41569

Letna

Der

Rechen-Unterricht

in der

Volksschule.

Eine Anleitung für Lehrer

zum Gebrauche der

Rechenbücher für Volksschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Preis, in Leinwandrücken, 95 Neukreuzer.

Wien.

Im k. k. Schulbücher-Verlage.

1874.

41569

Die in einem k. k. Schulbücher-Verlage herausgegebenen Schulbücher dürfen nicht um höhere als die auf dem Titelblatte angegebenen Preise verkauft werden.

Drž. izobražka knjižnica v Ljubljani

0300038279

Erste Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **ersten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen im Zahlenraume bis zwanzig.

Einleitung.

---

§. 1. Zweck des Rechenunterrichtes.

Der Unterricht im Rechnen hat einen formalen und einen materialen Zweck; er soll die geistige Kraft des Schülers naturgemäß entwickeln, üben und schärfen, und diesen zur Selbständigkeit bilden; er soll anderseits den Schüler auch mit der Fertigkeit ausrüsten, die im bürgerlichen Leben vorkommenden Rechnungsaufgaben mit Einsicht, Sicherheit und Gewandtheit zu lösen.

Daraus geht von selbst die wichtige Stellung hervor, welche diesem Unterrichte unter den Lehrgegenständen der Volksschule eingeräumt werden muß. Ist es überhaupt die Aufgabe der Schule, die Kinder zu selbständigen Menschen heranzubilden, die in ihren künftigen Lebenslagen stets mit berechnender Überlegung und mit verständiger Erwägung aller Umstände handeln sollen, so läßt sich nicht läugnen, dass ein zweckmäßig geleiteter Rechenunterricht, indem er unausgesetzt die Urtheilskraft des Schülers in Anspruch nimmt, denselben auf ein geordnetes

Überlegen und Erwägen angewöhnt, als Mittel zur Lösung dieser Aufgabe die vorzüglichste Beachtung verdient. Nicht minder wichtig erscheint der Rechenunterricht im Hinblick auf seinen materialen Zweck. Während viele Menschen der niederen Stände seltener Veranlassung zum Lesen und Schreiben erhalten, vergeht fast kein Tag, wo sich für sie nicht die Nothwendigkeit zu rechnen ergeben würde. Auch bietet der Rechenunterricht die beste Gelegenheit dar, das Kind auf die verschiedenartigen Verhältnisse und Bedürfnisse des Lebens, auf die Beziehungen und Berührungen des Menschen mit der Außenwelt aufmerksam zu machen, indem man ihm in fortschreitenden, sich stets erweiternden Kreisen die sinnliche Welt der Größen allmählich vorführt, dieselben in ihren Hauptanwendungen betrachten und seiner berechnenden Untersuchung unterziehen läßt.

Diesen doppelten Zweck kann jedoch der Rechenunterricht nur erfüllen, wenn er von einer klaren Einsicht in das innere Wesen des Lehrgegenstandes und in den Entwicklungsgang des menschlichen Geistes getragen wird. Da das Rechnen keine Erfahrungskenntnis, sondern unmittelbar in den Gesetzen unseres Denkens begründet ist, und somit die Anlage dazu sich im jugendlichen Geiste schon vorfindet, so kann es dem Unterrichte nur obliegen, diese Anlage zweckmäßig zu pflegen und auszubilden, damit sie allmählich zur Selbständigkeit erstarke. Man würde gegen die Natur dieses Lehrgegenstandes und gegen den Gang der geistigen Entwicklung verstoßen, wenn man den Schülern die Rechnungsweisen als etwas Gegebenes, als ein bloßes Ergebnis fremden Nachdenkens mittheilen wollte; die Schüler müßen vielmehr, durch entsprechende Fragen geleitet, aus der Beschaffenheit der jedesmaligen Aufgabe und aus dem Wesen der Zahlenverhältnisse durch eigene Beurtheilung folgern, wie die Auflösung durchzuführen ist; sie müßen das jedesmalige Rechnungsverfahren unter der anregenden Führung des Lehrers gleichsam selbst auffinden. Bei dieser heuristischen Methode lernt der Schüler jeden Schritt kennen, den er thun muß, um die

