KAKO PREDSTAVITI CASIMIRJEV TLAK?

ANDREJ LIKAR

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 04.80.-y

V prispevku predlagamo izpeljavo Casimirjevega tlaka, ki ga lahko predstavimo pri predavanju iz osnov kvantne elektrodinamike. Najprej predstavimo osnovne prijeme pri enodimenzionalnem primeru, potem pa brez posebnih zapletov pridemo do slavne Casimirjeve enačbe. Namesto da bi računali gostoto energije, se raje takoj osredotočimo na tlak, kar eliminira razpravo v zvezi s polarizacijo nekaterih stoječih valov. Pokažemo tudi, da regularizacijska funkcija ne sme ostro odsekati področja z visokimi frekvencami, kot je to predlagano v nekaterih učbenikih.

HOW TO PRESENT CASIMIR PRESSURE

The article introduces simple derivation of Casimir pressure which could be presented in a course on basics of quantum electrodynamics. One dimensional case is introduced first which allows smooth transition to famous Casimir equation for pressure between two metal plates. We avoid calculation of energy density but start from the beginning with pressure, therefore eliminating discussion of polarization of certain standing waves. We show that regularizing function with sharp cut of high frequency region should not be used, as suggested in some textbooks.

Osnovno stanje elektromagnetnega polja v kvantni elektrodinamiki je stanje, kjer nimamo fotonov. To pa ne pomeni, da v tem stanju tudi polja ni. Kvantna elektrodinamika uči, da je energija v osnovnem stanju povezana s frekvenco tega stanja, in sicer znaša za dano polarizacijo $\frac{\hbar\omega}{2}$.

Obravnava valovanja v prostoru je bolj zapletena kot v tankem koaksialnem kablu. Zato si najprej oglejmo slednji primer. Stoječe valove tu opredelimo podobno, kot to storimo na struni z dolžino l, vpeti na dveh koncih. Stoječi valovi so tedaj podani z jakostjo električnega polja:

$$E(x,t) = E_0 \sin(\omega t) \sin(kx),$$

kjer mora valovno število k zadoščati pogoju:

$$k = \frac{\omega}{c}$$

in

$$kl = n_l \pi, \ \omega_l = \frac{c\pi}{l} n_l,$$

kjer je n_l poljubno naravno število. Vsak n_l določi način nihanja in vsak način nihanja nosi energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$. V klasični fiziki je lahko stoječi val prazen, ga ni, preprosto predpostavimo, da je amplituda E_0 enaka nič. V kvantni elektrodinamiki pa ni tako. Vsak način nihanja nosi hočeš nočeš energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$ in z njo fluktuacije elektromagnetnega polja. Ker je različnih načinov nihanja neskončno, je neskončna tudi energija vakuuma. Težko verjetno, verjetno tudi napačno. Načini nihanja pri zelo visokih frekvencah gotovo ne prispevajo toliko, da bi energija vakuuma divergirala. A kje je meja, danes še ne vemo.

Sedaj pa si po Casimirju zamislimo zelo dolg kabel, ki je na sredi predeljen z dvema tankima kovinskima stenama K_1, K_2, na katerih mora biti jakost električnega polja enaka nič. Razdalja med stenama K_1 in K_2 naj bo D. Casimir trdi, da na steni sedaj deluje sila, ki ju skuša zbližati. To presenetljivo ugotovitev bomo sedaj utemeljili.

