



Vizualne prezentacije pri pouku matematike

Visual presentations at mathematics lessons

Suzana Tomšič Mavrič

Osnovna šola
Janka Podežnika,
Maribor

Samo Repolusk

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko,
Univerza v Mariboru

Bojan Hvala

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko,
Univerza v Mariboru

Σ Povzetek

V članku predstavimo osem delovnih listov, namenjenih obravnavi izbranih matematičnih vsebin s pomočjo vizualnih prezentacij, torej pretežno s slikami oziroma z zaporedji slik. Možne pozitivne učinke tovrstnega pristopa komentiramo glede na tri članke, ki jih predstavimo v uvodu.

Ključne besede: Vizualne prezentacije, utemeljevanje in dokazovanje, pouk matematike, delovni listi

Σ Abstract

In the article we present eight worksheets designed for introducing certain mathematical concepts with the help of visual representations, which are carried out primarily with images or sequences of images. The possible positive effects of such an approach are commented with the help of three relevant articles presented in the introduction.

Keywords: Visual representations, reasoning and proof, teaching mathematics, worksheets

α Uvod s predstavitevijo izhodišč

V članku želimo predstaviti nekaj primerov uporabe vizualnih prezentacij pri pouku matematike. Tovrsten vizualni pristop k

matematiki, torej pristop brez mnogo besed (včasih celo povsem brez njih) in brez veliko računanja, se nam zdi primeren za občasno uporabo pri pouku matematike, še posebej pa pri delu z nadarjenimi učenci. Pristop se nam zdi dragocen, med drugim zato, ker razbija določene stereotipne predstave o matematiki, ker predstavljene dejavnosti vključujejo širši spekter in pomenijo celovitejše doživetje, ter zato, ker do že znanih rezultatov pripelje po alternativnih poteh, kar utrjuje vtis o enovitosti resnic v matematiki.

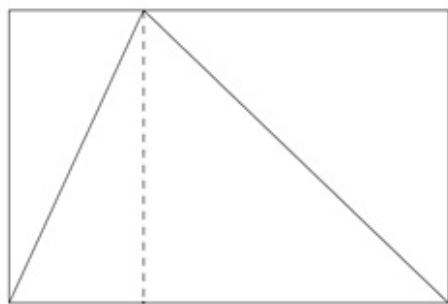
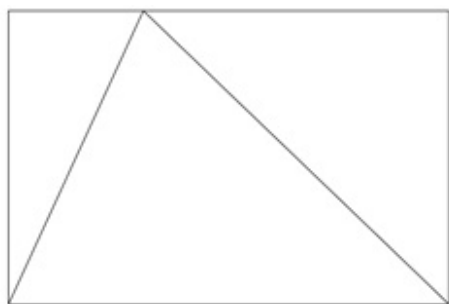
V nadaljevanju bi želeli pravkar zapisane prednosti vizualnih predstavitev postaviti v širši kontekst. Pri tem se bomo oprli na poudarke treh v matematični javnosti sorazmerno odmevnih člankov.

P. Lockhart in matematikova tožba

V svojem znamenitem članku P. Lockhard (2002) izjemno pronicljivo ocenjuje in kritizira prevladujoče stanje na področju poučevanja matematike. Avtor je leta 1990 doktoriral iz matematike in po nekaj letih univerzitetne kariere odšel poučevati na osnovno šolo. Ne glede na to, da njegov članek uradno ni bil nikoli objavljen, je po svojem nastanku krožil med matematiki ter sprožal razmišljanja in burne debate. Pozneje so ga objavili na

spletni strani združenja *Mathematical Association of America (MAA)*. To je vplivno mednarodno združenje matematikov, raziskovalcev in učiteljev z različnih šolskih nivojev. Na spletni strani *MAA Online* ima svoj kotiček slavní matematik Keith Devlin, čigar knjige poznamo tudi v slovenskih prevodih. Lockhardov članek je bil objavljen prav v tem kotičku in Keith Devlin ga je v svojem uvodniku imenoval »dinamitni članek«.

Članek se začne s primerjavo matematike z glasbo in slikarstvom. Če bi stanje na področju poučevanja matematike preslikali na področje glasbe, bi bila slika po mnenju avtorja naslednja. Učenci pri uri glasbe ne bi prepevali, tudi glasbenih odlomkov ne bi poslušali, ampak bi se učili pisanja not, durovih in molovih lestvic, transformacij iz zapisa v violinskem ključu v zapis v basovskem, transkripcij iz enega dura v drugega in podobno. Za pravo glasbo je namreč tako na osnovnošolski kot tudi na srednješolski ravni še pre zgodaj, nanjo se je treba teoretično pripraviti. V nadaljevanju avtor s predstavljenjo prakso ostro polemizira in namesto množice rutinskih formalizmov predlaga matematiko tukaj in zdaj. Njegovo ključno poanto nam lahko simbolizirata naslednji dve sliki.



[Slika 1] Ploščina trikotnika.

