MEJNA ANALIZA NOSILNOSTI TEMELJNIH TAL POD PLITVIMI TEMELJI PO TEOREMU ZGORNJE VREDNOSTI

LIMIT ANALYSIS OF SHALLOW FOUNDATION BEARING CAPACITY ACCORDING TO UPPER-BOUND THEOREM

doc. dr. Borut Macuh, univ. dipl. inž. grad.
borut.macuh@um.si
dr. Stanislav Škrabl, univ. dipl. inž. grad.
stanislav.skrabl@um.si
Sašo Kos, mag. inž. grad.
saso.kos@um.si
Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo, Smetanova ulica 17, 2000 Maribor

Znanstveni članek
UDK 519.711:624.131.524

Povzetek | V članku je prikazan postopek za določitev nosilnosti temeljnih tal pod plitvimi temelji po teoremu zgornje vrednosti v okviru mejne analize. Podana sta kinematično dopustna porušitvena modela za določitev nosilnosti pasovnih temeljev na pobočju in nosilnosti pravokotnih temeljev v prostorskih razmerah, obremenjenih horizontalno in vertikalno. V analizi nosilnosti pasovnih temeljev na pobočju je mogoče upoštevati gravitacijske, hidrostatične in hidrodinamične ter seizmične obremenitve. Uporaba podanih modelov je prikazana s primerjavo dobljenih rezultatov z rezultati, dobljenimi z metodami, ki so dosegljive v literaturi.

Ključne besede: nosilnost temeljnih tal, plitvi temelj, mejno stanje, teorem zgornje vrednosti

Summary | The article presents the procedure for determining the bearing capacity of foundation ground under shallow foundation based on the theorem of the upper value within the limit analysis. Kinematically admissible failure models are proposed for determining the bearing capacity of strip foundation on the slope and the bearing capacity of rectangular foundations in spatial conditions, loaded horizontally and vertically. The gravity, hydrostatic and hydrodynamic and seismic loadings can be taken into account in the analysis of the bearing capacity of strip foundation on the slope. The use of the given models is shown by comparing the obtained results with those obtained by the methods available in the literature.

Key words: bearing capacity of ground, shallow foundation, ultimate limit state, upper-bound theorem

1 • UVOD

Določevanje nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji je ena izmed pomembnejših osnovnih nalog v geotehniki. Z določanjem nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji, ležečimi na zemeljskem polprostoru, so se ukvarjali mnogi avtorji ((Terzaghi, 1943), (Caquot, 1953), (Meyerhof, 1963), (Vesić, 1975), (Chen, 1975), (Michalowski, 1995)). Ne poznamo mnogo literature, ki bi na tem področju vključevala vpliv nagnjenosti pobočja ob pasovnih temeljih (Saran, 1989). Med pasovne temelje prištevamo tiste, katerih dolžina je bistveno večja od preostalih dveh dimenzij, tako zanje velja ravninsko deformacijsko stanje.

Za dejanske temelje pravokotnih oblik so bili na osnovi empiričnih rezultatov določeni količniki posameznih vplivov: oblike temeljev, globine temeljenja, horizontalnih obtežb, nagibov temeljev in tal itd. Primerjalni podatki so pridobljeni z meritvami mejnih nosilnosti togih temeljev na realnih zemljinah, za katere že v osnovi ne velja asociativno pravilo tečenja. Tako dobljeni količniki posameznih vplivov so zato nezanesljivi in so lahko natančno določeni le naključno.

Količnik oblike temeljnih ploskev je najprej za krožne in kvadratne temelje predlagal Terzaghi (Terzaghi, 1943) v obliki izraza, neodvisnega od kota notranjega trenja zemljin. Pozneje sta ga natančneje opredelila Meyerhof in Brich Hansen ((Meyerhof, 1963), (Brinch Hansen, 1970)). Vsi tako določeni vplivni količniki so do neke stopnje določeni na osnovi rezultatov empiričnih raziskav.

Članek podaja metodo in tehniko mejne analize skladno s teoremom zgornje vrednosti, matematično programiranje takšnih problemov ter prikazuje primera mejne analize nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji na pobočju in pravokotnimi temelji z uporabo teorema zgornje vrednosti.

2 • METODA MEJNE ANALIZE – TEOREM ZGORNJE VREDNOSTI

Osnovni teoremi mejne analize so osnovani za splošno telo, ki ima naslednje lastnosti:

- material je idealno plastičen – ne pojavi se mehčanje ali utrjevanje,
- ploskev tečenja je konveksna,
- spremembe geometrije telesa ob mejni obtežbi so neznatne.

Prva lastnost ima posledico, da napetostna točka ne more biti zunaj ploskve tečenja in da vektor spremembe napetosti deluje ob spremembi plastične specifične deformacije tangentno na ploskev tečenja. Druga lastnost pomeni, da so spremembe plastičnih specifičnih deformacij dobljene iz asociativnega pravila tečenja oz. normalitetnega pravila, iz česar sledi $\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}{}^{p}=0$. Zadnja lastnost omogoča uporabo enačb virtualnega dela.

Drugi teorem (zgornje vrednosti) mejne analize pravi, da so za kompatibilni mehanizem plastičnih deformacij $((\dot{u}_i{}^*,\dot{\varepsilon}_i{}^*)=0$, ki zadovoljujejo robni pogoj $\dot{u}_i{}^*=0$, sile S_i, B_i, določene z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije, večje ali enake dejanski mejni obtežbi:

$$\int_{A_T} S_i \dot{u}_i^* dA + \int_V B_i \dot{u}_i^* dV = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV \quad (1)$$

Enačba, ki jo dobimo na takšen način, se imenuje delovna enačba za posamezni predpostavljeni mehanizem. Dejansko mejno obtežbo dobimo torej z izenačitvijo energij, ki se sprostijo na predpostavljenem kinematično dopustnem mehanizmu. Zato imenujemo reševanje problemov v mehaniki tal s pomočjo metode mejne analize na osnovi teorije zgornje vrednosti tudi kinematična ali energijska metoda. Za veljaven mehanizem je upoštevan vsak mehanizem, ki je na majhnih spremembah deformacij v telesu ali polju hitrosti združljiv ali kinematično dopusten.