Aufgabe zu lösen; er wird sich jederzeit auch der Gründe seines Verfahrens bewusst. Auch wird der Schüler durch das Selbstfinden ermuthiget, von lebhaftem Lerneifer ergriffen. Je mehr seine selbstthätige Mitwirkung in Anspruch genommen wird, eine um so größere Befriedigung gewährt ihm das Bewusstsein der eigenen Kraft; durch jede neue Erkenntnis, welche er als sein selbsterworbenes Besitzthum betrachtet, wird auch sein Interesse für den Gegenstand gesteigert. Ein in dieser Weise geleiteter Unterricht begründet nicht nur Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen, sondern allseitig einen schärferen Blick, Regsamkeit und Frische des Geistes; er bildet zur Selbständigkeit.

§. 2. Reines und angewandtes Rechnen.

Beim Rechnen sind entweder die Operazionen, welche zur gesuchten Zahl führen, gegeben und es handelt sich bloß um die Anwendung derselben; oder es sind die vorzunehmenden Operazionen nicht angegeben, sondern sie müßen aus den Verhältnissen der Aufgabe durch verständige Beurtheilung erst abgeleitet werden. Im ersten Falle heißt das Rechnen reines Rechnen, im zweiten angewandtes Rechnen. Jenes stützt sich allein auf die richtige Erkenntnis der Zahlen und ihrer gegenseitigen Abhängigkeit, während es von außen her keine weiteren sachlichen Kenntnisse verlangt; dieses setzt zugleich die Kenntnis der Sachverhältnisse voraus, welche der Aufgabe zugrunde liegen.

Aus dieser Erklärung folgt, dass nicht jedes Rechnen mit benannten Zahlen schon an sich ein angewandtes Rechnen ist. Wenn man z. B. das Kind, damit es die Rechnungsform $4 + 2 = 6$ abstrahiere, an Kreuzern rechnen läßt: 4 Kreuzer und 2 Kreuzer sind 6 Kreuzer; so ist dieß kein angewandtes, sondern ein reines Rechnen.

I. Da sich sowohl das reine als das angewandte Rechnen auf eine klare Einsicht in das Wesen der Zahlen, in die Gesetze ihrer gegenseitigen Verbindung und Abhängigkeit gründet, so ist die erste Aufgabe des Rechenunterrichtes, die Kinder zu klaren Zahlenvorstellungen zu führen. Dieses kann nur auf dem Wege der sinnlichen Anschauung geschehen. Anschaulichkeit ist das Grunderfordernis jedes Elementarunterrichtes; es muß daher auch der erste Unterricht im Rechnen vor allem ein anschaulicher sein, ausgehend von der körperlichen Außenwelt und einkehrend in die innere Werkstätte des Geistes.

Zur Veranschaulichung der Zahlen können Punkte oder Striche dienen, die man auf der Schultafel vor den Augen der Schüler entstehen läſst. Pestalozzi lieferte zur Versinnlichung der Zahlen seine Einheitstabelle; dieselbe besteht aus zehn Reihen, deren jede zehn Rechtecke enthält; in jedem Rechtecke der ersten Reihe befindet sich ein Strich, in jedem Rechtecke der zweiten Reihe befinden sich zwei Striche, . . . in jedem Rechtecke der zehnten Reihe zehn Striche.

Noch mehr, als bloße Figuren, eignen sich zu den Anschauungen bewegliche Körper, weil diese dem kindlichen Geiste die Vorstellungen durch mehrere Sinne zuführen und demnach eine größere Klarheit der Erkenntnis erzeugen. Das einfachste und natürlichste Anschauungsmittel dieser Art sind die Finger, in denen uns schon die Natur das dekadische Zahlensystem recht eigentlich an die Hand gegeben hat. Hierher gehören ferner Stäbchen, hölzerne Würfel oder Kugeln. Unter den Rechenapparaten mit beweglichen Kugeln empfiehlt sich durch Zweckmäßigkeit und Einfachheit besonders die sogenannte russische Rechenmaschine; sie besteht aus einem auf Füßen ruhenden hölzernen Rahmen mit zehn horizontalen eisernen Stäben (Drähten), auf deren jedem zehn verschiebbare Kugeln angebracht sind.

