Univerza v Mariboru

Fakulteta za elektrotehniko,
računalništvo in informatiko

Analiza I

Tatjana Petek

Maribor, 2014

Copyright 2014. Prva izdaja, maj 2014.

Naslov: **Analiza I**

Avtorica: izr. prof. dr. Tatjana Petek

Vrsta učbenika: skripta

Izdajatelj: UM FERI

Kraj izdaje: Maribor

Naklada: spletna izdaja

Dostopno na:
http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/petek/ucbeniki/ucbenikA1.pdf
dkum.uni-mb.si

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Univerzitetna knjižnica Maribor
517(075.8)
PETEK, Tatjana
Analiza I [Elektronski vir] / Tatjana Petek. - 1. izd. - Maribor : Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, 2014
Način dostopa (URL):
http:/www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/petek/ucbeniki/ucbenikA1.pdf
dkum.uni-mb.si
ISBN 978-961-248-442-2
COBISS.SI-ID 78308353

Kazalo

Predgovor

Delo, ki je pred vami, obsega zapiske predavanj pri predmetu Analiza I v obliki in obsegu kot ga že nekaj let predavam na univerzitetnem študiju Elektrotehnike in Telekommunikacij na Fakulteti za elektrotehniko, računalništvo in informatiko Univerze v Mariboru in je namenjeno v prvi vrsti študentom tega programa. Obširen seznam slovenskih del najdete v referencah - študentom vsekakor priporočam, da vzamejo v roke še kak drug učbenik, posebej naj izpostavim učbenika [1] in [11], za zahtevnega bralca pa [12], in zbirke rešenih nalog [4], [5]. Toplo priporočam tudi zbrane naloge kolega I. Peterina [7–9].

1 Podmnožice realnih števil

Najprej navedimo nekaj osnovnih računskih operacij z množicami. Bodita A, B poljubni podmnožici neke univerzalne množice U in definirajmo operacije:

- unija: $A \cup B = \{x;\ x \in A \textbf{ ali } x \in B\}$
- presek: $A \cap B = \{x;\ x \in A \textbf{ in } x \in B\}$
- komplement $\overline{A} = A^c = \{x;\ x \in U,\ x \notin A\}$
- razlika $A \backslash B = \{x;\ x \in A \textbf{ in } x \notin B\}$.

Nadaljujmo s pregledom podmnožic množice realnih števil.

1.1 Naravna števila $\mathbb{N}$

so števila, s katerimi štejemo: $1, 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$. **Števke** (cifre) so simboli $0,\ 1,\ 2, \ldots,\ 8$, 9, s katerimi sestavljamo **številke.** S številkami nadalje zapisujemo **števila**. Isto število lahko predstavimo z različnimi številkami in pri tem uporabimo različne **številske sestave,** npr.:

desetiški številski sestav**:** $35 = \mathbf{3}.10^1 + \mathbf{5}.10^0$

dvojiški številski sestav**:** $35_{[10]} = 32 + 2 + 1 = \mathbf{1}.2^5 + \mathbf{0}.2^4 + \mathbf{0}.2^3 + \mathbf{0}.2^2 + \mathbf{1}.2^1 + \mathbf{1}.2^0 = 100011_{[2]}$.

Desetiška številka $35_{[10]}$ in dvojiška številka $100011_{[2]}$ skupaj s podatkom o številskem sestavu predstavljata isto število.

V množici $\mathbb{N}$ sta definirani operaciji $+$ in $\cdot$ z naslednjimi algebraičnimi lastnostmi:

1.	$m + (n + k) = (m + n) + k$	asociativnost seštevanja
2.	$m + n = n + m$	komutativnost seštevanja
3.	$(mn)\,k = m\,(nk)$	asociativnost množenja
4.	$mn = nm$	komutativnost množenja
5.	$m.1 = m$	1 je enota za množenje
6.	$(m + n)\,k = mk + nk$	distributivnost

Vsaka od zgoraj navedenih lastnosti velja za poljubna naravna števila m, n, k. Množica $\mathbb{N}$ je za seštevanje komutativna polgrupa (lastnosti 1. in 2.), za množenje pa komutativna polgrupa z enoto (lastnosti 3., 4. in 5.) Obe operaciji povezuje distributivnost.

1.2 Cela števila $\mathbb{Z}$

Množica celih števil $\mathbb{Z}$ je unija pozitivnih celih, negativnih celih in števila 0. V množici $\mathbb{Z}$ lahko seštevamo, odštevamo in množimo. Poleg lastnosti, ki smo jih že omenili pri naravnih številih, velja še:

- 0 je nevtralni element za seštevanje

- vsakemu $k \in \mathbb{Z}$ pripada enolično določen **nasprotni element** $-k$, ki ima lastnost $k + (-k) = 0$.

Pravimo, da so cela števila **kolobar**.

- v množici $\mathbb{Z}$ je definirana relacija deljivosti. Število $n \in \mathbb{Z}$ je **deljivo** z $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, če je za neki $k \in \mathbb{Z}$ izpolnjeno: $n = km$. Pri tem sta m in k **delitelja** števila n. Število $p \in \mathbb{N}$ je **praštevilo**, če razen 1 in samega sebe nima pozitivnih deliteljev. Kaj je **največji skupni delitelj** števil pozitivnih celih števil m in n, pove že ime samo. **Najmanjši skupni večkratnik naravnih števil** m in n pa je najmanjše možno pozitivno število k, ki je deljivo z m in z n. Števili sta **tuji**, če razen 1 nimata skupnih deliteljev. Najmanjši skupni večkratnik tujih si števil je kar produkt obeh.

1.3 Racionalna števila (ulomki) $\mathbb{Q}$

Enačba $3x = -6$ je rešljiva v množici $\mathbb{Z}$, medtem ko enačba $5x = 6$ v množici $\mathbb{Z}$ nima nobene rešitve. Množico $\mathbb{Z}$ razširimo tako, da bodo tudi enačbe te vrste rešljive. Vpeljemo ulomke.

Rešitev enačbe $nx = m$, kjer $n \neq 0$, $n, m \in \mathbb{Z}$, je ulomek $\frac{m}{n}$. Isti ulomek reši tudi enačbo: $knx = km$, torej je $\frac{km}{kn} = \frac{m}{n}$. Zapis ulomka torej ni enoličen. Ulomek $\frac{m}{n}$ **razširimo** tako, da števec m in imenovalec n pomnožimo z istim številom $k \neq 0$. **Krajšanje** je obratni postopek, števec in imenovalec delimo z istim neničelnim številom.

Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta enaka $\Leftrightarrow ad = bc$. Po velikosti ju lahko primerjamo le, če imata skupni imenovalec: $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$.

Seštevanje ulomkov: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ (ali pa ju damo na najmanjši skupni imenovalec)

Množenje ulomkov: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} . c = \frac{ac}{b}$

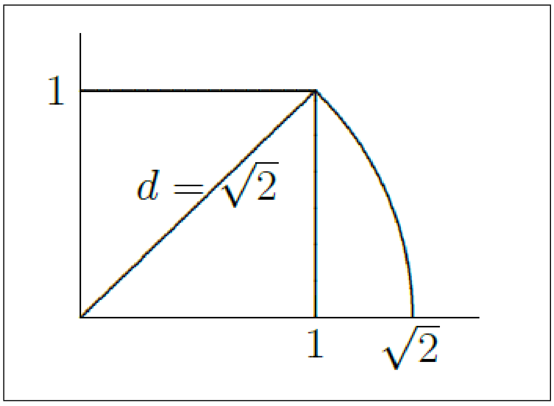
Obratna vrednost ulomka: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$, $a, b \neq 0$.

Deljenje: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} . \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$\mathbb{Q}$ ima za seštevanje iste lastnosti kot $\mathbb{Z}$, pri množenju pa dodatno velja še, da ima vsak neničelni element $\mathbb{Q}$ obratno vrednost ali inverzni element. Torej je $\mathbb{Q}$ komutativna grupa za seštevanje, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ je komutativna grupa za množenje, kot povezava med seštevanjem in množenjem pa velja še distributivnost. Taki algebrski strukturi rečemo **komutativen obseg** ali **polje**.

Množica $\mathbb{Q}$ je **povsod gosta.** To pomeni, da med poljubnima ulomkoma $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ najdemo vsaj še enega. Na primer, aritmetična sredina $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$ ima to lastnost.

Ali vsaki točki številske premice ustreza kako racionalno število? Hitro se prepričamo, da ne.



Slika 1.1: Korenu $\sqrt{2}$ ustreza točka na številski premici.

Trditev 1.3.1 *$\sqrt{2}$ ni ulomek.*

Dokaz. Trditev bomo dokazali s pomočjo protislovja. Denimo, da bi lahko število $\sqrt{2}$ zapisali v obliki ulomka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Predpostavimo lahko, da je ta ulomek okrajšan; vzemimo torej, da naravni števili m in n razen 1 nimata skupnih pozitivnih deliteljev. Enačbo $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ kvadrirajmo

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

in zapišimo v drugi obliki

$$m^2 = 2n^2. \tag{1}$$

Od tod razberemo, da je m^2 sodo število. Preprost premislek pove, da je tedaj nujno tudi m sodo število in ga lahko zapišemo v obliki $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Enačbo (1) preoblikujemo v

$$4k^2 = m^2 = (2k)^2 = 2n^2,$$

jo delimo z 2 in dobimo

$$2k^2 = n^2,$$

od koder s podobnim razmislekom kot prej doženemo, da je tudi n sodo število. Prišli smo do protislovja, saj imata m in n skupni delitelj 2, kar pa po naši predpostavki ni mogoče. □

1.4 Realna števila $\mathbb{R}$

Vsaki točki številske premice lahko (enolično) priredimo neko realno število. Za racionalna števila smo videli, da ne pokrivajo vseh točk na številski premici. Tako bo množica realnih števil v nekem smislu dopolnitev manjkajočih točk na številski premici. Realna števila lahko predstavimo z decimalnim zapisom. Glede na to, kakšen je možen decimalni zapis danega realnega števila, se izkaže, da

a) racionalna števila predstavimo s končnimi ali periodičnimi decimalnimi številkami, npr.: 0.25, 56.361 ali $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, $\frac{5}{7} = 0.\overline{714\,285}$. Ta zapis ni zmeraj enoličen. Na primer $0.\overline{9} = 1.0$, saj

$$
\begin{aligned}
x &= 0.\dot{9} \\
10x &= 9.\dot{9} \\
10x - x &= 9x = 9 \\
x &= 1.
\end{aligned}
$$

b) realna števila, ki niso racionalna, se da predstaviti z neskončnimi neperiodičnimi decimalnimi številkami. Imenujemo jih **iracionalna** števila. Npr.: $\sqrt{2}$, π, e.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{x;\ x \text{ je iracionalno število}\}$$

Znana je še ena delitev realnih števil:

a) **algebraična števila** so koreni polinomskih enačb s celimi koeficienti, npr.: $\sqrt{2}$ je koren enačbe $x^2 - 2 = 0$, števili $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ in $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ sta korena polinomske enačbe $x^2 + x - 1 = 0$.

b) **transcendentna števila** so tista realna števila, ki niso algebraična, npr.: π, e, $\ln 2, \ldots$.

1.4.1 Urejenost realnih števil

Množica $\mathbb{R}$ je urejena po velikosti:

$$
\begin{aligned}
& a < b \Leftrightarrow b > a \Leftrightarrow b - a > 0 \\
& a \leq b \Leftrightarrow b \geq a
\end{aligned}
$$

Za poljubne $a, b, c \in \mathbb{R}$ velja:

1. Nastopi natanko ena od treh možnosti (**zakon trihotomije**):

   $$a < b, \quad a > b, \quad a = b.$$

2. $a < b$ in $b < c \;\Rightarrow\; a < c$
3. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
4. $a < b$ in $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
5. $a < b$ in $c < 0 \Rightarrow ac > bc$ pri množenju z negativnim številom se neenačaj **obrne!**
6. $a, b > 0$ ali $a, b < 0$ in $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Zgleda:

1. Za katere $x \in \mathbb{R}$ je izpolnjena neenakost:
$$2 - 3x \geq x + 1 \,?$$
Rešiti moramo **linearno** neenačbo. Na levi in desni strani prištejemo $-x$ ter -2; z drugimi besedami: neznanke premaknemo na levo stran neenačbe, člene brez neznanke pa na desno stran:
$$\begin{aligned} 2 - 2 - 3x - x &\geq x - x + 1 - 2 \\ -4x &\geq -1. \end{aligned}$$
Neenačbo delimo z -4, neenačaj se obrne!
$$x \leq \frac{1}{4}.$$

2. Poišči vse rešitve neenačbe $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$.

Pri reševanju neenačbe moramo biti zelo previdni, kadar jo množimo ali delimo z izrazom, ki še nima določenega predznaka. Pri zgornji neenačbi je verjetno prva misel, da odpravimo ulomek, torej neenačbo pomnožimo z $2x - 1$. Vendar pozor, $2x - 1$ je število, odvisno od neznanke x, ki pa je seveda ne poznamo.

Eden od načinov je, da ločimo dva primera in ju obravnavamo ločeno: 1. $2x-1 > 0$ (ekvivalentno $x > \frac{1}{2}$) in 2. $2x - 1 < 0$ (ekv.: $x < \frac{1}{2}$). Tretja možnost, ko bi bilo $2x - 1 = 0$ ne pride v poštev, ker je že v neenačbi $2x - 1$ v imenovalcu in torej ne more biti enako 0.

- Kateri $x > \frac{1}{2}$ rešijo neenačbo $\frac{x+1}{2x-1} \geq 1$? Sedaj je $2x - 1 > 0$ in lahko neenačbo pomnožimo z $2x - 1$ in pridemo do linearne neenačbe
$$\begin{aligned} x + 1 &\geq 2x - 1 \\ -x &\geq -2 / (-1) \\ x &\leq 2. \end{aligned}$$
Ne pozabimo upoštevati še pogoja $x > \frac{1}{2}$; tako je delna rešitev
$$R_1 = \left\{x \in \mathbb{R};\ \frac{1}{2} < x \leq 2\right\}.$$

- Sedaj vzemimo, da je $x < \frac{1}{2}$ in spet pomnožimo neenačbo z $2x-1 < 0$; neenačaj se pri tem obrne!
$$x + 1 \geq 2x - 1$$
S podobnim postopkom kot prej dobimo $x \geq 2$. V tem primeru ne dobimo nobene rešitve, saj je presek množic $\left\{x \in \mathbb{R};\ x < \frac{1}{2}\right\}$ in $\{x \in \mathbb{R};\ x \geq 2\}$ prazna množica; druga delna rešitev $R_2 = \emptyset$.

- Na koncu je skupna rešitev unija delnih rešitev, v našem primeru je $R = R_1 \cup R_2 = R_1$.

Drugi način v tem primeru pa je, da neenačbo pomnožimo z $(2x-1)^2$, ki ima, če $x \neq \frac{1}{2}$, zagotovo pozitivno vrednost neodvisno od vrednosti x. Neenačbo s tem prevedemo na kvadratno neenačbo

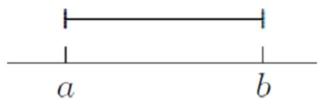
$$\begin{aligned} (x+1)(2x-1) &\geq (2x-1)^2 \\ 2x^2+x-1 &\geq 4x^2-2x+1 \\ -2x^2+3x-2 &\geq 0, \end{aligned}$$

ki jo rešimo kot bo opisano v nadaljevanju.

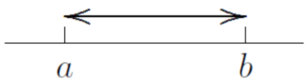
Rešitve neenačb so pogosto **intervali**, ki so lahko:

- **končni ali omejeni intervali**

  $[a,b] = \{x;\ a \leq x \leq b\}$ **zaprti interval**

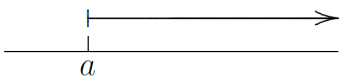


  $(a,b) = \{x;\ a < x < b\}$ **odprti interval**

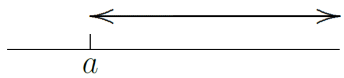


- **neskončni ali neomejeni intervali**

  $[a,\infty) = \{x;\ a \leq x\}$



  $(a,\infty) = \{x;\ a < x\}$



  $(-\infty,b] = \{x;\ x \leq b\}$
  $(-\infty,b) = \{x;\ x < b\}$
  $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$
  $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)\,,\quad \mathbb{R}_0^+ = [0,\infty)\,,\quad \mathbb{R}^- = (-\infty,0)\,,\quad \mathbb{R}_0^- = (-\infty,0]\,.$

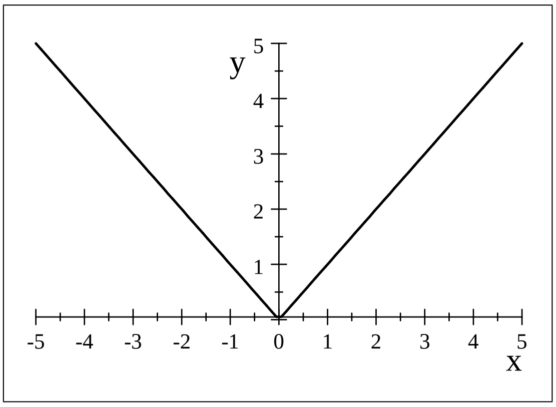
1.4.2 Absolutna vrednost

Absolutna vrednost predstavlja oddaljenost točke na številski premici od izhodišča. Oddaljenost je vedno nenegativna, npr. števili 5 in -5 sta obe oddaljeni za 5 enot od točke 0, zato bi lahko rekli tudi takole: če je realno število negativno, mu absolutna vrednost odreže negativni predznak, sicer ne naredi ničesar. Formalna definicija absolutne vrednosti je

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Npr.: $|-5| = 5, \quad |10| = 10.$

Absolutna vrednost je realna funkcija z vrednostmi v množici nenegativnih realnih števil. Njen graf izgleda takole:



Slika 1.2: $f(x) = |x|$

Lastnosti absolutne vrednosti:
Za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja:

1. $|x| \geq 0$ in $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|xy| = |x|\,|y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ **trikotniška neenakost**
4. $|x - y| \geq ||x| - |y||$
5. $|-x| = |x|$
6. $|x|^{2n} = x^{2n}$
7. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0.$

Absolutna vrednost kot **razdalja**: $|x - y|$ predstavlja razdaljo med točkama, ki ustrezata realnima številoma x in y. Tako je $|x - 1|$ razdalja med točkama (številoma) x in 1. Množica $|x - 1| \leq 2$ je torej množica vseh točk, ki so od 1 oddaljene kvečjemu dve enoti. To pa je interval $[-1, 3]$.

1.4.3 Kvadratna neenačba

Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{R}$ in $a \neq 0$.

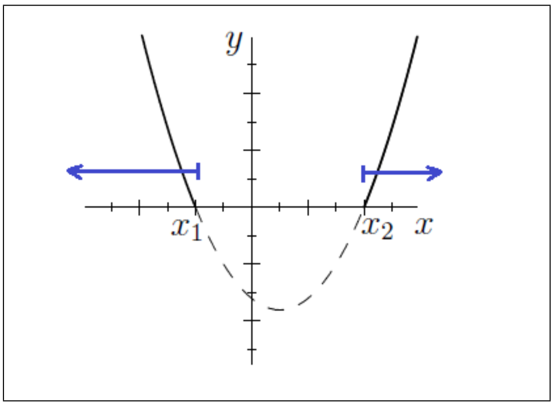
Poiščimo množico tistih realnih števil x, za katere je

$$ax^2 + bx + c \geq 0.$$

Npr.:

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

Prva rešitev: Narišimo graf kvadratne funkcije $y = x^2 - x - 2$. Z razcepom $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ dobimo, da sta ničli $x_1 = -1$ in $x_2 = 2$.



Slika 1.3: Rešitve kvadratne neenačbe

Pri katerih x-ih imajo točke (x, y) na grafu dane kvadratne funkcije y nenegativen? Tisti del grafa je na sliki narisan s polno črto.

Rešitev dane neenačbe so vsi x, za katere velja: $x \leq x_1 = -1$ ali $x \geq x_2 = 2$; Lahko tudi rečemo, da je rešitev dane neenačbe unija intervalov: $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$.

Druga rešitev:

Izraz $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ bo nenegativen, če bosta oba faktorja istega predznaka. Bodisi bo $x + 1 \geq 0$ in $x - 2 \geq 0$, ali pa $x + 1 \leq 0$ in $x - 2 \leq 0$. Torej mora biti

$$x \geq -1 \text{ in } x \geq 2 \quad \text{ali} \quad x \leq -1 \text{ in } x \leq 2,$$

od koder sledi

$$x \leq -1 \ \text{ ali } \ x \geq 2.$$

Tretja rešitev:

Kvadratno funkcijo $f(x) = x^2 - 4x + 3$ preoblikujemo v temensko obliko $f(x) = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$ in rešimo neenačbo $(x-2)^2 - 1 \geq 0$ oziroma $(x-2)^2 \geq 1$. Korenimo in pri tem upoštevajmo, da je $\sqrt{a^2} = |a|$. Dobimo, da je $|x-2| \geq \sqrt{1} = 1$; torej so rešitev vsa realna števila, ki se od 2 razlikujejo za več (ali enako) od 1; torej $x \leq 1$ ali $x \geq 3$.

Ponovimo še definicijo in lastnosti potenc in korenov.

1.4.4 Potence in koreni

Dani naj bosta števili $n \in \mathbb{N}$, in $a \in \mathbb{R}$. Potenca a^n je

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots a}_{n \text{ faktorjev}}$$

Število a imenujemo **osnova,** n pa **eksponent.**

Potenco lahko razširimo na cel oziroma racionalen eksponent:

$$\begin{aligned} a^0 &:= 1, \\ a^{-1} &= \frac{1}{a}, \quad \text{če } a \neq 0, \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a}, \quad (a \geq 0, \text{ če je } n \text{ sodo število}). \end{aligned}$$

Nadalje je še:

$$\begin{aligned} a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m \end{aligned}$$

Pravila:

1. $a^n a^m = a^{n+m}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $(ab)^n = a^n b^n$

Korene z lihim eksponentom lahko računamo tudi iz negativnih števil, npr.: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Za korene iz pozitivnih realnih števil pa zmeraj vzamemo pozitivno vrednost:

n-ti **aritmetični koren** iz števila $a > 0$, je tako **pozitivno** število b, za katerega velja $b^n = a$.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \quad a, b > 0.$$

Torej $\sqrt{9} = 3$ in ne -3, čeprav je $(-3)^2 = 9$.

Iz pravil za računanje s potencami lahko dobimo tudi pravila za računanje s koreni:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \\ \sqrt[1]{a} &= a \\ \sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[nr]{a^{mr}} \quad \text{(širjenje oz. krajšanje korenov)} \end{aligned}$$

Potenco s poljubnim realnim (torej ne nujno racionalnim) eksponentom vpeljemo s pomočjo limite, o kateri bomo govorili kasneje.

1.4.5 Logaritmi

Bodi $a > 0$, $a \neq 1$. Logaritem števila $x \in \mathbb{R}$ z osnovo a je tak eksponent p, da je $a^p = x$. Če torej logaritmiramo potenco (potenčna in logaritemska osnova enaki), nam logaritem vrne eksponent ($\log_a a^p = p$).

$$\log_a x = p \Leftrightarrow a^p = x$$

Lastnosti:

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^r = r \log_a x$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$

Najbolj pogosti logaritmi so logaritmi z osnovo $a > 1$, med njimi:
$a = 10$ **desetiški logaritem**
$a = e = 2.71828....$ **naravni logaritem,** $\ln x$
$a = 2$ **dvojiški logaritem**

1.5 Matematična indukcija (popolna indukcija)

je **metoda za dokazovanje** nekaterih izjav, ki govorijo o naravnih številih. Pogosto za majhna naravna števila ugotovimo kako zakonitost, za katero domnevamo, da velja za vsa naravna števila.

Zgled. Za $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ izračunajmo vrednosti

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-1)$$

n	s_n
1	1
2	$1+3=4$
3	$1+3+5=9$
4	$1+3+5+7=16$

Opazimo vzorec, iz katerega domnevamo, da je $s_n = n^2$. Vendar iz nekaj poskusov, v našem primeru le štirih, ne moremo sklepati, da velja pravilo kar za vse. Tudi, če bi naredili milijon poskusov, ne bi samo na podlagi teh poskusov sledilo, da velja lastnost za milijon prvega. Matematična indukcija pa je metoda, s katero hipotetično lastnost, če je seveda resnična in primerna za tako metodo, dokažemo za vsa naravna števila.

Princip matematične indukcije
Denimo, da želimo dokazati, da izjava $A(n)$ velja za vsa naravna števila $n \in \mathbb{N}$. Izvesti je potrebno dva koraka:

1. Preveriti, da velja izjava $A(n)$ ob izbiri $n = 1$.
2. Ob (trenutni) predpostavki, da že velja $A(n)$, pokazati, da velja tudi $A(n+1)$.

Princip matematične indukcije nato zagotavlja, da velja izjava $A(n)$ za vsa naravna števila n.

Zakaj metoda deluje? Ko namreč preverimo, da velja $A(1)$, uporabimo drugi korak in sklepamo, da velja tudi za naslednika, to je 2; še enkrat uporabimo 2. korak in zvemo, da izjava velja za $n = 3$. Tako nadaljujemo v nedogled.

Variacija metode. Lahko dokazujemo tudi $A(n)$, $n \geq n_0$, kjer je n_0 neko celo število. V tem primeru na prvem koraku dokažemo $A(n_0)$, drugi korak pa ostane enak.

Zgled. Dokažimo, da velja

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. korak. Izjava $A(1)$ pravi: $1^2 = \frac{1}{6}(1 \times 2 \times 3)$ in ta je očitno pravilna.
2. korak. Denimo, da enakost zgoraj že velja pri nekem n. Kaj je vsebina izjave $A(n+1)$?

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

Označimo $s_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Potem je

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n + (n+1)^2 \\ &= s_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \end{aligned}$$

in to je želeni rezultat.

Zgled. Ali lahko dokažemo, da je za vsako naravno število n, število $2n-1$ sodo?

To je seveda očitno napačna trditev, vendar se da videti, da iz $A(n)$ sledi $A(n+1)$.

Denimo, da je za nek n število $2n-1=2k$; potem je število $2(n+1)-1=(2n-1)+2=2k+2=2(k+1)$ tudi sodo.

Defekt našega sklepa je v tem, da nismo preverili ali izjava velja za $n=1$ ali pa vsaj za nek začetni n_0. Torej, *samo* z drugim korakom (ki slučajno lahko celo deluje) nismo ničesar dokazali.

Zgled. Dokaži, da je vsota kubov treh zaporednih naravnih števil deljiva s 3.

Dano izjavo lahko formalno zapišemo na več načinov:

1. $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ je deljivo s 3, za $n=1,2,\dots$
2. $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3$ je deljivo s 3, za $n=2,3,\dots$ V tej obliki jo tudi z indukcijo dokažimo.

1. Začetni $n_0=2$. $A(2): 1^3+2^3+3^3=36$ je deljivo s 3.
2. Denimo, da $A(n)$ že velja, torej lahko zapišemo, da je $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3k$. Ali lahko podobno dosežemo, če n nadomestimo z $n+1$? Iz računa

$$\begin{aligned}((n+1)-1)^3+(n+1)^3+((n+1)+1)^3 &= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3\\ &= \left(3k-(n-1)^3\right)+(n+2)^3\\ &= 3k+9n^2+9n+9\\ &= 3\left(k+3n^2+3n+3\right),\end{aligned}$$

sledi, da je tudi število $((n+1)-1)^3+(n+1)^3+((n+1)+1)^3$ deljivo s 3, kar je vsebina izjave $A(n+1)$.

1.6 Naloge

1. Dokaži, da je $\sqrt{3}$ iracionalno število.
2. Število $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ je algebrsko. Dokaži!
3. Dokaži: kvadrat vsakega lihega števila lahko zapišemo v obliki $8p+1$, kjer je $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.
4. Določi parameter α tako, da bo $x^2-2(4\alpha-1)x+15\alpha^2-2\alpha-7>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$. Navodilo: Diskriminanta kvadratne neenačbe mora biti negativna. R: $2<\alpha<4$.
5. Obravnavaj kvadratno neenačbo v odvisnosti od parametra α: $\alpha x^2+(2\alpha+1)x+\alpha+2>0$.

   R: $x_{1,2}=\frac{\left(-2\alpha-1\pm\sqrt{-4\alpha+1}\right)}{2\alpha}$, če $\alpha\neq 0$; vzemimo, da je $x_1<x_2$.

– $\alpha = 0 \Rightarrow x > -2$
– $0 < \alpha < \frac{1}{4} \Rightarrow D > 0 \Rightarrow \; x < x_1$ ali $x > x_2$
– $\alpha \geq \frac{1}{4} \Rightarrow D < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.

6. Reši neenačbo: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > \sqrt{3}$
   R: $\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

7. Reši enačbe/neenačbe z absolutnimi vrednostmi:
   (a) $|x+3| = |x|$, R: $x = -\frac{3}{2}$.
   (b) $|x-1| - |x+2| = 1$, R: $x = -1$.
   (c) $|x^2 - 2x| = 1$, R: $x_1 = \sqrt{2}+1$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$, $x_3 = 1$.
   (d) $|x+2| - |x^2-4| < 2$, R: $x < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$ ali $x > \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17}$.
   (e) $|1 - |x-1|| < 1$, R: $-1 < x < 1$ ali $1 < x < 3$.

8. Razstavi
   (a) $27a^4 + ab^3$, R: $a\left(3a+b\right)\left(-3ab + 9a^2 + b^2\right)$.
   (b) $a^3 + 3a^2 + 5a + 15$, R: $(a+3)\left(a^2+5\right)$.
   (c) $a^4 - \left(b^2 + 2ab\right)^2$, R: $\left(a^2 - b^2 - 2ab\right)(a+b)^2$.

9. Poenostavi
   (a) $\left(-a^2 b\right)\left(-3a^2 b^3\right)^3 : \left(a^2 b\right)^2$, R: $a^4 b^2$.
   (b) $-\left(y^{-4}\right)^{-3} - \left(\left(-y\right)^{-3}\right)^{-4} - \left(-\left(-y\right)^4\right)^3$, R: $-y^{12}$.
   (c) $\frac{x^4+3x^3+3x^2+x}{x^2-x^4}$, R: $-\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$.
   (d) $\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}+3x^n+x^{n-1}}{x^n-x^{n+2}}$, R: $-\frac{(x+1)^2}{x(x-1)}$.
   (e) $\frac{\sqrt{3ab^2\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt{6b\sqrt{a}}}$, R: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt[12]{a^3 b^{10}}$.

10. Reši neenačbi
    (a) $\left(\frac{1}{7}\right)^x - \sqrt[3]{7} > 0$, R: $x < -\frac{1}{3}$.
    (b) $3^{2x} + 4^{2x} \geq 4^{2x+1} - 3^{2x+1}$, R: $x \leq \frac{1}{2}$.

11. Reši enačbe
    (a) $\ln\left(\log\left(\log_2 x\right)\right) = 0$, R: $x = 2^e$.
    (b) $\log(x-5) + \log(x-10) - \log(x-7) = \log(x-9)$, R: $x = 13$.
    (c) $\log_3(x-7) + \log_3(x+1) = 2$, R: $x = 8$.

12. Dokaži s pomočjo matematične indukcije:

    (a) $\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

    (b) $\sum\limits_{k=1}^{n}k2^k = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot 2^n = 2\left((n-1)\cdot 2^n + 1\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

    (c) $\frac{5^n+2^{n+1}}{3} \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

    (d) $64 \mid 3^{2n+2} - 8n - 9, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

    (e) $54 \mid 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

    (f) $2^n > n^2, \quad n \geq 5,, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

2 Kompleksna števila

Enačba $x^2 + 1 = 0$ v množici realnih števil nima nobene rešitve, saj je $x^2 \geq 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$ in tako ne more biti enak -1.

Uvedemo novo množico števil: kompleksna števila $\mathbb{C}$

$$i := \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1.$$

imaginarna enota

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

kompleksno število

Množica kompleksih števil je $\mathbb{C} = \{a + ib;\ a,\ b \in \mathbb{R}\}$. Opazimo, da je $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, saj je $a = a + i0 \quad$ za vsak $a \in \mathbb{R}$. Pri danem kompleksnem številu $z = a + ib$ rečemo številu a **realni del** in številu b **imaginarni del** in zapišemo:

$$a = \operatorname{Re} z$$

in

$$b = \operatorname{Im} z.$$

Oba, realni in imaginarni del (rečemo tudi komponenti), sta **realni** števili.

