DVAINDVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Tudi tokrat se je v Blagoevgradu v Bolgariji med 27. julijem in 2. avgustom 2015 pomerilo 330 študentov matematike s 73 univerz z vsega sveta. Čeprav so še vedno prevladovale evropske univerze, sta se tekmovanja že tradicionalno udeležili tudi izjemno številni brazilska in iranska ekipa, med tekmovalci pa ste na primer lahko našli tudi študente iz Kostarike, Mehike, Kitajske in Arabskih emiratov. Ljubljansko univerzo so zastopali Rok Havlas, Vesna Iršič, Teo Kukuljan, Veno Mramor in Neža Žager Korenjak, primorsko pa Ivan Bartulović, Vladan Jovičić, Marko Palangetić in Roman Solodukhin.

Študentje so dva dneva, vsak dan po pet ur, reševali po pet nalog. Večinoma zelo zvite in težke naloge so iz snovi, ki se predava pri standardnih predmetih v prvih dveh letnikih študija matematike.

Slika 1. Predstavniki slovenskih univerz v menzi Ameriške univerze.

Veno Mramor in Marko Palangetić sta dobila drugo nagrado, Ivan Bartulović in Teo Kukuljan tretjo, preostali študentje pa so dobili pohvale. Na lestvici 74 ekip je ljubljanska ekipa zasedla 47., primorska pa 48. mesto.

Zelo veliko o tekmovanju, prejšnjih tekmovanjih, nalogah in rezultatih lahko najdete na domači strani organizatorja `www.imc-math.org`.

Za boljši vpogled v težo in tip nalog sledi nekaj nalog z rešitvami. Letošnje naloge so bile bolj simpatične in lažje rešljive kot prejšnja leta. Verjamem, da bodo za mnoge bralce zanimiv izziv.

Nekakšen nenapisan dogovor pravi, da je treba vsak dan začeti z dostopno nalogo, ki naj bi jo rešila velika večina študentov. Tudi jaz sem bil med ocenjevalci naslednje zelo simpatične naloge iz linearne algebre:

I.1. *Naj bo $n \geq 2$. Realni matriki A in B velikosti $n \times n$ zadoščata enačbi*

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1} \ .$$

Pokaži, da je $\det A = \det B$. *Ali enak sklep velja tudi v primeru kompleksnih matrik?*

Ko enakost pomnožimo z $A+B$, dobimo

$$I = (A^{-1} + B^{-1})(A+B) = 2I + A^{-1}B + B^{-1}A,$$

ali ekvivalentno

$$A^{-1}B + B^{-1}A + I = 0 \ .$$

Prvi seštevanec je inverz drugega, zato se enačba s substitucijo $X = A^{-1}B$ poenostavi v

$$X + X^{-1} + I = 0 \ .$$

Od tod sledi $X^2 + X + I = 0$ in

$$X^3 - I = 0.$$

Zato je $X^3 = I$, $(\det X)^3 = 1$ in zaradi realnosti matrik velja

$$1 = \det X = \det(A^{-1}B) = \tfrac{\det B}{\det A} \ .$$

Tako smo pokazali, da je v realnem primeru $\det A = \det B$.

Enakost $(\det X)^3 = 1$ da slutiti, da nam lahko v kompleksnem primeru nagajajo tretji koreni enote. Naj bo $\zeta = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$. Za A vzemimo identično matriko, za B pa diagonalno matriko, ki ima na diagonali ζ ali ζ^2, tako da $\det B \neq 1$. V primeru, ko n ni večkratnik števila 3, lahko na primer vzamemo kar $B = \zeta I$.

Tedaj je $A^{-1} = I$, $B^{-1} = \overline{B}$, $I + B + \overline{B} = 0$ in

$$(A+B)^{-1} = (-\overline{B})^{-1} = -B = I + \overline{B} = A^{-1} + B^{-1} \ ,$$

vendar $\det A = 1 \neq \det B$.

Podobno dostopna je bila naloga iz analize, s katero se je začel naslednji dan.

Slika 2. Ljubljanska ekipa pred rilskim samostanom.

II.1. *Pokaži, da velja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < 2 \ .$$

Študentje so našli ogromno različnih rešitev, verjetno najbolj naravna pa je ocena z integralom.