Die Anschauung beim Rechnungsunterrichte kann und darf jedoch nur so lange eine äußere bleiben, als der Schüler sich in einem kleinen Zahlenraume bewegt. Sowie sich sein Zahlengebiet allmählich erweitert, wie seine geistige Kraft so weit erstarkt, daſs er im Stande ist, sich auch ohne sinnliche Warnehmungen richtige Zahlenvorstellungen zu bilden, muß auch seine Anschauung mehr und mehr eine innere werden. Ohne Thätigkeit der inneren Anschauung ist ein verständiges Rechnen gar nicht denkbar.

II. Die richtige Auffassung der Zahlen als solcher und die Ausführung der Operazionen mit denselben bildet nur die eine Seite des Rechnens; zu gründlichen, allseitigen Beherrschung der Zahl ist erforderlich, dass sie auch im Gewande ihrer Anwendung angeschaut werde. Dem reinen Rechnen muß daher auf jeder Stufe das angewandte Rechnen folgen; beide müßen in harmonischer Verbindung nebeneinander zu immer höherer Ausbildung fortschreiten.

Die Lösung jeder Aufgabe des angewandten Rechnens verlangt: 1. die Kenntnis der sachlichen Verhältnisse, die der Aufgabe zugrunde liegen; 2. die Befähigung, aus den in der Aufgabe gegebenen Verhältnissen durch Schlüsse die Operazionen abzuleiten, welche mit den gegebenen Zahlen vorgenommen werden müßen, damit man zu der gesuchten Zahl gelange; 3. Fertigkeit im reinen Rechnen, um mit den Zahlen die nach den Schlüssen als nothwendig erkannten Operazionen ausführen zu können.

Im Anfange wird der Stoff zu den Aufgaben unmittelbar aus den Lebensverhältnissen und dem Erfahrungskreise der Kinder selbst hergenommen. Später treten in den angewandten Aufgaben auch Sachverhältnisse auf, die sich auf die verschiedenartigen Bedürfnisse des Lebens und die Berührungen des Menschen mit der Außenwelt beziehen, und deren Verständnis den Schülern durch entsprechende Erklärungen erst vermittelt werden muß. Dabei herrsche naturgemäßes Fortschreiten, anregende Abwechslung und Mannigfaltigkeit; die vielseitige Anwendung des Erlernten erhöhet das Verständnis desselben, sichert das Festhalten und befördert die praktische Geschicklichkeit.

Die Schlüsse, durch welche man aus den Sachverhältnissen der Aufgabe die vorzunehmenden Operazionen auffindet, sind mehr oder minder einfach, je nachdem die Aufgabe auf eine einzige oder auf mehrere Operazionen führt. In jedem Falle muß anfänglich der Lehrer bei der Bildung richtiger Schlüsse dem Schüler durch leitende Fragen zu Hilfe kommen. Da es bei jeder Rechenaufgabe (ja bei jeder Aufgabe, die uns im Leben gegeben wird) auf die Erkenntnis dessen, was die Aufgabe fordert, auf die Erwägung der zu Gebote stehenden Mittel und auf den richtigen Gebrauch dieser Mittel ankommt, so wird der Schüler im allgemeinen durch folgende Fragen auf die Lösung der Aufgabe zu führen sein: Was sollst du suchen? Was mußt du wissen, um das finden zu können? Ist dir das in der Aufgabe gegeben? Wie wirst du aus diesen Angaben das Gesuchte finden?

Solcher Fragen müßen jedoch bei den folgenden Aufgaben ähnlicher Art immer weniger werden, bis endlich die Schüler selbständig unter kurzer und bündiger Angabe der Schlüsse den ganzen Weg beschreiben, auf dem die gesuchte Zahl gefunden wird.

§. 3. Kopf- und Zifferrechnen.