2.1 Osnovne računske operacije

Na naraven način vpeljemo **seštevanje**

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$$

in **množenje**

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)\,,$$

nova operacija pa je **konjugiranje:** za kompleksno število $z = a + ib$, je

$$\overline{z} = a - ib$$

konjugirana vrednost.

Preberemo: "z prečna".

Izračunajmo potence števila i :

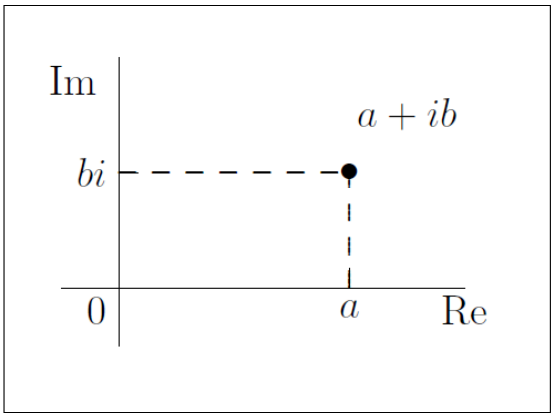
$$\begin{aligned} i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^k &= i^m, \quad \text{kjer je } m \text{ ostanek pri deljenju } k \text{ s } 4. \end{aligned}$$

Opazimo, da se ciklično ponavljajo. Npr.:

$$i^{50} = i^{48+2} = i^{48} i^2 = \left(i^4\right)^{12} i^2 = i^2 = -1.$$

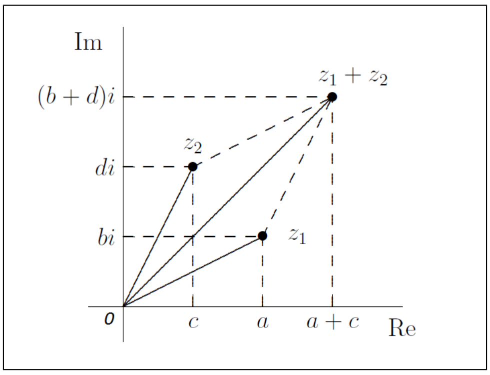
2.1.1 Predstavitev kompleksnih števil v Gaussovi ravnini.

Kompleksno število $z = a + ib$ vrišemo v Kartezijev koordinatni sistem kot točko $T(a,b)$.

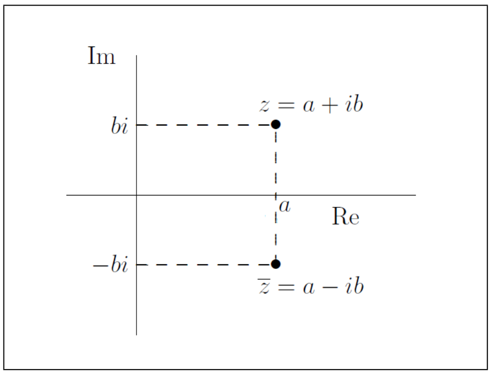


Slika 2.4: Kompleksno število v Gaussovi ravnini

Na slikah 2.5 in 2.6 je seštevanje in konjugiranje kompleksnih števil grafično prikazano.



Slika 2.5: Seštevanje



Slika 2.6: Konjugiranje

Lastnosti konjugiranja

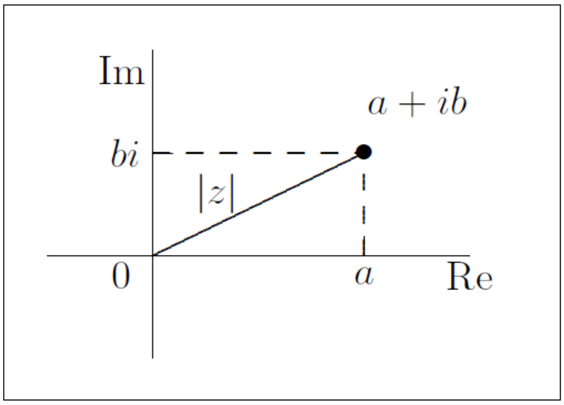
1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}\left(z + \overline{z}\right), \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}\left(z - \overline{z}\right)$
5. $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$

Vpeljimo pojem

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

absolutna vrednost kompleksnega števila.

Geometrijski pomen: $|z|$ predstavlja oddaljenost točke $z = a+ib$ od koordinatnega izhodišča.



Slika 2.7: Absolutna vrednost kompleksnega števila

Sedaj pa lahko definiramo tudi deljenje kompleksnih števil.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

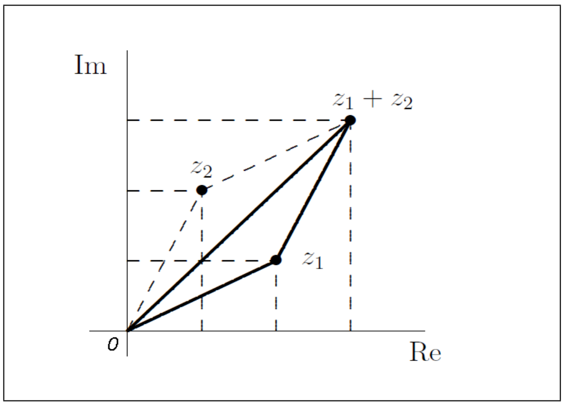
Ulomek $\frac{z_1}{z_2}$ razširimo s konjugirano vrednostjo imenovalca.

Zgled. $\frac{2+i}{3-2i} = \frac{(2+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{4+7i}{|3-2i|^2} = \frac{4+7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$

Kompleksna števila so za operaciji seštevanja in množenja komutativen obseg ali polje; za ti dve operaciji veljajo namreč ista računska pravila kot za realna števila.

Lastnosti absolutne vrednosti:

1. $|\overline{z}| = |z|$
2. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
3. $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ **trikotniška neenakost**



Slika 2.8: Trikotniška neenakost

Absolutna vrednost razlike kot razdalja

Za dani kompleksni števili $z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2$, je

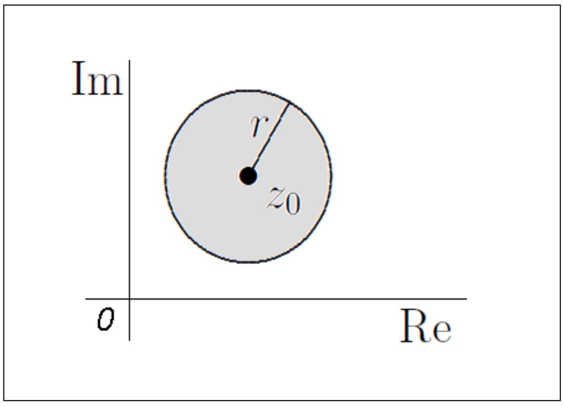
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d\,(z_1, z_2)$$

kjer je $d\,(z_1, z_2)$ razdalja med točkama v Gaussovi ravnini, ki ustrezata kompleksnima številoma z_1 in z_2.

Uporabimo to dejstvo za predstavitev kroga: za dan $z_0 \in \mathbb{C}$ in $r > 0$, je množica

$$\{z;\ |z - z_0| \leq r\} = \{z;\ d\,(z, z_0) \leq r\}$$

krog s središčem v z_0 in polmerom r,



Slika 2.9: Krog $\{z;\ |z - z_0| \leq r\}$

medtem ko je za dani kompleksni števili z_1, z_2

$$\{z;\ |z - z_1| = |z - z_2|\} = \{z;\ d\,(z, z_1) = d\,(z, z_2)\}$$

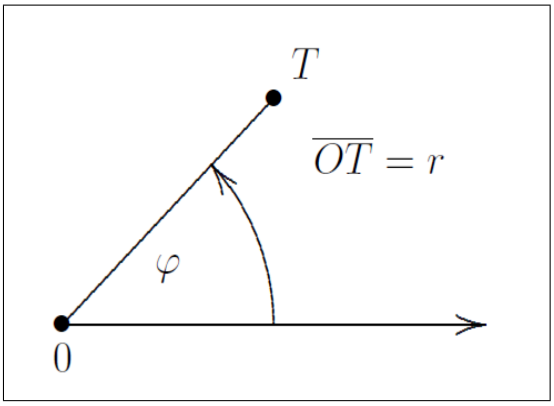
simetrala daljice med točkama z_1 in z_2.

2.2 Polarni zapis kompleksnih števil

V ravnini izberemo točko 0 (**koordinatno izhodišče**) in poltrak (**polarna os).** Tako smo dobili **polarni koordinatni sistem**, v katerem predstavimo točko T s parametroma:

- r....oddaljenost točke T od izhodišča 0
- φ....kot med polarno osjo in daljico $0T$, merjen v nasprotni smeri urinega kazalca.

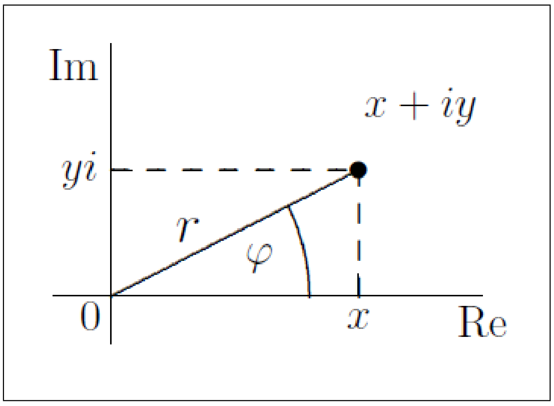
Če je $r = 0$, φ ni definiran.



Slika 2.10: Polarni koordinatni sistem

2.2.1 Zveza med kartezičnimi in polarnimi koordinatami

Polarni in kartezični koordinatni sistem združimo tako, da se polarna os ujema s pozitivnim poltrakom realne osi Gaussove ravnine.



Slika 2.11: Polarni koordinatni sistem v Gaussovi ravnini

$$\cos\varphi = \tfrac{x}{r}$$
$$\sin\varphi = \tfrac{y}{r}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Iz teh zvez dobimo obrazca za izračun kartezičnih koordinat iz polarnih:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$

Kompleksno število $z = x + iy$ lahko nato zapišemo v obliki

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

čemur pravimo **polarni zapis kompleksnega števila**. Polarne koordinate iz kartezičnih izračunamo takole:

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Absolutno vrednost r imenujemo tudi **modul**, polarni kot φ pa **argument** kompleksnega števila. V uporabi je tudi zapis $\varphi = \arg z$.

Zgleda:

- Zapišimo $z = 1 + i$ v polarni obliki. Izračunati je treba modul r in argument φ. Iz
$$r^2 = x^2 + y^2 = 1 + 1 = 2$$
sledi, da je $r = \sqrt{2}$. Nadalje je
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1,$$

torej ima φ vrednost bodisi $\frac{\pi}{4}$ bodisi $\pi+\frac{\pi}{4}$. Ker leži kompleksno število $z=1+i$ v 1. kvadrantu, izberemo $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Sledi

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

- Če pa je $w=-1-i$, je $r=\sqrt{2}$, prav tako je $\tan\varphi=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-1}=1$. Vendar je sedaj z v 3. kvadrantu, zato je $\varphi=\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$ in

$$w=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

V obeh primerih smo za kot φ izbrali vrednost iz intervala $[0,2\pi)$.

Zapis kompleksnega števila v polarni obliki, če privzamemo, da je lahko kot $\varphi\in\mathbb{R}$, pa ni enoličen.

Definicija 2.2.1 *Kompleksni števili*

$$z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$$

in

$$z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$$

sta ***enaki*** *natanko takrat ko velja*

$$\begin{aligned} r_1&=r_2\\ \varphi_2-\varphi_1&=2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z},\ \ r\neq 0.\end{aligned}$$

Velja npr.:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right),$$

saj se polarna kota obeh števil razlikujeta za 2π, absolutni vrednosti pa sta enaki.

Računanje s kompleksnimi števili v polarni obliki:

Spoznali bomo, da je s kompleksnimi števili v polarni obliki enostavno množiti, deliti, predvsem pa potencirati kompleksna števila. Bodita

$$\begin{aligned} z_1&=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\\ z_2&=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right).\end{aligned}$$

Izračunajmo produkt z_1 in z_2 :

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1r_2\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)\\ &=r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right)\\ &=r_1r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right).\end{aligned}$$

Zapis v zadnji vrstici računa je prav polarni zapis produkta $z_1 z_2$, od koder sledi

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= r_1 r_2, \\ \arg(z_1 z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kompleksni števili v polarni obliki torej zmnožimo tako, da zmnožimo absolutni vrednosti (modula), kota (argumenta) pa seštejemo.

Zgled. Naj bo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ poljubno kompleksno število, $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$ pa neko število z enotske krožnice ($|w| = 1$). Kaj geometrijsko predstavlja preslikava

$$z \mapsto zw$$

oziroma množenje s številom iz enotske krožnice?

Pa poglejmo:

$$zw = r(\cos(\varphi + \alpha) + i\sin(\varphi + \alpha)).$$

Opazimo, da se je modul (absolutna vrednost) ohranil, kot pa se je povečal za α. Torej gre za vrtenje za kot $\alpha = \arg w$ okrog izhodišča.

Potenciranje v polarni obliki

Naj bo

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Izračunajmo

$$\begin{aligned} z^2 &= r^2(\cos(\varphi + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi)) \\ &= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi). \end{aligned}$$

Če bi nadaljevali in izračunali še z^3, z^4, bi hitro lahko postavili domnevo

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

de Moivre-ov obrazec

Obrazec dokažemo z matematično indukcijo.

1. Za $n = 1$ očitno velja.

2. Denimo, da obrazec (2) velja za nek poljuben n in izračunajmo z^{n+1} :

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z \\ &= r^{n+1}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= r^{n+1}(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi). \end{aligned}$$

Zgled. Izračunajmo $(1+i)^9$.

$$\begin{aligned}
(1+i)^9 &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^9 \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^9\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right) \\
&= 2^4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 16\,(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Potenco smo izračunali tako, da smo najprej število $1+i$ pretvorili v polarno obliko, nato ga ni bilo težko potencirati; dobljen rezultat smo na koncu spet zapisali v kartezični obliki.

Nadalje pokažimo, da de Moivre-ov obrazec velja tudi za negativne cele eksponente in 0. Najprej vzemimo $n = -1$ in $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,,\ r \neq 0$. Izračunajmo po pravilu za deljenje kompleksnih števil

$$\begin{aligned}
z^{-1} = \frac{1}{z} &= \frac{1}{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \\
&= r^{-1}\frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \\
&= r^{-1}\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))
\end{aligned}$$

V zgornjem računu smo upoštevali, da je $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ in $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$. V kombinaciji z de Moivre-ov obrazcem za $n \in \mathbb{N}$, sedaj ta velja za vsa neničelna cela števila. Nazadnje ni težko videti, da je $n = 0$ velja $r^0\,(\cos(0\varphi) + i\sin(0\varphi)) = 1$.

2.3 Eksponentni zapis kompleksnega števila

je različica zapisa kompleksnega števila v polarni obliki. Motivacija za ta zapis je, da se v polarni obliki množenje kompleksnih števil z modulom 1 prevede na seštevanje argumentov (kotov). Nekaj podobnega pa velja tudi za potence: potence množimo tako, da eksponenta seštejemo. Vpeljemo nov **eksponentni** zapis

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

kjer v tem trenutku še niti ni pomembno, kakšno vlogo ima število e. Zaenkrat ga lahko vzamemo kar kot nek simbol. Nato lahko vsako kompleksno število zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
z &= r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\
&= re^{i\varphi}.
\end{aligned}$$

Lastnosti eksponentnega zapisa

1. $|e^{i\varphi}| = 1$,
2. $e^{i\varphi_1} = e^{i\varphi_2} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$,
3. $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$,
4. $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}$,
5. $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Enačba $z^n = a$

Dani naj bosta števili $a \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}$. Iščemo vsa tista kompleksna števila, da bo $z^n = a$. Vse rešitve, ki jih bomo tako dobili, bodo vrednosti n-tega korena iz števila a.

Rešitev poiščemo v obliki $z = re^{i\varphi}$. Tudi dano število a zapišemo v eksponentnem zapisu: $a = |a|\, e^{i\alpha}$. Sedaj se enačba $z^n = a$ glasi:

$$\begin{aligned} \left(re^{i\varphi}\right)^n &= |a|\, e^{i\alpha} \\ r^n e^{in\varphi} &= |a|\, e^{i\alpha} \\ r^n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right) &= |a| \left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \end{aligned}$$

V zadnji vrstici imamo enakost dveh kompleksnih števil v polarni obliki; od tod dobimo

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[n]{|a|} \\ n\varphi &= \alpha + 2k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Pri $k = n$ bi dobili isto rešitev kot pri $k = 0$, pri $k = n+1$ isto kot pri $k = 1$ in tako naprej.

2.4 Naloge

1. Izračunaj vrednost izraza: $\frac{a-ib}{b+ia} + \frac{a+ib}{b-ia}$;, $a,\ b \in \mathbb{R}$, R: 0.
2. Določi $\mathrm{Re}\,(z)$, $\mathrm{Im}\,(z)$, $\overline{z}$, $|z|$ za kompleksno število: $z = \frac{a+i}{a-i}$, kjer je $a \in \mathbb{R}$.

   R: $\mathrm{Re}\,(z) = \frac{a^2-1}{a^2+1}$, $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{2a}{a^2+1}$, $\overline{z} = \frac{a-i}{a+i} = \frac{a^2-1-2ai}{a^2+1}$, $|z| = 1$.
3. Določi realna x in y, ki zadoščata enačbi:

   (a) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$, R: $x = \frac{20}{17}$, $y = -\frac{36}{17}$.

   (b) $\cos x + i\sin x = \sin x + i\cos x$, R: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Reši enačbe:

(a) $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10i$, R: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$.
(b) $(2z + 3\overline{z})(2\overline{z} + 3z) = -1$, R: $\emptyset$.
(c) $z^2 = \frac{1}{\overline{z}}$, R: $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2}i\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

5. Nariši podmnožice kompleksne ravnine:

(a) $\{z;\ \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = 1\}$
(b) $\left\{z;\ \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}\right\}$
(c) $\{z;\ z^2 - \overline{z}^2 = 0\}$
(d) $\{z;\ z^2 - \overline{z}^2 = 1\}$
(e) $\{z;\ \operatorname{Re}(z^2 + \overline{z}) = 0\}$
(f) $\left\{z;\ \frac{1}{4} \leq \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) + \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \leq \frac{1}{2}\right\}$

6. $z_1 = 1 + 2ai$, $z_2 = 3a - 4i$; Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = 0$. R.: $a = 2$.

7. Zapiši dano kompleksno število v polarni obliki in eksponentni obliki:

(a) $z = 2 - 2i$,
R: $z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.
(b) $z = -1 + i\sqrt{3}$, R: $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
(c) $z = \frac{1-i}{1+i}$, R: $z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
(d) $z = \sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)$,
R: $z = 2\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right|\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2} + k\pi\right)\right)$
$= 2\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}\right| e^{i\left(\frac{\alpha}{2} + k\pi\right)}$.

8. Nariši podmnožice kompleksne ravnine z upoštevanjem geometrijskega pomena absolutne vrednosti razlike dveh kompleksnih števil:

(a) $\{z;\ |z - i| < 3\}$.
(b) $\left\{z;\ 0 \leq \arg\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{\pi}{2} \text{ in } |z + i| \leq 1\right\}$.
(c) $\{z;\ |z - i| + |z + i| = 4\} \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$; $e^2 = b^2 - a^2$.

9. Izračunaj $\left(\frac{4}{-1+i\sqrt{3}}\right)^6$ z uporabo de Moivre-ovega obrazca. R: 2.

10. Reši enačbi:

(a) $z^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$, R: $z_1 = i - \sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{3} - i$.
(b) $(z + 1)^3 = i^3$, R: $z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2}i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 - \frac{1}{2}i$.

11. Poišči vse kompleksne vrednosti $\sqrt[5]{(2 - 2i)^4}$!
R: $z_k = \sqrt[5]{64}e^{\frac{i(2k-1)\pi}{5}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

3 Funkcije

3.1 O preslikavah na splošno

Naj bosta A in B dani množici.

Definicija 3.1.1 ***Funkcija*** *(ali* ***preslikava****) je predpis, ki* <u>*vsakemu*</u> *elementu x množice A priredi natanko* <u>*določeni*</u> *element $y \in B$.*

Zapišemo:

$$\begin{array}{lll} f : A \to B & \text{ali} & f : A \to B \\ x \mapsto y & & y = f(x) \end{array}$$

Elementom $x \in A$ rečemo **originali**, medtem ko so $y \in B$, $y = f(x)$, njihove **slike**. Množico A imenujemo **domena,** množico B pa **kodomena** funkcije f.

Zgled. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$

$$\begin{array}{cc} f : A \to B & g : A \to B \\ 1 \mapsto a & 1 \mapsto a \\ 2 \mapsto b & 2 \mapsto a \\ 3 \mapsto a & 3 \mapsto a \end{array}$$

Naj bo $C \subseteq A$. **Slika** $f(C)$ množice C je množica vseh slik originalov iz množice C. Množico $f(A)$ imenujemo **zaloga vrednosti** funkcije f. Seveda je $f(A) \subseteq B$. Alternativni oznaki za zalogo vrednosti sta še Z_f in R_f. Za funkcijo, katere zaloga vrednosti vsebuje en sam element (npr. funkcija g), rečemo, da je **konstantna**. Pri dani funkciji

$$\begin{array}{c} f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{e, f, g, h\} \\ 1 \mapsto g \\ 2 \mapsto h \\ 3 \mapsto g \\ 4 \mapsto f \end{array}$$

je zaloga vrednosti $Z_f = \{f, g, h\}$ prava podmnožica kodomene $\{e, f, g, h\}$.

Definicija 3.1.2 *Če je $f(A) = B$, rečemo, da je f* ***surjektivna*** *ali* ***surjekcija****. V tem primeru za vsak element $y \in B$ najdemo tak $x \in A$, da je $f(x) = y$.*

Preslikava $f : A \to B$ je ***injektivna*** *ali* ***injekcija****, če se katerakoli različna originala x_1, x_2 preslikata v različni sliki $f(x_1)$, $f(x_2)$.*

Torej: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ekvivalentno: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Preslikava, ki je injektivna in surjektivna, je ***bijektivna*** *ali* ***bijekcija*** *(rečemo tudi* ***povratno enolična****).*

Za vsako bijektivno preslikavo $f : A \to B$ obstaja **inverzna** funkcija $f^{-1} : B \to A$. To je funkcija, ki preslika y v x, če je f preslikala x v y.

$$f : A \to B \qquad f^{-1} : B \to A$$
$$x \mapsto y \qquad\qquad y \mapsto x$$

Premislimo, zakaj potrebujemo bijektivnost za vpeljavo inverzne funkcije.

Surjektivnost potrebujemo zato, da bomo za vsak element množice B vedeli, kam ga z f^{-1} preslikati. Če je f surjektivna, je namreč vsak element množice B slika **vsaj** enega originala x.

Če funkcija ne bi bila injektivna, bi lahko bil kakšen y slika dveh ali več različnih x-ov. Zaradi injektivnosti pa se s funkcijo f v vsak y preslika **natanko en** x.

Definicija 3.1.3 *Množici sta **ekvipolentni** (ali **enako močni**), če med njima obstaja kakšna bijekcija.*

Če sta množici, katerih elemente lahko preštejemo, ekvipolentni, imata enako število elementov.

3.1.1 Komponiranje ali sestavljanje funkcij

Bodita $f : A \to B$ in $g : B \to C$ dani funkciji. Konstruirajmo novo funkcijo $g \circ f : A \to C$, ki bo delovala isto kot f in g druga za drugo. Torej

$$g \circ f : A \to C$$
$$x \overset{f}{\mapsto} y \overset{g}{\mapsto} z$$
$$z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

Nasploh $g \circ f \neq f \circ g$. Na primer, dani naj bosta funkciji

$$f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1.$$

Nato je

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1,$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Označimo z $i_A : A \to A$ preslikavo na poljubni množici A, ki vsak element $x \in A$ preslika **vase.** To preslikavo imenujemo **identična preslikava** ali **identiteta**.

Če je $f : A \to B$ bijekcija, je bijekcija tudi $f^{-1} : B \to A$ in velja:

$$f^{-1} \circ f : A \to A \qquad\qquad f \circ f^{-1} : B \to B$$
$$f^{-1} \circ f = i_A \qquad \text{in} \qquad f \circ f^{-1} = i_B$$
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A \qquad\qquad f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Omenimo še pojem **grafa** funkcije $f : A \to B$. To je množica

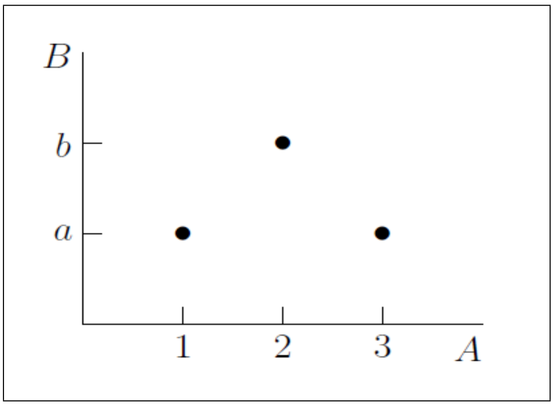
$$G_f = \{(x, y)\,;\ x \in A \text{ in } y = f(x)\}$$

Vidimo, da je $G_f \subseteq A \times B = \{(a, b)\,;\ \ a \in A,\ b \in B\}$.

Zgled. Naj bo $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$ in $f : A \to B$ določena s predpisom:

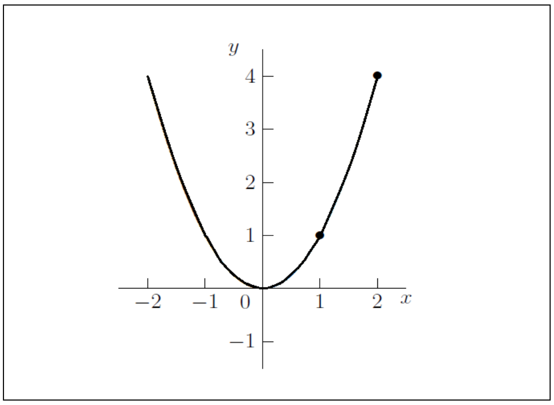
$$\begin{aligned} 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto b \\ 3 &\mapsto a. \end{aligned}$$

Njen graf je $G_f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$.



Slika 3.12: Graf diskretne funkcije

Zgled. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$, pa je $G_f = \{(x, x^2),\ x \in \mathbb{R}\}$.



Slika 3.13: Graf funkcije $f(x) = x^2$

V posebnem, če je $x = 1$ ali $x = 2$, točki $(1, 1)$ in $(2, 4)$ ležita na grafu te funkcije.

3.2 Realne funkcije

Obravnavamo funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, kjer je definicijsko območje D neka podmnožica $\mathbb{R}$. Včasih realno funkcijo podamo samo s predpisom v obliki obrazca. Takrat govorimo o (naravnem) definicijskem območju D_f, ki je (maksimalna) množica vseh tistih realnih števil x, kjer lahko z danim predpisom funkcijsko vrednost smiselno izračunamo.

Graf funkcije f je

$$G_f = \{(x, y)\, ;\ x \in D_f \text{ in } y = f(x)\}\,.$$

3.2.1 Osnovne lastnosti

Pri proučevanju funkcij nas bo zanimalo:
- **definicijsko območje** D_f
- **ničle**: Število $a \in D_f$ je ničla funkcije f, če je $f(a) = 0$. Točka $x = a$ določa presečišče grafa funkcije z osjo x.
- **začetna vrednost** $f(0)$ določa presek z osjo y.
- **parnost:** Naj bo funkcija f definirana na nekem simetričnem definicijskem območju ($x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$).

Funkcija je **liha**, če velja $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in D_f$
Funkcija je **soda,** če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$.
- **monotonost:** Funkcija je na nekem intervalu $I \subseteq D_f$

naraščajoča, če velja: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)\,,\quad \forall a, b \in I,$
padajoča, če velja: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)\quad \forall a, b \in I,$
nepadajoča, če velja: $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)\quad \forall a, b \in I,$
nenaraščajoča,če velja:$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)\quad \forall a, b \in I.$

Interval I, na katerem je funkcija monotona, se imenuje **interval monotonosti.**
- **omejenost:** Funkcija je **navzgor omejena**, če obstaja tako realno število M, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in D_f$; in je **navzdol omejena**, če obstaja tak $m \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \geq m$ za vsak $x \in D_f$. Rečemo, da je funkcija **omejena**, če je navzgor in navzdol omejena. V tem primeru je njena zaloga vrednosti vsebovana v nekem omejenem intervalu.
- **periodičnost:** Funkcija je **periodična,** če obstaja tako število $T > 0$, da je $f(x + T) = f(x)$ za vsak $x \in D_f$. Tudi tukaj mora biti D_f tako, da je $x \in D_f \iff x + T \in D_f$.

3.2.2 Računske operacije s funkcijami

Funkcije lahko seštevamo, odštevamo, množimo, delimo, komponiramo in na ta način dobivamo nove funkcije.

$f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ naj bosta funkciji.

1. **vsota:**

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. **produkt:**
$$(f.g)(x) = f(x)\, g(x)$$

3. **kvocient:**
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}; \quad g(x) \neq 0,$$

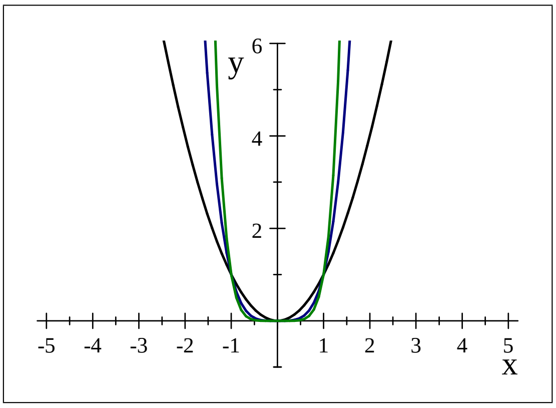
4. **kompozitum:**
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Vsota in produkt sta definirani na $D_1 \cap D_2$, medtem ko je naravno definicijsko območje kvocienta enako $(D_1 \cap D_2) \setminus \{a;\ g(a) = 0\}$. Kompozitum je definiran največ na množici $\{x;\ x \in D_1 \text{ in } f(x) \in D_2\}$.

3.2.3 Pregled elementarnih funkcij

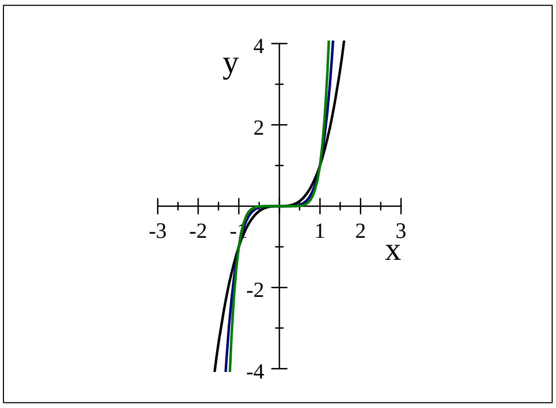
Algebrske funkcije

1. **linearna funkcija** $f(x) = kx + n$
2. **kvadratna funkcija** $f(x) = a(x-p)^2 + q = ax^2 + bx + c$
3. **potenčna funkcija** $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$
   - n sodo število



Slika 3.14: Potenčne funkcije s sodim pozitivnim eksponentom

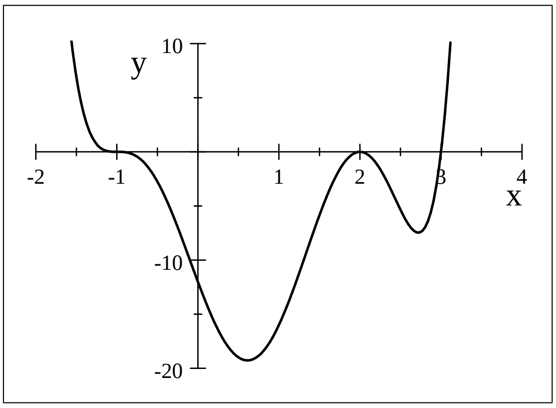
- n liho število



Slika 3.15: Potenčne funkcije z lihim pozitivnim eksponentom

4. **Polinomi:** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, stopnje n

   Na sliki 3.16 je polinom stopnje 6.



