e^{i\beta} = 1$, pa dobimo

$$\varphi(\zeta) \equiv \left<f(\zeta),u\right> \qquad (\zeta\in\mathcal{U}) .$$

Ker je f analitična funkcija na polju $\mathcal{D}$, po principu o analitičnem nadaljevanju sledi, da je skalarno analitično funkcijo φ mogoče nadaljevati na vse polje $\mathcal{D}$, pri čemer je $\varphi(\zeta)\equiv\left<f(\zeta),u\right>$ $(\zeta\in\mathcal{D})$, s čimer je prvi del izreka v celoti dokazan.
Preostane še, da dokažemo, da so vse analitične funkcije, ki izpolnjujejo (3.0.0), določene z

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\left<f(\zeta),u\right> \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) ,$$

kjer je $0\leq\alpha<2\pi$. Trivialno je, da je za vsak α: $0\leq\alpha<2\pi$ zadoščeno (3.0.0). Dalje, če za dve skalarni analitični funkciji φ_1 in φ_2 velja

$$|\varphi_1(\zeta)| \equiv |\varphi_2(\zeta)| \equiv \|f(\zeta)\| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) ,$$

tedaj po znanem klasičnem izreku za skalarne analitične funkcije sledi, da eksistira θ: $0\leq\theta<2\pi$, da je $\varphi_1(\zeta) \equiv e^{i\theta}\varphi_2(\zeta)$ $(\zeta\in\mathcal{D})$. S tem je izrek v celoti dokazan. Q.E.D.

3.0.1 KOROLAR Naj bo f analitična funkcija z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X, definirana na polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini. Naj velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}),$$

kjer je φ skalarna analitična funkcija, definirana na $\mathcal{D}$. Če je f cela funkcija, je tudi φ cela funkcija.

Dokaz. Izrek 3.0.0 pove, da ima vsaka skalarna analitična funkcija φ , za katero velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D})$$

obliko

$$\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}\langle f(\zeta),u\rangle \qquad (\zeta\in\mathcal{D}), \tag{3.0.4}$$

kjer je $u\in S(X')$. Po predpostavki je f cela funkcija, pa iz (3.0.4) sledi, da je tudi φ cela funkcija. Q.E.D.

3.1. O $f(\zeta A)$, KJER JE A NORMALEN OPERATOR NA HILBERTOVEM PROSTORU IN f CELA SKALARNA ANALITIČNA FUNKCIJA

Naj bo f cela skalarna analitična funkcija. Tedaj lahko pišemo

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots , \tag{3.1.0}$$

pri čemer vrsta na desni absolutno konvergira v vsej kompleksni ravnini. Naj bo $A\in L(X)$ operator nad kompleksnim H-prostorom X. Zaradi absolutne konvergence vrste (3.1.0) v vsej kompleksni ravnini tudi vrsta

$$f(\zeta A) = c_0 I + c_1\zeta A + c_2(\zeta A)^2 + \dots \tag{3.1.1}$$

(kjer je I identični operator) absolutno konvergira v vsej kompleksni ravnini in tako določa celo analitično funkcijo, definirano v kompleksni ravnini, z vrednostmi v L(X).

<u>3.1.0 IZREK</u> Naj bo $A \in L(X)$ normalen operator na kompleksnem H-prostoru X in f nekonstantna cela skalarna analitična funkcija.
Tedaj na nekem polju $\mathcal{D}$ v kompleksni ravnini eksistira skalarna analitična funkcija g, da je

$$\|f(\zeta A)\| \equiv |g(\zeta)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) ,$$

natanko takrat, ko v spektru $\sigma(A)$ eksistira točka η_0, da je

$$|f(\zeta\eta)| \leq |f(\zeta\eta_0)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D};\ \eta \in \sigma(A)) .$$

Naj bo zgornje izpolnjeno. Tedaj je

$$|g(\zeta)| \equiv |f(\zeta\eta_0)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) .$$

Dalje, η_0 je robna točka spektra $\sigma(A)$, pri čemer je $\eta_0 = 0$ natanko takrat, ko je g konstanta.