Sama dejstva pogosto niso tako zelo pomembna, kot je pot do njih (še posebej, če ta pot dejstvo ne le dokaže, ampak tudi pojasni, približa in omogoči, da ga resnično doživimo). To, da je ploščina trikotnika enaka polovici produkta osnovnice in višine, kot samo dejstvo ni tako ključno, kot je ključno ustaviti se pri levi sliki in potegniti črtkano navpičnico na desni. S to potezo matematika zazveni kot glasba. Skratka, manj formalizma in več pravih matematičnih idej, ki so dosegljive, podobno kot pri glasbi, že na osnovnih šolskih ravneh.

»Najbolj žalosten del vseh šolskih reform so poskusi, da bi »naredili matematiko zanimivo«. Matematika je že **zanimiva**, in to bolj, kot smo to zmožni prenesti.« (Lockhard, 2002, str. 8)

P. K. Murphy in poučevanje kot prepričevanje

V reviji *Theory into practice* je leta 2001 izšla serija člankov, ki je obravnavala pogled na poučevanje, ki ni le sprejemanje novih informacij, ampak predvsem težnja k premiku v učenčevih osebnih stališčih.

»Jasno je, da beseda prepričevanje vzbuja več asociacij in da vse niso pozitivne. Tako prepričevanje lahko razumemo kot sistematično vplivanje na mnenje nekoga, celo kot speljevanje ali manipulacijo. Prepričevanje v našem kontekstu bomo razumeli kot izvabljanje sprememb v razumevanju ali stališčih glede določenih idej ali predpostavk. Tako opredeljeno ima prepričevanje veliko skupnega z duhom sodobnega izobraževanja, po katerem želijo učitelji prepričati svoje učence v pomen vedenja ali razumevanja ter vplivati na razvoj

oz. spremembo njihovih stališč glede različnih konceptov.« (Murphy, 2001, str. 224)

V tem duhu npr. poučevanje literature ni več pretežno nizanje novih avtorjev in njihovih del. Bolj ključno si je vzeti čas za premik v učenčevem osebnem pogledu na literaturo. Če učitelju uspe preboj na ravni učenčevega globalnega stališča o pomenu branja, je dosežen veliko daljnosežnejši cilj.

Podobno bi se veljalo posvetiti učenčevi globalni predstavi o tem, kaj matematika pravzaprav je, in se spoprijeti z nekaterimi s tem povezanimi zakoreninjenimi predsodki.

L. M. Berman o poučevanju in poeziji

L. M. Berman primerja poezijo in poučevanje ter najde in analizira mnoge vzporednice.

»Kot poezija tudi poučevanje temelji na enotnosti misli in občutkov. Kot poezija tudi poučevanje temelji na sestavljanju, izdelovanju, ustvarjanju. Kot poezija tudi določene vrste poučevanja temeljijo na celovitem doživetju.«

»Pesnik običajno ne živi na robu življenja, ampak poskuša izbrskati, kaj leži v naših najglobljih razpokah, kar nam daje smisel, kaj sproži žalost, kar nam daje zagon in kaj določa smer.« (Berman, 1999, str. 18)

V nadaljevanju avtorica razmišlja o elementih, ki ustvarjajo dobro literaturo, in jih primerja z elementi, ki zagotavljajo dober pouk. Pri tem najde in natančno analizira nekaj skupnih elementov.

»Vabim vas, da skupaj pretehtamo nekaj lastnosti, pomembnih za dobrega pesnika in poezijo, in za katere verjamem, da označujejo tudi dobrega učitelja in poučevanje. Med temi lastnostmi so: (a) da je pričealec, ki z nami deli resnico, (b) da je naklonjen skrivnosti, (c) da povezuje pogovore srca in pameti, (d) da daje glas neizrečenemu, (e) da uživa v prese-
nečenju.« (Berman, 1999, str. 18)

Kot dobra literatura torej tudi dober pouk ne sme ostati na obrobju učenčevega življenja, ključno je, da ga premaknemo bliže k centru. Kot dobra literatura mora tudi dober pouk pomeniti celovito doživetje, s prepletom emocij, razuma, skrivnosti in presenečenja.

V drugem delu članka bomo predstavili nekaj delovnih listov, preko katerih bomo z uporabo vizualnih prezentacij izpeljali, dokazali ali ilustrirali nekaj matematičnih dejstev. Postopke, ki jih bomo izvajali med reševanjem delovnih listov, bomo komentirali glede na predstavljena uvodna stališča.

Bolj kot pomen izpeljanih dejstev in celovitost njihovih dokazov nas bo zanimalo, ali z uporabo tovrstnih metod lahko predstavimo matematiko, ki zazveni; ali na ta način lahko posežemo v svet učenčevih predstav o matematiki in ali je tako mogoče s perifernega področja učenčeve percepcije vstopiti na področje bliže centru.