Kinematični pristop mejne analize s teoremom zgornje vrednosti temelji na izreku, da za vsak kinematično dopusten mehanizem sprememba disipacije notranje energije ni manjša od spremembe dela zunanjih sil, ki delujejo na obravnavani mehanizem (Michalowski, 2001a):

$$\int_V \dot{D} \cdot dV \geq \int_{S_v} p_i \, \dot{v}_i dS_v + \int_{S_t} q_i \, \dot{v}_i \, dS_t + \int_V \gamma_i \, \dot{v}_i \, dV, \quad (2)$$

V enačbi $\dot{D}$ označuje spremembo disipacije energije na enoto prostornine V, $\dot{v}_i$ vektorsko polje deformacijskih hitrosti znotraj prostornine V in na robovih porušnega mehanizma S_v in S_t, γ_i vektor prostorninske teže, p_i neznani vektor oz. mejna površinska obtežba na območju robne površine S_v ter q_i poznani vektor površinske obtežbe na delu površine S_t obravnavanega porušnega mehanizma.

Kadar pri analizah upoštevamo, da za zemljine znotraj obravnavanega območja porušnega mehanizma velja Mohr-Coulombov kriterij plastifikacije z asociativnim modelom plastičnega tečenja, lahko spremembo disipacije notranje energije na enoto prostornine izrazimo (Drucker, 1952).

$$\dot{D} = (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3) \cdot c \cdot \cos\phi, \quad (3)$$

kjer sta $\dot{\varepsilon}_1$ in $\dot{\varepsilon}_3$ spremembi največje in najmanjše komponente glavnih specifičnih deformacij ter c in ϕ pripadajoča kohezija in strižni kot zemljine. Pravilo asociativnega plastičnega tečenja za kinematično dopustna deformacijska polja ob mejnem stanju zagotavlja, da je vektor sprememb plastičnih deformacij vedno pravokoten na Mohr-Coulombovo površino plastifikacije:

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v}{\dot{\gamma}_{\max}} = \frac{\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_3}{\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3} = -\sin\phi, \quad (4)$$

kjer je $\dot{\varepsilon}_v$ sprememba volumenske specifične deformacije in $\dot{\gamma}_{\max}$ dvakratna sprememba distorzijske specifične deformacije v zemljini. V izrazu (4) je upoštevan planarni tip sprememb specifičnih deformacij ($\dot{\varepsilon}_2 = 0$), ki je značilen za kinematične porušne mehanizme z diskontinuitetnimi spremembami deformacijskih hitrosti, ki so omejene le na površine posameznih ploskev med posameznimi togimi bloki in med bloki ter zaledno zemljino. Disipacijo notranje energije lahko sedaj izvrednotimo v enostavnejši obliki:

$$\dot{D} = -\dot{\varepsilon}_v \cdot c \cdot \cot\phi \quad (5)$$

Kadar analiziramo mejna stanja nosilnosti v homogenih tleh (c in ϕ sta konstanti), je sprememba disipacije notranje energije sorazmerna skupni vsoti sprememb volumenskih deformacij v analiziranem območju V. V izrazu (5) je sprememba volumskih deformacij zaradi dilatacije zemljin upoštevana kot negativna.

3 • TEHNIKA MEJNE ANALIZE S TEOREMOM ZGORNJE VREDNOSTI

Skladno s teoremom zgornje vrednosti lahko torej z izenačitvijo spremembe dela zunanjih sil s spremembo disipacije notranje energije določimo zgornjo mejno vrednost porušne oz. mejne obtežbe, ki ni na varni strani. Rešitev zgornje vrednosti dobimo z izpolnitvijo naslednjih korakov:

- predpostavimo kinematično dopusten porušni mehanizem,
- izračunamo delo vseh zunanjih sil, vključno z delom lastne teže, za majhne deformacije na predpostavljenem mehanizmu,
- izračunamo disipacijo notranje energije v hitrostnih diskontinuitetah, ki predstavljajo plastično deformirana območja,
- s pomočjo delovne enačbe določimo najbolj kritično oz. najnižjo rešitev zgornje vrednosti za izbrani mehanizem.

4 • MATEMATIČNO PROGRAMIRANJE

Matematično programiranje problemov imenujemo vsakršno optimiranje problemov, ki temelji na optimizacijskih metodah matematičnega programiranja.

Pri matematičnem programiranju obravnavanih problemov opišemo vsak problem z matematičnim optimizacijskim modelom. Ta model sestoji iz namenske funkcije, sistema pogojnih (ne)enačb ter pridruženih spremenljivk in konstant (vhodni podatki).

V splošnem obravnavamo naslednji omejitveni optimizacijski problem:

$$\min f(x) \tag{6}$$

pri pogojih:

$$h(x)=0 \tag{7}$$

$$g(x)\leq 0, \tag{8}$$

$$\text{pri čemer je } x \in R^n, \tag{9}$$

kjer je $f(x)$ namenska funkcija, $h(x) = 0$ predstavlja M-enačb z N-spremenljivkami x in $g(x) \leq 0$ R neenakostnih omejitev. V splošnem je število spremenljivk N večje od števila enačb M, razlika (N-M) predstavlja t. i. število prostostnih stopenj optimizacijskega problema.

Metodi linearnega programiranja (Linear Programming – LP) in mešanega celoštevilčnega linearnega programiranja (Mixed Integer Linear Programming – MILP) zaradi nelinearne narave problemov, ki se pojavljajo v inženirstvu, ne dajeta dobrih rezultatov. Zato se v inženirstvu od metod matematičnega programiranja najpogosteje uporablja metoda nelinearnega programiranja (Non-linear Programming – NLP). Poleg omenjenih metod matematičnega programiranja poznamo še mešano celoštevilčno nelinearno programiranje (Mixed Integer Non linear Programming – MINLP). LP in NLP uporabljamo pri zveznem optimiranju, tj. pri parametričnem optimiranju, kjer imamo samo zvezne spremenljivke. MILP in MINLP pa uporabljamo za diskretno zvezno optimiranje strukture in parametrov. Pri MILP in MINLP poleg zveznih spremenljivk za izračun zveznih parametrov definiramo tudi diskretne spremenljivke (binarne, celoštevilčne) za izračun diskretnih odločitev.