Dokaz. Po predpostavki je A normalen operator. Tedaj iz (3.1.1) sledi, da je $f(\zeta A)$ normalen operator za vsak ζ. Naj eksistira $\eta_0 \in \sigma(A)$, da je

$$|f(\zeta\eta)| \leq |f(\zeta\eta_0)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D};\ \eta \in \sigma(A)) .$$

Definirajmo

$$g(\zeta) = f(\zeta\eta_0) \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) .$$

Ker je po predpostavki f cela funkcija, je tudi g cela funkcija. Dalje, operatorji $f(\zeta A)$ so normalni, pa po izreku o preslikavi spektra dobimo

$$\begin{aligned} \|f(\zeta A)\| &= \operatorname{spr} f(\zeta A) \\ &= \sup_{\eta \in \sigma(A)} |f(\zeta\eta)| \\ &= |f(\zeta\eta_0)| \\ &= |g(\zeta)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) . \end{aligned}$$

Obrat. Naj bo

$$\|f(\zeta A)\| \equiv |g(\zeta)| \qquad (\zeta \in \mathcal{D}) , \tag{3.1.2}$$

kjer je g skalarna analitična funkcija, definirana na polju $\mathcal{D}$.
Naj bo $\mathcal{B} = \{R(\lambda,A);\ \lambda\in\varrho(A)\}^{cc}$ (drugi komutant). Znano je (gl. [12]), da je $\mathcal{B}\subset L(X)$ komutativna kompleksna B-algebra z enoto I, ki vsebuje A, $f(\zeta A)$ in ki ima lastnost, da spekter poljubnega elementa iz $\mathcal{B}$ glede na $\mathcal{B}$ sovpada z njegovim spektrom glede na L(X).
Po izreku 3.0.0 velja (3.1.2) natanko takrat, ko eksistira $u_0\in S(\mathcal{B}')$, da je

$$|\langle f(\zeta A),u_0\rangle| = \|f(\zeta A)\| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}) . \tag{3.1.3}$$

Če pogledamo, kako v dokazu izreka 3.0.0 konstruiramo u_0 in če upoštevamo, da zaradi normalnosti operatorjev $f(\zeta A)$ velja $\|f(\zeta A)\| = \operatorname{spr} f(\zeta A)$, vidimo, da smemo vzeti $u_0\in \mathfrak{M}(\mathcal{B})$. Sedaj iz (3.1.3) sledi

$$|\langle f(\zeta A),u\rangle| \leq |\langle f(\zeta A),u_0\rangle| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}\ ;\ u\in\mathfrak{M}(\mathcal{B}))\ ,$$

kar po Gelfandu in po izreku o preslikavi spektra pomeni, da eksistira $\eta_0 = \langle A,u_0\rangle\in\sigma(A)$, da je

$$|f(\zeta\eta)| \leq |f(\zeta\eta_0)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}\ ;\ \eta\in\sigma(A)) \tag{3.1.4}$$

Tako je obrat dokazan.
Naj bodo zgornji pogoji izpolnjeni. Iz prvega dela izreka je jasno, da velja

$$|g(\zeta)| = |f(\zeta\eta_0)| \qquad (\zeta\in\mathcal{D}). \tag{3.1.5}$$

Dokažimo sedaj, da je η_0 robna točka spektra $\sigma(A)$.
Predpostavimo nasprotno, da eksistira neka njena okolica $\mathcal{U}(\eta_0)\subset\sigma(A)$. Naj bo $\zeta_0\in\mathcal{D}$, $\zeta_0\neq 0$. Tedaj je $\zeta_0\mathcal{U}(\eta_0) = \{z:\ z=\zeta_0\eta\ ,\ \eta\in\mathcal{U}(\eta_0)\}$ okolica točke $\tau_0 = \zeta_0\eta_0$. Zaradi (3.1.4) mora za vsak τ v tej okolici veljati $|f(\tau)|\leq|f(\tau_0)|$, kar pa je po strogem principu maksima norme za skalarne analitične funkcije mogoče le, če je f konstanta, v nasprotju s predpostavko v izreku. Dokazano protislovje pove, da je η_0 robna točka spektra $\sigma(A)$.
Končno, ker je f nekonstantna funkcija, iz (3.1.5) sledi, da je g konstanta natanko takrat, ko je $\eta_0 = 0$. Q.E.D.

3.2. PRIMERI ANALITIČNIH FUNKCIJ, KATERIH NORMA JE ENAKA ABSOLUTNI VREDNOSTI SKALARNE ANALITIČNE FUNKCIJE

V tem razdelku si bomo ogledali nekaj specialnih primerov.

V prvem primeru si bomo ogledali cele analitične funkcije z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru, definirane v kompleksni ravnini, katerih norma zunaj nekega kroga sovpada z absolutno vrednostjo skalarne analitične funkcije.