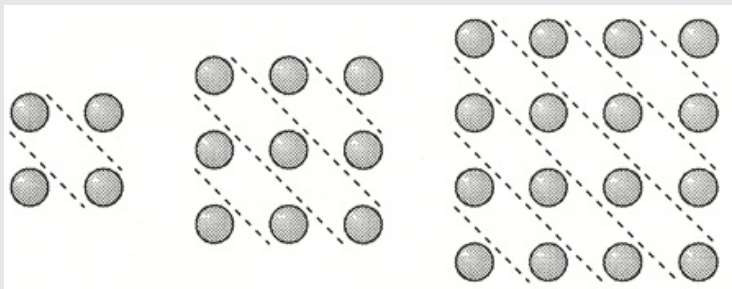
β Delovni listi s primeri vizualnih prezentacij

V tem razdelku bomo predstavili osem delovnih listov, primernih za delo z učenci na različnih stopnjah izobraževanja. Nekateri od delovnih listov so primerni za samostojno delo učencev, drugi so spet primernejši za skupinsko vodeno raziskovanje. Vsakemu delovnemu listu sledita skica rešitve in komentar.

Vzorci in vsote

Delovni list 1 a)

- i. Opazuj število pik v kvadratnem vzorcu, ki je enako vsoti števila pik po diagonalah. Katero zakonitost lahko na tej podlagi izpeljemo? Zapiši zveze za narisane primere in ugotovitev posploši.
- ii. Izračunaj vsoto: $1 + 2 + 3 + \dots + 59 + 60 + 59 + \dots + 3 + 2 + 1$.



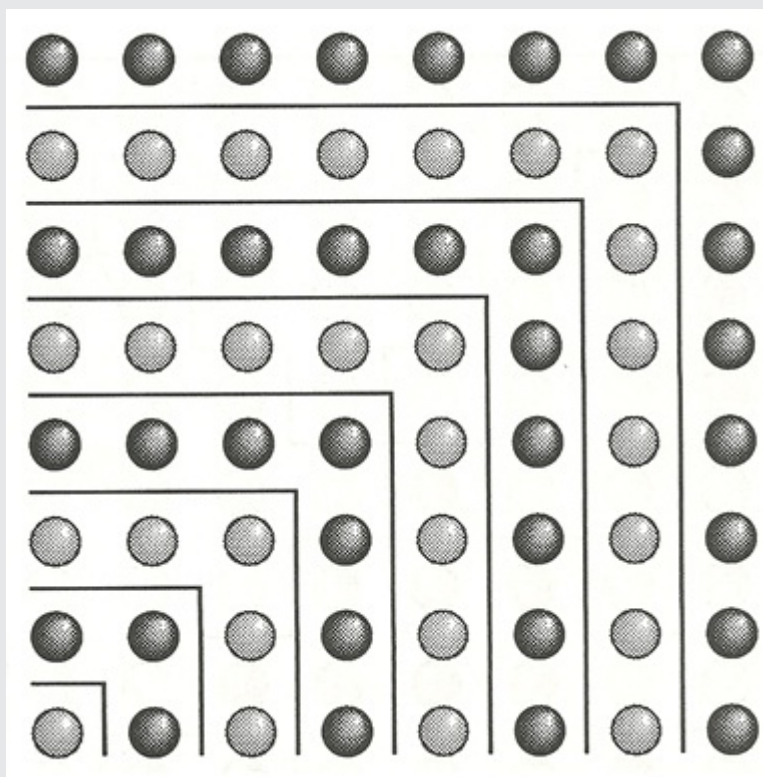
[Slika 2] Kvadratni vzorec in diagonale.

Rešitev: Iz dane prezentacije je razvidno, da za poljubno naravno število n velja $1+2+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+2+1=n^2$

Če namreč v vzorcu z n^2 pikami seštevamo število pik po diagonalah, dobimo ravno vsoto na levi. Od tod sledi, da je vsota iz točke ii. enaka $60^2 = 3600$.

Delovni list 1 b)

Opazuj število pik v celotnem vzorcu in število pik na zarisanih območjih v obliki črke L. Do kakšnih sklepov lahko pridemo na tej podlagi? Nalogo reši na konkretnem primeru in ugotovitev nato posploši.



[Slika 3] Kvadratni vzorec in L-ji.

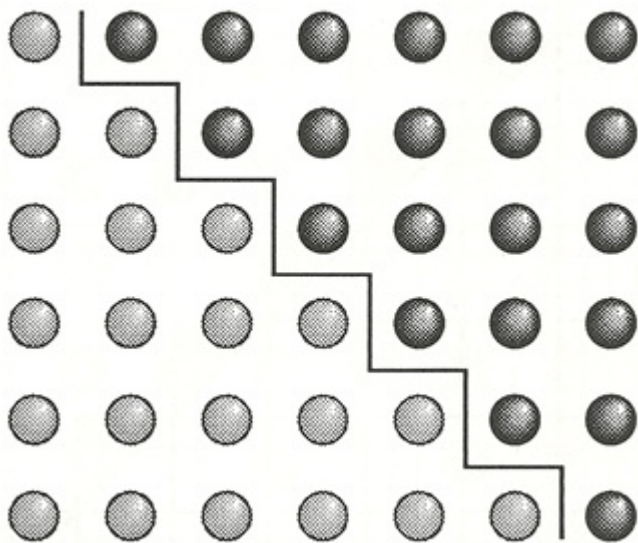
Rešitev: V narisanim primeru opazimo, da velja $1+3+5+7+9+11+13+15=8^2=64$. V splošnem imamo kvadratni vzorec z n^2 pikami. Vse te pike sestavljajo n vzorcev v obliki črke L s po $1, 3, \dots, 2n-1$ pikami. Zato je

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

Izpeljali smo torej obrazec za vsoto prvih n lihih naravnih števil.