4.1 Nelinearno programiranje (NLP)

Nelinearno programiranje je najpogosteje uporabljena metoda matematičnega programiranja za optimiranje v inženirstvu. NLP-problem lahko pišemo v obliki:

$$\min \quad z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

pri pogojih:

$$h(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

$$g(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{0} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \tag{13}$$

pri čemer je

$$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} = \left\{ \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{x}^L \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x}^U \right\} \tag{14}$$

Namenska funkcija (spremenljivka z) je sestavljena iz linearnega izraza $c^T \cdot x$ in nelinearnega izraza $f(x)$. Enačba $h(x) = 0$ predstavlja množico nelinearnih pogojnih enačb, neenačba $g(x) \leq 0$ pa množico nelinearnih pogojnih neenačb. Neenačba $A \cdot x \leq b$ predstavlja množico linearnih enačb in neenačb. Najbolj učinkovite NLP-metode rešujejo ta problem z direktno določitvijo točke, ki zadovoljuje Karush-Kuhn-Tuckerjeve pogoje. Najpomembnejše metode za reševanje NLP-problemov so zaporedno kvadratno programiranje (Successive Quadratic Programming – SQP), metoda reduciranega gradienta (Reduced Gradient Method – RG), posplošena metoda reduciranega gradienta (Generalized Reduced Gradient Method – GRG) in razširjeni Lagrangian (Augmented Lagrangian – AL).

V pričujočem delu je bila za reševanje problemov nelinearnega matematičnega programiranja uporabljena programska koda Solver, ki je del Microsoftovega Excela. Algoritem temelji na splošni metodi reduciranega gradienta (GRG).

5 • PRIMERA UPORABE TEOREMA ZGORNJE VREDNOSTI

V nadaljevanju sta prikazana kinematično dopustna modela mejne analize nosilnosti temeljnih tal pod plitvimi temelji z uporabo teorema zgornje vrednosti.

5.1 Nosilnost plitvih temeljev – 2D

Podan je teoretični model za določitev nosilnosti temeljnih tal pod pasovnimi temelji blizu pobočij in vključuje vplive poljubnih obtežb in nagnjeno osnovno ploskev temelja. Za analize je bil izbran modificirani Prandtlov mehanizem porušnega telesa, ki je sestavljen iz klina pod temeljem, logaritmične spirale in se tangentno nadaljuje z ravnim delom do pobočja. Z njim po kinematični metodi z izenačenjem spremembe dela vseh zunanjih sil in spremembe disipacije notranje energije z upoštevanjem kinematično dopustnih pomikov dobimo zgornje mejne vrednosti nosilnosti pasovnih temeljev.

V predstavljeni analizi smo upoštevali naslednje predpostavke:

- pasovni temelj je tog,
- na mejni ploskvi med temeljem in zemljino ne pride do zdrsa,
- zemljina je izotropna, homogena in idealno plastična,
- zemljina ustreza Mohr-Coulombovemu kriteriju porušitve z asociativnim pravilom tečenja.

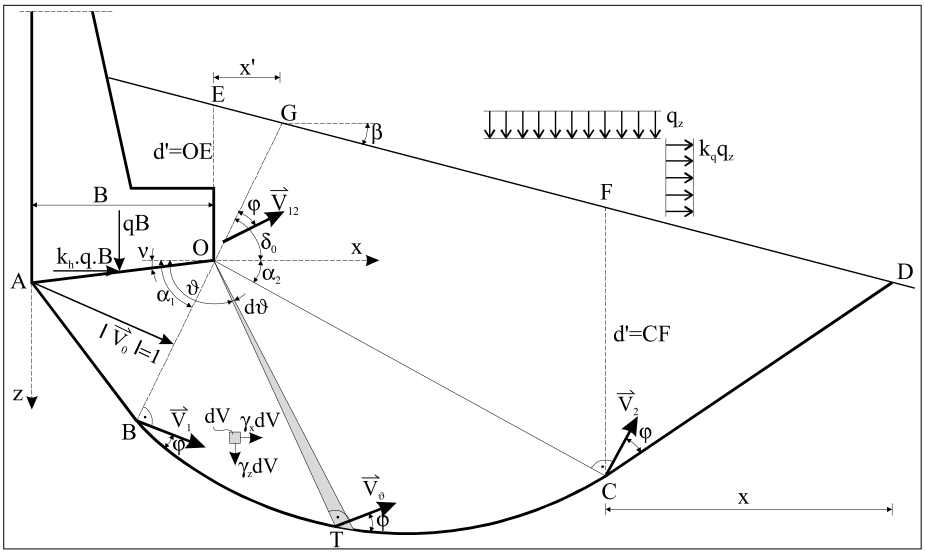
5.1.1 Kinematični porušni mehanizem

Slika 1 prikazuje izbrani modificirani Prandtlov porušni mehanizem pod pasovnim temeljem (porušna ploskev ABCD). Masa nad to porušno ploskvijo je sestavljena iz treh togih teles: trikotnika OAB, logaritmične spirale OBC in paralelograma OCDE (oziroma OCDG). Na drsečo maso delujejo poleg volumskih sil mase še vertikalna ($q{\cdot}B$) in horizontalna ($k_h{\cdot}q{\cdot}B$) obtežba centrično na osnovo temelja ter vertikalna (q_z) in horizontalna ($k_q{\cdot}q_z$) zunanja obtežba na ploskvi DE. V porušnemu mehanizmu je predpostavljeno, da ne pride do zdrsa med temeljem in klinom OAB, tako da se oba skupaj togo pomakneta. zaradi česar ni sprememb disipacije energije v ploskvi OB.

