PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **26** (1998/1999)
Številka 3
Strani 130–132

Tomaž Slivnik ml.:

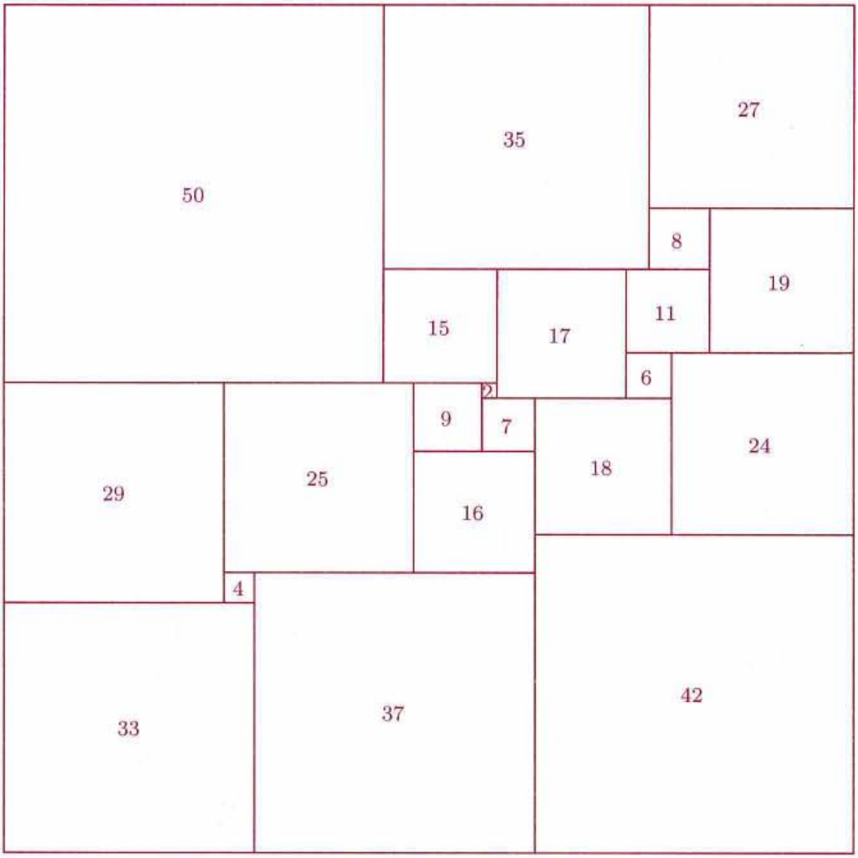
RAZREZ KOCKE

Ključne besede: matematika, geometrija, kocke, razrezi.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/26/1373-Slivnik.pdf

RAZREZ KOCKE

Kvadrat lahko razrežemo na 21 manjših kvadratov, ki so med sabo vsi različni:



Slika 1.

Ta razrez je leta 1978 našel A. J. W. Duijvestijn, slika pa je vzeta iz knjige B. Bollobás, *Graph Theory, An introductory course*, Springer-Verlag, 1979 (stran 34, slika 1). Dokažemo tudi lahko, da kvadrata ni mogoče razrezati na manj kot 21 neskladnih kvadratov.

V tem prispevku pa bomo pokazali, *da se kocke ne da razrezati na manjše kocke, ki bi bile med sabo vse različne.*

Pa recimo, da bi bilo to mogoče. Predpostavimo, da je K kocka, razrezana na $n \geq 2$ paroma neskladnih kock $K_1, \ldots, K_n$.

Pokazali bomo, da naš razrez vsebuje vsaj $n+1$ kock. To protislovje bo pokazalo, da tak razrez ne obstaja.

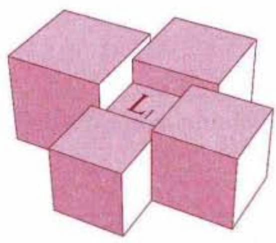
Naj bo L_1 najmanjša med kockami $K_1, \ldots, K_n$, ki leži na spodnji ploskvi kocke K.