Komentar: Reševanje tovrstne naloge predstavlja kompleksno doživetje. Začnemo z opazovanjem vzorca, preidemo na matematični zapis, prepoznavanje zakonitosti in tvorbo hipoteze, sledi premislek, da vizualna prezentacija pravzaprav pomeni že kar dokaz zakonitosti pri konkretnem n . Končno sledi posplošitev na splošni n .

Če učenci že poznajo vsoto prvih n naravnih števil in z njo povezano Gaussovo zgodbo, je vprašanje o vsoti prvih n lihih števil še posebej smiselno. V tem primeru je smiselno, če oba rezultata tudi povežemo: vsoto lihih števil znova izračunamo tako, da od vsote prvih $2n$ naravnih števil odštejemo vsoto sodih števil. Ujemanje rezultatov oz. neodvisnost rezultata od pristopa utrjuje zavest o enovitosti resnic v matematiki, kar v pogovoru lahko še posebej izpostavimo. Če učenci vsote prvih n naravnih števil še ne poznajo, pa prvi delovni list omogoča, da to izpeljemo takole. Če vzorcu dodamo še eno najdaljšo diagonallo, dobimo zvezo $+2+\dots+(n-1)+n+n+(n-1)+\dots+2+1=n^2+n$, kar je dvakratna iskana vsota. Lahko pa na to temo pripravimo tudi novo vizualno prezentacijo, narejeno povsem v duhu Gaussove ideje:



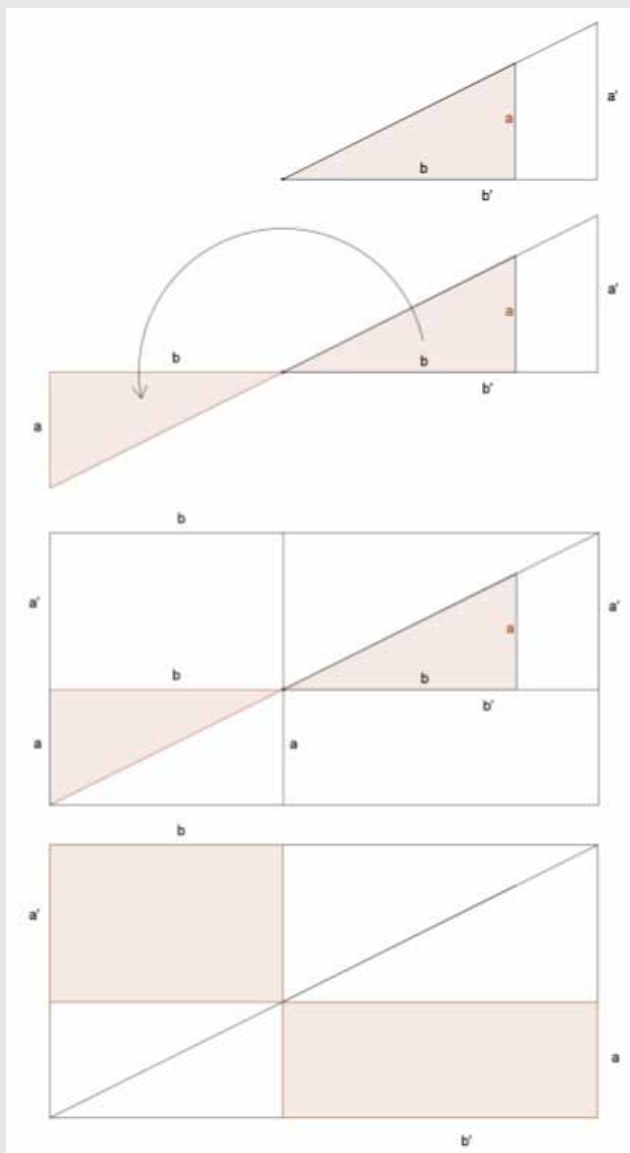
[Slika 4] Vsota prvih n naravnih števil.

Ob obravnavi vzorcev in z njimi povezanih števil velja opozoriti na zanimiv članek *Vzorci in zaporedja* (Željko, 2003) iz te revije, ki se v celoti ukvarja prav s to tematiko.

Podobnost

Delovni list 2

Na podlagi spodnjega zaporedja slik ugotovi odnos med katetami a , b , a' , b' dveh podobnih pravokotnih trikotnikov.



[Slika 5] Podobna pravokotna trikotnika.