Slika 3.16: $p(x) = (x-2)^2 (x+1)^3 (x-3)$

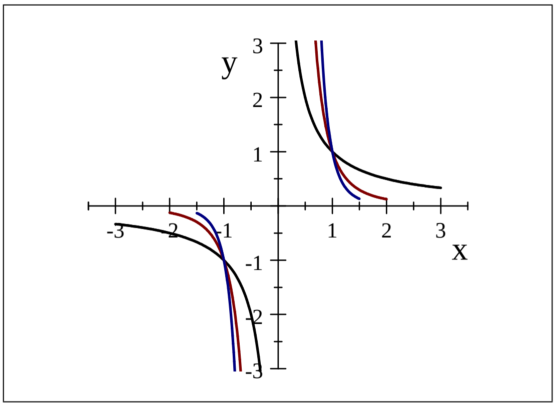
Ničle polinomov.

Osnovni izrek algebre pravi: polinom stopnje $n \geq 1$ s kompleksnimi koeficienti ima natanko n ničel (če jih štejemo z večkratnostjo).
Polinom z realnimi koeficienti je lahko tudi brez realnih ničel: npr.: $p(x) = x^2 + 1$; velja pa, da ima realni polinom **lihe stopnje** vsaj eno realno ničlo, kompleksne pa nastopijo v konjugiranih parih.

Ničle so lahko sode oziroma lihe stopnje, graf se v okolici ničle x_0 obnaša podobno kot $x \mapsto \pm (x - x_0)^{2n}$, ali $x \mapsto \pm (x - x_0)^{2n-1}$, odvisno od stopnje ničle. Od predznaka koeficienta ob členu najvišje stopnje je odvisno, ali za velike x rastejo vrednosti $p(x)$ čez vse meje v pozitivno ali negativno smer. Vsak realen polinom je razcepen na faktorje stopnje največ 2.

5. **Racionalne funkcije** $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$; p in q sta polinoma

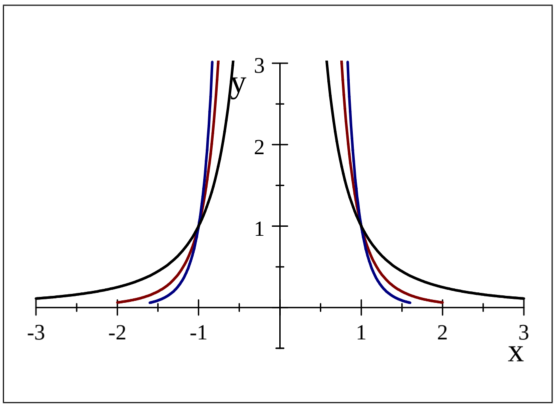
- ni definirana v ničlah imenovalca $q(x)$; če taka ničla ni hkrati ničla števca, rečemo, da ima v tej točki **pol** in na grafu je **navpična asimptota.**
- ničle: so ničle števca, če niso hkrati tudi ničle imenovalca
- potenčna z negativnim eksponentom: $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.
  - n liho število:



Slika 3.17: $x \mapsto \frac{1}{x}\ ,\ \frac{1}{x^3},\ \ \frac{1}{x^5}$

Funkcije so lihe, niso definirane v točki $x = 0$, os y je navpična asimptota, os x pa vodoravna asimptota. So neomejene.

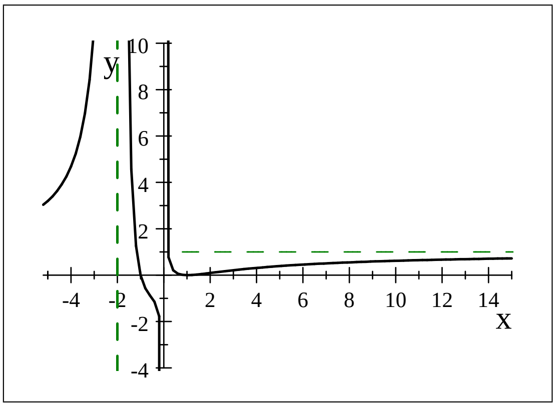
  - n sodo število:



Slika 3.18: $x \mapsto \frac{1}{x^2}\ \frac{1}{x^4}\ \frac{1}{x^6}$

Te funkcije so sode, niso definirane v točki $x = 0$, os y je navpična asimptota, os x pa vodoravna asimptota. Vse so navzdol omejene z 0.

Zgled. Analizirajmo racionalno funkcijo $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x+2)^2}$.



Slika 3.19: $f(x) = \frac{(x-1)^2(x+1)}{x(x+2)^2}$

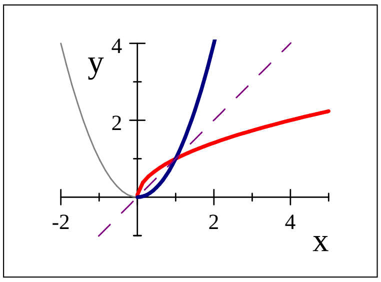
Ima ničli pri $x = 1$ (dvojna, sode stopnje) in $x = -1$ (stopnje 1), pola pri $x = 0$ in $x = -2$ in vodoravno asimptoto pri $y = 1$.

6. **Korenske funkcije**

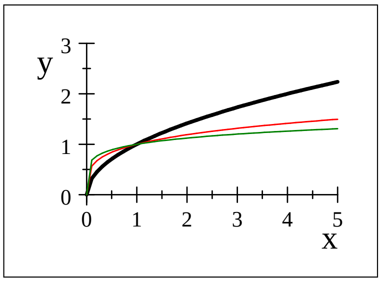
$f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$; inverzna funkcija k $f(x) = x^2$

- s sodim korenskim eksponentom



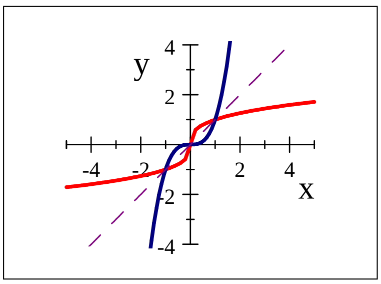
Slika 3.20: $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$



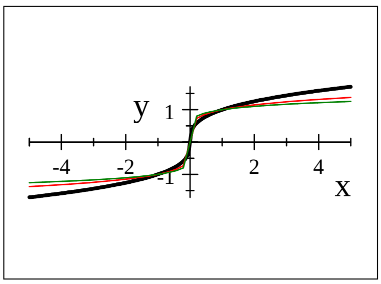
Slika 3.21: $x \mapsto \sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[6]{x}$

- z lihim korenskim eksponentom, definirane na vsej realni osi

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$



Slika 3.22: $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$



Slika 3.23: $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[7]{x}$

Vse funkcije, omenjene do sedaj, sestavljajo razred **algebrskih** funkcij.

Algebrske funkcije so tiste, ki jih lahko izrazimo kot korene polinomskih enačb s polinomskimi koeficienti $a_0(x), \ldots, a_n(x)$:

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_1(x)\, y + a_0(x) = 0.$$

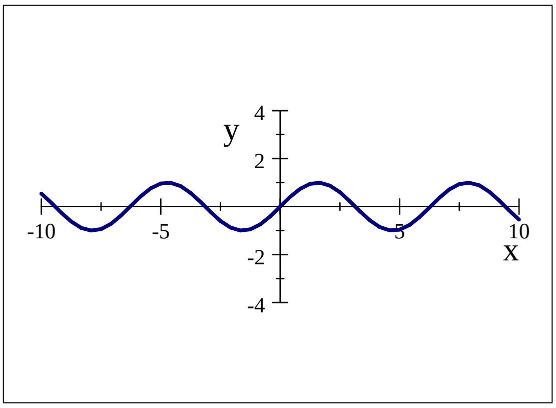
Na primer: enačbo $q(x)\, y - p(x) = 0$ reši racionalna funkcija $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, enačbo $y^n - x = 0$ korenska funkcija $y = \sqrt[n]{x}$.

Funkcije, ki niso algebrske, imenujemo **transcendentne**.

Transcendentne funkcije

1. **Trigonometrične funkcije**

- **sinus**



Slika 3.24: $f(x) = \sin x$, sinusoida

ničle: $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

periodična, osnovna perioda je 2π.

lokalni maksimumi: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

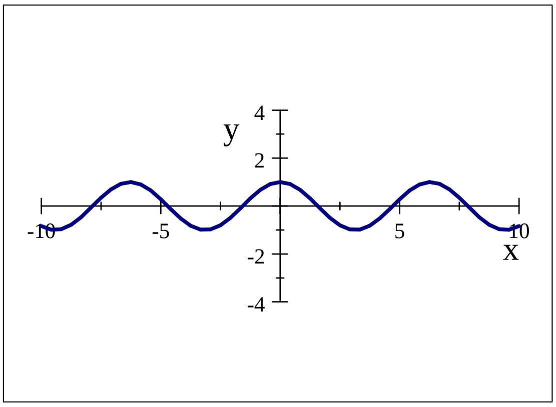
lokalni minimumi: $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

omejena je v obe smeri: $-1 \leq \sin x \leq 1$ oziroma $|\sin x| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

liha funkcija: $\sin(-x) = -\sin x$

- **kosinus**

$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, za $\frac{\pi}{2}$ v levo premaknjen sinus



Slika 3.25: $f(x) = \cos x$

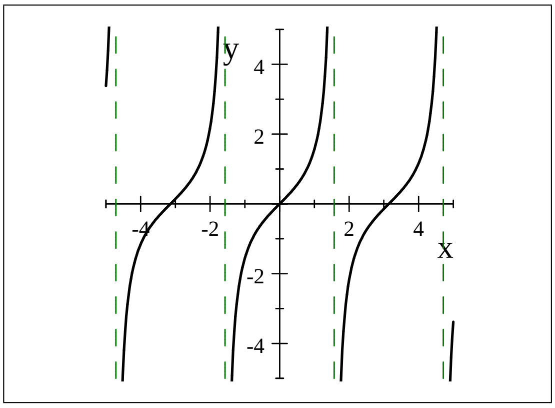
Tudi graf te funkcije je sinusoida.

soda, $\cos(-x) = \cos x$

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, ni definirana v ničlah funkcije cos

ničle se ujemajo z ničlami sin

- **tangens**
  $f(x) = \tan x$

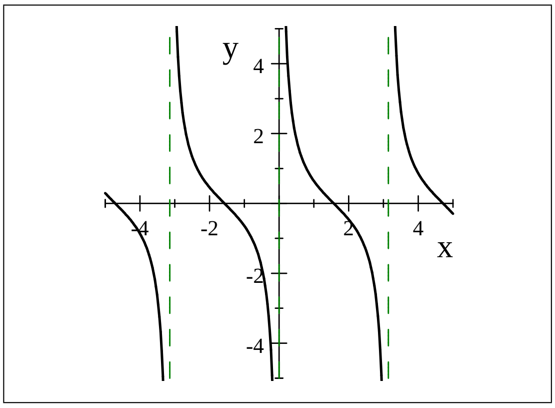


Slika 3.26: Tangens

Je periodična s periodo π, neomejena v obe smeri, liha, navpične asimptote pri $x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$.

- **kotangens**

$f(x) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$



Slika 3.27: Kotangens

Nekaj osnovnih zvez med trigonometričnimi funkcijami:

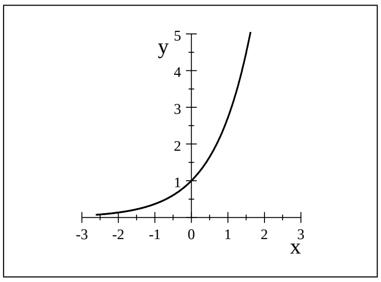
$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 / : \cos^2 x \\
\tan^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
\cos^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 + \cos x}{2} \\
\sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2} \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.
\end{aligned}$$

2. **Eksponentna funkcija**

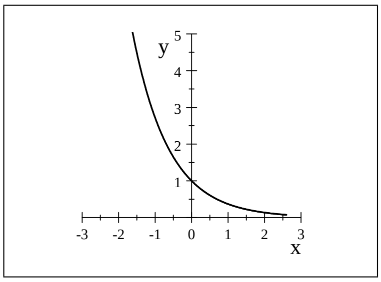
   $f(x) = a^x$, v praksi $a > 1$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x = 2^{-x}$

   pogoste osnove: $e, 10, 2$,



Slika 3.28: $x \mapsto e^x$



Slika 3.29: $x \mapsto e^{-x}$

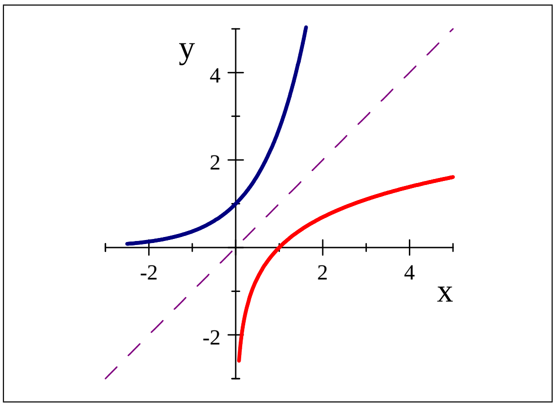
nima ničel, definirana za vse realne x, začetna vrednost: 1, ker $a^0 = 1 = e^0$,

vodoravna asimptota: $y = 0$ (za negativne x),

navzgor neomejena, navzdol je omejena z 0.

3. **Logaritemska funkcija**

   je inverzna k eksponentni $x \mapsto a^x$

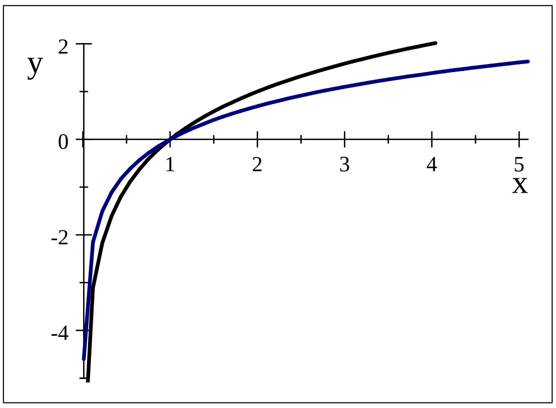


Slika 3.30: Eksponentna in logaritemska (rdeča) funkcija

$a^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$, bijektivna

ima inverzno funkcijo:

$$y = a^x$$
$$x = a^y$$
$$y = \log_a x$$

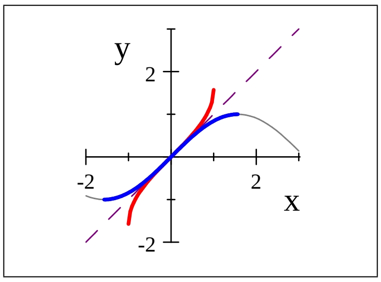


Slika 3.31: $\log_2 x$, $\ln x$

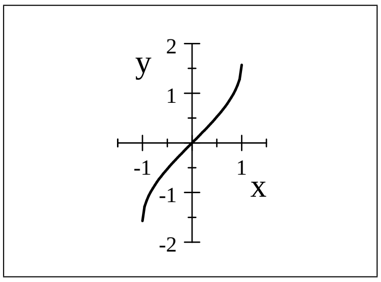
definirana samo za $x > 0$, ničla pri $x = 1$, neomejena, naraščajoča.

4. **Inverzne trigonometrične funkcije:**

- **arkus sinus** (arcsin) je inverzna funkcija k funkciji sinus,
  Vzamemo samo zožitev funkcije sin na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ta je injektivna z zalogo vrednosti $[-1, 1]$; njena inverzna funkcija je potlej $\arcsin = \sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

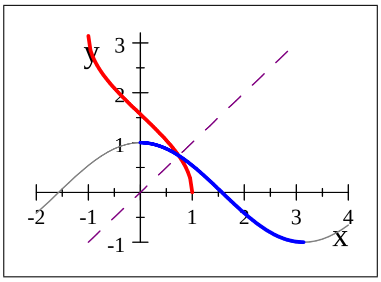


Slika 3.32: Sinus in arkus sinus

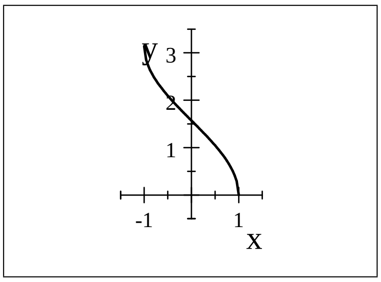


Slika 3.33: Arkus sinus

- **arkus kosinus** (arccos) je inverzna funkcija k funkciji kosinus



Slika 3.34: Kosinus in arkus kosinus



Slika 3.35: Arkus kosinus

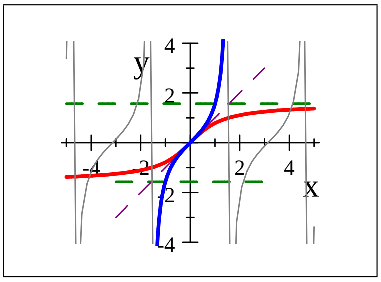
Izberemo zožitev $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$, ki je bijekcija.

$\arccos x$: začetna vrednost $\frac{\pi}{2}$, padajoča, ničla:1.

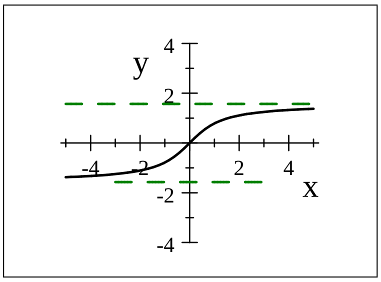
- **arkus tangens** (arctan) je inverzna funkcija k funkciji tangens.

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ bijekcija (Pozor, samo ena veja!)

$\tan^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



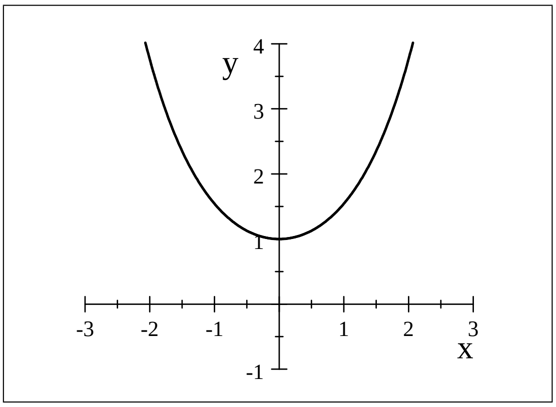
Slika 3.36: Tangens in arkus tangens



Slika 3.37: Arkus tangens

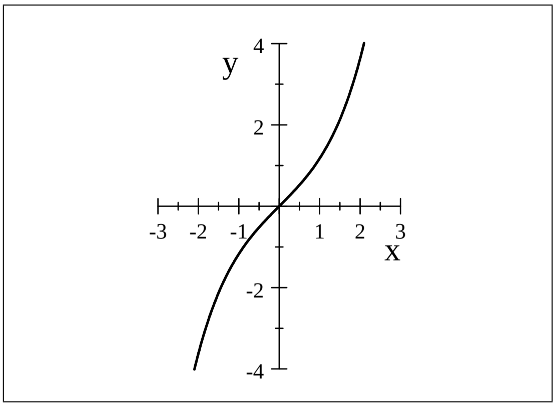
5. **Hiperbolične funkcije**

- **hiperbolični kosinus** $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ (ali ch x),



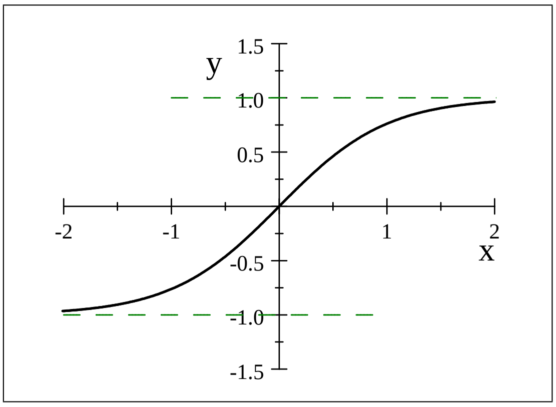
Slika 3.38: Hiperbolični kosinus, verižnica

- **hiperbolični sinus** $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ ali sh x,



Slika 3.39: Hiperbolični sinus

- **hiperbolični tangens** $\tanh x = \frac{\sinh(x)}{\cosh x}$ ali th x,



Slika 3.40: Hiperbolični tangens

6. Obstaja še nekaj drugih trigonometričnih, hiperboličnih, inverznih trigonometričnih in inverznih hiperboličnih funkcij, vendar jih tukaj ne bomo obravnavali.

3.2.4 Premiki in raztegi

1. $x \mapsto f(x-a)$, $a > 0$, premik za a v desno
2. $x \mapsto f(x+a)$, $a > 0$, premik za a v levo
3. $x \mapsto af(x)$, $a > 1$, razteg v smeri osi y
4. $x \mapsto af(x)$, $0 < a < 1$, skrček v smeri osi y
5. $x \mapsto f(-x)$, zrcaljenje preko osi y
6. $x \mapsto -f(x)$, zrcaljenje preko osi x
7. $x \mapsto f(|x|)$, desna polovica grafa funkcije f se prezrcali preko osi y še na levo stran, del grafa za negativne x izgine.
8. $x \mapsto |f(x)|$, del grafa pod osjo x se prezrcali čez os x, ostalo se ohrani.

3.3 Naloge

1. Za naslednje funkcije ugotovi ali so injektivne, surjektivne in določi zalogo vrednosti.

   (a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$, $1 \mapsto b$, $2 \mapsto a$, $3 \mapsto d$, $4 \mapsto b$,
   R.: ni inj., ni surj., $Z_f = \{a,b,d\}$)

   (b) $f : \{-1,0,1\} \to \{x,y,z,w\}$, $-1 \mapsto x$, $0 \mapsto w$, $1 \mapsto y$,
   R.: je inj., ni surj., $Z_f = \{x,y,w\}$

   (c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$,
   R.: bijekt., $Z_f = \mathbb{R}$

(d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(a,b) = (2a+b, a-2b)$,
R.: bijekt., $Z_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2. Simbol $2\mathbb{N}$ naj predstavlja množico vseh sodih naravnih števil. Dana je preslikava
$f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$. Pokaži, da je preslikava bijekcija. Če med množicama obstaja bijektivna preslikava, pravimo, da sta množici *enako močni.* Kaj to pomeni za množici, ki sta končni? Za neskončne množice pa je drugače; neskončna množica A ima lahko pravo podmnožico B (to pomeni $B \subseteq A$, $B \neq A$), ki je enake moči kot množica A.

3. Določi kompozitume naslednjih funkcij

   (a) $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$, $1 \mapsto b$, $2 \mapsto c$, $3 \mapsto c$, $4 \mapsto a$;
   $g : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3\}$, $a \mapsto 2$, $b \mapsto 1$, $c \mapsto 3$, $d \mapsto 2$
   R.: $f \circ g : \{a,b,c,d\} \to \{a,b,c,d\}$; $a \mapsto c$, $b \mapsto b$, $c \mapsto c$, $d \mapsto c$;
   $g \circ f : 1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 3$, $4 \mapsto 2$

   (b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x} - 1$, $g(x) = x^2 + 1$
   R.: $f \circ g(x) = \sqrt[5]{x^2+1} - 1$; $g \circ f(x) = \left(\sqrt[5]{x} - 1\right)^2 + 1$

4. Naslednjim funkcijam določi inverzno funkcijo in nariši oba grafa: f in f^{-1}.

   (a) $f : \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e\}$, $1 \mapsto d$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto a$, $4 \mapsto c$, $5 \mapsto e$
   R.: $f^{-1} : \{a,b,c,d,e\} \to \{1,2,3,4,5\}$; $a \mapsto 3$, $b \mapsto 2$, $c \mapsto 4$, $d \mapsto 1$, $e \mapsto 5$

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$, R.: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = (x-1)^3$

   (c) $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$, R.: $f^{-1}(x) = e^x - 1$

5. Preveri ali je funkcija soda ali liha:

   (a) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2+1}$, R.: liha

   (b) $f(x) = x \sin x^3$, R.: soda

   (c) $f(x) = x^3 \ln(1 + x^2)$, R.: liha

6. Določi (naravno) definicijsko območje funkcij

   (a) $f(x) = \ln \frac{x-1}{2x+1}$, R.: $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$

   (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2|x-1|}}$, R.: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

   (c) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2} + \ln|x|$, R.: $[-3, 1] \setminus \{0\}$

   (d) $f(x) = \ln(\ln(\ln 2x))$, R.: $\left(\frac{e}{2}, \infty\right)$

7. Pokaži, da je kompozitum monotonih funkcij monotona funkcija. Upoštevaj, da je monotona funkcija lahko naraščajoča ali padajoča.

8. Samo z uporabo lastnosti elementarnih funkcij nariši grafe danih funkcij.

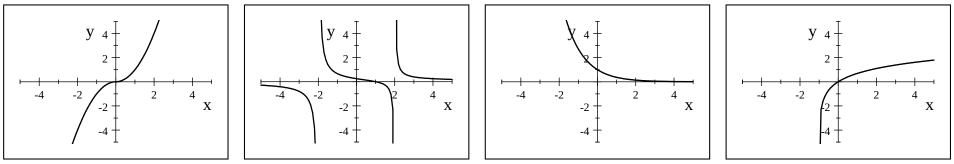
   (a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$,

   (b) $f(x) = x\,|x|$,

   (c) $g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$,

   (d) $h(x) = e^{-x}$, R:

   (e) $f(x) = \ln(x+1)$,



4 Limita in zveznost

4.1 Limita funkcije

4.1.1 Limita v točki

Definicija 4.1.1 *Naj bo $\varepsilon > 0$ in $a \in \mathbb{R}$. ε-**okolica (**ali na kratko kar okolica) točke a je interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. **Punktirana ε-okolica** točke a je interval*

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \backslash \{a\}.$$

Punktirano okolico točke a dobimo torej tako, da iz ε-okolice točke a izrežemo njeno središče (točko a). Zanimalo nas bo obnašanje funkcije f v neki dovolj majhni punktirani okolici točke a.

Oglejmo si obnašanje funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ v okolici točke $x = 0$. Ta funkcija v $x = 0$ očitno ni definirana, njene vrednosti pa lahko izračunamo za vse x iz neke punktirane okolice. Izračunajmo nekaj vrednosti $f(x)$ za nekaj argumentov x, ki so blizu 0.
$f(0.4) = 0.973\,55$
$f(0.3) = 0.985\,07$
$f(0.2) = 0.993\,35$
$f(0.1) = 0.998\,33$
$f(0.05) = 0.999\,58$

Videti je, da bliže kot je x k $x = 0$, bolj se funkcijske vrednosti $f(x)$ približajo številu 1. Vrednost f pri $x = 0$ pa sploh ni definirana.

Definicija 4.1.2 *Število L je **limita funkcije f v točki** a, če lahko dosežemo, da se funkcijske vrednosti $f(x)$ od števila L poljubno malo razlikujejo, če je le x $(x \neq a)$ izbran dovolj blizu točke a.*

Zapišemo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

V prejšnjem primeru je videti, da je število 1 limita funkcije $\frac{\sin x}{x}$ v točki 0, oziroma $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Še enkrat zapišimo definicijo bolj formalno:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pri poljubnem vnaprej izbranem $\varepsilon > 0$ obstaja tak pozitiven δ, da se števila x (različna od a), ki so za manj kot δ oddaljena od a preslikajo v ε-okolico števila L. Ponavadi je δ odvisen od ε in sicer je pogosto tako, da manjši kot je ε, manjši bo tudi δ.

Leva in desna limita:
leva limita: $L_l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, Opazujemo samo vrednosti $f(x)$ za $x < a$
desna limita: $L_d = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ Opazujemo samo vrednosti $f(x)$ za $x > a$.

Zgled:
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$
Funkcija $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$, ima v točki $x = a = 0$ levo in desno limito, ki pa nista enaki.

Trditev 4.1.3 *Funkcija ima v točki a limito natanko tedaj ko ima v tej točki **levo in desno** limito ter sta **enaki**. Potem je tudi* $L = \lim\limits_{x\to a} f(x) = L_l = L_d$.

4.1.2 Limita v neskončnosti

Zapis

$L = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ pomeni: vrednosti funkcije se poljubno približajo L, če smo le x izbrali dovolj velik.

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists M : \qquad x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

$L = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ pomeni: vrednosti funkcije se poljubno približajo L, če smo le $x < 0$ izbrali dovolj velik po absolutni vrednosti (dovolj daleč od 0).

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists m : \qquad x < m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Če obstaja $L_1 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ima funkcija f vodoravno asimptoto v $+\infty$, to je premica $y = L_1$. Če pa obstaja $L_2 = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, ima funkcija f vodoravno asimptoto v $-\infty$, to je premica $y = L_2$. V nekaterih primerih se asimptoti tudi ujemata.

Zapis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ pomeni, da vrednosti funkcije f presežejo katerokoli vnaprej izbrano vrednost M, če je le x dovolj blizu a.

$$\forall M \quad \exists\delta > 0 : \;\; 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Analogno $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ pomeni, da je $f(x)$ manj od poljubnega m, če je le x dovolj blizu točki a. V obeh primerih ima funkcija $x \mapsto f(x)$ navpično asimptoto $x = a$.

Možno je, da je premica $x = a$ navpična asimptota samo iz ene strani. Lahko je npr. leva limita $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, medtem, ko je desna limita $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L < \infty$.

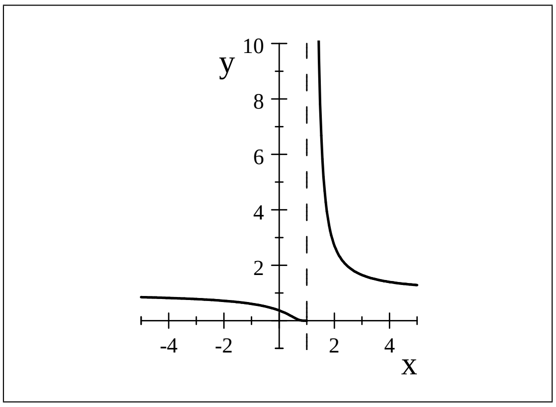
Zgled. Oglejmo si obnašanje funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ v okolici točke $x = 1$, v kateri ni definirana. Najprej ugotovimo, da je leva limita $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ in desna limita $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$. Pišimo $y = \frac{1}{x-1}$, $e^{\frac{1}{x-1}} = e^y$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 1^-} y = -\infty$ in $\lim_{x\to 1^+} y = \infty$. Nato je

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

in

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty.$$

Na grafu se to vidi takole:



Slika 4.41: Končna leva in neskončna desna limita v isti točki

Poševna asimptota

Lahko se zgodi tudi, da je $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. V tem primeru je mogoče, da ima funkcija poševno asimptoto, premico $y = kx + n$, za katero velja, da je

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - (kx + n)) = 0.$$

Koeficienta k in n zaporedoma dobimo takole

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)\,.$$

4.1.3 Pravila za računanje limite

(veljajo za vse tipe limit: v končni točki ali v neskončnosti, pa tudi za levo in desno limito)

- Če obstajata $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + g(x))$ in velja:
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)\,.$$

- Če obstajata $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} f(x)\,g(x)$ in velja:
$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\,.\,\lim_{x\to a} g(x)\,.$$

- Če obstajata $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ in $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ in velja:
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$
- $\lim\limits_{x\to a} A = A$, če je $A =$ konstanta.
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{A}{f(x)} = 0$, če je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ ali $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- Če ne neki okolici točke a velja $f(x) < g(x)$ ali $f(x) \leq g(x)$, potem je
$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$
- Če obstaja $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)}$ in velja:
$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$
(če je n sodo število, mora biti $f(x) \geq 0$ vsaj na neki okolici števila a).
- Če je $b > 0$ in obstaja $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} b^{f(x)}$ in velja
$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}.$$
- Če je $f(x) < g(x)$ na neki punktirani oklici točke a, je $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Omenimo še pomembni limiti
$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$
ki ju bomo utemeljili v poglavju o zaporedjih.

Kasneje, v poglavju o odvodih, bomo spoznali še eno učinkovito metodo za računanje limit: L'Hospitalovo pravilo.

Zgledi.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$. Vidimo, da je $f(1) = 0$ in $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.

   Če je funkcija v točki a definirana, se njena funkcijska vrednosti $f(a)$ lahko razlikuje od limite.
2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+3) = 4.$
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0, \quad k > 0.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{4x^2-x+5} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\left(3x^2-2x+1\right)/x^2}{(4x^2-x+5)/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}} = \frac{3}{4}$.