Oglejmo si torej levo prevodno steno K_1 in si mislimo, da je levo od nje še zaključen kabel z dolžino l (glej sliko 1). Dolžino l bomo v računih na primernem mestu raztegnili preko vseh meja. V tem delu kabla imamo načine nihanja, ki smo jih pravkar opredelili. Med stenama K_1 in K_2 pa imamo kos kabla z dolžino D, zato so načini nihanja tu podani prav tako kot zgoraj, le da moramo namesto l pisati D. Seveda se spekter načinov nihanja spremeni, postane redkejši, kot je razvidno iz:

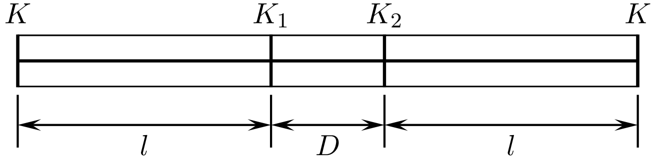
$$\omega_D = \frac{c\pi}{D} n_D.$$

Tako levi kot desni del kabla deluje na steno K_1 s silo. Vsak način nihanja prispeva svoj delež, ki ga brez težav določimo tako, da nekoliko premaknemo steno, denimo, da razdaljo l malo zmanjšamo. Zaradi tega premika se energija izbranega načina nihanja z n_l poveča, ker se poveča frekvenca tega načina. Torej je delo zunanje sile F_{lz}, ki zelo počasi premakne steno K_1 proti levi, enako spremembi energije izbranega načina nihanja:

$$dA_l = F_{lz} dl = \frac{\hbar}{2} d\omega_l.$$

Tako sila F_{lz} kot dl sta tu negativna, če privzamemo pozitivno smer sile proti desni. Torej je sila polja samega:

$$F_l = -\frac{\hbar}{2}\frac{d\omega_l}{dl} = \frac{\hbar\pi c}{2l^2} n_l.$$



Slika 1. Tanek koaksialni kabel s prevodnima stenama K_1 in K_2, kjer je vozel jakosti električnega polja. Na levi strani od K_1 in na desni od K_2 je dolžina kabla l, med stenama pa D.

Podobno je sila na steno z desne zaradi načinov nihanja tam:

$$F_D(n_D) = -\frac{\hbar \pi c}{2D^2} n_D.$$

Rezultanta teh sil je:

$$\Delta F = F_l + F_D = \frac{\hbar \pi c}{2} \left(\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} - \sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} \right).$$

Vsaka vsota zase divergira, razlika pa ne bi smela. Robnemu pogoju za jakost električnega polja na steni pač ne moremo povsem zadostiti, še posebno če imamo v mislih zelo visoke frekvence, denimo tiste, ki pripadajo sevanju gama. Padajoči sili F_D se torej z naraščajočo frekvenco vse bolj pridružuje sila F_l na račun prepuščenega valovanja, pri zelo visokih frekvencah se obeh meja ne čuti več in namesto F_D ostane le sila F_l. Vsoto po n_D moramo zato z naraščajočo frekvenco zmanjševati in ji ustrezno vse bolj dodajati del vsote po n_l. Vpeljemo padajočo odrezno funkcijo $f(\omega)$, ki od 1 pri nizkih frekvencah mehko in monotono prehaja proti nič pri visokih, denimo s

$$f(\omega) = \exp(-\epsilon\omega)$$

s primerno izbranim pozitivnim ϵ. Rezultanto potem zapišemo takole:

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2} \left[\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} - \left(\sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} f(\omega_D) + \sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} \left(1 - f(\omega_l)\right) \right) \right]$$

ali preglednejе:

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2} \left[\sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} f(\omega_l) - \sum_{n_D=1}^{\infty} \frac{n_D}{D^2} f(\omega_D) \right].$$

Vidimo, da sedaj posamezni vsoti pri vsakem pozitivnem ϵ konvergirata in lahko rezultanto brez težav izračunamo. V literaturi zasledimo trditve, da vpeljemo odrezno funkcijo le zato, da lahko sploh kaj izračunamo in se ji potem odrečemo (pri nas z limitiranjem ϵ proti nič), in da je to le eden od možnih predpisov za odpravo singularnosti. Tako razmišljanje pa privede do protislovja, saj lahko z različnimi predpisi pridemo do različnih rezultatov. Videli bomo, da izbira odrezne fukcije pri nas ni kritična, zadošča že vsaka dovolj hitro padajoča funkcija frekvence, ki upošteva, da se snovi pri zelo visokih frekvencah ne razlikujejo od vakuuma.