Rešitev: Na zaključni sliki 5 imamo pravokotnik, razdeljen z diagonalo, in dva para skladnih trikotnikov. Ker diagonala razdeli pravokotnik na dva ploščinsko enaka dela in ker vsak od njiju vsebuje po en trikotnik iz vsakega od parov skladnih trikotnikov, se morata ujemati tudi ploščini preostankov, torej pobarvanih pravokotnikov. Velja torej:

$$a'b = ab'$$

Istoležni kateti sta zato v enakem razmerju:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Komentar: Enakost razmerij je mogoče lepše doživeti v obliki enakosti produktov, sploh v osnovnošolskem ali poklicnem izobraževalnem programu. Tudi zgodovinsko bi tovrstna trditev, zapisana npr. v starem veku, utegnila biti predstavljena v obliki enakosti ploščin dveh pravokotnikov.

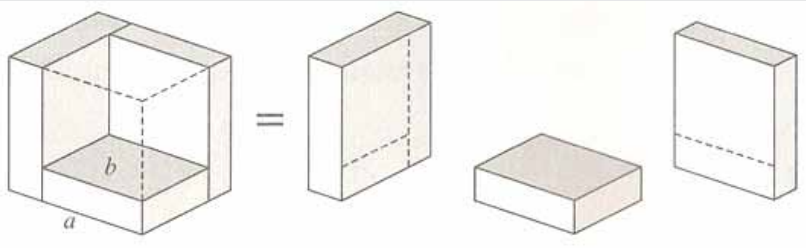
Morda ta niz vizualnih predstavitev ni toliko primeren za samostojno delo učencev kot za skupno razmišljanje razreda pod skrbnim vodstvom učitelja. Ta način prinaša tudi priložnost za razjasnitev in komentar nastopajočih podrobnosti, kot so: katero transformacijo ravnine smo izvedli v drugem koraku, kateri lik smo dobili po tretjem koraku, kaj sploh pomeni, da sta trikotnika podobna, kje v našem postopku smo to sploh upoštevali, kaj bi se zgodilo, če trikotnika ne bi bila pravokotna, ali kaj, če ne bi bila podobna itd.

Če bi dijaki poznali obrazec, po katerem je ploščina paralelograma enaka produktu stranic in sinusa vmesnega kota, bi lahko obravnavali tudi posplošeno verzijo te situacije, kjer osnovni trikotnik ne bi bil več nujno pravokoten. Konfiguracijo bi v tem primeru v tretjem koraku dopolnili do paralelograma.

Razlika kubov

Delovni list 3

Telo na sliki na levi dobimo tako, da iz kocke s stranico a izrežemo kocko s stranico b . Dobljeno telo razrežemo na tri dele, kot kaže slika. Zapiši volumen telesa na dva načina in od tod izpelji znano zvezo.



[Slika 6] Razlika kubov

Rešitev. Telo ima prostornino $a^3 - b^3$. Razrezali smo ga na tri kvadre s prostorninami $a^2(a - b)$, $b^2(a - b)$ in $ab(a - b)$. Od tod dobimo

$$a^3 - b^3 = a^2(a - b) + b^2(a - b) + ab(a - b)$$

Izpostavimo $(a - b)$ in dobimo znano formulo za razliko kubov:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Komentar: Prvi del naloge, torej določanje volumnov treh sestavnih delov, je primeren za samostojno delo dijakov. Učni list je primeren za srednjo šolo, ko so dijaki že bolj vešči z obravnavo situacij, ko podatki niso konkretni, torej niso številski. Tudi algebraični zaključni korak tu ne bi smel več biti problematičen. Če bi se nalogo reševalo potem, ko je dobljeni obrazec že poznan in utrjen, se rezultat poveže s tem znanjem. Če dijaki tega rezultata še ne poznajo, pa bi veljalo opraviti preizkus izpeljanega obrazca z množenjem produkta na desni.

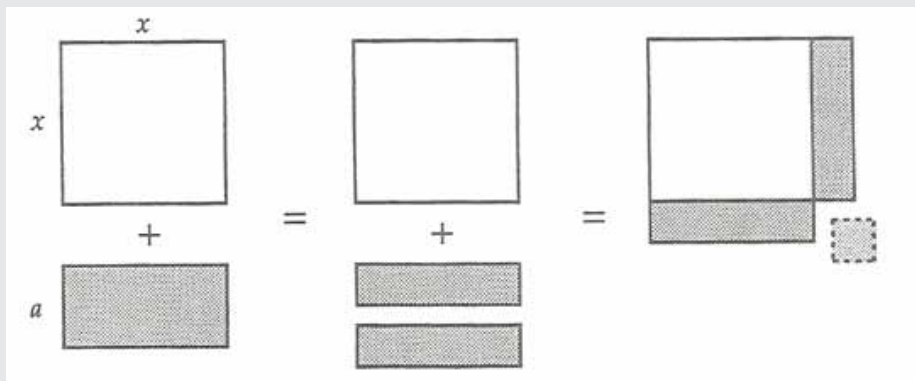
Dopolnjevanje do popolnega kvadrata

Delovni list 4

Pri obravnavi kvadratne funkcije smo spoznali postopek za dopolnjevanje izraza oblike $x^2 + ax$ do popolnega kvadrata: $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2$.