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = 0$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ se da geometrijsko utemeljiti, kasneje bomo to lastnost preverili še na drug način. Namreč, za vsak $0 < x < \frac{\pi}{2}$ je

$$\sin x < x < \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Delimo neenakost s $\sin x > 0$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

in dajmo vse člene še na -1

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Nato uporabimo še limito, ko $x \to 0$ z desne in dobimo

$$1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1.$$

Nazadnje je $\lim_{x\to 0^-} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

7. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \sin x = 0$, sledi iz omejenosti funkcije sin.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2$.

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-} \tan x = \infty, \quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+} \tan x = -\infty$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

12. Pri racionalnih funkcijah, katerih števec ima točno za 1 večjo stopnjo kot imenovalec, smo do poševne asimptote prišli z deljenjem polinomov. Recimo $f(x) = \frac{2x^2+x+1}{x+1} = 2x - 1 + \frac{2}{x+1}$. Vidimo, da je $y = 2x - 1$ poševna asimptota, ker je

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - (2x-1)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x+1} = 0.$$

Po drugi strani je

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+1}{x(x+1)} = 2$$

in

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \left(-1 + \frac{2}{x+1}\right) = -1.$$

Vendar imajo lahko poševne asimptote tudi druge, ne le racionalne funkcije.

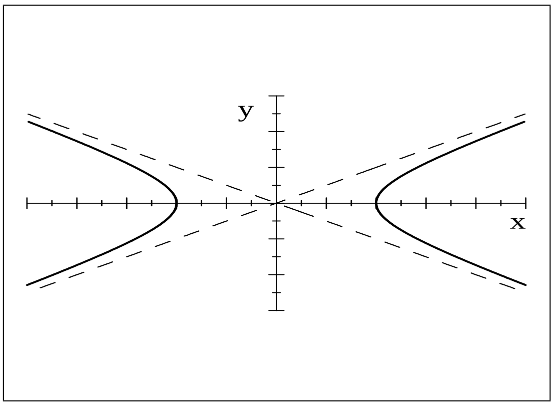
13. Naj bo funkcija f določena z eno vejo hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a, b > 0$, in sicer tisto, kjer je $y \geq 0$. Izračunajmo poševno asimptoto, kjer $x \to \infty$. Najprej izrazimo $y = \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a_2} - b^2} = f(x)$. Nato

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2x^2} - \frac{b^2}{x^2}} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} - \frac{b}{a}x \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} - \frac{b}{a}x\right)\left(\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x\right)}{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-b^2}{\sqrt{\frac{b^2x^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x} = 0. \end{aligned}$$

Torej je $y = \frac{b}{a}x$ poševna asimptota hiperbole za $x \to \infty$ in $y > 0$. Na sliki je graf hiperbole, kjer je $a > b$.



Slika 4.42: Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ in poševni asimptoti

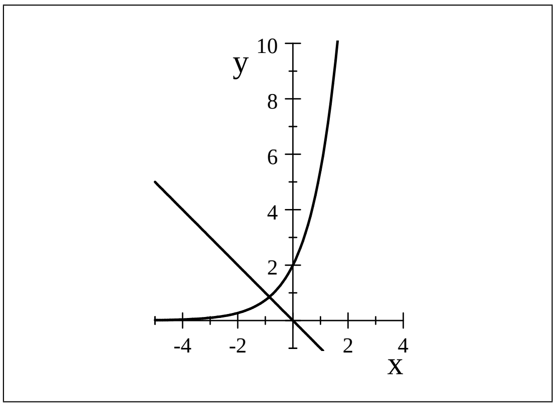
14. Za funkcijo $f(x) = \ln(2e^x + x)$ velja $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Preverimo, ali ima funkcija f poševno asimptoto. Najprej je

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2e^x+1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x \left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x + \ln\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\ln\left(2+\frac{1}{e^x}\right)\right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

upoštevajoč, da je $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln\left(2+\frac{1}{e^x}\right) = 0$. Nato je

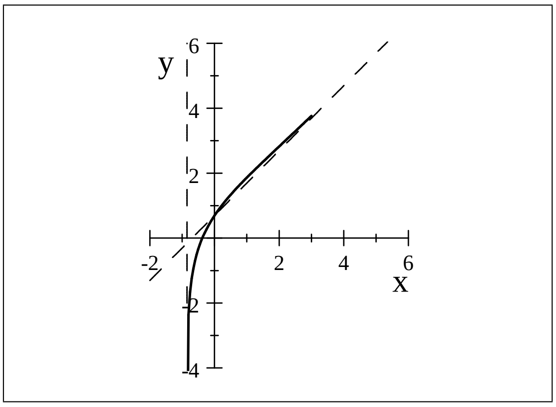
$$\begin{aligned}
n &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln(2e^x+1) - x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(\ln\left(e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)\right) - x\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x + \ln\left(2+\frac{1}{e^x}\right) - x\right) \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Torej je poševna asimptota v neskončnosti premica $y = x + \ln 2$. Funkcija $f(x) = \ln(2e^x + x)$ je definirana samo za x, kjer je $2e^x + x > 0$, grafično ugotovimo, da je to za $x > x_0 \simeq -0.85$, torej pri $x \to -\infty$ asimptota nima smisla.



Slika 4.43: Grafa $y = 2e^x$ in $y = -x$

Še graf funkcije $f(x) = \ln(2e^x + x)\,, \quad x > x_0 \simeq -0.85.$



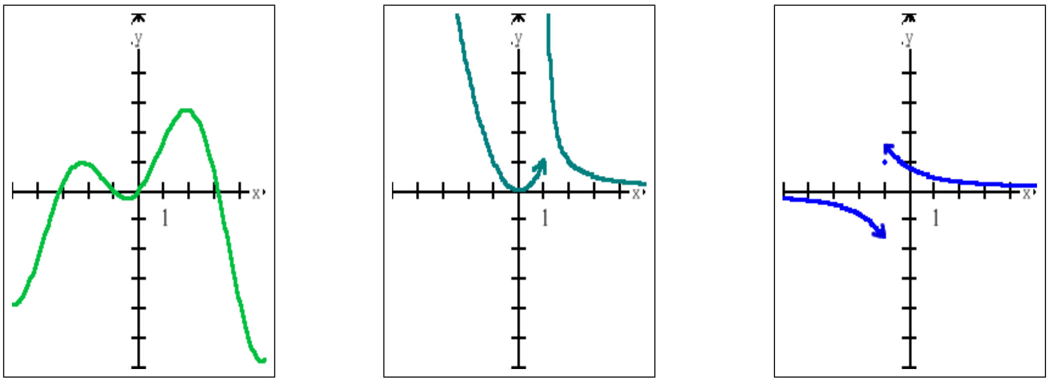
Slika 4.44: Graf funkcije $f(x) = \ln(2e^x + x)$ s poševno asimptoto

V razmislek: funkcija $g(x) = \ln\left(e^{x^2} + 1\right)$ ima kvadratično asimptoto. Kako bi jo poiskali?

4.2 Zveznost

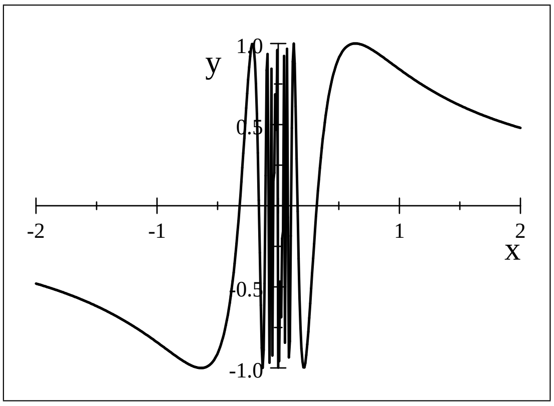
4.2.1 Zveznost v točki

Na spodnjih slikah so grafi treh različnih funkcij. Prvi graf funkcije je povezana krivulja, medtem ko sta druga dva sestavljena iz več kosov, tretji graf celo iz treh (pikica je namreč sestavni del grafa). Matematično bomo opisali lastnost, da je graf bodisi povezan, bodisi v kaki točki (točkah) pretrgan.



Slika 4.45: Zvezna in nezvezni funkciji

Naslednji primer pokaže še enega od možnih tipov nezveznosti v dani točki. Ko se x približuje vrednosti $x = 0$, vrednosti $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ nihajo med -1 in 1.



Slika 4.46: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

Definicija 4.2.1 *Funkcija je* ***zvezna v točki*** $x_0 \in D_f$*, če velja: funkcijske vrednosti* $f(x)$ *se poljubno malo razlikujejo od vrednosti* $f(x_0)$*, če je le* x *dovolj blizu* x_0*.*

Trditev 4.2.2 *Ekvivalentna definicija zveznosti v točki:*
Funkcija f *je* ***zvezna v točki*** x_0*, če:*

1. $x_0 \in D_f$
2. Obstaja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
3. $f(x_0) = L$

Naj bosta f in g zvezni v točki x_0. Naslednje funkcije so zvezne v točki x_0 :

- vsota $f + g$
- produkt fg
- $\frac{f}{g}$, če je $g(x_0) \neq 0$.
- kompozitum $f \circ g$, če je f zvezna v točki $g(x_0)$ in g zvezna v točki x_0.

4.2.2 Zveznost na intervalu

Definicija 4.2.3 *Funkcija* f *je* ***zvezna na odprtem intervalu*** (a, b) *, če je definirana in zvezna v vsaki točki tega intervala.*

$$\forall x_0 \in (a, b) : \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definicija 4.2.4 *Funkcija* f *je* ***zvezna na zaprtem intervalu*** $[a, b]$ *, če je zvezna na odprtem intervalu* (a, b) *in velja* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *in* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ *.*

Naslednje funkcije so zvezne na vsem svojem definicijskem območju: polinomi, korenske, $x \mapsto |x|$, sin, cos, arctan, arccot, arcsin, arccos, exp $(x \longmapsto e^x)$, sinh, cosh, log, ln .

Primeri funkcij s točkami nezveznosti: racionalne (npr.: $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{x-1}{(x+2)^2}$), tan, cot, $\frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}}$.

4.2.3 Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$. Potem zanjo velja:

1. f je na intervalu $[a, b]$ **omejena**: obstajata števili m in M, za kateri velja:

$$m \leq f(x) \leq M, \qquad x \in [a, b].$$

2. Če je $f(a) f(b) < 0$, obstaja tak $c \in (a, b)$, da je $f(c) = 0$. **Bisekcija** je numerična metoda za iskanje ničle, ki je osnovana na tej lastnosti.

3. Če sta m in M natančni meji funkcije f (infimum in supremum) na intervalu $[a, b]$, obstajata taki točki $x_1,\ x_2 \in [a, b]$, da je $f(x_1) = m$ in $f(x_2) = M$. Drugače rečeno:

   Zvezna funkcija na zaprtem intervalu **doseže** svoj **minimum** in **maksimum**.

4. Če je $m < c < M$, obstaja tak $x_0 \in [a, b]$, da je $f(x_0) = c$.

   Zvezna funkcija **zavzame** tudi **vse vrednosti med** m in M. Zaloga vrednosti $f([a, b]) = [m, M]$.

5. Če je $f : [a, b] \to [m, M]$ **zvezna in monotona**, obstaja $f^{-1} : [m, M] \to [a, b]$ in je tudi **zvezna in monotona**. Velja še več: če je f naraščajoča, je tudi f^{-1} naraščajoča, če je f padajoča, je tudi f^{-1} padajoča.

4.3 Naloge

1. Določi a tako, da bo funkcija f zvezna in nariši skico.

   $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ ax - 2, & x < 1, \end{cases}$ R.: $a = 2$.

2. Izračunaj limite:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$, R.: $\frac{3}{4}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x^2-x}$ R.: -1

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^3+x}{3x^3-2x^2+1}$ R.: $\frac{2}{3}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x}$ R.: $\frac{1}{3}$

   (e) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{4x^2-1} - 2x\right)$ R.: 0

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 6x}$ R.: $\frac{1}{2}$

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$ R.: 0

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$ R.: e^4

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ R.: $\frac{\pi}{2}$

5 Odvod

5.1 Odvod funkcije v točki

Zanimalo nas bo, kako hitro se spreminjajo vrednosti funkcije. Predpostavimo, da je f definirana vsaj na neki okolici točke $x = a$. Izraz

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

imenujemo

diferenčni količnik funkcije f v točki $x = a$.

Ta predstavlja smerni koeficient sekante na graf skozi točki

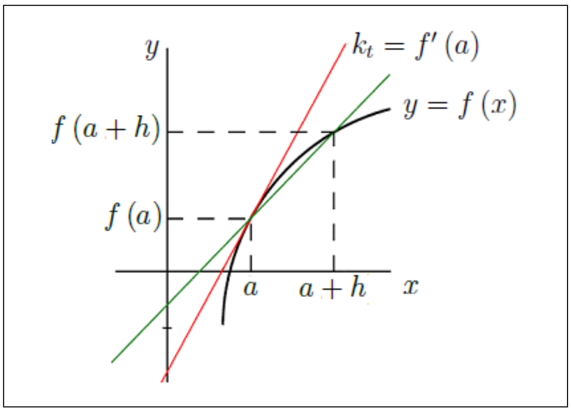
$$(a, f(a)) \text{ in } (a+h, f(a+h)).$$

Definicija 5.1.1 *Funkcija je **odvedljiva** v točki $x = a$, če obstaja limita diferenčnega količnika, ko gre $h \to 0$. V tem primeru je*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

***odvod funkcije** f v točki a.*

S tem, ko pošljemo $h \to 0$, se sekanta na graf prelevi v tangento na graf v točki $T(a, f(a))$, limitna vrednost $f'(a)$ pa predstavlja smerni koeficient tangente.



Slika 5.47: Sekanta in tangenta

Zgled. Izračunajmo odvod funkcije $f(x) = x^2$ v poljubni točki $x = a$.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2-a^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2a+h) \\ &= 2a. \end{aligned}$$

Npr. v točki $x=3$ funkcije $f(x)=x^2$ je odvod $f'(x)$ enak $2x=2\cdot 3=6$.

5.1.1 Enačbi tangente in normale

Enačba premice skozi točko $(a, f(a))$ s smernim koeficientom k se glasi:

$$y = k(x-a) + f(a).$$

Za pravokotni premici je znano, da za smerna koeficienta velja $k_1 k_2 = -1$. Normala je premica, ki poteka skozi dotikališče tangente in je nanjo pravokotna. Za smerni koeficient tangente že vemo, da je $k_t = f'(a)$, smerni koeficient normale je $k_n = \frac{-1}{f'(a)}$. Enačbi tangente in normale skozi točko $T(a, f(a))$ sta:

$$\begin{array}{lll} \textbf{tangenta}: & y = k_t(x-a)+f(a), & k_t = f'(a) \\ \textbf{normala}: & y = k_n(x-a)+f(a), & k_n = \frac{-1}{f'(a)}. \end{array}$$

Zgled. Zapišimo enačbi tangente in normale na graf $y=x^2$ v točki $x=3$.

V našem primeru je $b=f(a)=f(3)=9$ in $k_t=f'(a)=f'(3)=6$. Enačba tangente se glasi:

$$y = 6(x-3)+9 = 6x-9.$$

Zapišimo še enačbo normale na graf. Sedaj je $k_n = \frac{-1}{k_t} = \frac{-1}{f'(a)} = \frac{-1}{6}$ in enačba normale:

$$y = -\frac{1}{6}(x-3)+9 = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2}.$$

Navedimo še primer funkcije, ki v neki točki (pri $x=0$) ni odvedljiva:

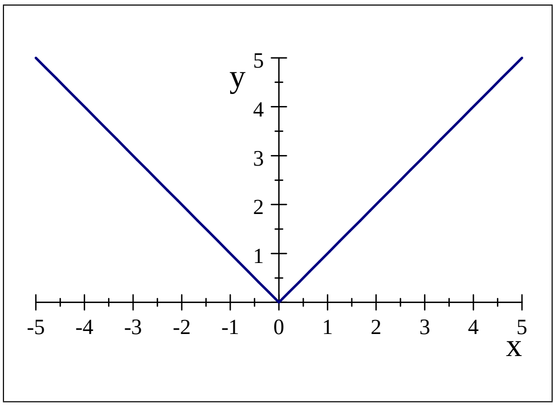
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Izračunajmo limito diferenčnega količnika $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ v točki $x=0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & h < 0 \\ -1, & h < 0. \end{cases}$$

Opazimo, da (obojestranska) limita ne obstaja, obstajata pa leva in desna limita.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 1, \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = -1.$$



Slika 5.48: Graf funkcije $f(x) = |x|$

Kot vidimo, funkcija $x \mapsto |x|$ ni odvedljiva v točki $x = 0$. Ker pa obstajata leva in desna limita diferenčnega količnika, rečemo, da ima ta funkcija v točki $x = 0$ **levi** in **desni odvod**.

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{levi odvod v točki } a$$

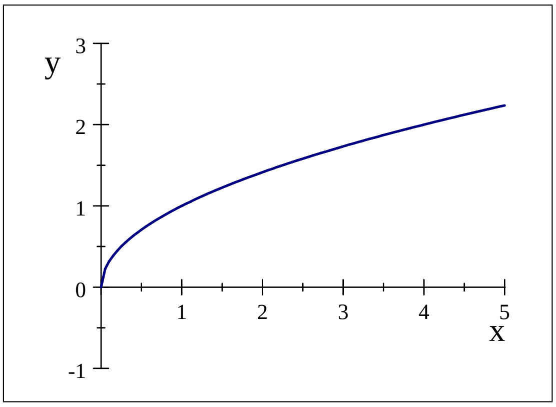
$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{desni odvod v točki } a$$

Na grafu se ta tip neodvedljivosti izraža kot "negladkost", v točki 0 je graf koničast.

Primer funkcije, katere graf ima tangento (navpično) v točki 0, pa vendar v 0 ni z desne odvedljiva:

$$f(x) = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{a+h} + \sqrt{a}\right)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a}}, \quad \text{če } a > 0.
\end{aligned}$$



Slika 5.49: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{x}$

S slike je razvidno, da je premica $x = 0$ tangenta na graf v točki $(0,0)$. Če ponovimo zgornji račun pri $a = 0$, dobimo $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$, torej (desni) odvod v točki 0 ne obstaja. Premice $x = 0$ namreč ni mogoče opisati z linearno funkcijo oblike $f(x) = kx + n$. Koeficient k bi moral biti ∞, saj je $k = \tan \frac{\pi}{2}$.

Izrek 5.1.2 *Funkcija, ki je v točki a odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.*

Dokaz. Prepričati se moramo, da velja $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} f(a+h) &= \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a) + f(a) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h + f(a) \\
&= \lim_{h \to 0} f'(a)\, h + f(a) \\
&= f(a).
\end{aligned}$$

□

Definicija 5.1.3 *Funkcija f je* ***odvedljiva na odprtem intervalu*** (a,b)*, če je odvedljiva v vsaki točki tega intervala. Funkcija f je* ***odvedljiva na zaprtem intervalu*** $[a,b]$*, če je odvedljiva na odprtem intervalu (a,b), v krajiščih pa ima levi oziroma desni odvod.*

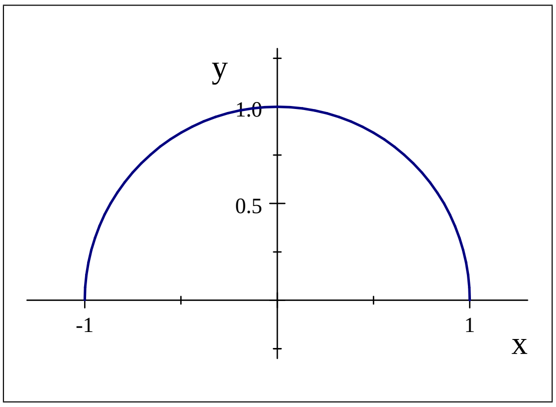
Če je f na intervalu I odvedljiva, lahko definiramo novo funkcijo

$$\begin{aligned}
f' &: I \to \mathbb{R} \\
x &\longmapsto f'(x), \quad \forall x \in I.
\end{aligned}$$

Definicija 5.1.4 *Rečemo, da je funkcija f* ***zvezno odvedljiva****, če je odvod f' zvezna funkcija.*

$$\begin{aligned} C(I) &= \{f;\quad f \text{ je zvezna na } I\} \\ C^1(I) &= \{f;\quad f \text{ je zvezno odvedljiva na } I\} \\ C^1(I) &\subseteq C(I). \end{aligned}$$

Funkcija $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je odvedljiva na odprtem intervalu $(-1,1)$, pa ni odvedljiva (čeprav je zvezna) na zaprtem intervalu $[-1,1]$. Graf te funkcije je zgornja polovica krožnice s polmerom 1, zato v krajiščih intervala tangente ne moremo predstaviti z linearno funkcijo $y = kx + n$, torej f v krajiščih ni odvedljiva. Kmalu pa bomo videli, da v vseh notranjih točkah intervala odvod funkcije f obstaja.



Slika 5.50: Graf funkcije $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

5.2 Odvajanje

Hitro se izkaže, da je zelo nerodno odvod računati po definiciji z limito. Enkrat za vselej bomo izračunali odvode elementarnih funkcij, izpeljali pa tudi pravila, kako potem odvajati (= poiskati odvode) sestavljenih funkcij.

Spodnja pravila odvajanja neposredno sledijo iz definicije odvoda funkcije v poljubni točki.

5.2.1 Pravila odvajanja

1. $(f+g)' = f' + g'$ Odvod vsote je vsota odvodov.
2. $(cf)' = cf'$ Konstanto pri odvajanju lahko izpostavimo.
3. $(fg)' = f'g + fg'$ Odvod produkta
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ Odvod količnika
5. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Odvajanje sestavljene funkcije (posredno odvajanje, verižno pravilo)

Za zgled bomo preverili le pravilo za odvod produkta. Izračunali bomo limito diferenčnega kvocienta za funkcijo $x \mapsto f(x)\,g(x)$. Denimo, da sta f in g odvedljivi v točki x in označimo $\Delta_g(x) = g(x+h) - g(x)$, $\Delta_f(x) = f(x+h) - f(x)$. Zaradi odvedljivosti obeh funkcij je

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_f(x)}{h} \quad \text{in} \quad g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_g(x)}{h}. \tag{3}$$

Nato je limita diferenčnega količnika za produkt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_f(x)\,g(x+h) + f(x)\,\Delta_g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta_f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\,\frac{\Delta_g(x)}{h} \right).
\end{aligned} \tag{4}$$

Upoštevajmo (3) in še, da je

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g\left(\lim_{h\to 0}(x+h)\right) = g(x),$$

saj kot že vemo, iz odvedljivosti funkcije g v točki x sledi zveznost v točki x. Vrnimo se k vrstici (4) in nadaljujmo z izpeljavo

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta_f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\,\frac{\Delta_g(x)}{h} \right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_g(x)}{h} \\
&= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).
\end{aligned}$$

5.2.2 Odvodi elementarnih funkcij

Pred nami je tabela odvodov osnovnih funkcij, vsakega od teh odvodov izračunamo po definiciji oziroma z uporabo že znanih lastnosti odvoda.

1. $f(x) = c = konst.$ $\quad f' = 0$ $\qquad$ Odvod konstantne funkcije je 0.
2. $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
6. $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
9. $(e^x)' = e^x$
10. $(a^x)' = a^x \ln a$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$
14. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
15. $(\cosh x)' = \sinh x$
16. $(\sinh x)' = \cosh x$.

Izpeljimo najprej, da je $(\sin x)' = \cos x$. Upoštevajoč obrazec

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

je

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2}\\
&= \cos(x)\,.
\end{aligned}$$

Po pravilu (5) za odvajanje sestavljenih funkcij dobimo, da je

$$\begin{aligned}
(\cos x)' &= \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)'\\
&= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\right)'\\
&= \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\sin x.
\end{aligned}$$

Pokažimo še, da je $(\tan x)' = 1+\tan^2 x$.

$$
\begin{aligned}
(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x.
\end{aligned}
$$

Nazadnje preverimo še, da je $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. Uporabili bomo pravilo št. (5) o odvodu sestavljene funkcije. Odvajajmo identiteto

$$
\tan(\arctan x) = x, \qquad x \in \mathbb{R},
$$

$$
\begin{aligned}
(\tan(\arctan x))' &= 1 \\
\tan'(\arctan x) \cdot (\arctan x)' &= 1 \\
\Big(1 + \tan^2(\arctan x)\Big)(\arctan x)' &= 1,
\end{aligned}
$$

od koder upoštevajoč $\tan(\arctan x) = x$ dobimo, da je

$$
(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.
$$

5.3 Diferencial

Če je graf krivulje v okolici neke točke $(a, f(a))$ gladka krivulja, lahko tako funkcijo f lokalno aproksimiramo z linearno funkcijo $t(x)$ (njen graf je premica – tangenta na graf v točki $(a, f(a))$). Spomnimo se enačbe tangente

$$
\begin{aligned}
y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\
&=: t(x).
\end{aligned}
$$

Pri določenih pogojih bo za x, ki je dovolj blizu točki a, $x = a + \Delta x$, kjer si predstavljamo Δx majhen, veljalo

$$
\begin{aligned}
f(a+\Delta x) &\approx t(a+\Delta x) = \\
&= f'(a)\Delta x + f(a) \\
f(a+\Delta x) - f(a) &\approx f'(a)\Delta x.
\end{aligned}
$$

Definicija 5.3.1 *Izrazu $f'(a)\Delta x$, ki je približek za razliko $f(a+\Delta x) - f(a)$, rečemo **diferencial** funkcije f v točki a in ga pogosto označimo takole:*

$$
df(a) = f'(a)\Delta x.
$$

Zgled. Izračunajmo diferencial funkcije $f(x) = x^2$.

Lahko pišemo kar $d\left(x^2\right) = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$. Podobno naredimo za funkcijo $f(x) = x$ in dobimo $d(x) = dx = (x)' \Delta x = \Delta x$. Zato lahko zamenjamo Δx s simbolom dx. Točka a je bila poljubna, pišimo x namesto a in dobimo

$$\begin{aligned} df(x) &= f'(x)\,dx, \\ \Delta f = f(a+dx) - f(a)&, \quad \Delta f \to df, \text{ če } dx \to 0. \end{aligned}$$

Ta zapis formalno lahko razumemo tudi takole: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$ in se pogosto uporablja za zapis odvoda.

Na koncu zapišimo obrazec za **linearizacijo**, to je aproksimacijo z linearno funkcijo:

$$\begin{aligned} f(x+dx) &\approx f(x) + df(x) \\ &= f(x) + f'(x)\,dx. \end{aligned}$$

Zgled. Izračunajmo približno vrednost $\sqrt[3]{0,97}$.

Definirajmo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in izračunajmo $f'(x) = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. V točki $x = 1$, ki je blizu $0,97$, je preprosto izračunati funkcijsko vrednost in odvod funkcije f. Tako je $f(1) = 1$ in $f'(1) = \frac{1}{3}$. Vzamemo $dx = -0,03$, ker je $0,97 = 1-0,03 = 1+dx$. Nato je

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{0,97} &= f(1+dx) \\ &\approx f(1) + df(1) \\ &= f(1) + f'(1)\,dx \\ &= 1 + \frac{1}{3}(-0,03) \\ &= 0,99. \end{aligned}$$

5.4 Izreki o odvedljivih funkcijah

Definicija 5.4.1 *Funkcija f ima v točki x_0* ***lokalni maksimum****, če obstaja taka dovolj majhna okolica točke x_0, da za vse x iz te okolice velja: $f(x) < f(x_0)$. Funkcija f ima v točki x_0* ***lokalni minimum****, če obstaja taka dovolj majhna okolica točke x_0, da za vse x iz te okolice velja: $f(x) > f(x_0)$. Takim točkam z eno besedo rečemo* ***lokalni ekstremi.***

5.4.1 Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange, L'Hospitale

Izrek 5.4.2 ***(Fermat)*** *Če ima odvedljiva funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$.*

Z drugimi besedami: Če ima funkcija f v točki x_0 lokalni ekstrem, je $f'(x_0) = 0$ ali pa f v točki x_0 ni odvedljiva. Pripomnimo, da iz dejstva, da je $f'(x_0)$ enak 0, ne sledi, da ima f lokalni ekstrem. Primer: $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, vendar f, čeprav odvedljiva, v točki $x = 0$ nima lokalnega ekstrema, saj je naraščajoča.
Dokaz. Denimo, da ima f v točki x_0 lokalni maksimum. Potem za vsak x iz dovolj majhne okolice točke x_0 velja: $f(x) < f(x_0)$. Izračunajmo levi in desni odvod funkcije f v točki x_0 :

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x\to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \\ f'_-(x_0) &= \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ &= \lim_{x\to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \end{aligned}$$

Ker je funkcija v točki x_0 odvedljiva, je

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0,$$

od koder sledi, da je $f'(x_0) = 0$. □

Stacionarne točke funkcije f so točke x_0, kjer je $f'(x_0) = 0$. Med stacionarnimi točkami najdemo lokalne ekstreme, pa tudi sedla.

Izrek 5.4.3 ***(Rolle)*** *Naj bo funkcija f na definirana in zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Poleg tega naj ima na krajiščih intervala $[a, b]$ enaki vrednosti: $f(a) = f(b)$. Potem obstaja točka $\xi \in (a, b)$, v kateri je odvod enak 0: $f'(\xi) = 0$.*

Zvezna in odvedljiva funkcija z enakima vrednostima v krajiščih intervala ima v notranjosti intervala vsaj eno točko, kjer je tangenta na graf vodoravna (vzporedna z osjo x).
Dokaz. Za konstantno funkcijo f izrek očitno velja, saj je $f'(x) = 0$ za vsak x. Naj bo torej f nekonstantna funkcija. Pri nekem x_0 je $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$ in recimo, da

je $f(x_0) > f(a)$. Funkcija f je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, zato doseže svoj maksimum M. Naj bo $f(\xi) = M$ pri nekem $\xi \in (a, b)$ in izračunajmo še $f'(\xi)$. Pri tem bomo upoštevali, da je

$$f(a) < f(x_0) \leq f(\xi) = M.$$

Torej,

$$\begin{aligned} f'_-(\xi) &= \lim_{h \to 0-} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0-} \frac{f(\xi + h) - M}{h} \geq 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} f'_+(\xi) &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0+} \frac{f(\xi + h) - M}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

Podobno kot v dokazu Fermatovega izreka ugotovimo, da je $f'(\xi) = 0$. □

Izrek 5.4.4 ***(Cauchy)***. *Bodita f in g zvezni na $[a, b]$ in odvedljivi na (a, b). Dodatno naj funkcija g še izpolnjuje pogoja: g' na (a, b) nima nobene ničle in $g(b) \neq g(a)$. Potem obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Dokaz. Definirajmo novo funkcijo $h(x) = f(x) - \alpha g(x)$, ki je gotovo zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b). Konstanto α določimo tako, da bo $h(a) = h(b)$. Če tako konstanto lahko izračunamo, bo funkcija h izpolnjevala pogoje Rolleovega izreka in bo za neki $\xi \in (a, b)$ izpolnjeno $h'(\xi) = 0$.

Izračunajmo α :

$$h(a) = f(a) - \alpha g(a) = f(b) - \alpha g(b) = h(b)$$

Iz enačbe na sredini sledi

$$\alpha (g(b) - g(a)) = f(b) - f(a)$$

in je torej

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Po drugi strani pa nam pogoj $h'(\xi) = 0$ pove: $f'(\xi) - \alpha g'(\xi) = 0$ oziroma

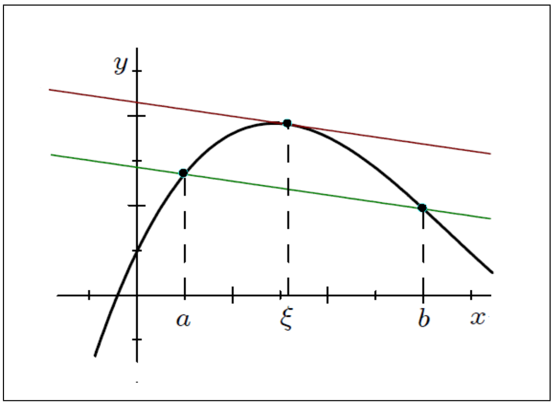
$$\alpha = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

kar je bil naš cilj. □

Izrek 5.4.5 ***(Lagrange).*** *Naj bo funkcija f na definirana in zvezna na $[a, b]$ ter odvedljiva na (a, b). Potem obstaja taka točka $\xi \in (a, b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a))$$

Ta izrek nam pove, da obstaja taka točka, kjer je tangenta na graf vzporedna sekanti skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$. Tam je $k_t = f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k_s$.