Dogovorimo se, da bomo s številom ničel analitične funkcije na polju $\mathcal{D}$ označevali število njenih ničel na $\mathcal{D}$, pri čemer bomo vsako šteli tolikokrat, kolikor je njena kratnost.

3.2.0 IZREK Naj bo f cela analitična funkcija, definirana v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X. Naj eksistirata konstanta M in taka skalarna analitična funkcija φ, definirana pri $|\zeta| > M$, da velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (|\zeta|>M) . \tag{3.2.0}$$

Tedaj eksistira cela skalarna analitična funkcija ψ in elementi $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in X$, da je za vsak ζ

$$f(\zeta) = \psi(\zeta)(a_0 + a_1\zeta + \dots + a_{n-1}\zeta^{n-1}) . \tag{3.2.1}$$

Funkcija φ je cela funkcija in stopnja polinoma v (3.2.1) je enaka številu ničel funkcije φ pri $|\zeta| \leq M$. Dalje, če je m število ničel funkcije f pri $|\zeta| \leq M$, tedaj med elementi $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ ni več kot n-m linearno neodvisnih.

Dokaz. Po korolarju 3.0.1 iz dejstva, da je f cela funkcija in iz (3.2.0) sledi, da je φ cela funkcija. Če je $\varphi(\zeta) \equiv 0$, ni kaj dokazovati. Predpostavimo torej, da je $\varphi(\zeta) \not\equiv 0$. Tedaj ima funkcija φ pri $|\zeta| \leq M$ končno število ničel $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-2}$. Funkcija $\zeta \to \frac{1}{\varphi(\zeta)} f(\zeta)$ je tedaj meromorfna funkcija, ki je pri $|\zeta|>M$ regularna, ker tam zaradi (3.2.0) velja

$$\left\|\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta)\right\| \equiv 1 \qquad (|\zeta|>M). \tag{3.2.2}$$

Njeni poli pri $|\zeta|\leq M$ sovpadajo z ničlami funkcije φ, pa sledi, da je

$$\zeta \to (\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)\ldots(\zeta-\zeta_{n-2})\frac{1}{\varphi(\zeta)}f(\zeta) = h(\zeta)$$

cela funkcija, za katero zaradi (3.2.2) velja

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\max\limits_{|\zeta|=R}\|h(\zeta)\|}{R^n} = 0,$$

pa po Liouville-ovem izreku (gl.[8]) sledi, da je h polinom stopnje, ki ni večja od $n-1$. Zaradi (3.2.2) pa stopnja polinoma h ni manjša od $n-1$. Torej eksistirajo elementi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in X$, $a_{n-1}\neq 0$, da je

$$h(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots + a_{n-1}\zeta^{n-1},$$

oziroma

$$f(\zeta) = \psi(\zeta)h(\zeta),$$

kjer je

$$\zeta \mapsto \psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\zeta_1)\ldots(\zeta-\zeta_{n-2})}$$

cela skalarna analitična funkcija, ki pri $|\zeta|\leq M$ očitno nima ničel. Prvi del izreka je s tem dokazan.

Za dokaz drugega dela predpostavimo, da ima f pri $|\zeta|\leq M$ m ničel. Ker funkcija ψ pri $|\zeta|\leq M$ nima ničel, (z eventuèlnim odvajanjem pri večkratnih ničlah) vidimo, da ima polinom h pri $|\zeta|\leq M$ m ničel. Če to zapišemo (in upoštevamo eventuelno večkratnost), eksistira p, da je

$h(\zeta) = 0$ v r_1 točkah kroga $|\zeta|\leq M$

$h'(\zeta) = 0$ v r_2 od teh r_1 točk

....

$h^{(p-1)}(\zeta) = 0$ v r_p od teh r_{p-1} točk,

pri čemer je $r_1 + r_2 + \ldots + r_p = m$.