Zapisano enakost predstavi z vizualno prezentacijo. Nariši kvadrat s stranico x in pravokotnik s stranicama x in a ter ju preoblikuj tako, da bo enakost vizualno čim bolj nazorno predstavljena.

Rešitev:



[Slika 7] Dopolnjevanje do popolnega kvadrata

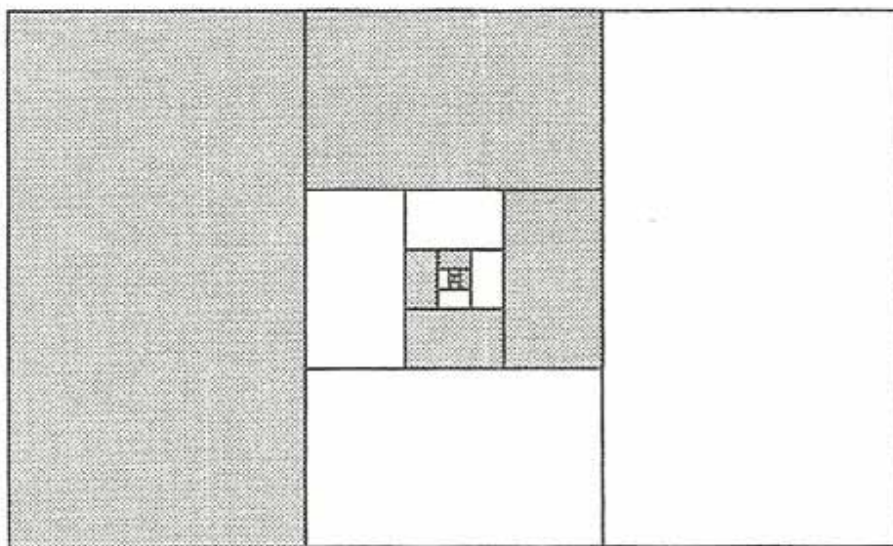
Komentar: Primer smo tokrat namenoma obrnili: začeli smo z dijakom znano algebraično manipulacijo in od njih zahtevali ilustracijo z vizualno prezentacijo. Zelo verjetno je, da bo razmišljanje dijakov šlo v smeri od prve slike na tretjo in potem nazaj na drugo.

Geometrijska vrsta

Delovni list 5

Pravokotnik z navpičnima daljicama razdelimo na tri enake dele, od katerih levo tretjino pobarvamo temno, desno pa pustimo svetlo. V drugem koraku postopek ponovimo v srednji tretjini, ki jo tokrat razdelimo na tri enake dele z vodoravnima daljicama. Zgornji del pobarvamo temno, spodnji del ostane svetel. V naslednjem koraku pa postopek nadaljujemo z navpičnima daljicama v preostali tretjini itd.

- V vsakem koraku posebej premisli, kolikšen del celotnega pravokotnika je bil v tem koraku pobarvan temno.
- Poglej sliko kot celoto: kolikšen del pravokotnika je na koncu pobarvan temno?
- Katero zvezo smo na ta način izpeljali?



[Slika 8] Zaporedno barvanje tretjin pravokotnika.

Rešitev: Zaporedoma temno pobarvamo naslednje dele ploščine pravokotnika:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \dots$$

Iz slike 8 vidimo, da v n korakih obravnavamo celoten pravokotnik, razen drobnega pravokotnika v sredini, in da v neskončno korakih obravnavamo celoten pravokotnik, razen ene točke - presečišča diagonal. Pri tem izraz »obravnavamo« pomeni, da za ustrezne točke določimo, ali bodo pobarvane temno ali bodo ostale svetle. Na koncu je temno pobarvan del pravokotnika ploščinsko enak svetlemu delu pravokotnika. Zato je ploščina temno pobarvanega dela pravokotnika enaka $\frac{1}{2}$ celotne ploščine pravokotnika. Od tod sledi, da je

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \frac{1}{2}$$

Komentar: Naloga kombinira lokalni pogled na situacijo z globalnim pogledom. Pri vsakem koraku ostane v obdelavi tretjina pravokotnika iz prejšnjega koraka in tretjino tega pobarvamo temno. Na ta način zaporedoma dojamemo, kaj se zgodi pri vsakem posameznem koraku. Potem pa sliko pogledamo celovito. Beli in temni vzorec sta simetrična in zato zajemata enak del začetnega pravokotnika.

Zveze s sinusi in kosinusi

Delovni list 6

Delovni list 6: Narišemo (rdeči) pravokotni trikotnik s hipotenuzo 1 in kotom β . Temu spodaj dodamo (rumeni) pravokotni trikotnik s kotom α kot na sliki 9. Sliko dopolnimo do pravokotnika.

S kotoma α in β izrazi kateti rdečega trikotnika.

S kotoma α in β izrazi kateti rumenega trikotnika.