Slika 5.51: Tangenta, vzporedna sekanti

Dokaz. Lagrangev izrek je neposredna posledica Cauchyjevega izreka. Za funkcijo g v Cauchyjevem izreku vzamemo kar $g(x) = x$ in rezultat takoj sledi. □

Izrek 5.4.6 ***(L'Hospitalovo pravilo)*** *Naj bosta funkciji f in g zvezno odvedljivi (torej tudi zvezni) na neki punktirani okolici točke a. Naj bo $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ in $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ na neki punktirani okolici točke a. Potem je*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pravilo velja tudi splošneje, če je $a = \infty$ ali/in pa je $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$.

To pravilo nam omogoča učinkovito računanje limit, predvsem takih, kjer nastopajo funkcije, ki se z odvajanjem poenostavijo, npr. potence, logaritmi itd.

Zgled.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Skica dokaza L'Hospitalovega pravila. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da sta f in g definirani in zvezni v točki a (sicer ju pač zvezno razširimo). Nato je $f(a) = g(a) = 0$ in funkciji f, g sta zvezni na $[a, x]$, če je le x dovolj blizu a, odvoda f' in g'pa zvezni funkciji na intervalu (a, x). V točki a ni treba, da sta funkciji f in g odvedljivi. Uporabimo Cauchyjev izrek: za neki $\xi \in (a, x)$ je

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{saj je } a < \xi < x \text{ ter } f' \text{ in } g' \text{ zvezni.} \end{aligned}$$

Za dokaz splošnejše variante bi bilo potrebno napraviti še kak korak, ki ga pa izpustimo.

L'Hospitalovo pravilo je zelo uporabno za računanje limit, ki so, kot pravimo, nedoločenosti tipa $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Zgledi:

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{1} = 1.$
2. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^x} = 0.$
3. $\lim_{x \to 0+} x \ln x = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0+} (-x) = 0.$

5.4.2 Odvodi višjega reda

Če je funkcija f odvedljiva na nekem intervalu, se pogosto zgodi, da je tudi dobljeni odvod f'odvedljiva funkcija in jo lahko še enkrat odvajamo. Tako dobimo odvod drugega reda. Podobno lahko dobimo odvode višjih redov: f'', f''' $f^{(4)}, ..., f^{(n)}, ...$

Induktivno lahko definiramo **odvod n-tega reda** kot

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(n+1)} &= \left(f^{(n)}\right)', \ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Omenimo še alternativen zapis odvoda reda n: $\frac{d^n f}{dx^n} := f^{(n)}$.

Zgled. $f(x) = e^{2x}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x}, \\ f''(x) &= 4e^{2x}, \ldots, \\ f^{(n)}(x) &= 2^n e^{2x} \end{aligned}$$

Rečemo, da je funkcija n-**krat zvezno odvedljiva**, če so vse funkcije $f, f', \ldots f^{(n)}$ zvezne.

Označbe:

$$\begin{aligned} C(a,b) &= \{f;\ f \text{ je zvezna na } (a,b)\} \\ C[a,b] &= \{f;\ f \text{ je zvezna na } [a,b]\} \\ C^1(a,b) &= \{f;\ f \text{ je zvezno odvedljiva na } (a,b)\} \\ C^n(a,b) &= \{f;\ f \text{ je } n\text{-krat zvezno odvedljiva na } (a,b)\}, \quad n = 1,2,\ldots \end{aligned}$$

Seveda velja:

$$\ldots C^n(a,b) \subseteq C^{n-1}(a,b) \subseteq \ldots \subseteq C^1(a,b) \subseteq C(a,b).$$

5.4.3 Taylorjev polinom

Pri aproksimaciji z diferencialom smo dano funkcijo v okolici neke točke aproksimirali z linearno funkcijo. Kaj pa če bi namesto linearne poiskali kvadratno, kubično ali pa polinomsko funkcijo, ki bi (lokalno, v neki okolici dane točke) "dobro"aproksimirala dano funkcijo.

Rečemo, da imata funkciji f in g v točki a **dotik reda** n, če je $f(a) = g(a)$ in se v tej točki ujemajo tudi vrednosti vseh odvodov do vključno reda n:

$$f'(a) = g'(a), f''(a) = g''(a), \ldots, f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a).$$

Izrek 5.4.7 ***(Taylor)*** *Funkcija f naj bo n-krat zvezno odvedljiva na intervalu $[a,x]$ in $(n+1)$-krat odvedljiva na (a,x). Potem obstaja število $\xi \in (a,x)$, za katerega je*

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x,\xi),$$

polinom stopnje n

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \end{aligned}$$

*se imenuje **Taylorjev polinom**, izraz*

$$R_n(x,\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a,x) \ \text{ali}\ \xi \in (x,a),$$

*pa **ostanek** in predstavlja napako aproksimacije funkcije s Taylorjevim polinomom.*

Različica zapisa:
$x - a = h, \quad x = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(h,\theta)$$

$$R_n(h,\theta) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1.$$

Zgled. $f(x) = e^x$, $a = 0$.

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(a) = f^{(n)}(0) = 1$ za vsak $n = 0, 1, 2, \ldots$. Potem je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,\xi)$$
$$R_n(x,\xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^n, \quad 0 < \xi < x$$

Če bi iskali recimo približek za vrednost $e^{0.2}$, $n = 3$, bi lahko napravili oceno napake:

$$0 < \xi < 0,2; \quad \text{zelo groba ocena: } e^\xi < 2$$

Potem je $R_3(x,\xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^3 < \frac{2}{4!}(0,2)^3 \doteq 6.7 \times 10^{-4}$.

Dokaz Taylorjevega izreka. Naj bo $g(x) = (x-a)^{n+1}$. Za pare funkcij $(f,g), (f',g') \ldots, \left(f^{(n)}, g^{(n)}\right)$ bomo večkrat zaporedoma uporabili Cauchyjev izrek, pri tem pa bomo upoštevali, da je

$$f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a), \ k = 1, 2, \ldots, n$$

in so vsi odvodi $f^{(k)}, g^{(k)}, k = 1, 2, \ldots, n$, zvezne funkcije na $[a,x]$, $f^{(n)}$ in $g^{(n)}$ pa odvedljiva na (a,x).

Pišimo na kratko $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Gotovo je

$$R_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - P_n^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

in

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{n+1}(x).$$

Potem po Cauchyjevem izreku najprej obstaja taka točka $x_1 \in (a,x)$, da je

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n(x) - \overbrace{R(a)}^{=0}}{g(x) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)}.$$

Podobno je za neki $x_2 \in (a,x_1)$ izpolnjeno $\frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)} = \frac{R_n'(x_1) - R_n'(a)}{g'(x_1) - g'(a)} = \frac{R_n''(x_2)}{g''(x_2)}$. Nadaljujemo in dobimo

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{R_n'(x_1)}{g'(x_1)} = \ldots = \frac{R_n^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}, \quad \xi \in (a,x_n) \subseteq (a,x).$$

Ker je $g(x) = (x-a)^{n+1}$, je $g^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ in

$$\frac{R_n(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

od koder sledi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

5.5 Uporaba odvoda

5.5.1 Monotonost, konveksnost in konkavnost

Odvedljiva funkcija f je na intervalu I:
– **naraščajoča**, če je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in I$
– **padajoča**, če je $f'(x) < 0$ za vsak $x \in I$

Obe dejstvi sta posledici Lagrangevega izreka. Denimo, da je $f'(x) > 0$ za vsak $x \in I$. Če izberemo poljubna $x_1 < x_2$ iz intervala I, je $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$.

Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f je na intervalu I velja:
– Če je $f''(x) > 0$, $x \in I$, je f **konveksna** (graf funkcije je v vsaki točki nad tangento, k-ji tangent z naraščajočim x rastejo):

npr.: $f(x) = x^2$, $I = \mathbb{R}$,
– Če je $f''(x) < 0$, $x \in I$, je f **konkavna** (graf funkcije je v vsaki točki pod tangento, k-ji tangent z naraščajočim x padajo):

npr.: $f(x) = -x^2$, $I = \mathbb{R}$.

Z uporabo Taylorjevega izreka ugotovimo, da je za nek $\xi \in (a, x)$ in $y_t(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = R_1(x)$

$$f(x) - y_t(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)^2.$$

Pri pogoju $f''(x) > 0$, $x \in I$, je tudi $f''(\xi) > 0$, in tako $f(x) > y_t(x)$. Pri tem je $y_t(x)$ vrednost linearne funkcije, ki predstavlja tangento. Podobno sklepamo v primeru, ko je $f'' < 0$.

5.5.2 Stopnja ničle funkcije

Naj bo funkcija f zadošča pogojem Taylorjevega izreka pri nekem n in ima ničlo v točki a, torej $f(a) = 0$ in hkrati naj bodo še $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$.

Potem je za nek $\xi_x \in (a, x)$ izpolnjeno

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \\ &= (x-a)^n \left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a) \right) \\ &= (x-a)^n g(x), \end{aligned}$$

kjer $g(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-a)$ in $g(a) \neq 0$. Rečemo, da ima funkcija f v točki a **ničlo stopnje** n, če lahko zapišemo $f(x) = (x-a)^n g(x)$, kjer $g(a) \neq 0$.

5.5.3 Lokalni ekstremi in prevoji

Pravimo, da ima funkcija f v točki a lokalni **maksimum**, če za vse x iz dovolj majhne okolice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ števila a velja, da je $f(x) < f(a)$, $x \neq a$. Podobno, f ima v točki a **lokalni minimum**, če za vse x iz dovolj majhne okolice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ števila a velja, da je $f(x) > f(a)$, $x \neq a$. Na intervalu I ima funkcija f **globalni maksimum** v točki a, če je $f(x) \leq f(a)$ za vsak $x \in I$. Analogno, funkcija f ima **globalni minimum** v točki a, če je $f(x) \geq f(a)$ za vsak $x \in I$. Lokalni ekstrem je lahko hkrati tudi globalni, vendar nasploh ni nujno. Za zvezne funkcije velja naslednji izrek:

Izrek 5.5.1 *Zvezna funkcija na zaprtem intervalu je vedno v obe smeri omejena in doseže svoj minimum in maksimum.*

Z drugimi besedami: če je na zaprtem intervalu $[a, b]$ število M natančna zgornja meja funkcije f, potem obstaja točka $c \in [a, b]$ z lastnostjo $f(c) = M$. Podobno velja za najmanjšo vrednost.

Točke a, kjer je $f'(a) = 0$ imenujemo **stacionarne točke** funkcije f. Stacionarne točke torej poiščemo tako, da rešimo enačbo $f'(x) = 0$. Med stacionarnimi točkami najdemo lokalne ekstreme (lokalni minimum in lokalni maksimum) in prevoje.

Če je funkcija samo enkrat odvedljiva, lahko o lokalnem maksimumu v točki a sklepamo iz tega, da na majhnem intervalu $(a-\delta, a)$ funkcija narašča in na intervalu $(a, a+\delta)$ pada.

Za dvakrat zvezno odvedljivo funkcijo f (v okolici dane stacionarne točke a, torej $f'(a) = 0$) velja:

- če je $f''(a) > 0$, ima f v točki $x = a$ lokalni minimum,
- če je $f''(a) < 0$, ima f v točki $x = a$ lokalni maksimum,
- če je $f''(a) = 0$, ne vemo; uporabimo lahko npr. odvode višjega reda.

Denimo, da je f'' zvezna funkcija na neki okolici točke a in je $f''(a) > 0$. Potem je zaradi zveznosti $f'' > 0$ vsaj še na neki okolici točke a. Uporabimo Taylorjev izrek za $n = 3$.

$$f(x) - f(a) = \frac{0}{1!}(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 \geq 0$$

za vsak x iz neke okolice točke a. To pa pomeni, da je $f(a) \leq f(x)$ in je v točki a lokalni minimum. Če pa je $f''(a) = 0$ in dodatno vemo še, da je $f'''(a) \neq 0$, v točki a ni ekstrema, je **sedlo**. V tem primeru je namreč

$$f(x) - f(a) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^3$$

in je predznak razlike $f(x) - f(a)$ zaradi tretje potence odvisen od tega ali je x levo ali desno od a. Sedlo je torej točka na grafu, kjer je tangenta vodoravna ($f'(a) = 0$), vendar je v neki okolici točke a funkcija bodisi naraščajoča, bodisi padajoča.

Ugotovimo tudi, da mora imeti funkcija f' ničlo lihe stopnje; takrat se bo namreč v točki a funkcija f prelevila iz naraščajoče ($f' > 0$) v padajočo ($f' < 0$), ki ima torej lokalni maksimum, ali obratno. Če pa bo funkcija f' imela ničlo sode stopnje v dani točki, bom tam nastopilo sedlo.

Prevoj rečemo točki, kjer funkcija preide iz konveksne v konkavno ali iz konkavne v konveksno. Prevoj dva krat zvezno odvedljive funkcije lahko nastopi le v točki, kjer je $f''(a) = 0$. Prevoj bo, če je $f'''(a) \neq 0$ oziroma je prvi neničelni odvod stopnje vsaj 3 v točki a lihe stopnje. Če se naj funkcija f prelevi iz npr. konveksne v konkavno, mora f'' spremeniti predznak iz pozitivnega v negativnega. Če je f'' zvezna funkcija, se to lahko zgodi le, če je $f''(a) = 0$ in ničla f'' lihe stopnje.

Določanje globalnih ekstremov odvedljive funkcije

Odvedljiva funkcija doseže globalni ekstrem na zaprtem intervalu v lokalnem ekstremu ali pa na robu intervala. Če na primer iščemo globalni maksimum odvedljive funkcije f na intervalu $[a, b]$, poiščemo največjo vrednost v množici $\{f(a), f(b)\} \cup \{f(c), \text{ v } c \text{ je lokalni ekstrem}\}$. Če je funkcija le zvezna in ni odvedljiva v kakih točkah (graf ima "konice"), pa lahko globalni ekstrem nastopi tudi v takih točkah.

Zgledi:

1. Funkcija $f(x) = |x|$ v točki $x = 0$ ni odvedljiva, ima pa v tej točki lokalni in hkrati tudi globalni minimum.

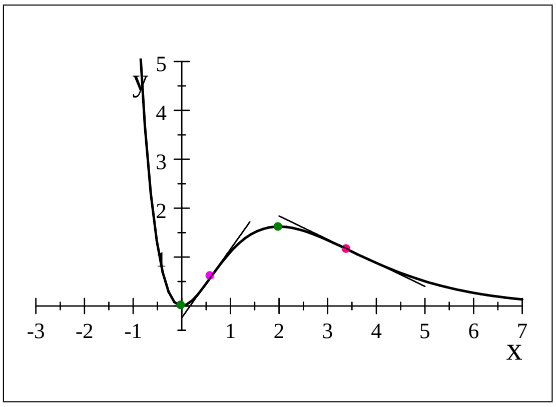
2. Funkcija $f(x) = 3 - \sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$, je zvezna na celem definicijskem območju in zvezno odvedljiva na $(-1, 1)$. Globalni maksimum doseže na robovih, pri 1 in -1 ima vrednost 3. S pomočjo odvoda pa bi ugotovili, da je lokalni (in hkrati globalni) minimum pri $x = 0$ z vrednostjo 2.

3. Natančno nariši graf funkcije $f(x) = 3x^2 e^{-x}$.

   - $D_f = \mathbb{R}$, edina ničla: $x = 0$ druge stopnje,
   - limiti na "robu"D_f : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$; poševne asimptote ni.

- stacionarne točke: $f'(x) = -3x(x-2)e^{-x} = 0$, stacionarni točki sta $x = 0$ in $x = 2$.

  klasifikacija stacionarnih točk z drugim odvodom:
  $f''(x) = 3e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$;
  vrednost f'' v stacionarnih točkah: $f''(0) = 6 > 0$ in $f''(2) = -6e^{-2} < 0$. Torej je točka $(0, f(0)) = (0, 0)$ lokalni minimum in točka $(2, f(2)) = (2, 12e^{-2}) \approx (2, 1.6)$ lokalni maksimum.
- prevoj: $f''(x) = 0$, torej $x^2 - 4x + 2 = 0$, rešitvi sta $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$. Prevoja sta v točkah $(x_1, f(x_1)) \approx (3.4,\ 1.2)$ in $(x_2, f(x_2)) \approx (0.6,\ 0.6)$. V prevoju tangenta graf prereže!
- konveksnost: $x < 2-\sqrt{2}$ ali $x > 2+\sqrt{2}$, konkavnost: $2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}$



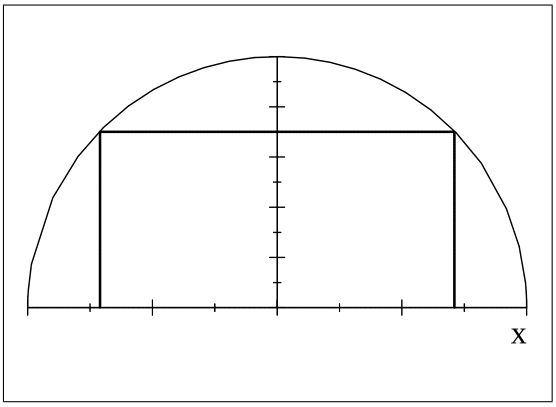
Slika 5.52: Graf funkcije $f(x) = 3x^2e^{-x}$ z značilnimi točkami

5.5.4 Reševanje optimizacijskih problemov

Zastavimo si naslednja problema.

1. *Določi mere pravokotnika z danim obsegom o tako, da bo imel kar največjo ploščino.*
   Izrazimo obseg $o = 2(a+b)$ in ploščino $p = ab$ s stranicama pravokotnika. Iščemo maksimum ploščine, zato ploščino p izrazimo kot funkcijo ene spremenljivke, recimo a. Zato iz $o = 2(a+b)$ izrazimo $b = \frac{1}{2}(o - 2a)$, nato je
   $$p(a) = \frac{1}{2}a(o - 2a).$$
   Iščemo maksimum te funkcije. Prvi odvod mora biti enak 0.
   $$\begin{aligned} p'(a) &= \left(\frac{1}{2}ao - a^2\right)' = \frac{o}{2} - 2a = 0 \\ &\Rightarrow a = \frac{o}{4},\quad b = \frac{1}{2}(o - 2a) = \frac{1}{2}\left(o - \frac{o}{2}\right) = \frac{o}{4}. \end{aligned}$$
   Ugotovili smo, da je tak pravokotnik kvadrat. Res smo dobili maksimum, ker je $p''(a) = -2 < 0$.

2. *Izmed vseh pravokotnikov, ki so včrtani polkrogu s polmerom r tako, da se osnovnici ujemata, poišči tistega z največjo možno ploščino.*



Slika 5.53: Polkrogu včrtan pravokotnik

Ploščina $p(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \leq x \leq r$, mora biti maksimalna. $p'(x) = \frac{2\left(r^2-2x^2\right)}{\sqrt{r^2-x^2}}$, od koder ugotovimo, da je $2x^2 = r^2$, torej je $x = x_0 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. Z drugim odvodom $p''(x) = \frac{-2x\left(3r^2-2x^2\right)}{\left(r^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ in upoštevanjem, da je v stacionarni točki $2x_0^2 = r^2$, ugotovimo, da je v tej točki $p''(x_0) = -4$, torej smo res dosegli lokalni maksimum, ki pa je očitno tudi globalen, saj je $p(-r) = p(r) = 0$.

5.6 Naloge

1. Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - \frac{1}{x^2}$, R: $2\left(10x - 3x + \frac{1}{x^3}\right)$.

   (b) $f(x) = \frac{2x^3}{5} - \frac{3}{2x}$, R: $3\left(\frac{2x^2}{5} + \frac{1}{x^2}\right)$.

   (c) $f(x) = \ln(2x) - \sin x$, R: $\frac{1}{x} - \cos x$.

   (d) $f(x) = x^3 \sin x - 2x^2 \cos x$, R: $5x^2 \sin x + x^3 \cos x - 4x \cos x$.

   (e) $f(x) = \frac{x^2-x}{x^3+1}$, R: $-\frac{x^4-2x-2x^3+1}{\left(x^3+1\right)^2}$.

   (f) $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x}{\cos x}$, R: $\frac{\left(\cos^3 x\right)x - \sin x \cos^2 x + x^2 \cos x + x^3 \sin x}{x^2 \cos^2 x}$.

   (g) $f(x) = e^{-x} + xe^{3x}$, R: $\left(-e^{-4x} + 1 + 3x\right)e^{3x}$.

   (h) $f(x) = (5x-3)^{10}$, R: $50(5x-3)^9$.

   (i) $f(x) = \ln(5x-1)$, R: $\frac{5}{5x-1}$.

   (j) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, R.: $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

   (k) $f(x) = \arctan\frac{1}{x}$, R: $-\frac{1}{x^2+1}$.

   (l) $\sin x - \cos y = 0$ (implicitno podana funkcija $y = y(x)$), R:$y' = -\frac{\cos x}{\sin y}$.

(m) $e^x \cos y - e^y \sin x = 0$.R: $y' = \frac{e^x \cos(y) - e^y \cos x}{e^x \sin y + e^y \sin x}$.

2. Določi enačbi tangente in normale na graf funkcije $f(x) = 1 + x\sqrt{x^2+4}$ v točki $x = 0$. R: $y = 2x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

3. S pomočjo diferenciala približno izračunaj $\sqrt[3]{9}$. R: $\sqrt[3]{9} \approx 2.08$.

4. Natančno nariši grafe funkcij (razvidni naj bodo ekstremi, prevoji, kje funkcija narašča, pada, kje je konveksna, konkavna)

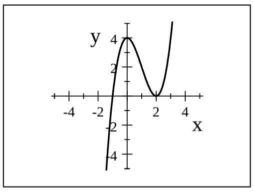
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

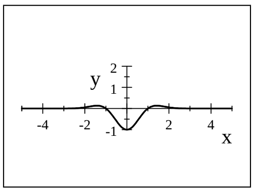
   (b) $f(x) = (x^2 - 1)\, e^{-x^2}$

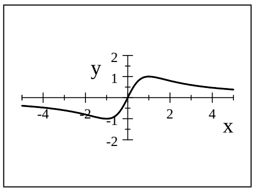
   (c) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

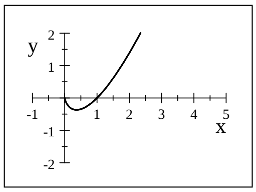
   (d) $f(x) = x \ln x$

   R:









5. Določi pozitivno realno število x tako, da bo vsota $x + \frac{1}{x}$ najmanjša., R.: $x = 1$.

6. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunaj limite:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$, R.: 0.

   (b) $\lim_{x\to 0} \ln x \tan x$, R.: 0.

   (c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-4x+3}$, R.: $-\frac{3}{2}$.

6 Integral

6.1 Nedoločeni integral

6.1.1 Definicija in lastnosti

Newton in Leibniz sta v drugi polovici 17. stoletja ugotovila, da je mogoče ploščino med grafom dane funkcije (seveda ne čisto poljubne), osjo x in dvema vzporednicama z osjo y izračunati, če poznamo funkcijo $F(x)$, katere odvod je enak dani funkciji $f(x)$. Taki funkciji $F(x)$, za katero je

$$F'(x) = f(x), \tag{5}$$

rečemo **primitivna funkcija** ali **nedoločeni integral** funkcije f. Hitro opazimo, da funkcija F pri dani funkciji f nikakor ni enolično določena, saj je za poljubno konstanto C

$$(F(x) + C)' = f(x)$$

in je torej $F(x)+C$ tudi primitivna funkcija funkcije f. Govorimo torej o celi družini primitivnih funkcij za dano funkcijo f. To pa so tudi vse funkcije z lastnostjo (5), saj iz $F' = G' = f$ sledi, da je$(F-G)' = 0$ in torej $F(x) = G(x) + C$ za neko konstanto C. Pišemo

$$F(x) = \int f(x)\,dx + C.$$

Tak zapis je bolj razumljiv, če si predstavljamo integriranje kot obratno smer diferenciala. Namreč, če je

$$dF(x) = F'(x)\,dx,$$

bo integral "uničil" diferencial

$$\int dF(x) = F(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Če upoštevamo, da je odvod funkcije $x^2 = 2x$, bo

$$\int (2x)\,dx = x^2 + C,$$

saj za poljubno konstanto C velja $(x^2 + C)' = 2x$.

Iz definicije hitro sledita naslednji lastnosti:

1. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ integriramo lahko členoma
2. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ izpostavljanje konstante k.

6.1.2 Integracijske metode

Najprej sestavimo tabelo nedoločenih integralov elementarnih funkcij, ki bo skorajda v obratni smeri napisana tabela odvodov.

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$
4. $\int \sin x \; dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x \; dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int \cosh x \; dx = \sinh x + C$
9. $\int \sinh x \; dx = \cosh x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

Medtem, ko smo z nekaj pravili praktično znali odvajati vse elementarne funkcije, pa z integriranjem ne bo tako. Že za preproste funkcije se namreč izkaže, da se njihove primitivne funkcije ne izražajo z elementarnimi funkcijami. Take so npr.:

$$e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\cos x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}.$$

Dogovorimo se še, da bomo pri računanju nedoločenih integralov aditivno konstanto pripisali šele pri končnem rezultatu.

- **Uvedba nove spremenljivke**

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(t)\, dt, \qquad \text{če je } t = g(x)\,. \tag{6}$$

Zgled.

$$\int e^{x^2} x dx =$$

$$t = g(x) = x^2,$$

$$dt = g'(x)\, dx = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} dt.$$

Torej je

$$\int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Novo spremenljivko t smo v tem primeru uvedli prav zato, ker je xdx do množilne konstante enak diferencialu $d\left(x^2\right)$.

Preverimo še formulo (6): Naj bo $F(t) = \int f(t)\,dt$, vemo pa, da je $F'(t) = f(t)$. Izračunajmo

$$\frac{d}{dx}\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\,g'(x)$$

in

$$\frac{d}{dx}F(t) = \frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x).$$

Tako smo ugotovili, da se odvoda leve in desne strani enakosti (6) ujemata, torej se integrala razlikujeta kvečjemu za aditivno konstanto.

- **Integral tipa "števec je odvod imenovalca"**

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Ta obrazec dobimo s pomočjo uvedbe nove spremenljivke $t = f(x)$, nato je $dt = f'(x)\,dx$ in

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|f(x)| + C.$$

Zgleda:

– $\int \tan x \; dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = \ln|\cos x| + C,$
– $\int \frac{xdx}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$

- **Namesto x je linearna funkcija $ax + b$**

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ če je}$$
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Ta lastnost je posledica uvedbe nove spremenljivke $t = ax + b$.

Zgledi:

– $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + C$
– $\int \cos 2x \; dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$
– $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$

- **Integracija "po delih" (per partes)**

$$\int u \; dv = uv - \int v \; du \tag{7}$$

To pravilo izhaja iz pravila za odvajanje produkta:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pomnožimo enakost z dx,

$$\begin{aligned}(uv)'\,dx &= u'dx\ v + u\ v'dx\\ d\,(uv) &= vdu + udv,\end{aligned}$$

in integriramo

$$\begin{aligned}\int d\,(uv) &= \int v\ du + \int u\ dv\\ uv &= \int v\ du + \int u\ dv,\end{aligned}$$

od koder sledi želeni rezultat. S pomočjo tega pravila bomo večinoma integrirali take produkte funkcij, kjer se en faktor z odvajanjem poenostavi, drugega pa je preprosto integrirati.

Zgledi

– $\int xe^x dx$. Vpeljemo

$$u = x, \qquad dv = e^x dx$$

in izračunamo

$$du = u'dx = dx, \qquad v = \int dv = \int e^x dx = e^x.$$

Uporabimo še pravilo

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int udv\\ &= uv - \int vdu\\ &= xe^x - \int e^x dx\\ &= xe^x - e^x\\ &= (x-1)\,e^x.\end{aligned}$$

– Podobno bi izračunali tudi integrale $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n \cos x dx$, kjer je $n \in \mathbb{N}$. V vseh teh primerih bi postavili $u = x^n$ in izkoristili dejstvo, da se z odvajanjem zniža eksponent potence.

– $\int \ln x\ dx$. Integrala logaritemske funkcije doslej še nismo omenili, ne najdemo ga niti v osnovni tabeli. Ima pa lepo lastnost, da ga odvajanje poenostavi v preprosto racionalno funkcijo. Tokrat bomo za u in dv vzeli

$$u = \ln x, \qquad dv = dx$$

in izračunali pripadajoča para

$$du = \tfrac{dx}{x}, \qquad v = x.$$

Nato je

$$\begin{aligned}\int \ln x \; dx &= uv - \int v du \\ &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x (\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

- **Integrali racionalnih funkcij** $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$,

Najprej ločimo dva primera:

a) stopnja $p \geq$ **stopnja** q; v tem primeru najprej ulomek zdelimo, kot vidimo na primeru:

$$\begin{array}{l} (2x^2 - 1) : \quad (x^2 - 1) \;=\; 2 \\ \underline{-2 (x^2 - 1)} \\ \quad = 1 \end{array}$$

od koder sledi

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} = 2 + \frac{1}{x^2 - 1}$$

in

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx &= \int 2dx + \int \frac{dx}{x^2 - 1} \\ &= 2x + \int \frac{dx}{x^2 - 1}.\end{aligned}$$

Tako nam nasploh preostane še integracija polinoma (kar že znamo) in racionalne funkcije, katere števec je nižje stopnje kot imenovalec.

b) stopnja $p <$ **stopnja** q

Z **razcepom na parcialne ulomke** razstavimo imenovalec do kvečjemu kvadratnih nerazcepnih faktorjev, pri čemer nastopi več možnosti.

b.1) Če so v imenovalci **sami linearni faktorji**,

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

Konstanti A in B določimo tako, da bo zgornja enakost veljala za vse x, razen seveda za $x \in \{-1, 1\}$. Desno stran damo na skupni imenovalec in dobimo:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{(A + B) x + (A - B)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Sistem $A+B=0$ in $A-B=1$ nam da $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$ in integral se nato glasi

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}\\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

b.2) Kvadratni nerazcepni faktor ax^2+bx+c (vendar na potenco 1) prinese v razcepu člen

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

Npr.: $\int \frac{dx}{(x^2+1)x} = \int \frac{Ax+B}{x^2+1}dx + C\int \frac{dx}{x}$; konstante A, B in C je treba še določiti in izračunati integrale. Denimo, da je $f(x)=ax^2+bx+c$. Potem integral

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{Ax+B}{f(x)}dx$$

razcepimo na naslednji način

$$\int \frac{Ax+B}{f(x)}dx = D\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx + E\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

npr.:

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5} - 3\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx.$$

Nadalje je

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2)+C.$$

b.) Če imamo faktorje na višjo potenco kot ena, uporabimo formulo **Ostrogradski**, ki jo bomo zapisali le za "dovolj splošen"posebni primer.

$$\begin{aligned}&\int \frac{p(x)}{(x-1)^k (x+2)^m (x^2+1)^n}dx =\\ &\quad \frac{A_N(x)}{(x-1)^{k-1}(x+2)^{m-1}(x^2+1)^{n-1}} + \int \frac{C}{x-1}dx + \int \frac{D}{x+2}dx + \int \frac{Ex+F}{x^2+1}dx,\end{aligned}$$

pri tem je stopnja polinoma $A_N(x)$ z neznanimi koeficienti za 1 manjša kot stopnja imenovalca: torej

$$N = \mathrm{st}A(x) = (k-1)+(m-1)+2(n-1)-1.$$

Da določimo neznane koeficiente, je zgornjo enakost potrebno najprej odvajati!