Preden se lotimo računanja vsot, uvidimo, da lahko vsoto po n_l zapišemo z integralom, ker je vsak člen vsote z naraščajočim l vse bolj podoben $\frac{\omega_l}{c\pi} \exp(-\epsilon\omega_l)\Delta(\frac{\omega_l}{c\pi})$, ki za $\Delta n_l = 1$ in z naraščajočim l pada proti nič. Torej:

$$\lim_{l\to\infty} \sum_{n_l=1}^{\infty} \frac{n_l}{l^2} \exp(-\epsilon\omega_l) = \int_0^{\infty} \frac{\omega_l}{(c\pi)^2} \exp(-\epsilon\omega_l) d\omega_l.$$

Končno zapišemo rezultanto tako, da je povezava med integralom in vsoto vidna na prvi pogled:

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2D^2}\left(\int_0^\infty v \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi}{D} v\right) dv - \sum_{n_D=0}^{\infty} n_D \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi}{D} n_D\right)\right),$$

kjer smo vpeljali $v = D\omega_l/c\pi$. V limiti, ko gre ϵ proti nič, lahko dobimo rezultanto v zaključeni obliki, saj si lahko v tem primeru pomagamo z Euler-Maclaurinovo sumacijsko formulo, prirejeno za naš primer:

$$\int_a^b F(x)dx - \sum_{n=a}^{b} F(n) = -\frac{1}{2}(F(a) + F(b)) - \frac{1}{12}(F'(b) - F'(a)) + R,$$

kjer za ostanek velja:

$$|R| \leq \frac{1}{120} \int_a^b |F'''(x)| dx. \tag{1}$$

Pri nas je torej

$$\int_0^\infty F(x)dx - \sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \frac{1}{12} F'(0) + R$$

in $R = 0$, ker je v limiti $\epsilon \to 0$ tretji odvod funkcije $F(x) = x \exp\left(-\epsilon \frac{c\pi x}{D}\right)$ enak nič za vse x. Torej je končno rezultanta

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{24 D^2}.$$

Enodimenzionalnega primera smo se lotili zato, ker je tu računanje preprosto, nauči pa nas, kako ravnati v tridimenzionalnem primeru, kjer bomo izračunali tlak med dvema vzporednima kovinskima ploščama K_1 in K_2.

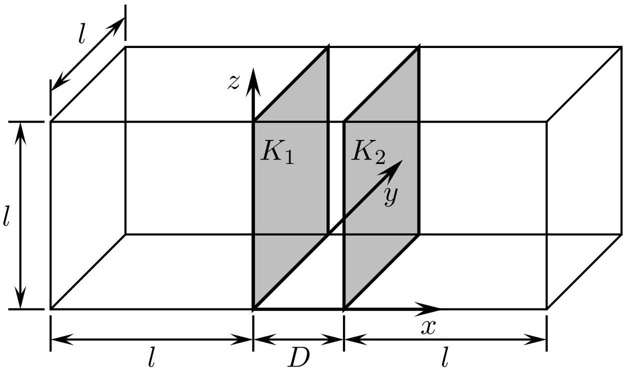
Analogno kot pri enodimenzionalnem primeru si zamislimo kvadratično prizmo z robovi l, l in dolžino $2l + D$ (glej sliko 2). Leva in desna kocka imata povsem odbojne površine, prav tako kvadratična prizma z osnovnima ploskvama, ki ju tvorita plošči. Jakost električnega polja v vseh ploskvah mora biti bodisi enaka nič ali pa pravokotna nanje. S superpozicijo stoječih valov si lahko pričaramo kakršnokoli valovanje znotraj kocke daleč od njenih sten. V kocki so stoječi valovi podani podobno kot pri kablu, le da za njihov opis potrebujemo tri cela števila $n_x \geq 0$, $n_y \geq 0$ in $n_z \geq 0$, od katerih sme biti le eno enako nič [2].