S kotoma α in β izrazi kot ϵ .

S kotoma α in β izrazi kateti oranžnega trikotnika.

S kotoma α in β izrazi dolžino dveh črtkanih daljic.

Dolžino dveh črtkanih daljic izrazi še z vsoto kotov $\alpha + \beta$.

Primerjaj rezultata v in vi. Kaj dobimo?

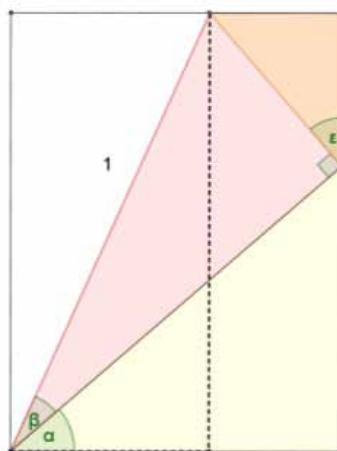
Rešitev: Kateti rdečega trikotnika merita $\sin \beta$ in $\cos \beta$, kateti rumenega pa $\sin \alpha \cos \beta$ in $\cos \alpha \cos \beta$. Kot $\epsilon = \alpha$. Oranžni trikotnik ima zato kateti $\sin \alpha \sin \beta$ in $\cos \alpha \sin \beta$. Dolžina navpične črtkane daljice zato znaša $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, dolžina vodoravne črtkane daljice pa $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. V pravokotnem trikotniku s črtkanima katetama meri eden izmed kotov $\alpha + \beta$. Dolžina kotu nasprotne katete znaša $\sin(\alpha + \beta)$, dolžina kotu $\alpha + \beta$ priležne katete pa $\cos(\alpha + \beta)$.

Na tej podlagi dobimo:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

To sta adicijska izreka za sinus in kosinus.



[Slika 9] Zveze s sinusi in kosinusi.

Komentar: Naloga je primerna v situaciji, ko dijaki izpeljana obrazca že predhodno poznajo. Predstavlja dobro vajo za utrjevanje sinusa in kosinusa v pravokotnem trikotniku. Če dijakom nalogo uspe dovolj suvereno opraviti, bi bilo morda ustrezno, da bi se z njimi pogovorili o morebitnih omejitvah na ta način izpeljanih adicijskih izrekov (denimo o velikosti kota $\alpha + \beta$.)

Neenakosti

Delovni list 7

Opazuj spodnjo sliko.

1. Zapiši zvezo, da je ploščina celotnega kvadrata enaka vsoti ploščin petih sestavnih delov.
2. Z neenakostjo izrazi odnos med ploščino celotnega kvadrata in štirih pravokotnikov.
3. Iz dobljene neenakosti izpelji oceno aritmetične sredine števil a in b .

Rešitev:

$$1. (a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2$$

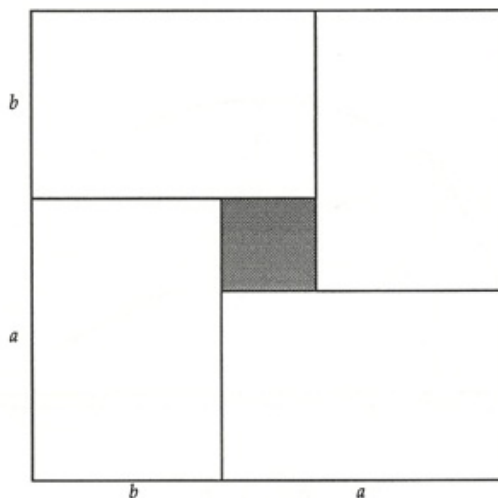
$$2. (a + b)^2 \geq 4ab$$

$$3. \sqrt{(a + b)^2} \geq \sqrt{4ab}$$

$$(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Komentar: Naloga se začne z opazovanjem slike in prepoznavanjem nastopajočih količin. Nato izpeljemo zahtevani enakost in neenakost. Na podlagi neenakosti ocenimo vsoto in nato še aritmetično sredino dveh števil. Na drugi strani neenakosti nastopi geometrijska sredina dveh števil, kar posebej poudarimo in komentiramo.



[Slika 10] Kvadrat, razdeljen na štiri enake pravokotnike in en kvadrat.

Splošna geometrijska vrsta

Delovni list 8

Narišimo kvadrat $ABCD$ s stranico, dolgo 1, in na stranici BD izberimo točko U tako, da je $|BU| = r$. Presečišče premic DU in AB označimo z V .

1. Pokaži, da sta trikotnika AVD in CDU podobna.

Z raztegom s središčem v točki A in koeficientom r preslikamo štirikotnik $ABUD$ in dobimo štirikotnik $AB'U'D'$.

2. Pokaži, da leva in spodnja stranica štirikotnika $AB'U'D'$ merita r , zgornja stranica pa je vzporedna premici DU . Koliko meri desna stranica?

Če ta štirikotnik premaknemo za vektor AB , dobimo štirikotnik BB_1U_1U .