5.1.2 Delovna enačba

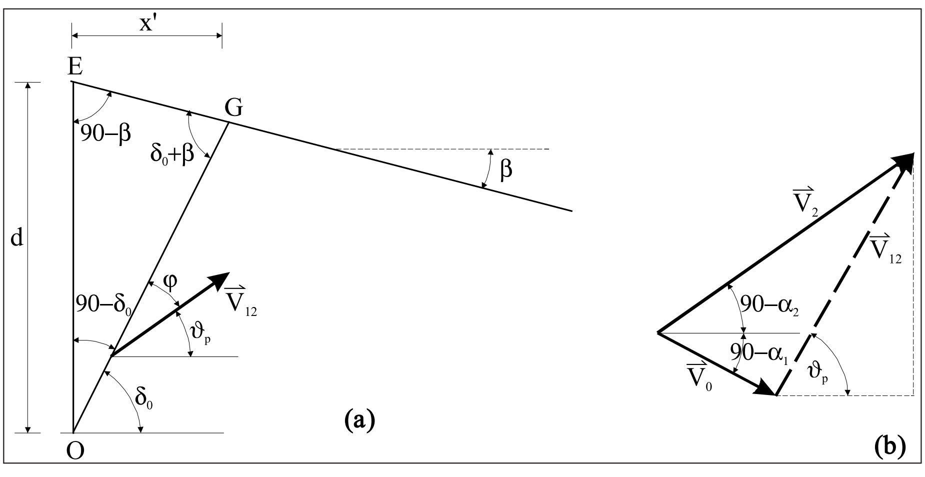
K spremembi zunanjega dela, opravljenega na sistemu, prispevajo obtežbe $q{\cdot}B$, $k_h{\cdot}q{\cdot}B$, q_z in $k_q{\cdot}q_z$ ter lastne teže teles OAB, OBC in OCDE (ali OCDG). Njihove vrednosti se določijo pri izbrani začetni hitrosti, npr. $|V_0| = 1$, skupaj pa predstavljajo celotno spremembo zunanjega dela:

$$\sum \Delta W_{ext} = \Delta W_{ext}^{q} + \Delta W_{ext}^{q_z} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE,OCDG} \quad (15)$$



Slika 1 • **Porušni mehanizem z oznakami in poljem hitrosti.**

Slika 2 prikazuje detajl klina OEG in hodograf hitrosti za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG (če je $\varphi + \vartheta_p < 90°$, se na ploskvi OG ustvari pasivni odpor in telo OEG se premakne z enako hitrostjo kot temelj). Smer *Sprememba disipacije notranje energije* na diskontinuitetah pri začetni hitrosti $|V_0| = 1$ je sestavljena iz spremembe disipacije notranje energije na ploskvah AB, BC, OT, CD in OG (če je izpolnjen pogoj $\pi/2 > \vartheta_0 > 0$), skupaj



Slika 2 • **(a) Detajl klina OEG. (b) Hodograf za določitev hitrosti na diskontinuiteti OG.**

začetne hitrosti $|V_0| = 1$ pasovnega temelja in klina OAB je pravokotna na ploskev OB, pa predstavljajo celotno spremembo disipacije notranje energije:

$$\sum \Delta W_{int} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC,OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (16)$$

Ko izenačimo celotni spremembi zunanjega dela (15) in disipacije notranje energije (16), dobimo delovno enačbo:

ali

$$\sum \Delta W_{ext} = \sum \Delta W_{int} \text{ ali}$$

$$\Delta W_{ext}^{q} + \Delta W_{ext}^{q_z} + \Delta W_{ext}^{OAB} + \Delta W_{ext}^{OBC} + \Delta W_{ext}^{OCDE,OCDG} = \Delta W_{int}^{AB} + \Delta W_{int}^{BC,OT} + \Delta W_{int}^{CD} + \Delta W_{int}^{OG} \quad (17)$$

Nosilnost temeljnih tal, ki je povprečna vrednost kritične obtežbe na enoto površine, lahko zapišemo:

$$q_{ult} = N \cdot \frac{\gamma_z \cdot B}{2} = \frac{\gamma_z \cdot B}{2} \cdot N\left(k_h = \frac{H}{V}, \frac{d}{B}, c_h = \frac{\gamma_x}{\gamma_z}, k_q = \frac{q_x}{q_z}, \frac{2c}{\gamma_z \cdot B}, \frac{2q_z}{\gamma_z \cdot B}\right) \quad (18)$$

Koeficient nosilnosti N je odvisen od naslednjih znanih razmerij: med horizontalno in vertikalno obtežbo, med globino in širino temelja, med težo na enoto prostornine v horizontalni in vertikalni smeri in horizontalno in vertikalno obtežbo ter kohezijskega $2c/(\gamma_z B)$ in obtežnega razmerja $2q_z/(\gamma_z B)$. Faktor nosilnosti je funkcija dveh neodvisnih spremenljivk, kotov α_1 in α_2, ki določata geometrijo porušne ploskve ABCD. Ekstremno vrednost $N(\alpha_1, \alpha_1)$ – minimum – dobimo z izpolnitvijo pogojev:

$$\frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} = 0 \qquad \frac{\partial N(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} = 0 \quad (19)$$

Minimalna vrednost koeficienta nosilnosti N daje zgornjo mejno vrednost za nosilnost pasovnih temeljev. Za določitev optimalne porušne ploskve ABCD je bil izdelan računalniški program, ki vsebuje metode matematičnega programiranja. Izraz za določitev nosilnosti plitvih temeljev je prikazan zaradi izvedenih primerjav in ima običajno naslednjo obliko:

$$q_{ult} = \frac{1}{2}\gamma_z \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma_z \cdot d \cdot N_q + c \cdot N_c, \quad (20)$$

kjer so N_γ, N_q *in* N_c koeficienti nosilnosti temeljnih tal.

5.1.3 Numerične analize in rezultati

Rezultate analiz po predstavljeni metodi smo primerjali z rezultati analiz nekaterih drugih avtorjev, ki so objavljeni v literaturi.