Zgornji sistem da m linearnih zvez med elementi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, ki jih v matrični obliki zapišemo takole:

$$\begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_1^2 & \zeta_1^3 \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ 1 & \zeta_2 & \zeta_2^2 & \zeta_2^3 \ldots & \zeta_2^{n-1} \\ \ldots\ldots & & & & \\ 1 & \zeta_{r_1} & \zeta_{r_1}^2 & \zeta_{r_1}^3 \ldots & \zeta_{r_1}^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\zeta_{i_1} & \ldots & (n-1)\zeta_{i_1}^{n-2} \\ & \ldots\ldots & & & \\ 0 & 1 & 2\zeta_{i_{r_2}} & \ldots & (n-1)\zeta_{i_{r_2}}^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & 6\zeta_{k_1} & \ldots \\ & \ldots\ldots & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{r_1} \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \\ \vdots \\ \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

Matrika na levi, ki ima m vrstic, ima rang m. Če bi bil namreč rang manjši od m, bi to pomenilo, da je prvih m stolpcev v matriki linearno odvisnih. Če koeficiente te linearne odvisnosti označimo z $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, bi to pomenilo, da ima polinom

$$\alpha_0 + \alpha_1\zeta + \ldots + \alpha_{m-1}\zeta^{m-1}$$

m ničel, kar pa je mogoče le, če je $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = 0$. Protislovje dokazuje, da da sistem (3.2.3) m linearno neodvisnih linearnih zvez med elementi $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, kar pomeni, da je med temi elementi kvečjemu n-m linearno neodvisnih. Q.E.D.

3.2.1 KOROLAR Naj bo f cela analitična funkcija, definirana v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X. Naj eksistirata konstanta M in taka skalarna analitična funkcija φ, definirana pri $|\zeta|>M$, da je

$$\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (|\zeta|>M) .$$

Če (cela) funkcija φ pri $|\zeta|\leqq M$ nima ničel, tedaj eksistira $x\in X$, da velja

$$f(\zeta) \equiv \varphi(\zeta)x .$$

<u>3.2.2 DISKUSIJA</u> Izreka 3.2.0 ni mogoče obrniti. Mogoče je namreč konstruirati polinom, katerega norma zunaj še tako velikega kroga ni enaka absolutni vrednosti nobene skalarne analitične funkcije:

Naj bo $X = L(Y)$, kjer je Y kompleksen H-prostor dvojic kompleksnih števil. Oglejmo si funkcijo $f: \mathbb{C}\to X$, definirano takole:

$$f(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \zeta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta & 1 \\ 1 & \zeta \end{bmatrix}.$$

Očitno je pri vsakem ζ matrika $f(\zeta)$ normalna, torej je $\|f(\zeta)\| = \operatorname{spr} f(\zeta)$. Lastni vrednosti matrike $f(\zeta)$ sta $\lambda_1 = \zeta + 1$, $\lambda_2 = \zeta - 1$, torej je

$$\|f(\zeta)\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \begin{cases} |\zeta + 1| & (\operatorname{Re}\zeta > 0) \\ |\zeta - 1| & (\operatorname{Re}\zeta < 0) . \end{cases}$$

Če naj bo $\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)|$ $(|\zeta|>M)$, mora biti $\varphi(\zeta) = e^{i\alpha}(\zeta + 1)$ $(\operatorname{Re}\zeta > 0)$ in $\varphi(\zeta) = e^{i\beta}(\zeta - 1)$ $(\operatorname{Re}\zeta < 0)$, kar pa ni mogoče, ker je φ pri $|\zeta|>M$ analitična funkcija. Torej skalarne analitične funkcije, za katero bi veljalo $\|f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)|$ $(|\zeta|>M)$, ni.

V drugem primeru si bomo ogledali cele analitične funkcije z vrednostmi v B-prostoru, katerih norma je v polravnini konstantna. V ta namen najprej navedemo naslednji lemma iz klasične teorije skalarnih analitičnih funkcij, ki je preprosta posledica izreka iz [1], str. 220 .

<u>3.2.3 LEMMA</u> Naj bo φ cela skalarna analitična funkcija, za katero velja

$$\operatorname{Re} \varphi(\zeta) \geq 0 \qquad (\operatorname{Re}\zeta > 0)$$

$$\operatorname{Re} \varphi(\zeta) = 0 \qquad (\operatorname{Re}\zeta = 0).$$

Tedaj je funkcija φ oblike

$$\varphi(\zeta) = i\beta + \gamma\zeta ,$$

kjer sta β, γ realni konstanti, $\gamma \geq 0$.