Es gibt nur ein wahres Rechnen, das Rechnen mit dem Verstande, das Denkrechnen. Der denkende Rechner wird bei seinen Auflösungen stets zuerst die in der jedesmaligen Aufgabe enthaltenen Sach- und Zahlenverhältnisse verständig beurtheilen, und sodann auf Grund dieser Beurtheilung die gegebenen Zahlen so miteinander verbinden, dass er dadurch die in Frage gestellte Zahl erhält. Dabei braucht er entweder keine Ziffern, oder er bedient sich, um bei größeren Zahlen und verwickelteren Verhältnissen seinem Gedächtnisse zu Hilfe zu kommen, oder um seine vollzogenen Rechnungen auch andern vorlegen und verständlich machen zu können, der schriftlichen Darstellung der Zahlen mit Ziffern. In dieser Hinsicht unterscheidet man eine zweifache Art des Rechnens: das Kopfrechnen und das Zifferrechnen. Beim Kopfrechnen benützt man keine Ziffern und darf sich dieselben auch nicht einmal vorstellen; beim Zifferrechnen bedient man sich der Ziffern als Zahlzeichen. Beim Kopfrechnen ist die Auflösung der Aufgaben eine völlig freie, indem dabei aus der unmittelbaren Beurtheilung der gegebenen Bedingungen und aus den Eigenschaften der Zahlen durch naturgemäße Schlüsse gefolgert wird, welchen Wert die gesuchte Zahl haben muß; beim Zifferrechnen wendet man meistens bestimmte Regeln an, die von der Art und Weise abhängen, nach welcher wir vermöge unseres Zahlensystems die Zahlen mit Ziffern darstellen.

Beide Arten des Rechnens haben ihren eigenthümlichen, nicht zu unterschätzenden Wert. Während uns erst die Benützung der Ziffer die volle Herrschaft über die Zahlen und ihre gegenseitigen Verbindungen erschließt, so daß wir mit Ziffern jede Aufgabe ohne Schwierigkeit lösen können, findet anderseits das Kopfrechnen im alltäglichen Leben eine weit größere Anwendung, als das Zifferrechnen. Nicht immer, wenn wir rechnen sollen, haben wir Bleistift und Papier, Griffel und Schiefertafel zur Hand; da gilt es im Kopfe zu rechnen. Überdieß sind gerade einfachere Aufgaben, welche durch das Kopfrechnen eben so leicht als sicher gelöst werden können, auch diejenigen, die im gewöhnlichen Leben am häufigsten vorkommen. Das Kopfrechnen fördert vorzüglich die richtige Vorstellung der Zahlenverhältnisse und übt das Zahlengedächtnis; es ist zugleich die beste Vorbereitung für das Verständnis des Zifferrechnens.

Dem Zifferrechnen sind darum stets angemessene Übungen im Kopfrechnen voranzuschicken; dem Kopfrechnen hat eben so auf jeder Stufe schriftliches Rechnen zu folgen. Selbstverständlich kann auf den ersten Stufen das Zifferrechnen nur in solchen schriftlichen Übungen bestehen, die sich unmittelbar an das mündliche Rechnen anschließen, und deren Form genau dem Gedankengange entspricht, den das Verfahren beim Kopfrechnen nimmt. Das eigentliche, wenn man es so nennen will, künstliche Zifferrechnen kann erst auftreten, nachdem durch vielseitige Übungen im Kopfrechnen mit kleineren Zahlen die Denkkraft der Schüler so weit erstarkt ist, daß sie das auf bestimmten Vorschriften beruhende schriftliche Rechnungsverfahren mit Einsicht erfassen können.

§. 4. Einrichtung des ersten Rechenbuches für Volksschulen.

Das erste Rechenbuch ist für das erste Schuljahr bestimmt.

Da das Kind wegen der Ungeübtheit seines Anschauungsvermögens noch nicht im Stande ist, größere Zahlen aufzufassen, so erscheint es nöthig, ihm anfänglich nur einen beschränkten, leicht zu überschauenden Zahlenkreis vorzuführen und es darin vielseitig zu üben.