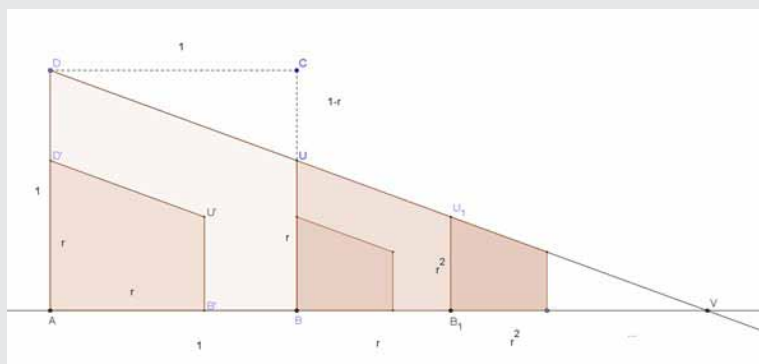
3. Pokaži, da točki U_1 in U ležita na daljici DV .

Postopek ponavljamo: Uporabimo razteg s središčem B in koeficientom r , z njim preslikamo štirikotnik BB_1U_1U , ga premaknemo za vektor BB_1 in dobimo štirikotnik $B_1B_2U_2U_1$ z levo in spodnjo stranico dolgo r^2 . Postopek nadaljujemo ...

- Premisli, čemu je enaka vsota $1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

- Upoštevaj i. in izpelji, da je $|AV| = \frac{1}{(1-r)}$

- Kateri znani obrazec smo na ta način dokazali?



[Slika 11] Vsota geometrijske vrste s pozitivnim količnikom

Rešitev: Opisani postopek nam ponazarja obrazec za vsoto geometrijske vrste.

Komentar: Naloga je dolga in sorazmerno zahtevna. Zahteva razumevanje in poznavanje lastnosti raztegov (dolžine stranic, vzporednost premic) ter obvladanje sklopa o podobnih trikotnikih. Posebna težava, pa tudi čar, je obravnava postopka, ki ima neskončno korakov. Neskončno mnogo daljic smo zložili eno poleg druge in kot unijo dobili eno samo daljico. Povsem podobno je lahko vsota neskončno mnogo časovnih intervalov enaka enemu same-

mu časovnemu intervalu. Primer je na tej točki mogoče povezati z zgodbo o Ahilu in želvi, s tem da naša neskončna vrsta na sliki tudi vizualno zaživi. V tem primeru je vključene veliko matematike. Problem neskončnih postopkov, ki je povzročal velike težave starim Grkom, pa že zaradi zgodovinskih okoliščin ni le tehnični detajl z obrobja človeškega zanimanja, ampak pomembna zmaga razuma pri dojemljanju neskončnega.

γ Za konec

Tudi za izkušenega učitelja je koristno, če se tu in tam seznani s kakim novim vidikom poučevanja, saj ga to lahko spodbudi h kritičnemu premisleku in vrednotenju obstoječih poučevalnih praks ali preprosto k osvežitvi svojih pristopov. Pri pouku matematike pa je še posebej pomembno, da ne zdrsnemo zgolj v rutinsko izvajanje postopkov, ampak da spodbujamo razvoj matematičnega mišljenja vsakega posameznika in da z izbiro alternativnih metod poskusimo ključne po-

ante matematike približati tako povprečnim dijakom kot tudi tistim manj in tistim bolj nadarjenim. Vizualne prezentacije, o katerih smo govorili v tem članku, nam pri tem lahko pomagajo. Ob njih bodo učenci morda globlje dojeli ključne matematične ideje tako na intuitivni kot na formalni ravni. Morda nam bo tako učencem uspelo tudi nevsiljivo sporočiti, da je matematika mnogo več kot samo računanje.

δ Literatura

1. Alsina, C., Nelsen, R. B. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: The Mathematical Association of America.
2. Berman, L. M. (1999). Teacher as Poet. *Theory into Practice*, Vol. 38, No. 1, *Redefining Teacher Quality*, 18–23.
3. Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics. An epistemological study*. New York: Oxford University Press.
4. Lockhart, P. (2002). *A mathematician's lament*. Povzeto s spletne strani Mathematical Association of America Online (1. 3. 2011): <http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf>
5. Murphy, P. K. (2001). *Teaching as persuasion: A new metaphor for a new decade*. *Theory into practice*, Vol. 40, No. 4, 224–227.

6. Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
7. Nelsen, R. B. (2000). *Proofs Without Words II. More Exercises in Visual Thinking*. Washington: The Mathematical Association of America.
8. Posamentier, A. S. [et al.] (1998). *Problem-Solving Strategies for Efficient and Elegant Solutions: A Resource for the Mathematics Teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
9. Tomšič Mavrič, S. (2011). *Primeri podpore matematičnih dokazov z uporabo vizualnih prezentacij: diplomsko delo*. Maribor: FNM UM, spletna stran: <http://dkum.uni-mb.si/Dokument.php?id=21506>
10. Željko, M. (2003). *Vzorci in zaporedja. Matematika v šoli, letnik 10, št. 3, 4*, 194–207.