<u>3.2.4 LEMMA</u> Naj bo f cela analitična funkcija, definirana v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru X. Če eksistirata točka ζ_0 in njena okolica $\mathcal{U}(\zeta_0)$, da je

$$\| f(\zeta)\| \equiv \| f(\zeta_0)\| \qquad (\zeta \in \mathcal{U}(\zeta_0)) ,$$

tedaj je

$$\| f(\zeta)\| \geq \| f(\zeta_0)\| \qquad (\zeta \in \mathbb{C}).$$

Dokaz. Razvijmo funkcijo f v Taylorjevo vrsto

$$f(\zeta) = f(\zeta_0) + a_1(\zeta - \zeta_0) + a_2(\zeta - \zeta_0)^2 + \dots .$$

Po izreku 1.2.0 iz predpostavk sledi

$$a_i \in E[f(\zeta_0)] \qquad (i = 1,2,\dots)$$

torej je

$$f(\zeta) - f(\zeta_0) \in \overline{E[f(\zeta_0)]} \qquad (\zeta \in \mathbb{C}).$$

Od tod, če zapišemo $f(\zeta) = f(\zeta_0) + [f(\zeta) - f(\zeta_0)]$, po propozicijah 1.1.7 in 1.1.6 sledi

$$\| f(\zeta)\| \geq \| f(\zeta_0)\| \qquad (\zeta \in \mathbb{C}).$$

Q.E.D.

<u>3.2.5 IZREK</u> Naj bo f cela analitična funkcija, definirana v kompleksni ravnini, z vrednostmi v kompleksnem B-prostoru, za katero velja

$$\| f(\zeta)\| \equiv 1 \qquad (\operatorname{Re}\zeta < 0). \tag{3.2.4}$$

Če eksistira skalarna analitična funkcija φ, da velja

$$\| f(\zeta)\| \equiv |\varphi(\zeta)| \qquad (\operatorname{Re}\zeta > 0) , \tag{3.2.5}$$

tedaj je

$$\varphi(\zeta) = e^{i\beta}e^{\gamma\zeta} \quad (\zeta\in\mathbb{C}) ,$$

kjer sta β in γ realni konstanti, $\gamma \geq 0$.

Dokaz. Po lemma 3.2.4 iz (3.2.4) sledi

$$\|f(\zeta)\| \geq 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0). \tag{3.2.6}$$

Po korolarju 3.0.1 je φ cela funkcija, za katero zaradi (3.2.4), (3.2.5) in (3.2.6) velja

$$|\varphi(\zeta)| \geq 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0) ,$$

$$|\varphi(\zeta)| = 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta = 0) .$$

Funkcija φ v polravnini $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$ nima ničel, zato je $\zeta \mapsto \psi(\zeta) = \log \varphi(\zeta)$ analitična funkcija v polravnini $\mathrm{Re}\,\zeta \geq 0$, za katero velja

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\psi(\zeta) \geq 0 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0) ,\\ &\mathrm{Re}\,\psi(\zeta) = 0 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta = 0) . \end{aligned}\right\} \tag{3.2.7}$$

Po Riemann-Schwarz-ovem principu simetrije sledi, da je ψ cela funkcija. Od tod in iz (3.2.7) po lemma 3.2.3 sledi, da eksistirata realni konstanti β , γ ; $\gamma \geq 0$, da je

$$\psi(\zeta) = i\beta + \gamma\zeta \quad (\zeta\in\mathbb{C}).$$

Ker je $\psi(\zeta) = \log \varphi(\zeta)$, sledi $\varphi(\zeta) = e^{i\beta}e^{\gamma\zeta} \quad (\zeta\in\mathbb{C})$.

Q.E.D.

V nadaljnjem si bomo ogledali naš drugi primer v posebnem primeru, ko ima analitična funkcija f vrednosti v algebri L(X) nad kompleksnim H-prostorom X.

<u>3.2.6 PRIMER</u> Naj bo X kompleksen H-prostor in $A\in L(X)$ sebi adjungiran operator, za katerega velja $\sigma(A)\subset[0,1]$, $0\in\sigma(A)$, $1\in\sigma(A)$. Po izreku 3.1.0 tedaj za funkcijo

$$e^{\zeta A} = I + \zeta A + \frac{\zeta^2 A^2}{2!} + \dots$$

velja

$$\|e^{\zeta A}\| = 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta < 0),$$

$$\|e^{\zeta A}\| = |e^{\zeta}| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0).$$