Dass der Zahlenkreis von 1 bis 100 bei einer allseitigen Betrachtung der einzelnen Zahlen auch unter günstigen Verhältnissen in einem Schuljahre nicht bewältiget werden könne, wird von praktischen Schulmännern allgemein anerkannt. Nur darin gehen die Ansichten auseinander, dass einige dem ersten Schuljahre bloß den Zahlenraum von 1 bis 10, andere auch noch die Zahlen bis 20 zuweisen. Der zweiten Ansicht dürfte unbedingt eine größere Berechtigung zuzuerkennen sein. Von rein wissenschaftlichem Standpunkte aus empfiehlt sich allerdings der Aufbau des Zahlengebäudes durch den Fortschritt nach den aufeinander folgenden dekadischen Zahlenräumen, so dass sich an den Zahlenkreis 1—10 sogleich der Zahlenkreis 1—100, dann 1 bis 1000 u. s. w. anschließe. Pädagogische Gründe lassen es jedoch nicht nur räthlich erscheinen, sondern stellen es gleichsam zu einer unabweisbaren Forderung, dass nach dem Zahlenraume 1—10 dem Zahlenraume bis 20 eine spezielle eingehende Betrachtung gewidmet werde. Für die Zahl 20 als zweiten Ruhepunkt spricht schon die unmittelbare Anschaulichkeit der Zahlen von 10—20, welche es ermöglicht, dass dieselben in ganz gleicher Weise wie die Zahlen bis 10 behandelt werden; ferner der Umstand, dass in den Zahlen 10—20 zuerst die Unterscheidung zwischen Zehnern und Einern auftritt, wodurch eine willkommene Vorstufe für die Einführung in das dekadische Zahlensystem geboten wird; endlich und ganz vorzüglich aber die Rücksicht auf die bei den Schülern zu erzielende Rechenfertigkeit. Wenn sich auch alle Zahlenbildung auf die Zahlen von 1—10 zurückführen läſst, so erhält doch das Rechnen selbst in jenem Zahlenraume nur die ersten in jeder Beziehung unvollständigen Ansätze. Die Rechenfertigkeit setzt die allseitige Einübung und geläufige Kenntnis des sogenannten Einsundeins und Einmaleins voraus; von diesen gelangt das erste in dem Zahlenraume 1—20, das zweite in dem Zahlenraume 1—100 zum vollkommenen Abschlusse. Hiedurch ist aber, da in den ersten zwei Schuljahren die Grundlage für das sichere und fertige Rechnen in den höheren Zahlenkreisen zu schaffen ist, auch die Abgränzung des Übungsstoffes für diese Schuljahre von selbst gegeben. Dem ersten Schuljahre fällt der Zahlenraum von 1 bis 20, und darin die Einübung des Einsundeins, dem zweiten der Zahlenkreis von 1—100, und darin die Durchübung des Einmaleins naturgemäß zu.

Das erste Rechenbuch zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Zahlen von 1 bis 10 behandelt, der zweite den Zahlenkreis bis 20 erweitert. Der durchzuführende Übungsstoff umfaſst: 1. Übungen im reinen Rechnen, und zwar mündlich und schriftlich; 2. Übungen im angewandten Rechnen. Diese Übungen müßen in planmäßig lückenlos fortschreitender Ordnung aufeinander folgen, so daſs jede spätere in den vorhergehenden genügende Vorbereitung und Unterstützung findet, zugleich aber eine gesteigerte Gewandtheit in der Ausführung verlangt.

Das erste Rechenbuch enthält bloß die Aufgaben für die schriftlichen Übungen der Schüler; es hat den Zweck, dem Schüler den Stoff für die stille Selbstbeschäftigung in der Schule und für die häusliche Wiederholung unmittelbar an die Hand zu geben und so den Lehrer des zeitraubenden Aufschreibens der Aufgaben auf die Schultafel zu überheben. Da die schriftlichen Übungen immer erst dann eintreten sollen, wenn schon durch den mündlichen Unterricht völlige Einsicht und ein gewisser Grad von Fertigkeit erreicht ist, so werden sie als eine bloße Wiederholung des mündlich Eingeübten erscheinen und dem Schüler, sobald er die Ziffern lesen und schreiben kann, keine Schwierigkeit darbieten; überdieß sind, um die Ausarbeitung noch mehr zu erleichtern, den Übungsaufgaben in ihren Hauptformen überall auch entsprechende Versinnlichungen beigefügt.