Najprej smo naredili primerjavo rezultatov z vrednostmi, ki jih je objavil Chen (Chen, 1975), ki je vpeljal v svoje izračune različne porušitvene mehanizme. Primerjali smo rezultate koeficientov nosilnosti N_γ za hrapav temelj, vertikalno obtežbo, horizontalno osnovo temelja in brez nagnjenosti pobočja (β = 0°) (preglednica 1).

Iz rezultatov je razvidno, da daje predstavljena metoda nekoliko manjše zgornje

Razmerje globine d / B	(Chen, 1975)			Predlagana rešitev		
	φ(°)			φ(°)		
	20	30	40	20	30	40
0,1	7,28	30,7	161	6,807	29,304	155,253
0,2	8,76	34,9	175	8,412	33,704	169,990
0,3	10,3	39,2	189	10,064	38,242	184,909
0,4	12,0	43,6	204	11,762	42,846	200,359
0,5	13,6	48,2	219	13,498	47,601	216,214
0,6	15,4	52,9	235	15,282	52,444	231,931
0,7	17,2	57,8	251	17,118	57,397	248,073
0,8	19,0	62,8	267	18,977	62,509	264,638
0,9	20,9	67,9	283	20,889	67,651	281,628
1,0	22,8	73,1	300	22,832	72,935	298,781

Preglednica 1 • **Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti** N_γ za β = 0°.

φ(°)	(Chen, 1975)	Predlagana rešitev
15	2,3	2,325
20	5,2	5,241
25	11,4	11,399
30	25,0	25,005
35	57,0	57,203
40	141,0	140,491

Preglednica 2 • **Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti** N_γ za β = 0° **in** d / B = 0.

mejne vrednosti. Primerjava koeficientov nosilnosti N_γ s Chenom (Chen, 1975) za temelj, ležeč na zemeljskem polprostoru, je pokazala, da se rezultati zelo dobro ujemajo (preglednica 2).

5.2 Nosilnost pravokotnega plitvega temelja – 3D

V pričujočem prispevku je prikazan postopek za določanje nosilnosti temeljnih tal na osnovi izboljšanega kinematično dopustnega porušnega mehanizma, ki ga je prvi obravnaval Michalowski (Michalowski, 2001b). Mehanizem predstavlja osrednji togi blok, sestavljen iz prizmatičnih osmih piramidalnih elementov, katerih deformacijska hitrost je enaka hitrosti togega pravokotnega temelja ter usmerjena v smeri enakomerne zvezne obtežbe bloka. V vseh štirih bočnih smereh pa je končno število trikotnih blokov zemljine z ukrivljenimi bočnimi ploskvami, ki jih na vsaki lameli predstavljajo ovojnice neskončnega števila trenjskih stožcev, ki so za izbrani kinematični model tudi kinematično dopustni. Deformacijske hitrosti osrednjega bloka in vseh bočnih blokov povezuje asociativno pravilo plastičnega tečenja. Predloženi kinematični model se od že znanega (Michalowski, 2001b) razlikuje v ukrivljenih bočnih porušnih površinah na vseh trikotnih blokih, ki jih določa ovojnica vseh trenjskih stožcev, medtem ko so v osnovnem modelu upoštevane kot površine primerljivih plaščev stožcev, ki izhajajo iz prereza predhodnih stožcev.

β(°)	(Saran, 1989)		Predlagana rešitev	
	φ(°)		φ(°)	
	35	40	35	40
30	49,43	91,87	28,945	54,163
25	59,12	115,65	40,823	78,324
20	66,00	143,77	56,103	107,742

Preglednica 3 • **Primerjava vrednosti koeficientov nosilnosti** N_γ za d / B = 1.

Preglednica 3 podaja primerjavo faktorja nosilnosti N_γ na nagnjenem pobočju s Saranom (Saran, 1989). Iz nje je razvidno, da daje predstavljena rešitev od 15 % do 41 % nižje zgornje mejne vrednosti faktorjev nosilnosti N_γ.

5.2.1 Kinematični porušni mehanizem

Obravnavamo togi pravokotni temelj s površino LxB (kjer je L dolžina in B širina pravokotnega temelja) s horizontalnim potekom površine temeljnih tal na celotnem območju ob osnovi temelja. Mejna nosilnost temeljnih tal za toge pravokotne temelje za primer enakomerne vertikalne obremenitve s polno vrednostjo trenja med temeljem in tlemi je definirana z:

$$p = \frac{1}{2}\gamma \cdot b \cdot N'_\gamma + q \cdot N'_q + c \cdot N'_c, \qquad (21)$$

kjer je N'_γ količnik nosilnosti pravokotnih temeljev zaradi vpliva lastne teže zemljine, γ prostorninska teža zemljine, N'_c količnik nosilnosti zaradi vpliva kohezije (c) in N'_q količnik nosilnosti zaradi vpliva površinske obtežbe q. Količnike nosilnosti lahko izrazimo tudi s produktom količnikov oblike temeljev ter količnikov nosilnosti temeljev neskončne dolžine.