Zgled. $\int \frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)^2}dx = \frac{A_2x^2+A_1x+A_0}{(x-1)(x+2)^0(x^2+1)} + \int \frac{B}{(x-1)}dx + \int \frac{C}{(x+2)} + \int \frac{Dx+E}{(x^2+1)}dx$ $= \frac{A_2x^2+A_1x+A_0}{(x-1)(x+2)^0(x^2+1)} + \int \frac{B}{(x-1)}dx + \int \frac{C}{(x+2)} + \int \frac{Dx+E}{(x^2+1)}dx$. Enakost odvajamo in dobimo

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)^2} = \left(\frac{A_2x^2+A_1x+A_0}{(x-1)(x+2)^0(x^2+1)}\right)' + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)}.$$

Če bi odvajanje izraza v oklepaju še zares izvedli, bi prišli so linearnega sistema enačb za neznane konstante A_2, A_1, A_0 in B, C, D in E. Pa denimo, da smo to izvedli. Potem je potrebno določiti še integrale

$$\int \frac{C}{x-1}dx, \quad \int \frac{D}{x+2}dx \quad \text{in} \quad \int \frac{Ex+F}{x^2+1}dx.$$

Hitro vidimo, da je

$$\begin{aligned} \int \frac{C}{x-1}dx &= C\ln|x-1| + konst., \\ \int \frac{D}{x+2}dx &= D\ln|x+2| + konst. \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \int \frac{Ex+F}{x^2+1}dx &= \frac{E}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} + F\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{E}{2}\ln\left(x^2+1\right) + F\arctan x + konst. \end{aligned}$$

Zgled. Tokrat $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}$ res do konca izračunajmo. Najprej ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} x^2+4x+8 &= (x+2)^2+4 \\ &= 4\left(\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1\right) \\ &= 4\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+1\right) \end{aligned}$$

zato je smotrno vpeljati novo spremenljivko $t = \frac{x}{2}+1$, $dt = \frac{dx}{2}$ in $x = 2(t-1)$. Tako se integral najprej poenostavi v

$$\int \frac{dx}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{1}{8}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt$$

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{At+B}{t^2+1} + \int \frac{Ct+D}{t^2+1}dx$$

in z odvajanjem

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2} &= \left(\frac{At+B}{t^2+1}\right)' + \frac{Ct+D}{t^2+1}\\ &= -\frac{At^2+2Bt-A}{\left(t^2+1\right)^2} + \frac{Ct+D}{t^2+1}\\ &= \frac{-At^2-2Bt+A+(Ct+D)\left(t^2+1\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\\ &= \frac{Ct^3+(D-A)\,t^2+(C-2B)\,t+A+D}{\left(t^2+1\right)^2}.\end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov v števcu dosežemo $C=0$, $D=A$, $B=0$ in $A+D=1$, od koder je $A=D=\frac{1}{2}$ in $B=C=0$. Tako je

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt &= \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1}\\ &= \frac{t}{2\left(t^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan t.\end{aligned}$$

Nazadnje še vpeljemo nazaj $t=\frac{x}{2}+1$ in dobimo končni rezultat

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\left(x^2+4x+8\right)^2} &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{\frac{x}{2}+1}{2\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right)\right)\\ &= \frac{x+2}{8\left(x^2+4x+8\right)} + \frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x}{2}+1\right) + konst.\end{aligned}$$

Iz teh primerov lahko posplošimo, da je mogoče vsem racionalnih funkcijam izračunati nedoločene integrale. V rezultatu pa lahko nastopajo edino racionalne funkcije (vključno s polinomi), logaritemska in arkustangens.

- **Integrali iracionalnih funkcij**

a) V integralu racionalno nastopajo koreni $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$, ... Z uvedbo nove spremenljivke $x=t^r$, kjer je r najmanjši skupni večkratnik korenskih eksponentov, prevedemo integral na integral racionalne funkcije.

b) $\int R\left(x, \sqrt[p]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ uženemo z uvedbo $\frac{ax+b}{cx+d}=t^p$.

c) Za integral

$$\int \frac{p_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad p_n(x) \text{ je dani polinom stopnje } n,$$

uporabimo nastavek

$$\int \frac{p_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = A_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

kjer je $A_{n-1}(x)$ polinom stopnje $n-1$ z neznanimi koeficienti, določiti je potrebno $n+1$ neznank. Na Primer,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{x^2+1} + D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Za izračun konstant A, B, C in D moramo zgornjo enakost najprej odvajati. Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} &= (2Ax+B)\sqrt{x^2+1} + \frac{(Ax^2+Bx+C)\,2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{(2Ax+B)\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{(Ax^2+Bx+C)\,x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{D}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

S primerjanjem koeficientov pri istoležnih potencah izračunamo konstante A, B in C. Nato je potrebno določiti še integral $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Kvadratno funkcijo pod korenom najprej preoblikujemo v temensko obliko. Odvisno od a in od diskriminante bomo z uvedbo nove spremenljivke dobili bodisi integral tipa $\int \frac{dt}{\sqrt{p^2-t^2}}$ ali pa $\int \frac{dt}{\sqrt{p+t^2}}$, $p \in \mathbb{R}$, prvi se izraža z arkus sinusom, drugi pa z logaritmom.

- **Integrali trigonometričnih funkcij**

  - $\int \sin ax \sin bx\ dx$, $\int \sin ax \cos bx\ dx$, $\int \cos ax \cos bx\ dx$;
    uporabimo trigonometrične formule za linearizacijo:

$$\begin{aligned}\sin ax \sin bx &= \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right) \\ \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right) \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)\end{aligned}$$

Zgled:

$$\begin{aligned}\int \sin 3x \cos 4x dx &= \frac{1}{2}\int(\sin 7x - \sin x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} + \cos x\right) + C.\end{aligned}$$

  - $\int \sin^n x \cos^m x\ dx$;
    Cilj je najprej znižati potence, pri tem pa ločimo dva primera:
    a) vsaj eden izmed m, n je **lih**; v tem primeru uvedemo novo spremenljivko sin ali cos; če je v integralu $\sin x$ na liho potenco, potem uvedemo $t = \cos x$ za novo spremenljivko, sicer pa $t = \sin x$. V zgledu, ki sledi, bi bilo

načeloma celo vseeno; mi bomo vzeli $t = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos dx &= \int \sin^3 x \left(\cos x dx\right)\\ &= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4}\\ &= \frac{\sin^4 x}{4} + C.\\ &= \int \sin^3 x \; d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^4 x}{4} + C\end{aligned}$$

Pogosto se uporablja tudi zapis

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos dx &= \int \sin^3 x \; d\left(\sin x\right)\\ &= \frac{\sin^4 x}{4} + C.\end{aligned}$$

b) oba, m in n sta **soda**; uporabimo formuli

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2},\\ \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\end{aligned}$$

in tako znižamo potenco.

- $\int x^n \sin x \; dx$, $\int x^n \cos x \; dx$, $n \in \mathbb{N}$, n krat zaporedoma integriramo po delih.
- $\int R\left(\tan^2 x\right) dx$, kjer R racionalna funkcija; uvedemo novo spremenljivko $t = \tan x$.
- $\int R\left(\tan x\right) dx$, kjer je R racionalna funkcija; uvedemo novo spremenljivko $t = \tan \frac{x}{2}$.
- $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$ se ne izražata z elementarnimi funkcijami.

- **Integrali eksponentnih funkcij**
  - $\int R\left(e^x\right) dx$, kjer je R "lepa"; uvedemo $t = e^x$, saj je $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.
  - $\int x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$, integriramo n-krat per partes
  - $\int e^{ax} \sin bx \; dx$ ali $\int e^{ax} \cos bx \; dx$, integriramo 2 krat po delih in pridemo do enačbe za iskani integral.
  - $\int \frac{e^x}{x}$, $\int e^{x^2} dx$ se ne izražata z elementarnimi funkcijami.

- **Integrali logaritemskih in inverznih trigonometričnih funkcij:**
  - $\int f\left(\ln x\right) \frac{dx}{x}$, $\int f\left(\arcsin x\right) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int f\left(\arctan x\right) \frac{dx}{1+x^2}$; te rešimo z uvedbo nove spremenljivke.
  - $\int g\left(x\right) \ln x dx$, $\int g\left(x\right) \arcsin x dx$, $\int g\left(x\right) \arctan x dx$; integriramo "po delih", kjer se z odvajanjem funkcije $\ln x$, $\arcsin x$ in $\arctan x$ ipd. poenostavijo.
  - $\int \frac{dx}{\ln x}$ se ne izraža z elementarnimi funkcijami.

6.2 Riemannov (določeni) integral

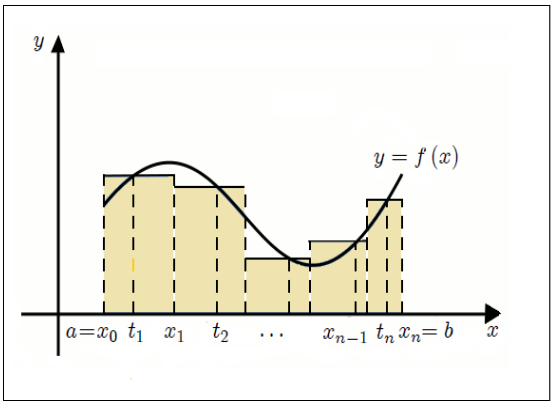
6.2.1 Motivacija

Problem, ki je vzpodbudil razvoj integrala, je izračun ploščine lika, ki ga omejuje ena ali več krivulj.

Denimo, da imamo na intervalu $[a,b]$ dano zvezno nenegativno funkcijo $x \mapsto f(x)$. Želimo izračunati ploščino lika p med grafom funkcije f, osjo x in premicama $x = a$ in $x = b$. Intuitivno se zadeve lotimo takole: interval $[a,b]$ razdelimo na n podintervalov, to delitev določajo točke

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Na vsakem izmed podintervalov $[x_i, x_{i+1}]$ izberimo še točko t_{i+1}.



Slika 6.54: Delitev intervala

Označimo $\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$. Nato je ploščina i-tega pravokotnika $\Delta p_i = f(t_i)\Delta x_i$ približek za ploščino i-tega "traku", iz katerih je sestavljen celotni lik. Če ploščine teh pravokotnikov seštejemo, dobimo

$$p \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Videti je, da se bomo tem bolj približali natančni ploščini, čim večji bomo izbrali n, hkrati pa morajo biti tudi širine podintervalov Δx_i čim manjše.

6.2.2 Riemannova vsota in integrabilnost

Pri dani funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ izberimo delitev intervala $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ in množico točk $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ z lastnostjo $x_{i-1} \le t_i \le x_i$. Označimo maksimalno širino podintervalov z $\Delta_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$. Intuitivno je jasno, da bo treba izbirati take delitve intervala, da bo Δ_n čim manjša (posledično bo n velik, obratno pa ne bi bilo nujno res). Ob izbrani delitvi D in točkah T označimo z $S_{D,T}$ naslednjo vsoto

$$S_{D,T} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

Tej vsoti pravimo **Riemannova vsota**.

Definicija 6.2.1 ***(Riemannov ali določeni integral)***
Funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je ***v Riemannovem smislu integrabilna****, ali na kratko* ***integrabilna****, če obstaja tako število L, da je razlika $|S_{D,T} - L|$ poljubno majhna, če je le maksimalna širina podintervala Δ_n dovolj majhna.*

$$\forall \varepsilon > 0 \textit{ obstaja tak } \delta > 0, \textit{ da velja} : \Delta_n < \delta \Rightarrow |S_{D,T} - L| < \varepsilon.$$

Številu L s to lastnostjo rečemo ***Riemannov ali določeni integral*** *funkcije f na intervalu $[a, b]$ in ga označimo*

$$L = \int_a^b f$$

ali tudi

$$L = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Število L je torej integral funkcije f na intervalu $[a, b]$, če se z izbiro dovolj fine delitve intervala $[a, b]$, Riemannova vsota številu L približa na poljubno vnaprej izbrano natančnost. Včasih uporabimo tudi zapis

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\Delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, \Delta x_i,$$

pri čemer pa je ta limita nasploh zelo zapletena in je praviloma ne bomo uporabljali za izračun določenega integrala. Vendar pa se pri praktičnih primerih pogosto zelo naravno pojavijo Riemannove vsote, ki pripeljejo do uporabe integrala.

Poleg Riemannovega integrala obstajajo tudi drugi integrali, ki so posplošitve Riemannovega, npr.: Riemann-Stieltjesov in Lebesgueov integral, s katerimi se v tem delu ne bomo ukvarjali.

Lastnosti določenega integrala

1. $\int_a^b kf = k \int_a^b f$
2. $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, če je za vsak $x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$
4. $\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$, če je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$.
5. $\int_a^b 1 = b - a$.
6. $\int_b^a f := -\int_a^b f$
7. $\int_a^a f = 0$
8. Če je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, je v Riemannovem smislu integrabilna.

9. Če je funkcija na $[a,b]$ odsekoma zvezna, je integrabilna. Odsekoma zvezna funkcija ima le končno mnogo točk nezveznosti in še te so skoki: v teh točkah obstaja leva in desna limita.

10. Če je funkcija f integrabilna, je integrabilna tudi $|f|$ in velja

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Primerjaj s trikotniško neenakostjo!

11. Če je funkcija integrabilna na zaprtem intervalu I, je integrabilna tudi na vsakem podintervalu $[a,b] \subseteq I$. Dodatno, če je $c \in I$, velja še

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{8}$$

Z geometrijskega vidika, če je $a < c < b$, je to očitno, ploščino razdelimo pač na dva dela. Vendar se zlahka prepričamo, da zveza (8) velja za poljubne $a, b, c \in I$.

12. **Izrek o povprečni vrednosti.** Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$, obstaja taka točka $c \in [a,b]$, za katero je

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

Številu $f(c)$ rečemo **povprečna vrednost funkcije** f na intervalu $[a,b]$ in ga pogosto označimo z $\bar{f}_{[a,b]}$. Če je f nenegativna, je $\bar{f}_{[a,b]}$ višina pravokotnika z osnovnico $b-a$, ki ima isto ploščino kot lik med krivuljo $y = f(x)$, osjo x in premicama $x = a$ in $x = b$.

Spomnimo se ene izmed lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu, ki pravi, da zvezna funkcija zavzame **vse** vrednosti med maksimalno M in minimalno m. Hkrati pa je

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

oziroma

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

Torej f zavzame tudi vrednost $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ in je torej za neki $c \in [a,b]$ izpolnjeno $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

13. Naj bo f odsekoma zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$. Označimo S_+ vsoto ploščin likov nad osjo x, omejenih z grafom funkcije f in z S_- vsoto ploščin likov pod osjo x. Potem je vrednost določenega integrala enaka razliki ploščin nad osjo x in ploščin pod osjo x :

$$\int_a^b f = S_+ - S_-.$$

6.2.3 Osnovni (fundamentalni) izrek integralskega računa

Do sedaj še nismo omenili nobene učinkovite (brez zapletene limite) metode za izračun integrala. Izkazalo se je (Newton in Leibniz), da je določeni integral tesno povezan s primitivno funkcijo.

Izrek 6.2.2 ***(Osnovni izrek integralskega računa)***
Denimo, da je funkcija f v Riemannovem smislu integrabilna. Definirajmo

$$S(x) = \int_a^x f, \qquad \textit{za poljuben } x \in [a, b].$$

a) *S je zvezna in odvedljiva funkcija. Še več, $S'(x) = f(x)$ ali z drugimi besedami: S je primitivna funkcija funkcije f. Rečemo tudi, da je določeni integral zvezna in odvedljiva funkcija zgornje meje.*

b) *Če je F poljubna primitivna funkcija za funkcijo f, velja* ***Newton-Leibnizov obrazec***

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dokaz. Točko **a)** bomo preverili za poseben primer, ko je funkcija f zvezna. Izračunali bomo limito diferenčnega količnika za funkcijo S.

$$\begin{aligned} S'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f \end{aligned}$$

Uporabimo izrek o povprečni vrednosti:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(x+h-x) f(c), \qquad \text{za neki } c \text{ med } x \text{ in } x+h, \\ &= \lim_{h\to 0} f(c) \\ &= f(x), \qquad \text{ker je } f \text{ zvezna.} \end{aligned}$$

b) Naj bo F poljubna primitivna funkcija funkcije f. Torej je $F'(x) = f(x) = S'(x)$ oziroma $(F(x) - S(x))' = 0$. Sledi, da je $F(x) - S(x) = C$, za neko realno konstanto C. Vrednost integrala $\int_a^b f$ lahko izrazimo kot $S(b)$. Upoštevamo, da je $S(a) = \int_a^a f = 0$ in

$$F(b) - S(b) = C = F(a) - S(a) = F(a),$$

od koder sledi

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= S(b) \\ &= F(b) - C \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

□

6.2.4 Uporaba določenega integrala

Najprej bomo navedli le obrazce, ki jih bomo utemeljili na koncu razdelka.

1. **Ploščina**

   - med krivuljama $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f \leq g$, in premicama $x = a$ in $x = b$.
   $$p = \int_a^b (g(x) - f(x))\, dx. \tag{9}$$
   - izseka, ki ga določa krivulja v polarnih koordinatah $r = r(\varphi), \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$
   $$p = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2\, d\varphi \tag{10}$$
   - izseka, ki ga določa parametrično podana krivulja $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$:
   $$p = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt, \tag{11}$$
   kjer $\dot{x}$ in $\dot{y}$ predstavljata odvoda na spremenljivko t.

2. **Dolžina loka**

   - krivulje, ki jo določa graf funkcije $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.
   $$\begin{aligned} l &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned} \tag{12}$$
   - krivulje v parametrični obliki
   $$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \tag{13}$$
   - krivulje v polarni obliki
   $$l = \int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \tag{14}$$

3. **Prostornina vrtenine**;

   - del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi x :
   $$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_a^b y^2 dx \\ &= \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \end{aligned} \tag{15}$$

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $y = c$ in $y = d$ zavrtimo okrog osi y :

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_a^b f^{-1}(y)^2 \, dy \\ &= \pi \int_c^d x(y)^2 \, dy. \end{aligned}$$

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi y; tako dobimo cilindrično telo s prostornino:

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x) \, dx$$

4. **Površina vrtenine**;

- del krivulje $y = f(x)$ med premicama $x = a$ in $x = b$ zavrtimo okrog osi x :

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi y dl \\ S &= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + y'^2} dx \end{aligned}$$

- krivuljo $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ zavrtimo okrog osi x :

$$S = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

- krivuljo $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ zavrtimo okrog osi x :

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi) \sin\varphi \sqrt{r(\varphi)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

- vrtenje okrog osi y: $dS = 2\pi x dl$; ostale obrazce dobimo analogno kot zgoraj.

Izpeljave:

1. Ploščina.

- Od ploščine pod grafom $y = g(x)$, $p_1 = \int_a^b g(x) \, dx$ odštejemo ploščino pod grafom $y = f(x)$, $p_2 = \int_a^b f(x) \, dx$, nato je iskana ploščina lika enaka $p_1 - p_2$.
- Za ploščino dela lika, ki ga omejuje krivulja v polarni obliki in poltraka $\varphi = \phi_0$ in $\varphi = \phi_1$, izberemo delitev intervala $[\phi_1, \phi_2]$, $D = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, in točke $\sigma_k \in (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Približek za ploščino "tankega" izseka je $\Delta p_k = \frac{1}{2} r(\sigma_k)^2 \Delta\varphi_k$, nato je

$$S_D = \sum_{k=1}^n \Delta p_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r(\sigma_k)^2 \Delta\varphi_k$$

Riemannova vsota za integral $\frac{1}{2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} r(\varphi)^2 \, d\varphi$.

- Obrazec sledi iz prejšnjega, diferencial ploščine "tankega" krožnega izseka se glasi $dp = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$, $r^2 = x^2 + y^2$, $\tan\varphi = \frac{y(t)}{x(t)}$. Po verižnem pravilu izračunajmo diferencial glede na spremenljivko t :

$$\begin{aligned} dp &= \frac{1}{2}r^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)\frac{d\varphi}{dt}dt. \end{aligned}$$

Iz $\varphi = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$ z odvajanjem dobimo, da je

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{y\left(t\right)}{x\left(t\right)}\right) \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2}\frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} \\ &= \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{r^2}, \end{aligned}$$

od koder sledi $dp = \frac{1}{2}\left(\dot{y}x - \dot{x}y\right)dt$ in želeni rezultat.

2. Dolžina loka.

- Izberimo delitev intervala $\left[a, b\right]$, $D = \left\{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\right\}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Približek za dolžino loka majhnega delca krivulje, ki je določen s to delitvijo, je

$$\begin{aligned} \Delta l_k &= \sqrt{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2 + \left(y_k - y_{k-1}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(x_k - x_{k-1}\right)^2 + \left(f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)\right)^2}. \end{aligned}$$

Denimo, da funkcija f zadošča pogojem Lagrangevega izreka, potem obstajajo točke $\xi_k \in \left(x_{k-1}, x_k\right)$, za katere je

$$f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right) = f'\left(\xi_k\right)\Delta x_k,$$

nato je

$$\begin{aligned} \Delta l_k &= \sqrt{\Delta x_k^2 + \left(f'\left(\xi_k\right)\Delta x_k\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_k\right)\right)^2}\Delta x_k. \end{aligned}$$

Vsota $\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + \left(f'\left(\xi_k\right)\right)^2}\Delta x_k$ je prav Riemannova vsota za funkcijo $\sqrt{1 + f'\left(x\right)^2}$, od koder sledi obrazec (12).

- Za krivuljo, podano v parametrični obliki, lahko v integral (12) uvedemo novo spremenljivko $x = x\left(t\right)$, $t \in \left[\alpha, \beta\right]$ in upoštevamo, da je $f'\left(x\left(t\right)\right) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$.

- Iz zvez $x(t) = r(\varphi(t))\cos\varphi(t)$ in $y(t) = r(\varphi(t))\sin\varphi(t)$ izračunamo

$$\dot{x} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\dot{y} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

nato kvadriramo in seštejemo ter pridelamo

$$\begin{aligned}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\underbrace{\dot{\varphi}dt}_{d\varphi} \\ &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}d\varphi.\end{aligned}$$

3. Prostornina.

- Delitev intervala $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ in izbira točk $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, inducira razrez vrtenine na tanke rezine, tanke valje s ploščino osnovne ploskve $\pi f(\xi_k)^2$, in višino $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Tako je prostornina k-tega valja $\Delta V_k = \pi f(\xi_k)^2 \Delta x_k$ prav k-ti člen Riemannove vsote za funkcijo $\pi f(x)^2$.
- Pri vrtenju okrog osi y le zamenjamo vlogi x in y.
- V tem primeru vrtenino razrežemo na tanke cilindrične obroče. Ob delitvi intervala $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ in izbiri točk $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ je $\Delta V_k = 2\pi\Delta x_k f(\xi_k)$.

4. Površina vrtenine.

- Sedaj razrežimo vrtenino na tanke prisekane valje (izkaže se, da razrez na valje ni dovolj natančen, za razliko od razreza pri računanju prostornine). Delitev intervala $D = \{x_0, \ldots, x_n\}$ in izbira točk $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ nam da površino plašča takega valja, izraženega z velikim in malim polmerom R, r ter stranskim robom Δl_k:

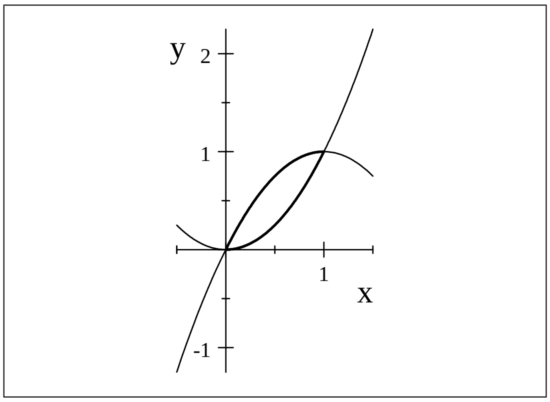
$$\begin{aligned}\Delta S_k &= 2\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)\Delta l_k \\ &= \pi\left(f(x_k) + f(x_{k-1})\right)\Delta l_k \\ &= \pi\left(f(x_k) - f(x_{k-1}) + 2f(x_{k-1})\right)\Delta l_k \\ &= 2\pi f(x_{k-1})\Delta l_k + \pi f'(\xi_{k-1})\Delta x_k \Delta l_k.\end{aligned}$$

Zadnji člen $\pi f'(\xi_{k-1})\Delta x_k \Delta l_k$ zaradi produkta dveh majhnih količin zanemarimo, tako smo dobili $\Delta S_k = 2\pi f(x_{k-1})\Delta l_k$, kar je osnova za ustrezno Riemannovo vsoto in končno integral.

- Preostala obrazca dobimo z izražavo dl v drugih koordinatah.

Zgledi:

1. Določimo ploščino med parabolama $y = x^2$ in $y = 2x - x^2$. Najprej potrebujemo presečišči; hitro izračunamo, da sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$.



Slika 6.55: Območje med parabolama

Nato je $p = \int_0^1 (2x - x^2) - x^2 dx = x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

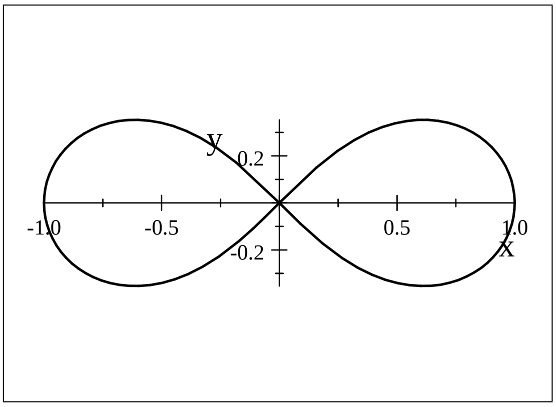
2. Kolikšna je ploščina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$. Lahko si zamislimo, da je elipso mogoče razrezati na tanke skoraj krožne izseke; tako lahko uporabimo obrazec (11), če elipso izrazimo v parametrični obliki.

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t, \end{aligned}$$

$t \in [0, 2\pi]$. Zaradi simetrije je

$$\begin{aligned} p &= \frac{4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\dot{y} - y\dot{x})\, dt \\ &= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t + \sin^2 t\ dt \\ &= \pi ab. \end{aligned}$$

3. Izračunajmo ploščino enega lista lemniskate $r = r(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Na spodnjem grafu je narisana tudi druga veja, $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

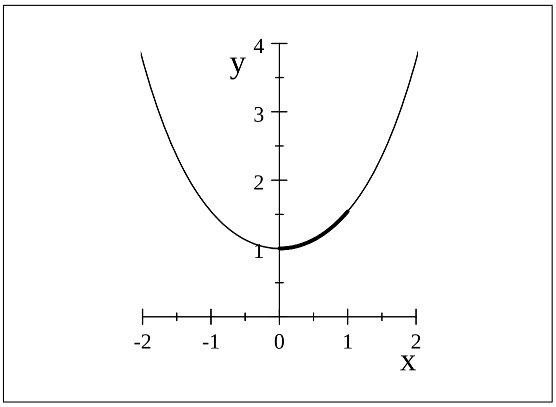


Slika 6.56: Lemniskata (Bernoullijeva)

Uporabimo obrazec $p = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r\left(\varphi\right)^2 d\varphi$, dobimo

$$\begin{aligned} p &= \frac{a^2}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \\ &= a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi \\ &= a^2\left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

4. Izračunajmo dolžino dela loka verižnice, $y = \cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \ x \in \left[0, 1\right].$



Slika 6.57: Lok verižnice

Najprej je $y' = \sinh x$ in $1+y'^2 = 1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$, nato je $\sqrt{1+y'^2} = \cosh x$ in

$$l = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = \int_0^1 \cosh x dx = \sinh 1 = \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right).$$

5. Izračunajmo prostornino vrtenine pri vrtenju grafa funkcije $y = x^3$, $x \in [2,3]$, ki nastane a) pri vrtenju okrog osi x in b) pri vrtenju okrog osi y.

   Ad a) $V_x = \pi \int_2^3 y^2 dx = \pi \int_2^3 x^6 dx = \frac{3^7-2^7}{7}\pi$.

   Ad b) $V_y = \pi \int_{2^3}^{3^3} x^2 dy = \pi \int_8^{27} x(y)^2 dy$, kjer je $x(y) = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$. Nato je $V_y = \pi \int_8^{27} y^{2/3} dy = 3\pi \frac{y^{5/3}}{5}\Big|_8^{27} = \frac{3\pi}{5}\left(3^5 - 2^5\right)$.

6. Določimo prostornino krogle s polmerom a. Zavrteli bomo polkrožnico, $r = a$, $\varphi \in [0,\pi]$ okrog osi x. Obrazec $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ pretvorimo v polarno obliko. V integral uvedemo novo spremenljivko $r\cos\varphi$, nato je $y = r\sin\varphi$, $dx = \left(\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)d\varphi$. V našem primeru je $r(\varphi) = a$ konstantna funkcija, zato je $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, $dx = -a\sin\varphi d\varphi$ in

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^\pi y(\varphi)^2 dx(\varphi) \\
&= \pi \int_0^\pi (a\sin\varphi)^2 (-a\sin\varphi)\, d\varphi \\
&= -\pi a^3 \int_0^\pi \left(1-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi d\varphi \\
&= \pi a^3 \int_0^\pi \left(1-\cos^2\varphi\right) d(\cos\varphi) \\
&= \pi a^3 \left(\cos\varphi - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{4\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

6.3 Posplošeni ali izlimitirani integral

1. Ena **meja** (ali obe) je **neskončno**:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty f(x)\,dx &= \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^b f(x)\,dx &= \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx \\
\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^0 f(x)\,dx + \int_0^\infty f(x)\,dx
\end{aligned}$$

   Če obstaja ustrezna limita, rečemo, da integral **konvergira**, sicer **divergira**.

   - $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to\infty}\ln b = \infty$; ta integral divergira.

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{x} \Big|_{x=1}^{x=b} \right) = \lim\limits_{b\to\infty} \left(\frac{1}{x} \Big|_{x=b}^{x=1} \right) = \lim\limits_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$; ta integral pa konvergira.

2. Podintegralska funkcija ima na **eni od mej** (ali tudi obeh) **singularnost**:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \quad \text{če ima } f \text{ singularnost na spodnji meji,}$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \text{če ima } f \text{ singularnost na zgornji meji.}$$

Na primer:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{-1/2} dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-1/2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\sqrt{x}\Big|_{x=\varepsilon}^{x=1} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln 1 - \ln\varepsilon) = \infty.\end{aligned}$$

3. Če ima f **singularnost** v **notranji točki** c integracijskega intervala:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

Pri tem poudarimo, da morata obstajati oba integrala na desni strani.

Cauchyjeva glavna vrednost:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

Možno je, da integrala $\int_a^c f(x)\,dx$, $\int_c^b f(x)\,dx$ ne konvergirata, obstaja pa Cauchyjeva glavna vrednost npr.:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln|-\varepsilon|) + \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\ln|\varepsilon|)\,.\end{aligned}$$

Posamezni limiti ne obstajata, medtem ko je Cauchyjeva glavna vrednost

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} \right) &= \\ \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln|-\varepsilon| - \ln|\varepsilon|) &= 0.\end{aligned}$$

definirana.

6.3.1 Funkcije, definirane z integralom

Nedoločeni integrali funkcij $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ (in mnogih drugih prav tako) se ne izražajo z elementarnimi funkcijami. Zato se s pomočjo integralov teh funkcij uvede nove funkcije.

1. **Integralski sinus**

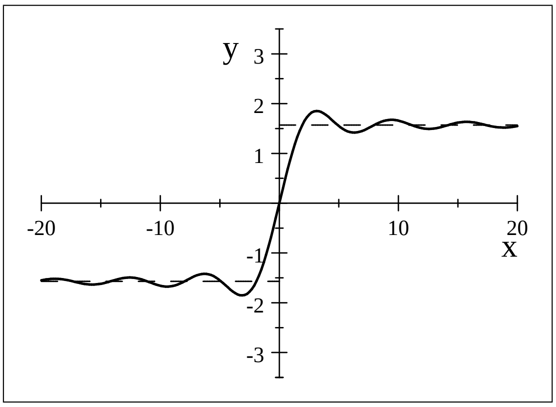
$$\mathrm{Si}\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

– definicijsko območje: $\mathbb{R}$

– $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Si}\,(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ (tega ni elementarno preveriti).

– parnost: $\mathrm{Si}\,(-x) = -\mathrm{Si}\,(x)$
– $\mathrm{Si}'\,(x) = \frac{\sin x}{x}$,
– Ekstremi: $\mathrm{Si}'\,(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 0,\ x \neq 0 \Rightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
– $\mathrm{Si}''\,(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$,

– $\mathrm{Si}''\,(k\pi) = \frac{\cos(k\pi)}{k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi} \Rightarrow$
izmenično minimumi in maksimumi, pri $k = 1$ je maksimum.