Iz valovne enačbe dobimo frekvenco ω danega načina nihanja, in sicer v kocki

$$\omega_l = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l}\right)^2},$$

v prizmi pa

$$\omega_D = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{D}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l}\right)^2}.$$



Slika 2. Originalna Casimirjeva naloga – v prostoru sta veliki vzporedni prevodni plošči. Na levo ploščo deluje na levi strani tlak zaradi ničelnih kolebanj v veliki kocki z robom l, na desni pa tlak v prizmi z robovi (D, l, l). Iščemo razliko teh tlakov δp. Na sliki je prikazan eden od uporabljenih koordinatnih sistemov.

V kvantni elektrodinamiki vsak način nihanja z dano polarizacijo nosi ničelno energijo $\frac{\hbar\omega}{2}$. Če kocko vzdolž osi x počasi malo stisnemo, se frekvenca nihanja poveča in s tem tudi ničelna energija. Delo, ki smo ga pri stiskanju opravili, je enako spremembi te energije, torej

$$dA = F_{lz}dx = \frac{\hbar d\omega}{2}.$$

Naprej sklepamo enako kot v enodimenzionalnem primeru in za tlak dobimo

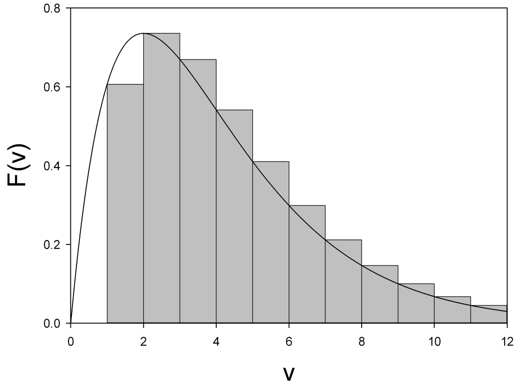
$$p_l = \frac{\hbar c\pi}{2l^3}\left(\frac{n_x}{l}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{(\frac{n_x}{l})^2 + (\frac{n_y}{l})^2 + (\frac{n_z}{l})^2}}.$$

V prizmi, kjer malo premaknemo eno od plošč tako, da s tem spremenimo razdaljo D, pa imamo

$$p_D = \frac{\hbar c\pi}{2l^2 D}\left(\frac{n_x}{D}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{(\frac{n_x}{D})^2 + (\frac{n_y}{l})^2 + (\frac{n_z}{l})^2}}.$$

Razliko teh tlakov sedaj izračunamo po enodimenzionalnem zgledu. Seštevanje po n_y in n_z opravimo z integracijo, kjer namesto $n_y^2 + n_z^2$ pišemo n^2 in vsoti v limiti $l \to \infty$ zamenjamo z integralom: $\sum_{n_y,n_z} \to \frac{1}{4}\int 2\pi n dn$. Faktor $\frac{1}{4}$ upošteva, da sta n_x in n_y lahko le nenegativni celi števili. Tako dobimo za razliko tlakov

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2\hbar c}{8D^4}\left(\int_0^\infty F(v)dv - \sum_{n=0}^{\infty} F(n)\right),$$



Slika 3. Slika funkcije $F(v)$ za enodimenzionalni primer. Prispevki k rezultanti sil ΔF so ponazorjeni kot razlike ploščin likov med krivuljo in histogramom. Torej so pri naraščajočem delu funkcije pozitivni, pri padajočem delu pa negativni.

kjer je funkcija $F(v)$ to pot nekoliko bolj zapletena:

$$F(v) = \int_0^\infty \frac{v^2 du}{\sqrt{u+v^2}} f\left(\frac{c\pi}{D}\sqrt{u+v^2}\right).$$