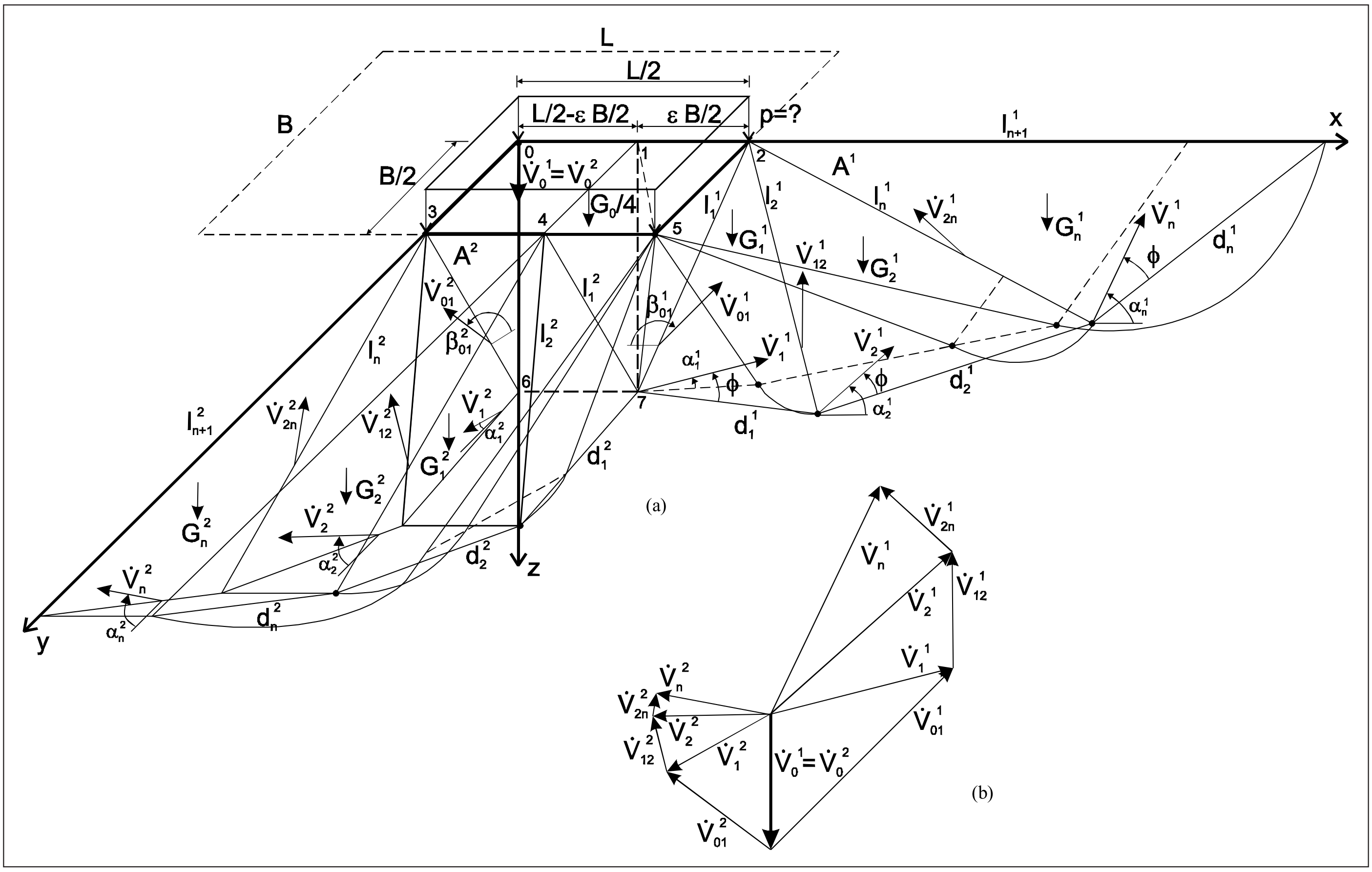
$$N'_\gamma = s_\gamma N_\gamma, \quad N'_q = s_q N_q \quad N'_c = s_c N_c, \qquad (22)$$

kjer s_γ, s_q in s_c označujejo količnike oblike temeljev ter N_γ, N_q in N_c količnike nosilnosti temeljnih tal za temelj neskončne dolžine.

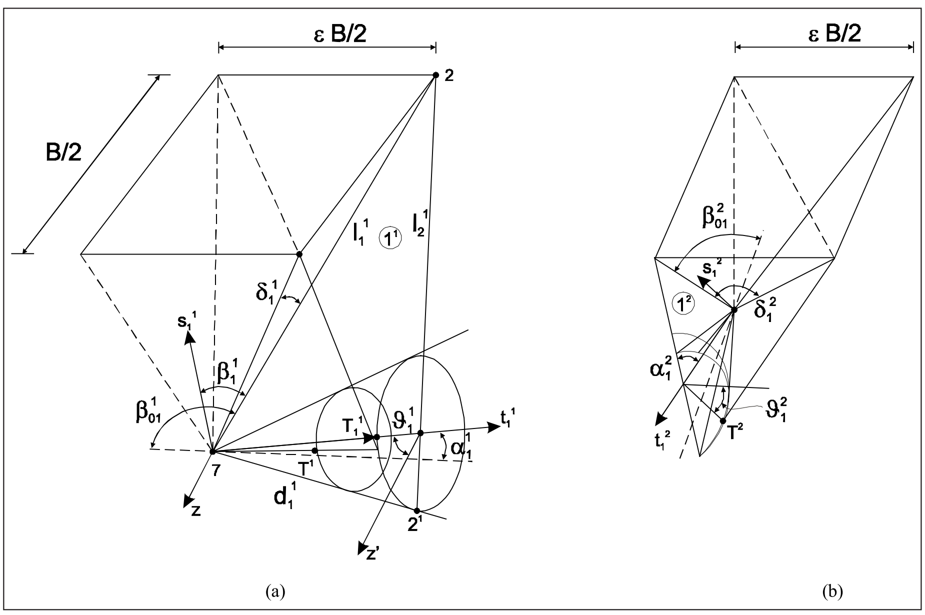
V analizah je upoštevano, da zaledne zemljine ustrezajo Mohr-Coulombovemu kriteriju plastifikacije z asociativnim pravilom plastičnega tečenja (normalitetni princip).

Kinematični porušni mehanizem je v osrednjem območju temelja sestavljen iz prizmatičnega osrednjega ter osmih bočnih piramidalnih blokov, ki imajo s togim temeljem (LxB) skupno vertikalno deformacijsko hitrost V_0. V prerezih x-z in y-z sta v smeri obeh koordinatnih osi (slika 3) na osrednji togi blok priključena dva poligonalna kinematično dopustna porušna mehanizma, sestavljena iz n-trikotnih togih blokov. S pravilom plastičnega tečenja so dopustne le deformacijske hitrosti v smeri, ki s posameznimi linijami diskontinuitet d^1_i (i=1,2, n) in d^2_i (i=1,2, n) oklepajo kot ϕ. Hitrosti posameznih trikotnih togih blokov so enolično določene s pogojem, da so kinematično dopustne le takšne relativne hitrosti med posameznimi bloki, ki so za kot ϕ odklonjene od bočnih kontaktnih površin l^1_i (i=1, 2 n) in l^2_i (i=1, 2 n) med posameznimi bloki. Hodografa deformacijskih hitrosti za oba poligonalna porušna mehanizma v ravninah x-z in y-z prikazuje slika 3b.