Na vprašanje, ali je cela funkcija f z vrednostmi v L(X), za katero velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta < 0)$$

$$\|f(\zeta)\| \equiv |e^{\zeta}| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0)$$

nujno oblike $f(\zeta) = e^{i\alpha}e^{\zeta A}$, kjer je $A \in L(X)$ in $0 \leqq \alpha < 2\pi$, da negativen odgovor naslednji primer: naj bo X kompleksen H-prostor trojic kompleksnih števil in naj bo analitična funkcija $f : \mathbb{C} \to L(X)$ definirana takole:

$$f(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\zeta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ker je za vsak ζ matrika $f(\zeta)$ normalna, takoj vidimo, da velja

$$\|f(\zeta)\| \equiv 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta < 0)$$

$$\|f(\zeta)\| \equiv |e^{\zeta}| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0)\ .$$

Ni pa operatorja $A \in L(X)$, da bi bilo $f(\zeta) = e^{\zeta A}$ $(\zeta \in \mathbb{C})$, saj $(e^{\zeta A})^{-1} = e^{-\zeta A}$ eksistira za vsak $\zeta \in \mathbb{C}$, $f(\zeta)^{-1}$ pa ne eksistira pri nobenem ζ.

Pozitiven odgovor na zgornje vprašanje pa dobimo, če vprašanje zožimo in iščemo f med funkcijami oblike $\zeta \mapsto g(\zeta A)$, kjer je g cela skalarna analitična funkcija in $A \in L(X)$.

<u>3.2.7 IZREK</u> Naj bo X kompleksen H-prostor in $A \in L(X)$, $A \neq 0$. Naj bo f cela skalarna analitična funkcija, za katero velja $f'(0) \neq 0$. Dalje, naj velja

$$\|f(\zeta A)\| \equiv 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta \leqq 0) \tag{3.2.8}$$

in naj bo v polravnini $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ norma $\|f(\zeta A)\|$ enaka absolutni vrednosti neke skalarne analitične funkcije.

Tedaj je f (do konstantnega faktorja natančno) eksponentna funkcija, operator A pa je oblike $A = e^{i\alpha}P$, kjer je P pozitiven operator in $0 \leqq \alpha < 2\pi$.

Dokaz. Razvijmo f v Taylorjevo vrsto

$$f(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \dots \ .$$

Tedaj je

$$f(\zeta A) = c_0 I + c_1\zeta A + c_2\zeta^2 A^2 + \dots \ .$$

Iz (3.2.8) sledi $|c_0| = 1$, iz $f'(0) \neq 0$ pa sledi $c_1 \neq 0$. Torej je

$$\|f(\zeta A)\| \equiv \|I + \frac{c_1}{c_0} A + \frac{c_2}{c_0}\zeta^2 A^2 + \dots\| \equiv 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta \leq 0) . \tag{3.2.9}$$

V specialnem primeru, ko je $\zeta = i\tau$ $(\tau \in \mathbb{R})$ iz (3.2.9) sledi

$$\|I + (i\tau)(\frac{c_1}{c_0}A) + (i\tau)^2(\frac{c_2}{c_0}A^2) + \dots\| \equiv 1 \qquad (\tau \in \mathbb{R}),$$

torej

$$\|I + i\tau(\frac{c_1}{c_0}A)\| = 1 + o(\tau) \qquad (\tau \in \mathbb{R}, \tau \to 0) .$$

Od tod po Vidavovem lemma (gl. [5]) sledi, da je $\frac{c_1}{c_0}A$ sebi adjungiran operator. Dalje, iz (3.2.8) in iz predpostavke, da je $\|f(\zeta A)\|$ v polravnini $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ enaka absolutni vrednosti neke skalarne analitične funkcije, po izreku 3.2.5 eksistira $\gamma \geq 0$, da je

$$\|f(\zeta A)\| \equiv |e^{\gamma\zeta}| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0) . \tag{3.2.10}$$

V našem primeru je $\gamma > 0$. Če bi namreč bilo $\gamma = 0$, bi iz (3.2.8) in (3.2.10) sledilo $\|f(\zeta A)\| \equiv 1$ $(\zeta \in \mathbb{C})$ in od tod po Liouville-ovem izreku, da je funkcija $\zeta \mapsto f(\zeta A)$ konstanta, kar pa zaradi $A \neq 0$ in $c_1 \neq 0$ ni mogoče.