Slika 6.58: Graf funkcije Si(x)

2. **Integralski kosinus**

$$\mathrm{Ci}\,(x) = \int_x^\infty \frac{\cos x}{x} dx, \text{ definirana le za } x > 0,$$

– definicijsko območje: $x > 0$; pri $x = 0$ je integral posplošen tudi na spodnji meji in divergenten,

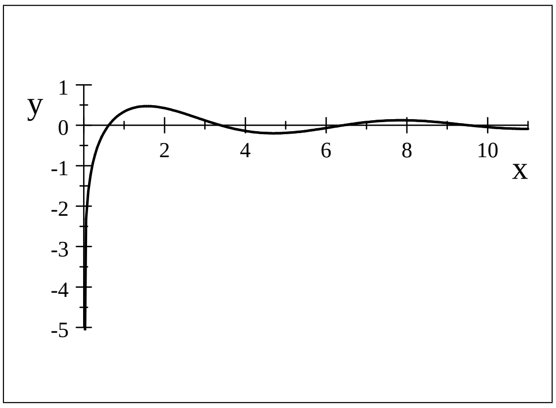
– $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Ci}\,(x) = 0$,

– $\mathrm{Ci}'\,(x) = \frac{\cos x}{x}$,

– ekstremi so v ničlah funkcije cos, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,

– $\mathrm{Ci}''(x) = \left(\frac{\cos x}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}(\cos x + x\sin x)$,

– $\mathrm{Ci}''\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}{\frac{\pi}{2}+k\pi}$, torej so izmenično minimumi in maksimumi.



Slika 6.59: Graf funkcije $\mathrm{Ci}(x)$

3. Tudi integrala $\int \frac{e^x}{x}dx$ in $\int \frac{dx}{\ln x}$ se ne izražata z elementarnimi funkcijami, s tema dvema integraloma se lahko (na več načinov) vpelje nove funkcije, integralsko eksponentno in integralsko logaritemsko funkcijo, ki pa sta povezani. Podrobnosti izpustimo.

6.4 Naloge

1. Izračunaj integrale naslednjih funkcij:

   (a) $\int \left(3x + \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x}\right) dx$; R.: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2\ln|x| + C$

   (b) $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 3\sin x + \frac{3}{1+x^2} - \frac{4}{x}\right) dx$; R.: $\frac{1}{\cos x}\sin x + 3\cos x + 3\arctan x - 4\ln|x| + C$

   (c) $\int 3^x e^x dx$; R.: $\frac{3^x e^x}{1+\ln 3} + C$

2. Z uvedbo nove spremenljivke izračunaj integrale:

   (a) $\int \sin 5x dx$; R.: $-\frac{1}{5}\cos 5x + C$

   (b) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^3}}$; R.: $-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^3)} + C$

   (c) $\int \frac{dx}{2x+1}dx$; R.: $\frac{1}{2}(\ln|2x+1|)\, dx + C$

   (d) $\int (1-x)^6 dx$; R.: $\frac{-1}{7}(1-x)^7 + C$

   (e) $\int \mathrm{e}^{-x}$; R.: $-\mathrm{e}^{-x} + C$

   (f) $\int \sin^3 x \cos x dx$; R.: $\frac{1}{4}\sin^4 x + C$

   (g) $\int \frac{dx}{x^2+4}$; R.: $\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$

(h) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ =R.: $\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

(i) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; R.: $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$,

(j) $\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}dx$; R.: $\frac{1}{4}\arctan^4 x+C$

3. Z integracijo po delih izračunaj integrale

(a) $\int x^2 \sin x dx$; R.: $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

(b) $\int xe^{-ax}dx$; R.: $-\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1)+C.$

(c) $\int e^{-x}\cos x dx$; R.: $\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\,.$

4. Integriraj racionalne funkcije

(a) $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$; R.: $\int\left(x-1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x-\ln|x+1|+C$

(b) $\int \frac{x+1}{x^2+x-2}dx$; R.: $\int \frac{x+1}{x(x+2)(x-1)}dx=\int -\frac{1}{2x}-\frac{1}{6(x+2)}+\frac{2}{3(x-1)}dx=-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+\frac{2}{3}\ln|x-1|+C$

(c) $\int \frac{x-3}{x^2+4}dx$; R.: $\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{3}{2}\arctan\frac{x}{2}+C$

5. Izračunaj še določene integrale trigonometričnih funkcij

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$; R.: $\frac{3\pi}{16}$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos^3 x dx$; R.: $\frac{2}{35}$

(c) $\int_0^{2\pi} \sin 2x\cos 3x dx$; R.: 0

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$; R.: 1.

6. Upoštevaj sodost oziroma lihost podintegralske funkcije in poenostavi integral

(a) $\int_{-1}^{1} x^3 dx$; R.: 0,

(b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$; R.: $\frac{\pi}{2}$,

(c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos x dx$; R.: 0.

7. Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo:

(a) paraboli $y=x^2$ in $y=\sqrt{x}$. R.: $p=\frac{1}{3}$.

(b) $y = -x^2 + 4x - 3$ in tangenti na ta graf v točkah $(0, -3)$ in $(3, 0)$; R.: $p = \frac{9}{4}$.

(c) $y = \frac{1}{1+x^2}$ in $y = \frac{x^2}{2}$.R.: $p = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

(d) krivulja v polarni obliki $r = \varphi$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ in os y. R.: $p = \frac{\pi^3}{48}$.

8. Za en lok cikloide $x = a\left(t - \sin t\right)$, $y = a\left(1 - \cos t\right)$, $t \in \left[0, 2\pi\right]$, $a > 0$, določi

   (a) dolžino loka, R.: $l = 8a$.

   (b) prostornino pri vrtenju okrog osi x,
   R.: $V_x = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos t\right)^3 dt = 5\pi^2 a^3$.

   (c) površino pri vrtenju okrog osi x. R.: $S = \frac{32}{3}\pi$.

9. Če konvergirajo, določi vrednosti posplošenih integralov:

   (a) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^3}$; R.: $\frac{1}{2}$

   (b) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$; R.: $\frac{\pi}{4}$

   (c) $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$; ne konvergira.

10. Za katere $s \in \mathbb{R}$ konvergira integral $\int_0^\infty te^{-st} dt$? R.: $s > 0$.

7 Zaporedja

7.1 Osnovni pojmi

Definicija 7.1.1 *Realno (kompleksno)* ***zaporedje*** *je preslikava $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$, ki vsakemu naravnemu številu n priredi določeno število a_n. Včasih iz praktičnih razlogov vzamemo namesto $\mathbb{N}$ tudi $\mathbb{N}_0$.*

Zaporedje je lahko podano:

- **eksplicitno:** $a_n = f(n)$
  in zapisano: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, (a_n), $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n, \ldots)$

  Primera eksplicitno podanih zaporedij:

$$
\begin{array}{lllcllll}
a_n = \frac{1}{2}n^2 & & & \qquad & z_n = i^n & & \\
1 & \mapsto & a_1 = \frac{1}{2} & & 1 & \mapsto & z_1 = i \\
2 & \mapsto & a_2 = 2 & & 2 & \mapsto & z_2 = -1 \\
3 & \mapsto & a_3 = \frac{9}{2} & & 3 & \mapsto & z_3 = -i \\
4 & \mapsto & a_4 = 8 & & 4 & \mapsto & z_4 = 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

  Posamezne funkcijske vrednosti imenujemo **členi** zaporedja. Natančneje, a_k je k-ti člen zaporedja (a_n).

- **rekurzivno:** $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k})$
  - enočlenska rekurzija: a_1 podan, $a_{n+1} = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Vrednost n-tega člena zaporedja je odvisna le od predhodnega člena.
  - dvočlenska rekurzija: a_1, a_2 poznamo, $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1})$; vsak člen, razen prvih dveh, ki morata biti podana, izračunamo iz predhodnih dveh.

Naj bo $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$, $n = 1, 2, \ldots$. To zaporedje lahko izrazimo tudi eksplicitno: $(a_n) = (1, 3, 5, 7, \ldots, 2n-1, \ldots)$. Mimogrede omenimo, da je to zaporedje aritmetično (razlika med dvema zaporednima členoma je konstantna), eksplicitni obrazec za to zaporedje se glasi: $a_n = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Geometrijsko zaporedje bo za naše delo zelo pomembno.

Definicija 7.1.2 ***Geometrijsko zaporedje*** *je tako zaporedje, pri katerem je kvocient med katerima koli dvema sosednjima členoma konstanten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $n \in \mathbb{N}$. Zapisano v obliki enočlenske rekurzije: $a_{n+1} = q a_n$, a_1 je podan.*

Splošni člen geometrijskega zaporedja je $a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Če izberemo $a_1 = 1$ in $q = -\frac{1}{2}$, dobimo zaporedje $\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right)$.

Zelo poznano je **Fibonaccijevo zaporedje:**

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

oziroma, če izračunamo prvih nekaj členov za občutek:

$$(a_n) = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \ldots).$$

Tokrat obrazca za splošni člen ni preprosto uganiti. Splošna formula, ki je izpeljana v rešitvi naloge 5, se namreč glasi:

$$f_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

Opazimo, da je Fibonaccijevo zaporedje razlika dveh geometrijskih, saj je

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} q_1^n - \frac{1}{\sqrt{5}} q_2^n, \end{aligned}$$

kjer je $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pri tem je $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618... =: \Phi$ zlatorezno razmerje, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} =: \varphi = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} = 0.618...$ pa njegova obratna vrednost.

7.1.1 Linearne diferenčne enačbe

Spoznali bomo metodo za iskanje splošnega člena (torej eksplicitnega zapisa) za (nekatera) zaporedja, podana z dvočlensko rekurzijo oblike

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}, \qquad \alpha, \beta \text{ dani konstanti,} \tag{17}$$
$$\text{podana sta še } a_0 \text{ in } a_1.$$

Fibonaccijevo zaporedje je tak primer, tam je $\alpha = \beta = 1$. Metoda temelji na naslednjem dejstvu.

Trditev 7.1.3 *Če za zaporedji (a_n) in (b_n) velja rekurzija (17), tej zadošča tudi katero koli zaporedje oblike $c_n = Ca_n + Db_n$, kjer sta C in D poljubni konstanti. Rečemo tudi, da je (c_n)* ***superpozicija*** *zaporedij (a_n) in (b_n).*

Dokaz. Uporabimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha a_n + \beta a_{n-1} \\ b_{n+1} &= \alpha b_n + \beta b_{n-1}, \end{aligned}$$

prvo enačbo pomnožimo s C, drugo pa z D, seštejemo in dobimo

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= Ca_{n+1} + Db_{n+1} \\ &= \alpha\left(Ca_n + Db_n\right) + \beta\left(Ca_{n-1} + Db_{n-1}\right) \\ &= \alpha c_n + \beta c_{n-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Trditev 7.1.4 *Če ima kvadratna enačba $\lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0$ dva različna realna korena λ_1 in λ_2, potem obstaja enolična rešitev diferenčne enačbe (17) pri poljubnih začetnih pogojih a_0 in a_1. Rešitev je zaporedje s splošnim členom $a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$, kjer sta C in D enolično določeni konstanti.*

Dokaz. Poglejmo ali obstaja tak λ, da bi veljalo $a_n = \lambda^n$ in bi zaporedje zadoščalo enačbi (17). Res, dobimo enačbo

$$\lambda^{n+1} = \alpha\lambda^n + \beta\lambda^{n-1}.$$

Če je $\lambda = 0$, dobimo konstantno zaporedje $a_n = 0$, ki zadošča začetnima pogojema le, če je $a_0 = a_1 = 0$. V tem primeru je ničelno zaporedje seveda edina možna rešitev. Torej vzemimo $\lambda \neq 0$ in delimo gornjo enačbo z λ^{n-1}. Dobimo

$$\lambda^2 = \alpha\lambda + \beta$$

kar je kvadratna enačba iz trditve. Bodita λ_1 in λ_2 njeni različni realni rešitvi. Rekurzivno enačbo rešita zaporedji s splošnim členom λ_1^n in λ_2^n, po trditvi 7.1.3 pa tudi njuna superpozicija $C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$. Konstanti C in D določimo tako, da zaporedje $a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$ zadosti tudi začetnim pogojem a_0 in a_1. Dobimo linearen sistem

$$\begin{aligned} C + D &= a_0 \\ C\lambda_1 + D\lambda_2 &= a_1. \end{aligned}$$

Pomnožimo prvo enačbo z $-\lambda_1$ in enačbi odštejmo

$$D\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) = a_1 - a_0\lambda_1.$$

Ker $\lambda_2 \neq \lambda_1$, je D enolično določen, nato je $C = a_0 - D$. $\square$

Primer reševanja diferenčnih enačb je v nalogah 4 in 5.

7.2 Topološke lastnosti zaporedij

Definicija 7.2.1 *Naj bo ε dano pozitivno število. Množico števil*

$$K_\varepsilon(a) = \{x;\ |x - a| < \varepsilon\}$$

imenujemo okolica (ε - okolica) *števila a.*
V množici $\mathbb{R}$ je $K_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, v množici $\mathbb{C}$ je $K_\varepsilon(a)$ krog s središčem v točki a in s polmerom ε.

7.2.1 Stekališče in limita

Definicija 7.2.2 *Število b se imenuje **stekališče** zaporedja (a_n), če je v vsaki okolici števila b neskončno členov tega zaporedja.*

Formalno: pri poljubnem $\varepsilon > 0$ velja $|a_n - b| < \varepsilon$ za neskončno indeksov n.

Stekališči zaporedja $\left((-1)^n \frac{n}{n+1}\right)$ sta 1 in -1. Dokaz je v rešitvi naloge 6. Podobno, zaporedje $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$, ima dve stekališči: 0 in 1, saj je $a_{2k} = 0$ in $a_{2k-1} = 1$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Definicija 7.2.3 *Število l imenujemo **limita** zaporedja (a_n), če je izven vsake okolice števila l le končno mnogo členov zaporedja.*

> Formalno: pri poljubnem $\varepsilon > 0$ obstaja $N \in \mathbb{N}$ z lastnostjo: $|a_n - l| < \varepsilon$ za vse $n > N$.
>
> Od člena a_{N+1} vključno naprej so vsi členi a_n znotraj ε-okolice števila l.

Uporabljamo zapis: $l = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Definicija 7.2.4 *Če ima zaporedje limito, rečemo, da je **konvergentno**. V nasprotnem primeru je **divergentno**.*

Trditev 7.2.5 *Če ima zaporedje limito, je ta ena sama. Limita je poseben primer stekališča. Ni pa vsako stekališče limita. Tudi ni res, da je edino stekališče zaporedja nujno limita.*

Dokaz. Pogoj, ki določa limito, je izpolnjen tudi za stekališče, torej je število, ki ima lastnost limite, tudi stekališče. Obratno seveda ni res. Kakor hitro bo imelo zaporedje več kakor eno stekališče, nobeno od stekališč ne more biti limita, ker bo mogoče hitro najti tako okolico katerega koli stekališča, da bo tudi zunaj te okolice neskončno členov zaporedja. Navedimo še primer zaporedja, ki ima eno samo stekališče, ki ni limita. Zaporedje $a_n = n^{(-1)^n}$; to je: $\left(1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots, a_n, \dots\right)$ ima eno samo stekališče, to je 0, ki pa ni limita. Zunaj poljubne okolice števila 0 namreč ostane neskončno členov s sodimi indeksi. □

Definicija 7.2.6 *Zaporedje $(b_k) = (a_{n_k})$ je **podzaporedje** zaporedja (a_n), če je funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ naraščajoča ($f(k) < f(k+1)$ $\forall k$).*

Iz danega zaporedja $a_n = \frac{1}{n}$; $(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$, izberimo dve podzaporedji.

- Zaporedje $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right) = (a_{2k}) = (a_2, a_4, \dots)$ je podzaporedje zaporedja (a_n); $n_k = 2k$, $b_k = a_{2k}$.
- Zaporedje, kjer izpustimo prvi člen, $(a_{k+1}) = (a_2, a_3, \dots)$ je vedno podzaporedje zaporedja (a_n); $n_k = k + 1$, $b_k = a_{k+1}$.

Brez dokaza navedimo še izreka.

Izrek 7.2.7 *Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in ima isto limito.*

Večkrat v nadaljevanju bomo uporabili poseben primer te trditve: Če je zaporedje (a_n) konvergentno, je

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Izrek 7.2.8 *Če ima zaporedje kakšno stekališče s, obstaja podzaporedje, ki konvergira k s.*

Definicija 7.2.9 *Zaporedje je* ***Cauchyjevo****, če velja, da od dovolj poznega člena naprej pridejo členi poljubno blizu skupaj.*

Pri poljubnem $\varepsilon > 0$ je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za vse dovolj pozne indekse m, n $(m, n > n_0)$.

Izrek 7.2.10 *Zaporedje je Cauchyjevo natanko takrat ko je konvergentno.*

Komentar. Načeloma je lastnost Cauchyjevega zaporedja šibkejša od konvergence, vendar se izkaže (ni trivialno), da sta pri realnih zaporedjih obe lastnosti hkrati prisotni ali pa ni nobene.

7.2.2 Omejenost zaporedij

Definicija 7.2.11 *Število A je* ***zgornja meja*** *zaporedja (a_n), če velja $a_n \leq A$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*
Če zgornja meja zaporedja (a_n) obstaja, rečemo, da je zaporedje ***navzgor omejeno.***

Če je A zgornja meja, je vsako število $b > A$ tudi zgornja meja.

Definicija 7.2.12 *Število B je* ***spodnja meja*** *zaporedja (a_n), če velja $a_n \geq B$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*
Če spodnja meja zaporedja (a_n) obstaja, rečemo, da je zaporedje ***navzdol omejeno.***

Če je B spodnja meja, je vsako število $b < B$ tudi spodnja meja.

Definicija 7.2.13 *Zaporedje je* ***omejeno****, kadar je omejeno navzdol in navzgor.*

Definicija 7.2.14 *Število M se imenuje* ***natančna zgornja meja*** *(ali* ***supremum****) zaporedja, če velja:*
- M je zgornja meja in
- pri poljubnem $\varepsilon > 0$ obstaja vsaj en a_n, za katerega je $a_n > M - \varepsilon$. (z drugimi besedami: M je najmanjša možna zgornja meja)

Zapišemo: $M = \sup a_n$.

Definicija 7.2.15 *Število m se imenuje* ***natančna spodnja meja*** *(ali* ***infimum****) zaporedja, če velja:*
- m je spodnja meja in
- pri poljubnem $\varepsilon > 0$ obstaja vsaj en a_n, za katerega je $a_n < m + \varepsilon$. (z drugimi besedami: m je največja spodnja meja).

Zapišemo: $m = \inf a_n$.

Za zaporedje

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{n}, & n \text{ sodo št.} \\ -\frac{n}{n+1} & n \text{ liho št} \end{cases}$$

$$(a_n) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{5}{6}, \frac{7}{6}, -\frac{7}{8}, \frac{9}{8}, \dots\right)$$

je natančna zgornja meja $M = \sup a_n = \frac{3}{2}$ in natančna spodnja meja $m = \inf a_n = -1$. Število $\frac{3}{2}$ je člen zaporedja, medtem ko -1 ni. Več primerov in argumentacij najdete v nalogi 6.

Izrek 7.2.16 *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.*

Dokaz. Ker zunaj poljubne okolice limite ostane le končno členov zaporedja, je mogoče najti omejen interval, znotraj katerega se nahajajo vsi členi zaporedja. □

Izrek 7.2.17 *Vsako omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče. Če ima omejeno zaporedje eno samo stekališče, je to tudi limita.*

Dokaz. Izpustimo. □

Izreka lahko združimo.

Posledica 7.2.18 *Zaporedje je konvergentno natanko tedaj ko je omejeno in ima eno samo stekališče.*

Zaporedje $a_n = n^{(-1)^n}$ je primer zaporedja, ki ima eno samo stekališče, pa ni konvergentno.

$$\begin{aligned} a_n &= n^{(-1)^n} \\ &= \begin{cases} n^{-1}, & n = 2k-1 \\ n, & n = 2k \end{cases}, \\ (a_n) &= \left(1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \dots\right). \end{aligned}$$

Edino stekališče tega zaporedja je 0. Vendar to zaporedje ni omejeno, saj vsebuje vsa soda naravna števila.

Definicija 7.2.19 *Zapis $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ pomeni, da je pri poljubnem $M > 0$, neenakost $a_n \geq M$ izpolnjena za vse dovolj pozne indekse $n > n_0$. Podobno, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pomeni, da je pri poljubnem $m > 0$, neenakost $a_n \leq -m$ izpolnjena za vse člene a_n od nekega n_0 naprej. V obeh primerih pa je zaporedje divergentno.*

Posledica 7.2.20 *Če je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ali $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, od tod sledi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. V obeh primerih je zaporedje (a_n) tudi brez stekališč.*

Zaporedja (a_n), za katera velja $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ali $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, so seveda neomejena.

7.2.3 Monotona zaporedja

Ločimo več tipov monotonosti zaporedij - v literaturi je mogoče najti nekaj razlik v izrazoslovju, mi se bomo držali naslednje definicije.

Definicija 7.2.21 *Zaporedje je **naraščajoče**, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ izpolnjeno $a_n \leq a_{n+1}$. Zaporedje je **padajoče**, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n \geq a_{n+1}$. Zaporedje je **monotono**, če je naraščajoče ali padajoče. Zaporedje je **strogo** naraščajoče, če je za vsak $n \in \mathbb{N}$ izpolnjeno $a_n < a_{n+1}$. Zaporedje je **strogo** padajoče, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja: $a_n > a_{n+1}$.*

Če je zaporedje strogo padajoče (oz. strogo naraščajoče) je tudi padajoče (oz. naraščajoče).

Praktičen kriterij: zaporedje (a_n) je monotono tedaj in le tedaj ko je

$$a_{n+1} - a_n \text{ je istega predznaka za vse } n \in \mathbb{N}.$$

Natančneje, (a_n) je naraščajoče, če je

$$a_{n+1} - a_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

in padajoče, če je

$$a_{n+1} - a_n \leq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Za zaporedja s samimi pozitivnimi členi je često prikladen tudi kriterij

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \quad (a_n) \text{ je naraščajoče,}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1, \quad (a_n) \text{ je padajoče.}$$

V nalogi 7 najdete primere monotonih zaporedij.

Izrek 7.2.22 *<u>Navzgor</u> omejeno <u>naraščajoče</u> zaporedje je konvergentno in velja:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n.$$

<u>Navzdol</u> omejeno <u>padajoče</u> zaporedje je konvergentno in velja:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n.$$

Dokaz. Preverimo samo prvo trditev, druga je analogna. Denimo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče in je $M = \sup a_n$. Pokažimo, da je tedaj $M = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Pri poljubnem $\varepsilon > 0$, poglejmo kateri členi zaporedja (a_n) se lahko nahajajo v ε-okolici števila M. Ker je M supremum, $M - \varepsilon$ ni zgornja meja, zato obstaja tak N, da je $a_N > M - \varepsilon$; zato je $M - \varepsilon < a_N \le a_n \le M$ za vse $n > N$. Torej je zunaj ε-okolice števila M kvečjemu $N - 1$ členov zaporedja, torej končno mnogo. □

Za nas posebej pomembno bo geometrijsko zaporedje.

Konvergenca - divergenca geometrijskega zaporedja

Če $a_1 \neq 0$, je konvergenca odvisna samo od kvocienta q in ni težko videti, da velja:

$$a_n = q^n : \begin{cases} \text{konvergentno in} & \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0, & \text{če } |q| < 1, \\ \text{konvergentno in} & \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1, & \text{če } q = 1, \\ \text{divergentno in} & \text{ima dve stekališči: 1 in -1,} & \text{če } q = -1, \\ \text{divergentno in} & \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty, & \text{če } q > 1, \\ \text{divergentno in} & \text{neomejeno v obe smeri,} & \text{če } q < -1. \end{cases} \tag{18}$$

7.2.4 Računske operacije z zaporedji

Iz danih zaporedij (a_n), (b_n) in konstante $t \in \mathbb{R}$ tvorimo nova zaporedja:

$$\begin{aligned} c_n &= a_n + b_n, \\ d_n &= ta_n, \\ f_n &= a_n b_n, \\ g_n &= \frac{a_n}{b_n}, \quad b_n \neq 0, \ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Izrek 7.2.23 *Če sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergentni, je zaporedje*

- *$(a_n + b_n)$ konvergentno in velja*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

- *$(a_n b_n)$ konvergentno in velja*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

- *(ta_n) konvergentno za vsak $t \in \mathbb{R}$ in velja*

$$\lim_{n\to\infty} ta_n = t \lim_{n\to\infty} a_n$$

- *Če dodatno velja še* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *je konvergentno tudi zaporedje* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dokaz. Naj bo $A = \lim_{n\to\infty} a_n$in $B = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pokažimo, da je $A + B = \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Potem je zaradi konvergence zaporedij (a_n) in (b_n) mogoče najti indeksa N_1 in N_2, za katera velja, da je

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > N_1,$$

in

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad n > N_2.$$

Nato je za $N = \max\{N_1, N_2\}$ izpolnjeno

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (A + B)| &= |a_n - A + b_n - B| \\ &\leq |a_n - A| + |b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ za vse } n > N. \end{aligned}$$

Pokažimo še, da je $AB = \lim_{n\to\infty} a_n b_n$. Najprej ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \\ &\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB| \\ &= |b_n| \, |a_n - A| + |A| \, |b_n - B| \, . \end{aligned}$$

Zaporedje (b_n) je konvergentno, zato je omejeno in velja, da je $|b_n| \leq M$. Zato je

$$|a_n b_n - AB| \leq M \, |a_n - A| + |A| \, |b_n - B| \, .$$

Pri poljubnem $\varepsilon > 0$ želimo, da bi bilo $M \, |a_n - A| + |A| \, |b_n - B| < \varepsilon$. Zaradi konvergence zaporedij (a_n) in (b_n) lahko najdemo indeksa N_1 in N_2, da bo veljalo

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{in} \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2\,|A|},$$

če $A \neq 0$. Nato je

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &\leq M \, |a_n - A| + |A| \, |b_n - B| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + |A| \frac{\varepsilon}{2\,|A|} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

kot smo želeli.

Tretja lastnost je posledica druge, četrto lastnost pa bi lahko preverili v podobnem duhu, le z nekaj več tehničnimi dodatki. □

Izrek 7.2.24 *Naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ dana zvezna funkcija, kjer je I zaprt interval ali $\mathbb{R}$. Če je $a_n \in I$ za vsak n in zaporedje (a_n) konvergentno, je konvergentno tudi zaporedje $(f(a_n))$ in velja*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(a_n) &= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \\ &= f(A)\end{aligned}$$

kjer je $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Dokaz. Pokažimo, da je $f(A)$ limita zaporedja $(f(a_n))$. Zveznost f v točki A pomeni, da je pri poljubnem $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(A)| < \varepsilon,$$

kakor hitro je $|x - A| < \delta$ za neki $\delta > 0$. Obstaja tak N, da je za $n > N$ izpolnjeno $|a_n - A| < \delta$. Zato je $|f(a_n) - f(A)| < \varepsilon$ za vse $n > N$. $\square$

Posledica 7.2.25 *Če je zaporedje $(a_n) \subseteq \mathbb{R}_0^+$ konvergentno, je pri poljubnem $k \in \mathbb{N}$ konvergentno tudi zaporedje $\left(\sqrt[k]{a_n}\right)$ in ima limito $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.*

Naj bo $b > 0$. Potem iz konvergence zaporedja (a_n) sledi konvergenca zaporedja (b^{a_n}) in $\lim\limits_{n\to\infty} b^{a_n} = b^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$. Poseben primer: $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Nekaj metod za računanje limit sestavljenih zaporedij najdete v nalogi 8.

7.2.5 Definicija števila e

Število e je osnova naravnega logaritma. Konstruirali bomo dve konvergentni zaporedji racionalnih števil, katerih limita je (iracionalno, transcendentno) število $e = 2,718281828459045....$

Opazovali bomo zaporedji:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \geq 1$$

in

$$b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n \geq 2.$$

Prvih nekaj vrednosti zaporedja (a_n) je:

$$\begin{gathered}(a_n) : 2.0,\ 2.25,\ 2.37,\ 2.441,\ 2.488,\ 2.522\ldots \\ \ldots\ a_{30} = 2.674,\ a_{100} = 2.705,\ a_{5000} = 2.718\,01\end{gathered}$$

zaporedja (b_n) pa

$$(b_n): 4.0,\ 3.375,\ 3.16,\ 3.052,\ 2.986\ldots$$
$$\ldots\ b_{30} = 2.765,\ b_{100} = 2.732,\ b_{5000} = 2.718\,55.$$

V rešitvi naloge 9 pokažemo, da je zaporedje (a_n) naraščajoče, (b_n) padajoče, obe zaporedji pa omejeni, torej konvergentni. Nazadnje ugotovimo, da imata obe isto limito, ki jo poimenujemo e.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}. \tag{19}$$

7.3 Naloge

1. Dani sta zaporedji $a_n = \cos n\pi$ in $b_n = (-1)^n$. Pokaži, da je $a_n = b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

2. Zapiši prvih 5 členov geometrijskega zaporedja s prvim členom 3 in kvocientom $q = -\frac{1}{2}$.

3. Poišči eksplicitni zapis rekurzivno podanega zaporedja $a_{n+1} = (n+1)\,a_n$, $a_0 = 1$.

4. Določi splošni člen rekurzivno podanega zaporedja $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

5. Določi splošni člen Fibonaccijevega zaporedja.

6. Določi stekališča/limito danih zaporedij, ugotovi ali so konvergentna, omejena in določi natančne meje, če obstajajo.

   (a) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$
   (b) $a_n = (-1)^n$
   (c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
   (d) $a_n = 2n$
   (e) $a_n = n^{(-1)^n}$.

7. Pokaži, da je zaporedje monotono in ugotovi tip monotonosti:

   (a) $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$
   (b) $a_n = b^n$, $0 < b < 1$.

8. Izračunaj limite:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}$, $k > 0$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n+1}{n^3+1}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+...+n}{2n^2+1}\right)$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} a_1 q^n$

(g) Rekurzivno podano zaporedje: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$.

(h) $(a_n) = \left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ \ldots\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ?$

(i) $a_1 = 2$, $\quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$; Pokaži: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$, torej je (a_n) zaporedje racionalnih približkov, ki konvergira k iracionalnemu številu $\sqrt{2}$.

9. Pokaži, da sta zaporedji $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ in $b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ konvergentni in imata isto limito $e = 2,718281828...$

10. Izračunaj limite (nedoločenost tipa 1^∞):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$

Rešitve

1. Opazimo, da je $(\cos n\pi) = (-1, 1, -1, \ldots)$ oziroma

$$\cos n\pi = (-1)^n = \begin{cases} -1, & n = 2k-1 \\ 1, & n = 2k \end{cases}.$$

2. $(a_n) = \left(3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots\right)$

3. Izračunajmo nekaj členov: $a_0 = 1$, $a_1 = 1 \times a_0 = 1$, $a_2 = 2a_1 = 2 \times 1$, $a_3 = 3 \times a_2 = 3 \times 2 \times 1$. Ponudi se domneva, da je $a_n = n!$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, kjer je $0! := 1$, sicer pa je $k!$ produkt prvih k naravnih števil. Domnevo je potrebno preveriti še z indukcijo. Za $n = 0, 1, 2, 3$ očitno velja, torej je potreben le še indukcijski korak. Denimo, da je $a_n = n!$, potem je $a_{n+1} = (n+1)\,a_n = (n+1)\,n! = (n+1)!$.

4. V enačbo $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$ vstavimo nastavek $a_n = \lambda^n$ in dobimo $\lambda^{n+1} = \lambda^n + 2\lambda^{n-1}$, po deljenju z λ^{n-1} pridelamo kvadratno enačbo $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, ki ima korena $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 2$. Tvorimo zaporedje $a_n = C\,(-1)^n + D2^n$, kjer konstanti C in D določimo tako, da je $a_0 = 1$ in $a_1 = -4$. Iz sistema enačb $C + D = 1$, $-C + 2D = 4$ sledi $D = \frac{4}{3}$, $C = -\frac{1}{3}$ in končna rešitev $a_n = -\frac{1}{3}\,(-1)^n + \frac{4}{3}2^n = \frac{(-1)^{n+1}+2^{n+2}}{3}$.

5. Fibonaccijevo zaporedje zadošča enačbi, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = f_1 = 1$. Ustrezna kvadratna enačba je $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, katere korena sta $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ in $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Nato je $f_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Iz sistema

$$\begin{aligned} C + D &= 1 \\ C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

z nekaj truda dobimo, da je $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $D = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, torej je

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Primerjajte z (16)!

6. Obravnava zaporedij:

   (a) $a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$; stekališči sta 1 in -1, zaporedje je divergentno, ker ima dve stekališči, ni limite; zaporedje je omejeno v obe smeri, ker je $|a_n| = \frac{n}{n+1} < 1$.
   Pokažimo, da je 1 stekališče. Pri danem $\varepsilon > 0$ se vprašamo, za katere n je izpolnjeno $|a_n - 1| < \varepsilon$. Blizu 1 so le členi s sodimi indeksi n, zato lahko vzamemo, da je n sodo število.

$$\begin{aligned} |a_n - 1| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

   Torej, $|a_n - 1| < \varepsilon$ je izpolnjeno za vse sode n, ki so večji od $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, takih n pa je neskončno, zato je število 1 stekališče tega zaporedja.