Prikazani porušni mehanizem je kinematično dopusten le, če so deformacijske hitrosti vsakega predhodnega bloka i^k ob mejnem stanju usmerjene navzdol relativno glede na



Slika 3 • **Prerez in oznake kinematičnega 3D-modela: (a) geometrijski podatki, (b) združena hodografa deformacijskih hitrosti za oba porušna mehanizma.**



Slika 4 • **Prerez in oznake kinematičnega 3D-modela, geometrijski podatki za: (a) porušni mehanizem 1, (b) porušni mehanizem 2.**

blok $i+1^k$ (k označuje ortogonalna porušna mehanizma) ter je izpolnjen še naslednji dodatni pogoj:

$$\pi - \alpha_1^k - \beta_{0,1}^k - \phi \ge \arctan\left(\frac{\tan\phi\cos\delta_1^k}{\sqrt{\tan^2\phi\ \sin^2\delta_1^k + 1}}\right) \tag{23}$$

Če deformacijsko hitrost togega temelja in osnovnega prizmatično-piramidalnega togega bloka izberemo kot pozitivno, npr. $\dot{V}_0 = 1$, v vertikalni smeri navzdol, lahko z izrazoma (10) enolično določimo deformacijske hitrosti celotnih porušnih mehanizmov (deformacijska hitrost $\dot{V}_0 = 1$ je skupna za oba porušna mehanizma).

$$\dot{V}^k_{i+1} = \dot{V}^1_i \frac{\sin(\beta^k_{i,i+1} + \alpha^k_i)}{\sin(\beta^k_{i,i+1} + \alpha^k_{i+1})}$$
$$\dot{V}^k_{i,i+1} = \dot{V}^1_i \frac{\sin(\alpha^k_{i+1} - \alpha^k_i)}{\sin(\beta^k_{i,i+1} + \alpha^k_{i+1})} \tag{24}$$

Izraz (24) smiselno velja za oba ortogonalna porušna mehanizma (k = 1 oz. 2 za prvi oz. drugi porušni mehanizem, slika 3 in slika 4).

Vsak kinematično dopustni mehanizem sestavlja po 30 togih blokov, kar je po izkušnjah tudi drugih raziskovalcev ustrezna delitev, ker nadaljnje delitve nepomembno vplivajo na dobljene rezultate.

5.2.2 Delovna enačba

Za izbrani porušni mehanizem (slika 3) dobimo – z izenačenjem spremembe disipacije notranje energije s spremembami dela zaradi koristne obtežbe – lastne teže zaledne zemljine ter enakomerne površinske obtežbe, delovno enačbo:

$$8\int_V \dot{D}\cdot dV/\gamma\cdot B^2 L=\frac{c^*}{\tan\phi}\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2-1\right]\geq N_\gamma+c^*N_c+q^*N_q-G_0^*-\sum_{i=1}^{30}G_i^{1*}\sin\alpha_i^1\,\dot{V}_i^1-\sum_{i=1}^{30}G_i^{2*}\sin\alpha_i^2\,\dot{V}_i^2-q^*\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2\right] \quad (25)$$

kjer $c^*=\dfrac{2c}{\gamma\cdot B}$ in $q^*=\dfrac{2q}{\gamma\cdot B}$ označujeta normalizirano kohezijo in normalizirano površinsko obtežbo. Površini $A^{1*}=\dfrac{4A^1}{B\cdot L}$ in $A^{2*}=\dfrac{4A^2}{B\cdot L}$ ter teže posameznih lamel $G_i^*=\dfrac{8G_i}{\gamma\cdot B^2 L}$ označujejo posplošeni površini porušnih mehanizmov v zaledju ter posplošene teže posameznih lamel, ki jih določimo na računskem modelu pravokotnega temelja širine $(B/2)^*$ = 1, dolžine $(L/B)^* = L/B$ in z upoštevanjem posplošene prostorninske teže zemljine γ^* = 1.

5.2.3 Numerične analize in rezultati

Začetni porušni mehanizem je definiran z izborom razmerja (L/B) in $2n$ začetnih koordinat točk posameznih blokov (slika 3 in slika 4). Izbrane morajo biti tako, da je že začetni porušni mehanizem kinematično dopusten. Posamezne vplivne površine in prostornine posameznih blokov so linearno odvisne tudi od parametra ε, ki predstavlja razmerje med širino vplivne površine in polovico širine temelja, v zgornjih izrazih pa ni eksplicitno prikazan. Pri numeričnih analizah s postopkom matematičnega optimiranja določamo kritični kinematično dopustni porušni mehanizem z minimiziranjem izraza:

$$f=N_\gamma+c^*N_c+q^*N_q=G_0^*+\sum_{i=1}^{30}G_i^{1*}\sin\alpha_i^1\,\dot{V}_i^1+\sum_{i=1}^{30}G_i^{2*}\sin\alpha_i^2\,\dot{V}_i^2-q^*\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2\right]+\frac{c^*}{\tan\phi}\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2-1\right], \quad (26)$$

kjer f predstavlja namensko funkcijo optimizacijskega problema. Količnike nosilnosti temeljnih tal določajo naslednji izrazi:

$$N_\gamma=G_0^*+\sum_{i=1}^{30}G_i^{1*}\sin\alpha_i^1\,\dot{V}_i^1+\sum_{i=1}^{30}G_i^{2*}\sin\alpha_i^2\,\dot{V}_i^2 \quad (27)$$

$$N_q=\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2\right] \quad (28)$$

$$N_c=\frac{1}{\tan\phi}\left[A^{1*}\sin\alpha_{30}^1\,\dot{V}_{30}^1+A^{2*}\sin\alpha_{30}^2\,\dot{V}_{30}^2-1\right] \quad (29)$$

Z upoštevanjem izraza (15) je količnik nosilnosti za vpliv kohezije lahko podan tudi v naslednji obliki:

$$N_c=\frac{1}{\tan\phi}\left(N_q-1\right) \quad (30)$$

Izraz (30) predstavlja transformacijsko pravilo za določanje količnika nosilnosti N_c pravokotnih temeljev za kohezijsko-trenjske zemljine na osnovi poznanih vrednosti N_q za trenjske zemljine v osnovni obliki, kot jo je podal Caquot (Caquot, 1934).