Ker je $(c_1/c_0)A$ sebi adjungiran operator in ker $(c_1/c_0) \neq 0$, je A normalen operator. Tedaj po izreku 3.1.0 iz (3.2.10) sledi, da eksistira $\eta_0 \in \sigma(A)$, da je $|f(\zeta\eta_0)| \equiv |e^{\gamma\zeta}|$ $(\mathrm{Re}\,\zeta > 0)$. Po zgoraj dokazanem je $\gamma \neq 0$, torej je po izreku 3.1.0 $\eta_0 \neq 0$. Sledi

$$|f(\zeta)| \equiv |e^{(\gamma/\eta_0)\zeta}| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0) .$$

Torej je f res eksponentna funkcija

$$|f(\zeta)| \equiv |e^{(\gamma/\eta_0)\zeta}| \qquad (\zeta \in \mathbb{C}) .$$

Naj bo sedaj $\eta \in \sigma(A)$, $\eta \neq 0$. Dokazali bomo, da je tedaj

$-\eta \notin \sigma(A)$. Iz (3.2.8) po izreku 3.1.0 sledi

$$|f(\zeta\eta)| \leq |f(0)| \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta<0;\ \ \eta\in\sigma(A)),$$

torej

$$|e^{(\gamma/\eta_0)\zeta\eta}| \leq 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta<0;\ \ \eta\in\sigma(A)). \qquad (3.2.11)$$

Predpostavimo, da je $\eta \neq 0$, $\pm\eta \in \sigma(A)$. Tedaj iz (3.2.11) sledi

$$|e^{(\gamma/\eta_0)\zeta\eta}| = 1 \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta<0),$$

kar pa ni mogoče, ker je $\gamma>0$ in $\eta\neq 0$. Protislovje dokazuje, da $\sigma(A)$ leži na poltraku s krajiščem v točki 0. Od tod in iz dejstva, da je $(c_1/c_0)A$ sebi adjungiran operator, pri čemer $c_1/c_0 \neq 0$, sledi, da je $A = e^{i\alpha}P$, kjer je P pozitiven operator in $0\leq\alpha<2\pi$. Q.E.D.

LITERATURA

[1] Ahiezer N.I.,Glazman I.M.: Teorija linejnih operatorov v gilbertovom prostranstve.
Nauka, Moskva 1966

[2] Ahlfors L.V.: Complex analysis.
Mc Graw-Hill, New York 1953

[3] Akemann C.,Russo B.: Geometry of the unit sphere of a C^*-algebra and its dual.
Pacific Journ.Math.32(1970)575-585

[4] Bohnenblust H.F.,Karlin S.: Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras.
Ann.Math.62(1955)217-229

[5] Bonsall F.F.,Duncan J.: Numerical ranges of operators and of elements of normed algebras.
Lond.Math.Soc.Lect.Note Ser.2(1971)

[6] Brown A.,Douglas R.G.: On maximum theorems for analytic operator functions.
Acta Sci.Mat.Szeged 26(1965)325-327

[7] Dunford N.,Schwartz J.T.: Linear operators. Part I.
Interscience 1958. Part II. Interscience 1963

[8] Evgrafov M.A.: Analytic functions.
Saunders, Philadelphia 1966

[9] Fisher S.: Schwarz's lemma for vector-valued analytic functions.
Journ.Funct.Anal.8(1971)86-94

[10] Halmos P.R.: A Hilbert space problem book.
Van Nostrand, Princeton 1967

[11] Harris L.A.: Schwarz's lemma in normed linear spaces.
Proc.Nat.Acad.Sci.62(1969)1014-1017

[12] Hille E.,Phillips R.S.: Functional analysis and semigroups.
Amer.Math.Soc.Colloq.Publ.31(1957)

[13] Kadison R.V.: Isometries of operator algebras.
Ann.Math.54(1951)325-338

[14] Kato T.: Perturbation theory for linear operators. Grundl.d.Math.Wiss.Bd 132. Springer, Berlin 1966

[15] Miles P.: B -algebra unit ball extremal points. Pacific Journ.Math.14(1964)627-637

[16] Phelps R.R.: Extreme positive operators and homomorphisms.
Trans.Amer.Math.Soc.108(1963)265-274

[17] Rickart C.E.: General theory of Banach algebras. Van Nostrand 1960

[18] Rudin W.: Real and complex analysis. Int.Stud.Ed.- Mc Graw-Hill 1970

[19] Sakai S.: C^*-algebras and W^*-algebras. Erg.Mat.Bd.60. Springer, Berlin 1971

[20] Thorp E.,Whitley R.: The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space. Proc.Amer.Math.Soc.18(1967)640-646