   Preverimo še, da je $\sup a_n = 1$. Najprej je $a_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$. Nato je $a_{2k} = \frac{2k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{2k+1}$. Če izberem dovolj velik k, je število $\frac{1}{2k+1}$ poljubno majhno in a_{2k} poljubno blizu 1. Torej zgornje meje 1 ni mogoče več zmanjšati.

   (b) $a_n = (-1)^n$; stekališči sta 1 in -1, zaporedje je divergentno, ker ima dve stekališči, ni limite; zaporedje je omejeno v obe smeri, $\inf (-1)^n = -1$, $\sup (-1)^n = 1$.

   (c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; edino stekališče je 0, ki je hkrati limita tega zaporedja, zaporedje je konvergentno in je omejeno v obe smeri, $\inf a_n = -1$, $\sup a_n = \frac{1}{2}$.

   (d) $a_n = 2n$, divergentno, brez stekališč, navzgor neomejeno, navzdol omejeno in $\inf a_n = 2$.

(e) $a_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k-1, \\ n, & n = 2k. \end{cases}$. Zaporedje vsebuje podzaporedje sestavljeno iz sodih naravnih števil, ki je navzgor neomejeno, zato je tudi (a_n) navzgor neomejeno in ne more biti konvergentno (torej je divergentno). Navzdol je omejeno z 0 in $\inf a_n = 0$. Število 0 je tudi edino stekališče tega zaporedja.

7. Monotonost zaporedij.

(a) $a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$. Izrazimo razliko

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n-1} \\ &= -\frac{4}{(2n+1)(2n-1)} < 0 \\ \text{za vsak } \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$, za vsak $n \in \mathbb{N}$, torej je to zaporedje padajoče.

(b) $a_n = b^n$, $0 < b < 1$.

- z razliko: $a_{n+1} - a_n = b^{n+1} - b^n = b^n(b-1) < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- z razmerjem (kvocientom) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{b^n} = b < 1$, $n \in \mathbb{N}$,

torej je zaporedje (b^n) padajoče.

8. Limite zaporedij so:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ker je $\left(\frac{1}{n}\right)$ z 0 navzdol omejeno padajoče zaporedje, zato je (po izreku 7.2.22) konvergentno. Ker je $0 = \inf \frac{1}{n}$, je tudi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(b) Če je $k > 0$, je n^k naraščajoče zaporedje z lastnostjo $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$, torej je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n+1}{n^3+1} \neq \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+2n^2-n+1\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^3+1\right)}$, ker limiti števca in imenovalca ne obstajata, vendar pa s preoblikovanjem dosežemo

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2-n+1}{2n^3+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2+1/n^3\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{2+1/n^3} \\ &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+1/n^3\right)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Nedoločenost $\infty - \infty$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

ker je $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}\right) = \infty$.

(e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{2n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{2n^2+1} = \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{n})}{2(1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$.

(f) Geometrijsko zaporedje $a_n = a_1q^{n-1}$. Če je $a_1 = 0$, je zaporedje konstantno $a_n = 0$ in torej konvergentno z limito 0. Sicer, če $a_1 \neq 0$, je konvergenca odvisna le od q kot je navedeno v (18). Zaporedje je konvergentno le, če je $-1 < q \leq 1$, $\lim a_1q^{n-1} = 0$, če je $-1 < q < 1$ in $\lim a_1q^{n-1} = a_1$, če je $q = 1$.

(g) Rekurzivno podano zaporedje: $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$. Približno izračunajmo nekaj členov: $3,\ 2.333\,3,\ 2.142\,9,\ 2.066\,7,\ldots$ Zdi se, da bi lahko bilo zaporedje padajoče in navzdol omejeno z 2. Izračunajmo $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} - a_n = 3 - \frac{2}{a_n} - a_n = -\frac{(a_n-1)(a_n-2)}{a_n}$$

Pokažimo, da so vsi členi $a_n > 2$. Iz tega bo sledilo, da so tudi $a_n > 1$ in zato $a_{n+1} - a_n < 0$ in zaporedje padajoče.
Matematična indukcija:

- $a_1 = 3 > 2$.
- Denimo, da je $a_n > 2$. Potem sledi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_n} &< \frac{1}{2}\\
-\frac{2}{a_n} &> -1\\
3-\frac{2}{a_n} &> -1+3\\
a_{n+1} &> 2.
\end{aligned}$$

Zaporedje je torej padajoče in navzdol omejeno, zato je po izreku 7.2.22 tudi konvergentno. Izračunajmo še limito.

$$\begin{aligned}
a = \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{a_n}\right) = 3 - \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 3 - \frac{2}{a}.
\end{aligned}$$

Mimogrede smo uporabili še, da $a = \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Tako smo pridelali enačbo $a = 3 - \frac{2}{a}$, oziroma $a^2 - 3a + 2 = 0$. Ta kvadratna enačba ima korena $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$. Ker so vsi členi našega zaporedja večji od 2, število 1 ne more biti limita. Torej je $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(h) $(a_n) = \left(\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2\sqrt{2}},\ \ldots\right)$, $\lim_{n\to\infty} a_n =?$
Rešitev: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$;
$a_n > 0$; $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{a_n}} > 1$, če je le $a_n < 4$; torej je $a_{n+1} > a_n$ in zaporedje naraščajoče.
Z indukcijo pokažimo, da je $a_n < 4$;

- $n = 1 : a_1 = \sqrt{2} < 4$.
- $a_n < 4 \Rightarrow a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} < 2\sqrt{4} = 4$.

Zaporedje je naraščajoče in navzgor omejeno, torej je konvergentno.

(i) $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$; Pokaži: $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.
Nekaj približkov:

$$(2, 1.5,\ 1.41\overline{6},\ 1.41421568628,\ 1.41421356238, \ldots).$$

To zaporedje je zaporedje racionalnih približkov za

$$\sqrt{2} = 1.414213562373\ldots$$

Zdi se, da je to zaporedje padajoče, vendar je potrebno to še preveriti.

- Izračunajmo $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) - a_n = \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{2-a_n^2}{a_n}$.
- Očitno so vsi $a_n > 0$, kakor hitro je $a_1 > 0$, kar je v našem primeru izpolnjeno.
- Če pokažemo, da je zaporedje navzdol omejeno s $\sqrt{2}$, je $a_n \geq \sqrt{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sledi, da je $2 - a_n^2 < 0$ in $a_{n+1} - a_n < 0$, torej zaporedje padajoče in navzdol omejeno. Ker je $a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{2a_n}$, je $2a_na_{n+1} = a_n^2+2$, kar lahko preoblikujemo v

  $$a_n^2 - 2a_na_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - 2.$$

  Leva stran je popoln kvadrat

  $$(a_n - a_{n+1})^2 = a_{n+1}^2 - 2,$$

  zato mora biti $a_{n+1}^2 \geq 2$, torej $a_{n+1} \geq \sqrt{2}$, $n = 1, 2, \ldots$. hkrati pa je tudi $a_1 = 2 > \sqrt{2}$.

- Padajoče navzdol omejeno zaporedje je konvergentno, torej ima limito. Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Potem je

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right); \\
a &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{a}\right) \\
&\Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Ker so vsi členi zaporedja $a_n > 0$, je $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

9. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$, $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Pokazali bomo, da je (a_n) naraščajoče in (b_n) padajoče in da sta obe zaporedji omejeni, torej konvergentni. Nazadnje bomo preverili, da imata isto limito.

   Pri preverjanju monotonosti obeh zaporedij si bomo pomagali z Bernoullijevo neenakostjo: $(1+x)^n > 1 + nx$, če je le $x \geq -1$, $x \neq 0$ in $n > 1$. (dokaz z indukcijo!).

   - Za sklep, da je (a_n) naraščajoče, zadošča preveriti, da je $\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Najprej poračunamo, da je

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

   Neenakost,

$$
\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1
$$

   ki jo želimo preveriti, preoblikujemo v

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} &> \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Po drugi strani pa je leva stran gornje neenakosti

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^{n-1}\\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}\\ &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}.\end{aligned}$$

Sedaj upoštevamo Bernoullijevo neenakost z izbiro $x = -\frac{1}{n^2}$ in dobimo za $n > 2$

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1} &> 1+(n-1)\,x\\ &= 1-(n-1)\,\frac{1}{n^2} = \frac{n^2-n+1}{n^2}\end{aligned}$$

Pokažimo še, da je za vsak naraven n izpolnjeno

$$\frac{n^2-n+1}{n^2} > \frac{n}{n+1}.$$

Križno zmnožimo:

$$\begin{aligned}\left(n^2-n+1\right)(n+1) &> n^3\\ n^3+1 &> n^3.\end{aligned}$$

Zadnja neenakost očitno velja za vsak naraven n. Združimo še

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} &= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\\ &> \frac{n^2-n+1}{n^2}\\ &> \frac{n}{n+1},\end{aligned}$$

kar smo želeli.

- Zaporedje (b_n) je padajoče: zadošča preveriti, da je $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 1$ za vsak

$n = 2, 3, \ldots$.

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}}{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}} \\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}} \\
&= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Bernoullijeva neenakost za $x = \frac{1}{n^2-1}$ nam da

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + nx = 1 + \frac{n}{n^2-1} = \frac{n^2+n-1}{n^2-1}.$$

Nazadnje je

$$\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1} \\
&> \frac{(n^2+n-1)\,n}{(n^2-1)\,(n+1)} \\
&= \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} \\
&= 1 + \frac{1}{(n^2-1)\,(n+1)} \\
&> 1.
\end{aligned}$$

- Izkaže pa se tudi, da je $b_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, saj je

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} \\
&= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n > a_n \qquad (20)
\end{aligned}$$

Od tod iz monotonosti zaporedij (a_n) in (b_n)sledi

$$2 = a_1 \leq a_n < b_{n+1} \leq b_2 = 4$$

Torej sta zaporedji (a_n) in (b_n) monotoni in omejeni in zato konvergentni.

- Na koncu preverimo, da imata obe zaporedji isto limito. Upoštevajoč (20) in lastnosti limit izračunamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} b_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.\end{aligned}$$

Sedaj sledi (19).

10. Uporabili bomo limiti za število e, ker imamo nedoločenost tipa 1^∞.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n =$
Vpeljemo novo neznanko $m = 2n$ in dobimo
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{2n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right)^{-2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{2}} = \frac{e^{-2}}{e^2} = \frac{1}{e^4}.$

8 Vrste

8.1 Osnovni pojmi

Naj bo dano zaporedje (a_n). Zanimalo nas bo, kdaj ima smisel vsota

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots,$$

ki jo na kratko zapišemo v obliki

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Denimo, vsota vseh naravnih števil $1+2+3+4+5+\ldots+n+\ldots$ verjetno nima smisla, medtem ko je videti, da bi bilo število 1 smiselna vsota vrste $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$.

Zaporedju (a_n), ki ga želimo sešteti, priredimo novo zaporedje (s_n).

Definicija 8.1.1 ***Zaporedje delnih vsot*** *(s_n) je zaporedje s splošnim členom*

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Za vrsto $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ je $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{7}{8}$, $s_4 = \frac{15}{16}, \ldots$, $s_n = \frac{2^n-1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Vidimo, da zaporedje (s_n) konvergira in $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.

Definicija 8.1.2 *Za vrsto $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ pravimo, da* ***konvergira****, kadar konvergira zaporedje ustreznih delnih vsot (s_n). V tem primeru je* ***vsota vrste*** *limita zaporedja (s_n). Če pa je zaporedje delnih vsot (s_n) divergentno, rečemo, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$* ***divergentna****.*

V primeru, da je vrsta konvergentna, lahko zapišemo:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Trditev 8.1.3 *Če vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Dokaz. Izrazimo $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$, od koder je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0.$$

Pri tem smo bistveno upoštevali, da je zaporedje delnih vsot (s_n) konvergentno zaporedje. □

Zgled. Ugotovimo ali je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots$$

konvergentna.

Ne, ta vrsta ne konvergira, saj je $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0, \ldots$ in je zaporedje (s_n) z dvema stekališčema, 0 in 1, divergentno.

Zelo pomembna je **harmonična vrsta**, vrsta iz obratnih vrednosti naravnih števil:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{21}$$

Čeprav je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ta vrsta ne konvergira, kar bomo preverili v nadaljevanju. Obrat trditve 8.1.3 torej ne velja.

Trditev 8.1.4 *Harmonična vrsta (21) je divergentna.*

Dokaz. *Argument št. 1: Najprej dobimo oceno za vsoto* $a_{n+1} + \ldots + a_{2n}$

$$a_{n+1} + \ldots + a_{2n} = \frac{1}{n+1} + \ldots \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

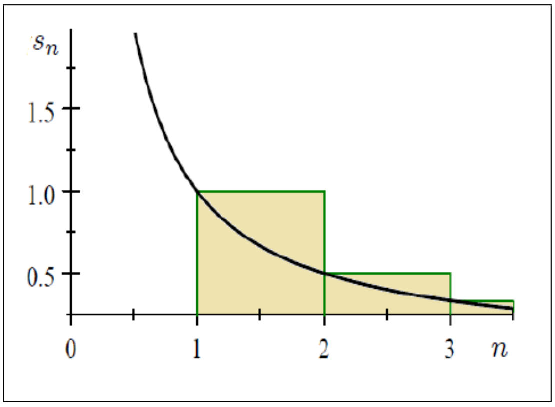
Nato bomo opazovali podzaporedje (s_{2^n}).

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= s_{2^2} = s_2 + (a_3 + a_4) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
s_8 &= s_{2^3} = s_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 > \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&\vdots \\
s_{2^n} &\geq 1 + n\frac{1}{2} \Rightarrow s_{2^n} \text{ divergira } (\to \infty),
\end{aligned}$$

Namreč, če bi zaporedje (s_n) konvergiralo, bi konvergiralo tudi vsako podzaporedje. Zaporedje (s_{2^n}) je podzaporedje zaporedja (s_n) in je neomejeno, torej divergentno, zato zaporedje delnih vsot (s_n) za harmonično vrsto ne more biti konvergentno.

Argument št. 2: Naj bo $f(x) = \frac{1}{x}$. Zaporedje (s_n) primerjamo z integralom $\int_1^{n+1} f(x)\, dx$.

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$



Slika 8.60: Harmonična vrsta je divergentna.

Iz slike vidimo, da je vsota ploščin pravokotnikov večja od ploščine pod krivuljo $y = \frac{1}{x}$, $1 \leq x \leq n+1$. Zato je $s_n > \ln(n+1)$, zaporedje (s_n) neomejeno in torej divergentno. □

Naj bodo $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Vrsta s spreminjajočimi predznaki $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ se imenuje **alternirajoča**. Včasih alternirajoča vrsta konvergira, vrsta iz absolutnih vrednosti členov pa ne.

Definicija 8.1.5 *Kadar konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, rečemo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***konvergira absolutno****. Če pa vrsta konvergira, vendar ne konvergira absolutno, rečemo, da* ***pogojno konvergira.***

Preverili bomo, da iz absolutne konvergence sledi konvergenca vrste, obratno pa ne drži. Če vrsta pogojno konvergira, lahko z različnim vrstnim redom seštevanja dobimo različne limite (različnih - odvisnih od vrstnega reda seštevanja) delnih vsot - celo še več: pogojno konvergentni vrsti lahko z ustreznim vrstnim redom seštevanja priredimo poljubno število kot njeno vsoto.

Izrek 8.1.6 *Če je vrsta absolutno konvergentna, potem je tudi konvergentna in njena vsota ni odvisna od vrstnega reda členov.*

Dokaz. Z uporabo trikotniške neenakosti pokažemo, da iz dejstva, da je vrsta iz absolutnih vrednosti členov Cauchyjeva, sledi, da je Cauchyjeva tudi dana vrsta, torej konvergentna. Argument, da je vsota absolutno konvergentne vrste neodvisna od vrstnega reda seštevanja, najde bralec v knjigi [12]. □

Zaradi stabilnosti seštevanja so absolutno konvergentne vrste najbolj zaželene.

8.2 Računanje z vrstami

Izrek 8.2.1 *Vsota konvergentnih vrst je konvergentna vrsta in*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

Produkt konvergentne vrste s številom je spet konvergentna vrsta in

$$t\in\mathbb{R}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}ta_n=t\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

Dokaz. Prva trditev je posledica dejstva, da je vsota konvergentnih zaporedij konvergentno zaporedje in produkt konvergentnega zaporedja s številom spet konvergentno zaporedje. □

Geometrijska vrsta
je vrsta, katere členi so členi geometrijskega zaporedja: a_1, $a_n=a_1q^{n-1}$. Če $a_1\neq 0$, bo konvergenca vrste odvisna le od q, zato poglejmo geometrijsko vrsto s prvim členom $a_1=1$.

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}+\ldots$$

Zaporedje delnih vsot za geometrijsko vrsto se glasi:

$$\begin{aligned}s_n&=1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}\\&=\frac{(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})(1-q)}{1-q}\\&=\frac{1-q^n}{1-q},\quad q\neq 1,\end{aligned}\tag{22}$$

in

$$s_n=n,\quad \text{če } q=1.$$

Obravnavajmo konvergenco zaporedja (s_n). Kot vidimo iz zadnje enakosti, je vrsta divergentna, če je $q=1$ in $\lim s_n=\infty$ v tem primeru. Sicer, če $q\neq 1$, lahko uporabimo obrazec (22). Zaporedje $(s_n)=\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ bo konvergentno le, če je $-1<q<1$, saj je geometrijsko zaporedje (q^{n-1}), $q\neq 1$, le v tem primeru konvergentno (18) in takrat je $\lim_{n\to\infty}q^{n-1}=0$. Torej je $s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}$. Povzemimo:

Izrek 8.2.2 *Geometrijska vrsta* $a_1(1+q+q^2+\ldots)$, $a_1\neq 0$, *je konvergentna natanko takrat, ko je* $|q|<1$. *Njena vsota se tedaj glasi*

$$s=\frac{a_1}{1-q}.$$

8.3 Konvergenčni kriteriji za vrste s pozitivnimi členi

Najprej omenimo, da je vrsta s pozitivnimi členi divergentna samo v primeru, ko je zaporedje delnih vsot tako, da je $\lim s_n = \infty$. Hitro namreč vidimo, da je $s_{n+1} = s_n + a_n > s_n$, torej je zaporedje delnih vsot naraščajoče. Naraščajoče zaporedje pa je konvergentno natanko takrat ko je navzgor omejeno. Kadar je vrsta s pozitivnimi členi divergentna, zapišemo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. V primeru, da je konvergentna, včasih uporabimo tudi zapis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Včasih, pravzaprav pogosto, je težko izračunati limito zaporedja delnih vsot. Ali lahko kljub temu ugotovimo, da neka vrsta konvergira ali divergira?

1. Če $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow$ vrsta divergira.

2. **Primerjalni kriterij.** Recimo, da želimo ugotoviti konvergenco dane vrste $\sum a_n$.

   a) Naj bo $\sum b_n$ taka <u>konvergentna</u> vrsta, da velja $0 < a_n \leq b_n$ za vse n razen morda za končno mnogo.

   Potem konvergira tudi vrsta $\sum a_n$. Rečemo, da je vrsta $\sum b_n$ **majoranta** za vrsto $\sum a_n$.

   b) Če pa je $\sum c_n$ taka <u>divergentna</u> vrsta, da velja $0 < c_n \leq a_n$ za vse n razen morda za končno mnogo, pa tudi $\sum a_n$ divergira. V tem primeru je $\sum c_n$ **minoranta** za vrsto $\sum a_n$.

Zgled. S primerjalnim kriterijem pokažimo, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergentna.

Očitno je $n2^n > 2^n$, če je $n \geq 2$, zato je $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Vrsta s členi $a_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pa je konvergentna geometrijska vrsta ($q = \frac{1}{2}$), torej konvergentna majoranta za dano vrsto. Torej vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergira.

Pogosto je vsoto vrste težko izračunati. Vendar, tudi če tega morda ne znamo, nam informacija, da je vrsta konvergentna, omogoča, da se vsoti vrste približamo - več členov kot seštejemo, bolj se približamo vsoti vrste.

3. **D'Alembertov (ali kvocientni) kriterij.**

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n};$$

   Velja:

$$\begin{cases} L < 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ konvergira,} \\ L > 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ divergira,} \\ L = 1 & \Rightarrow \text{kriterij odpove.} \end{cases}$$

   Zgled. S kvocientnim kriterijem pokažimo, da je vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergentna.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n2^n}} = \frac{1}{2},$$

torej vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ konvergira.

4. **Cauchyjev (korenski) kriterij**

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}; \qquad \begin{cases} L < 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ konvergira,} \\ L > 1 & \Rightarrow \text{vrsta } \sum a_n \text{ divergira,} \\ L = 1 & \Rightarrow \text{kriterij odpove.} \end{cases}$$

Dokaza, da kvocientni in korenski kriterij delujeta, slonita na principu, da poiščemo konvergentno majoranto oziroma divergentno minoranto, v obeh primerih je to ustrezna geometrijska vrsta.

Preverimo kvocientni kriterij. Denimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$. To pomeni, da pri poljubnem $\varepsilon > 0$, neenakost

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \tag{23}$$

izpolnjena za vse dovolj pozne člene zaporedja $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$, $n > N$. Ker je $0 \leq L < 1$, lahko izberem tak ε, da bo še $q := L + \varepsilon < 1$. Upoštevam le desni del neenakosti v (23) in jo preuredim v

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L = q,$$

pomnožim z $a_n > 0$

$$a_{n+1} < q a_n, \quad n > N.$$

Od tod vidimo, da

$$a_{N+2} < q a_{N+1}$$
$$a_{N+3} < q a_{N+2} < q^2 a_{N+1}$$

in

$$a_{N+k} < q^{k-1} a_{N+1}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Prvih $N+1$ členov vrste ne vpliva na konvergenco (na vsoto seveda vpliva), zato je dovolj obravnavati vrsto

$$a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots$$

in ugotoviti, da

$$\begin{aligned} a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots &< q a_{N+1} + q^2 a_{N+1} + \cdots + q^{k-1} a_{N+1} + \ldots \\ &= a_{N+1} q \left(1 + q + q^2 + \ldots\right) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

saj je vrsta $1 + q + q^2 + \dots$ zaradi $0 < q < 1$ konvergentna majoranta za prvotno vrsto.

Na podoben način, če je $L > 1$, lahko izberemo $\varepsilon > 0$ tako, da bo $q' := L - \varepsilon > 1$ in iz $-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} - L$ doženemo, da je $L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$ oziroma $a_{n+1} > q' a_n$. Od tod zgeneriramo divergentno minoranto, geometrijsko vrsto s kvocientom q'.

Za korenski kriterij, iz $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ dobimo $-\varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - L < \varepsilon$, za $n > N$, od koder je $L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon$ in $(L - \varepsilon)^n < a_n < (L + \varepsilon)^n$, $n > N$. Če je sedaj $L < 1$, lahko izberemo $\varepsilon > 0$ tako, da bo $q := L + \varepsilon < 1$ in dobimo konvergentno majoranto, sicer, če je $L > 1$, pa lahko izberemo $\varepsilon > 0$ tako, da je $q' := L - \varepsilon > 1$ in pridelamo divergentno minoranto.

5. **Integralski kriterij**

   Denimo, da so členi vrste $\sum a_n$ integrabilne funkcije n; torej je $a_n = f(n)$ in f taka funkcija, da se da izračunati nedoločeni integral. Velja naslednje: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko tedaj ko konvergira (t.j.: obstaja) posplošeni integral $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$.

   To idejo smo že uporabili pri dokazu, da je harmonična vrsta divergentna (Argument št. 2, stran 128). Primerjamo s_n z vrednostjo integrala $\int_1^n f(x)\, dx$ in če lahko pokažemo, da je za vsak $n \geq 2$ izpolnjeno $s_n < \int_1^n f(x)\, dx$, potem iz konvergence integrala $\int_1^n f(x)\, dx < \int_1^{\infty} f(x)\, dx < \infty$ sklepamo, da je zaporedje delnih vsot navzgor omejeno in zato konvergentno. Podobno iz divergence integrala sklepamo, da je zaporedje (s_n) neomejeno in zato divergentno.

8.4 Alternirajoče vrste

Za alternirajoče vrste, to je take, kjer se predznak členov izmenično menjava, imamo zelo preprost kriterij ugotavljanja konvergence. Še pred tem pa omenimo krepkejšo vrsto konvergence.

Definicija 8.4.1 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **konvergira absolutno**, kadar konvergira vrsta iz absolutnih vrednosti členov $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$. Če vrsta konvergira, ne konvergira pa absolutno pravimo, da vrsta **pogojno konvergira**.*

Prepričati se je namreč mogoče, da iz absolutne konvergence sledi konvergenca, obratno pa ni res.

Leibnizov kriterij

Izrek 8.4.2 *Alternirajoča vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots$ konvergira, če je zaporedje (a_n), $a_n > 0$, vsaj od nekega n naprej padajoče in je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Zgled. Po Leibnizovem kriteriju vrsta

$$
\begin{aligned}
&1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned} \tag{24}
$$

konvergira, saj zaporedje $\left(\frac{1}{n}\right)$ pada proti svoji limiti 0.

Ta vrsta konvergira le pogojno, ker je vrsta iz absolutnih vrednosti členov harmonična vrsta, za katero vemo, da ne konvergira.

Vsota vrste (v vrstnem redu kot je napisana) je očitno pozitivna, imenujmo jo $s > 0$. Da se pokazati, da lahko s spremenjenim vrstnim redom seštevanja dosežemo, da bo limita delnih vsot enaka $\frac{1}{2}s$, torej različna od s. Podrobnosti si lahko bralec prebere npr. v [11].

V poglavju o Taylorjevi vrsti [6] pokažemo, da je vsota vrste (24), seštete v danem vrstnem redu, enaka $s = \ln 2$.

8.5 Naloge

1. Z analizo zaporedja delnih vsot s_n ugotovi, če vrsta konvergira in izračunaj njeno vsoto, v primeru, da je konvergentna.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$

2. Izrazi periodično decimalno število $0.\overline{10}$ s pomočjo geometrijske vrste v obliki ulomka.

3. Ugotovi, za katere x vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^n$ konvergira in za te x določi njeno vsoto.

4. Pokaži, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-2)^{n-1}}{4^n}$ konvergira in določi njeno vsoto.

5. Z uporabo konvergenčnih kriterijev ugotovi ali dana vrsta konvergira.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ (g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+1}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

6. Dokaži izrek 8.4.2 o konvergenci alternirajoče vrste.

7. Ugotovi ali alternirajoče vrste konvergirajo absolutno ali le pogojno.

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^n+1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

Rešitve

1. (a) $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, $s = 1$.

(b) $s_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$, $s = \frac{3}{4}$

(c) divergira, saj $s_n = \log\left(\frac{2}{1}\frac{3}{2}\ldots\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) \to \infty$

2. $0.\overline{10} = 10^{-1}\left(1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \ldots\right) = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{10}{99}$.

3. $|x+2| < 1$, torej $x \in (-3,-1)$, $s = \frac{-1}{x+1}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-2)^{n-1}}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n}$ divergira, ker $\lim a_n = \lim (-1)^n \frac{n+1}{n} \neq 0$.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergira, ker $(s_n) = (-1, 0, -1, 0, \ldots)$ divergira.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ divergira, ker je $\frac{\log n}{n} > \frac{1}{n}$, $n \geq 3$, primerjalni kriterij.

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+1}$ konvergira, primerjalni kriterij $\frac{1}{3^n+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ konvergira, kvocientni kriterij.

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ divergira, kvocientni kriterij.

(g) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ konvergira, korenski kriterij.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$, konvergira, integralski kriterij.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, divergira, integralski kriterij.

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ konvergira, Leibnizov kriterij.

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n+1}$ konvergira, Leibnizov kriterij.

6. Dokaz izreka 8.4.2. Naj bo (s_n) zaporedje delnih vsot za dano alternirajočo vrsto. Opazujemo podzaporedji (s_{2k}) in (s_{2k-1}) ter pokažemo, da je za vsak $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} s_{2k+1} - s_{2k-1} &= a_{2k+1} - a_{2k} = -\left(a_{2k} - a_{2k+1}\right) < 0 \\ s_{2k+2} - s_{2k} &= -a_{2k+2} + a_{2k+1} = a_{2k+1} - a_{2k+2} > 0 \end{aligned}$$

od koder sklepamo, da je (s_{2k+1}) padajoče in (s_{2k}) naraščajoče zaporedje. Opazimo še, da je

$$s_{2k+1} - s_{2k} = a_{2k+1} > 0.$$

Zato je

$$a_1 - a_2 = s_2 < s_{2k} < s_{2k+1} < s_1 = a_1.$$

Obe zaporedji (s_{2k}) in (s_{2k-1}) sta monotoni in omejeni in zato konvergentni. Naj bo $\sigma_1 = \lim s_{2k+1}$ in $\sigma_2 = \lim s_{2k}$. Upoštevajoč dejstvo, da je razlika konvergentnih zaporedij konvergentno zaporedje vidimo, da je

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_2 &= \lim s_{2k+1} - \lim s_{2k} \\ &= \lim (s_{2k+1} - s_{2k}) \\ &= \lim a_{2k+1} \\ &= 0,\end{aligned}$$

torej je $\sigma_1 = \sigma_2$. Tudi zaporedje (s_n) je omejeno. Videti je potrebno še, da ima le eno stekališče. Denimo, da bi imelo dve s' in s''. Potem obstajata podzaporedji (s_{n_k}) in (s_{n_m}), ki konvergirata $(s_{n_k}) \to s'$ in $(s_{n_m}) \to s''$. Potem pa tudi podzaporedji konvergirata k istima limitama

$$(s_{2n_k}) \to s' \quad \text{in} \quad (s_{2n_m+1}) \to s''.$$

Zaporedje (s_{2n_k}) je podzaporedje (s_{2n}), zato je $s' = \sigma_1$, zaporedje (s_{2n_m+1}) pa je podzaporedje (s_{2k+1}), zato je $s'' = \sigma_2$. Vendar, $\sigma_1 = \sigma_2$, zato je $s' = s''$. Zaporedje (s_n) je torej omejeno in z enim samim stekališčem, torej konvergentno z limito $s = \sigma_1 = \sigma_2$.

7. (a) konvergira absolutno.
   (b) konvergira absolutno.
   (c) konvergira pogojno.

Literatura

[1] F. Brešar, B. Brešar, Analiza I, 1. ponatis, FERI Maribor, 2005. vi

[2] F. Brešar, B. Brešar, Analiza II, FERI Maribor, 2005.

[3] R. Jamnik, Matematika, Partizanska knjiga, Ljubljana 1981.

[4] M. Mencinger, Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre, ponatis 2. izd., FG Maribor, 2011. vi

[5] P. Mizori-Oblak, Matematika za študente tehnike in naravoslovja, ponatis 6. izdaje, FS Ljubljana 2009. vi

[6] T. Petek, Izbrana poglavja iz tehniške matematike, [Elektronski vir], UM FERI, Maribor, 2014, dostop: http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/petek/ucbeniki/ucbenikDE.pdf in dkum.uni-mb.si. 134

[7] I. Peterin, Naloge za vaje iz Analize 1 [Elektronski vir], RI-UNI, FERI Maribor, 2000, dostop: http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/peterin/naloge/ana1/analiza1.pdf. vi

[8] I. Peterin, Izpitne naloge iz Analize 1 [Elektronski vir], RI-UNI, FERI Maribor, 2000, dostop: http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/peterin/naloge/ana1/izpiti.pdf. vi

[9] I. Peterin, Naloge iz kolokvijev Analize 1 [Elektronski vir], RI-UNI, FERI Maribor, 2000, dostop: http://www.mp.feri.uni-mb.si/osebne/peterin/naloge/analiza1/kolokviji.pdf. vi

[10] I. Prijatelj, Uvod v matematično analizo, 1. del, DMFA, Ljubljana 1980.

[11] G. Tomšič, B. Orel, N. Mramor-Kosta, Matematika I, Založba FE in FRI, 3. izd., 2000. vi, 134

[12] I. Vidav, Višja Matematika I (10. natis), DMFA, Ljubljana, 1990. vi, 129

[13] J. Žerovnik, Matematika: (1. del), ponatis 2. popr. izdaje, FS Maribor, 2006.