Integracijska spremenljivka u je preprosto povezana z n^2. Za eksponentno odrezno funkcijo $f(\zeta) = \exp(-\epsilon\zeta)$ je funkcija $F(v)$ podana s

$$F(v) = \frac{2v^2}{\epsilon\frac{c\pi}{D}} \exp\left(-\epsilon\frac{c\pi}{D}v\right).$$

Od tu dalje moramo poznati parameter ϵ ali, še bolje, kar celotno odrezno funkcijo, ki najbolje opiše dejanske razmere, s katerimi imamo opravka. Presenetljivo pa je, da dobimo končen rezultat, če povsem nefizikalno predpostavimo, da sega odrezna funkcija poljubno globoko v visokofrekvenčno območje. Pri nas to dosežemo z limito $\epsilon \to 0$, pri kateri dobimo za Δp končen izraz z uporabo Euler-Maclaurinove formule. Upoštevati jo moramo do odvoda tretjega reda:

$$\int_a^b F(x)dx - \sum_{n=a}^{b} F(n) = -\frac{1}{2}(F(a)+F(b)) - \frac{1}{12}(F'(b)-F'(a)) + \\ + \frac{1}{720}(F'''(b)-F'''(a)) + R.$$

Ostanek R se izraža do faktorja tako kot v (1), le da je pod integralskim znakom četrti odvod funkcije $F(x)$. V limiti $\epsilon \to 0$ so vsi odvodi funkcije

$F(x)$ enaki nič, zato je tudi R enak nič, z izjemo tretjega odvoda, ki je enak 12, zato je limitna razlika tlakov

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2 \hbar c}{480 D^4}.$$

Zapisano velja za izbrano polarizacijo električne poljske jakosti. Ker imamo v vsakem transverzalnem načinu nihanja dve neodvisni polarizaciji (način z $n_x = 0$ ima sicer le eno, a ne prispeva k tlaku), je končno

$$\Delta p = p_l - p_D = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 D^4}.$$

To je znamenita Casimirjeva enačba. Ker velja Euler-Maclaurinova enačba za vsako dovolj pohlevno funkcijo, o rezultatu ne dvomimo, tudi ne za našo prav posebno odrezno funkcijo.

V nekem učbeniku najdemo takle predlog za odrezno funkcijo: $f(\zeta) = 1$ za $\zeta < \zeta_0$ in 0 drugje. Da z njo ne pridemo do rezultata, se hitro prepričamo kar na preprostem enodimenzionalnem primeru. Razliko sil bi po tem predlogu zapisali kot:

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2D^2} \left(\int_0^N v dv - \sum_{n_D=0}^{N} n_D \right).$$

Tako integral kot vsoto z lahkoto izračunamo v zaključeni obliki in dobimo

$$\Delta F = \frac{\hbar \pi c}{2D^2} \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N(N+1)}{2} \right),$$

kar seveda ne konvergira. Konvergenco sicer dosežemo s spremenjeno zgornjo mejo pri integralu $N + \delta$ in potem določimo δ tako, da pri danem N predpišemo razliko integrala in vsote. A rezultat je potem seveda nedoločen do multiplikacijske konstante. Odrezna funkcija preprosto *mora* mehko padati proti nič, in prav padajoči del funkcije $F(v)$ zagotavlja konvergenco. Fizikalno s tem ni težav, saj vsaka prava stena začne tako ali drugače prepuščati valovanja pri dovolj velikih frekvencah.

Pri Casimirjevem primeru dveh prevodnih plošč sicer prevlada privlak med ploščama, krogelno lupino, na primer, pa tlak razganja. Pri tem tlak celo divergira, če odrezna funkcija prepočasi pada proti nič. Več o tej zanimivi tematiki najdemo v [1], ki je na voljo v naši fizikalni knjižnici.

LITERATURA

[1] M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohiden in V. M. Mostapenko, *Advances in Casimir Effect*, Oxford Univ. Press, 2009.

[2] S. M. Dutra, *Cavity Quantum electrodynamics*, Wiley, 2005.