S pomočjo substitucije $t = x^2$ je zelo lahko v primeru $a \geq 0$ eksplicitno izračunati integral

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{a} \ .$$

Integrand je strogo padajoča funkcija. Poglejmo si Darbouxove pravokotnike širine 1 za spodnjo oceno ploščine. Ker je $\pi > 2$, moramo nekaj prvih členov izračunati posebej. Dobimo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \pi - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} < 2 \ .$$

Zelo mi je bila všeč tudi naslednja veliko težja, a elementarna naloga z zvito uporabo kompleksnih števil:

I.4. *Ali obstaja* 15 *celih števil* $m_1, \ldots, m_{15}$*, za katera velja*

$$\sum_{j=1}^{15} m_j \cdot \operatorname{arctg} j = \operatorname{arctg} 16 \ ?$$

Slika 3. Primorska ekipa.

Rezultat funkcije arctg si predstavljajmo kot polarni kot. Ker se koti pri množenju kompleksnih števil seštevajo, pri potenciranju pa se množijo z eksponentom, bi bil v primeru zgornje enakosti argument števila $z = 1 + 16i$ enak argumentu produkta

$$w = (1+i)^{m_1} \cdot (1+2i)^{m_2} \cdots (1+15i)^{m_{15}} \ .$$

V tem primeru bi bil kvocient $r = \frac{w}{z}$ neničelno realno število. Še več, ker je realni del števila w cel, realni del z pa enak 1, bi bil tudi kvocient r neničelno celo število.

Absolutna vrednost $|w|^2$ je r^2-kratnik absolutne vrednosti $|z|^2$:

$$(1+16^2)r^2 = \prod_{j=1}^{15} (1+j^2)^{m_j} \ .$$

Sedaj pride najbolj nepričakovani del rešitve: Število

$$p = 1 + 16^2 = 257$$

je praštevilo, na desni pa za vse faktorje velja

$$1 + j^2 < 1 + 16^2 = p \ .$$

To je v nasprotju z enoličnim razcepom števila na praštevila.

Za konec še primer zadnje, najtežje naloge:

I.5. *Naj bo $n \geq 2$ in $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ točke v n-razsežnem evklidskem prostoru, ki ne ležijo na isti hiperravnini. Točka B leži v notranjosti konveksne ogrinjače točk $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$. Pokaži, da je kot $\angle A_iBA_j$ top za vsaj n parov (i,j), $1 \leq i < j \leq n+1$.*

Za $1 \leq i \leq n+1$ označimo $v_i = BA_i$. Kot $\angle A_iBA_j$ je top natanko tedaj, ko je skalarni produkt $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Ker je B v notranjosti konveksne ogrinjače, za primerna pozitivna števila $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ z vsoto, manjšo od 1, velja

$$A_{n+1}B = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{n+1}A_i \ ,$$

ali drugače

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) v_{n+1} = 0 \ .$$

Potem je tudi $\lambda_{n+1} := 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$.

Poglejmo si graf, ki ima za vozlišča točke $1, 2, \ldots, n+1$. Točki i in j naj bosta povezani, če je $\langle v_i, v_j \rangle < 0$. Pokazali bomo, da je ta graf povezan. Ker ima vsak povezan graf z $n+1$ vozlišči vsaj n povezav, bo s tem naloga rešena.

Če graf ne bi bil povezan, bi lahko vozlišča razbili na disjunktni podmnožici V in W z $V \cup W = \{1, \ldots, n+1\}$, pri čemer bi zaradi nepovezanosti veljalo $\langle v_i, v_j \rangle \geq 0$ za vse $i \in V$ in $j \in W$.

Poglejmo si enakost

$$0 = \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i v_i \right\|^2 =$$

$$= \left\| \sum_{i \in V} \lambda_i v_i \right\|^2 + \left\| \sum_{i \in W} \lambda_i v_i \right\|^2 + 2 \sum_{i \in V} \sum_{j \in W} \lambda_i \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle \ .$$

Seštevanci v zadnji dvojni vsoti so nenegativni. Ker točke ne ležijo v isti hiperravnini, velja tudi

$$\sum_{i \in V} \lambda_i v_i \neq 0 \ \text{ in } \ \sum_{i \in W} \lambda_i v_i \neq 0.$$

To pomeni, da zadnja enakost ni možna in prišli smo do protislovja.

Kljub na videz liberalnim ocenam kot zanimivost povejmo, da je ocena v nalogi najboljša možna. Za primer bi lahko vzeli $v_{n+1} = (1, 1, \ldots, 1)$, za v_i pa vektor, ki ima na i-tem mestu -1, drugje pa ničle. V tem primeru je $\langle v_i, v_j \rangle < 0$ le v primeru, ko je $i = n+1$ ali $j = n+1$.

Marjan Jerman