Najprej smo za izbrani kinematični porušni mehanizem določili količnika nosilnosti za primer neskončno dolgega, povsem togega pravokotnega temelja ($L/B=\infty$). V izračunih je upoštevana polna vrednost trenja med tlemi in temeljno konstrukcijo $\delta = \phi$. V izbranem primeru zaradi pogoja $L/B=\infty$ v izračunu prostornine in površine bočnih deležev na posameznih togih blokih ne nastopajo ter dobimo že standardno 2D-rešitev, ki bistveno ne odstopa od poznanih rešitev iz literature. Količniki so določeni z minimiziranjem izrazov (27) in (28) za osnovni kombinaciji γ^* = 1, c^* = q^* = 0 pri določitvi N_γ. Izračun je bil preverjen tudi s standardnim kinematičnim 2D-mehanizmom z $n = 100$ togimi bloki. Primerjava rezultatov kaže na odstopanja velikosti do 0,1 % najnižje vrednosti.

Nato smo analizirali še količnike nosilnosti pravokotnih temeljev za primere L/B = 1, 1,5, 2, 3, 5 in 10. Preglednica 3 podaja vrednosti količnikov nosilnosti za pravokotne temelje N_γ pri pogoju γ^* = 1, $c^* = q^* = 0$.

Strižni kot	N_γ						
Φ (°)	L/B = 1	L/B = 1,5	L/B = 2	L/B = 3	L/B = 5	L/B = 10	L/B = ∞
10	0,557	0,608	0,633	0,658	0,677	0,692	0,706
15	1,759	1,829	1,859	1,888	1,909	1,924	1,937
20	4,879	4,783	4,720	4,647	4,581	4,528	4,465
25	13,155	12,138	11,594	11,023	10,543	10,167	9,761
30	36,153	31,524	29,134	26,674	24,649	23,065	21,387
35	104,899	86,942	77,796	68,476	60,838	54,934	48,670
40	334,455	264,890	229,715	194,076	165,005	142,638	118,772
45	1231,776	936,618	788,036	638,124	516,399	423,015	322,740

Preglednica 4 • **Količniki nosilnosti N_γ za pravokotne temelje**.

6 • ZAKLJUČEK

Prispevek obravnava določitev nosilnosti temeljnih tal plitvih temeljev z uporabo teorema zgornje vrednosti v okviru mejne analize. Postopek zajema predpostavljanje kinematično dopustnega porušnega modela, s pomočjo delovne enačbe pa z matematičnim programiranjem določimo najbolj kritično oz. najnižjo rešitev zgornje vrednosti za izbrani mehanizem.

Najprej je prikazan porušitveni mehanizem za določanje nosilnosti pasovnih temeljev, ki zajema vplive nagnjenosti obtežbe, nagnjeno osnovno ploskev temelja in nagnjenost pobočja. V predlaganem postopku, v katerem je uporabljen modificirani Prandtlov porušitveni mehanizem, je v analizi mogoče upoštevati tudi seizmične vplive, vplive vode in vplive zveznih obtežb na pobočju, kar še povečuje njegovo uporabnost v geotehnični praksi.

Nadalje je prikazan izpopolnjeni postopek določanja nosilnosti vertikalno obremenjenih pravokotnih temeljev po metodi mejne analize z uporabo teorema zgornje vrednosti. Uporabljen je izpopolnjeni translacijski kinematično dopustni porušni mehanizem s končnimi številom togih blokov, katerih bočne porušne ploskve določajo ovojnice trenjskih stožcev. V računskem modelu upoštevane zemljine ustrezajo Mohr-Coulombovem kriteriju plastifikacije z asociativnim modelom plastičnega tečenja.

Rezultati numeričnih analiz kažejo, da podana kinematična modela dajeta nižje vrednosti nosilnosti, kot so bile za temelje do sedaj določene po metodi mejne analize s teoremom zgornje vrednosti in prikazane v literaturi.

7 • LITERATURA

Caquot, A., Equilibre des massifs au frottement interne, Stabilite des terres pulverulents et coherents, Gauthier-Villars, Paris,1934.

Caquot, A., Kérisel J., Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulvérant, Proc., 3rd Int. Conf. on Soil Mech. And Found. Engrg. ICOSOMES, Zurich, Vol. I, 336–337, 1953.

Chen, W. F., Limit analysis and soil plasticity, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, The Netherlands, 1975

Drucker, D.C., Prager, W., Soil Mechanics and plastic analysis or limit design, Q. Appl. Math., Vol. 10, No. 1, 157–165, 1952.

Brinch Hansen, J.B., A revised and extended formula for bearing capacity, Geotek. Inst. Bull., 28, 5–11, 1970.

Meyerhof, G. G., Some recent research on the bearing capacity of foundations, Canadian Geotechnical Journal, 1(1), 16–26, 1963.

Michalowski, R.L., Shi, L., Bearing capacity of footings over two-layered foundation soils, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 121(5), 421–428, 1995.

Michalowski, R.L., The Rule of Equivalent States in Limit-State Analysis of Soils, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering Division, ASCE, 127(1): 76–83, 2001a.

Michalowski, R.L., Upper-bound load estimates on square and rectangular footings, Géotechnique, 51(9), 787–798, 2001b.

Saran, S., Sud, V.K., Handa, S.C., Bearing Capacity of Footings Adjacent to Slopes, ASCE Journal of Geotechnical Eng. 115: 553 573, 1989.

Terzaghi, K., Theoretical soil mechanics, Wiley, New York, 1943.

Vesić, A. S., Bearing capacity of shallow foundations. Foundation engineering handbook, H. F. Winterkorn and H.-Y. Fang, eds., Van Nostrand Reinhold, New York, 121–147, 1975.