Opazimo, da L_1 ne more biti v kotu kocke K. Recimo, da je. Kocko K zasučimo tako, da L_1 leži v njenem sprednjem levem kotu. Kocka, ki leži na spodnji ploskvi K poleg L_1 na njeni desni strani (njena desna "soseda"), je večja kot L_1 in zato utesnjuje njeno zadnjo sosedo v prostor, v katerega ne moremo spraviti kocke, večje od L_1. Toda tudi zadnja soseda L_1 je večja kot L_1. To protislovje nas prepriča, da L_1 res ne more biti v kotu kocke K.

Prav tako vidimo, da se L_1 ne more dotikati robov kocke K. Pa predpostavimo, da se dotika enega od robov. K zasučimo tako, da se L_1 dotika njenega sprednjega roba. Vemo, da L_1 ni v kotu in ima zato levo in desno sosedo. Ti sosedi sta obe večji od L_1 in zato utesnjujeta zadnjo sosedo kocke L_1 v prostor, v katerega ne moremo spraviti kocke, večje od L_1. Toda spet je zadnja soseda L_1 večja kot L_1. To protislovje pokaže, da se L_1 res ne more dotikati robov kocke K.

Torej mora spodnja ploskev kocke L_1 v celoti ležati v notranjosti spodnje ploskve K. Ker so vse sosede L_1 večje od nje, je L_1 ograjena s kockami, ki so višje od nje (kot na sliki 2).

pogled od zgoraj



pogled od spodaj

Slika 2. L_1 je ograjena s kockami, ki so večje od nje.

Torej obstaja vsaj ena kocka med $K_1, \ldots, K_n$, ki leži nad L_1. Poleg tega mora biti spodnja ploskev vsake kocke K_i, ki se dotika notranjosti zgornje stranske ploskve L_1, v celoti vsebovana v zgornji ploskvi L_1.

Pa naj bo L_2 najmanjša med kockami $K_1, \ldots, K_n$, ki leži na zgornji stranski ploskvi L_1. Kot v primeru razmisleka za L_1 vidimo, da L_2 ne leži ne v kotu ne na robu zgornje ploskve L_1. Spodnja ploskev L_2 je torej v celoti vsebovana v notranjosti zgornje ploskve L_1. Ker je L_2 najmanjša kocka, ki leži na zgornji ploskvi L_1, je tudi L_2 ograjena s kockami, ki ležijo na zgornji ploskvi L_1 in so višje od L_2.

Zdaj je jasno, kako nadaljujemo: na enak način, kot smo našli L_1 in L_2, poiščemo še kocke $L_3, \ldots, L_{n+1}$. L_{i+1} najdemo kot najmanjšo kocko, ki leži na zgornji ploskvi L_i. Spet vidimo, da leži spodnja ploskev L_{i+1} v celoti v notranjosti zgornje ploskve L_i in da mora biti L_{i+1} ograjena s kockami, ki ležijo na zgornji ploskvi L_i in ki so višje od L_{i+1} $(i = 2, 3, \ldots, n)$.

Pokazali smo, da med našimi n kockami $K_1, \ldots, K_n$ lahko najdemo $n + 1$ različnih kock, ki ležijo ena vrh druge. To protislovje dokazuje, da razrez kocke K na kocke $K_1, \ldots, K_n$ sploh ne obstaja.

Torej se kocke res ne da razrezati na končno mnogo manjših kock, ki so med sabo vse različne.

Za konec pa bralcem zastavljam še tri vprašanja:

Vprašanje 1: V našem dokazu smo predpostavili, da morajo biti stranice kock v razrezu kocke na končno mnogo manjših kock vzporedne s stranicami celotne kocke. Ali vidiš, kje smo to predpostavili? Ali je naša predpostavka utemeljena?

Vprašanje 2: Ali znaš kocko razrezati na neskončno mnogo neskladnih kock?

Vprašanje 3: Ali je mogoče enakostranični trikotnik razrezati na končno mnogo neskladnih enakostraničnih trikotnikov?

Tomaž Slivnik ml.