Die Anweisung zum Gebrauche des ersten Rechenbuches enthält die vorliegende Anleitung; sie bringt methodische Andeutungen über das mündliche Lehrverfahren, Winke über die Behandlung der schriftlichen Aufgaben, und in harmonischer Gliederung mit dem reinen Rechnen zahlreiche angewandte Aufgaben, die in dem Übungsbuche für Schüler, da es diesen noch an der nöthigen Lesefertigkeit gebricht, zwecklos wären.

Wenn auch das unterrichtliche Verfahren, um insbesondere dem Anfänger im Lehrfache einen sicheren Leitfaden und eine das eigene Nachdenken anregende Unterstützung zu gewähren, hin und wieder mit größerer Ausführlichkeit dargelegt wird, so bleibt dem Lehrenden immerhin noch genug Spielraum gelassen, selbständig vorzugehen und zu schaffen. Der methodischen Anleitung dieses Rechenbuches bediene sich der Lehrer überhaupt nur zur Vorbereitung auf die Rechenstunden, und nicht in diesen selbst. Nur dann kann der Unterricht den gewünschten Erfolg haben, wenn sich der Lehrer durch gewissenhafte Vorbereitung und sorgfältiges Nachdenken in den Gegenstand fest hineingearbeitet und sich zugleich in der Art und Weise, denselben den Kindern zur Anschauung und klaren Einsicht zu bringen, volle Sicherheit erworben hat.

Erster Abschnitt.

Zahlenraum von eins bis zehn.

§. 5. Allgemeine Bemerkungen.

Der Ausgangspunkt alles Rechnens ist die Bildung der Zahlen; sie wird beim Kinde durch die Anschauung, durch das Zählen der vorgeführten Gegenstände vermittelt.

Sind die auf einander folgenden Zahlen eines bestimmten Zahlenkreises gebildet und aufgefaßt worden, so gibt es für die weitere Behandlung derselben beim ersten Unterrichte zwei Wege, die bezüglich der Anordnung der Rechenübungen eingeschlagen werden können. Man kann entweder an den Zahlen innerhalb des ganzen Zahlenraumes zuerst das Zuzählen, dann folgeweise das Wegzählen, Vervielfachen, Messen und Theilen üben; oder man kann in der betreffenden Zahlenreihe allmählich von Zahl zu Zahl aufsteigen, und jede derselben sogleich nach allen jenen Operazionen in Betrachtung ziehen. Dort liegt der Eintheilung und Anordnung der Übungen die Operazion, hier die Zahl selbst zu Grunde, welche in ihrer Allseitigkeit betrachtet wird.

Für die Behandlung der höheren Zahlen erscheint zwar der erste dieser Wege besser geeignet; dagegen verdient für den Zahlenraum von 1 bis 10, dem man die unmittelbare äußere Anschauung zu Grunde legen kann, unstreitig die zweite Methode den Vorzug. Sie führt nicht nur sicherer zum klaren Auffassen und allseitigen Durchdringen der einzelnen Zahlen, sondern fördert wesentlich auch das Verständnis des Rechnens mit denselben. Die verschiedenen Operazionen in diesem Zahlenumfange werden auf anschauliche Weise am einfachsten mit Hilfe der Zerlegung der Zahlen erfasst; diese Zerlegbilder und die darauf beruhenden Rechnungsfälle werden sich jedoch nur dann dem Gedächtnisse des Kindes fest einprägen, wenn bei jeder einzelnen Zahl länger verweilt wird.

Wir wählen daher hier diesen zweiten Weg und müßen dabei dem Lehrer im allgemeinen noch folgendes empfehlen:

a) Da die Zahlen von 1 bis 10 die Grundlage aller Zahlenbildung und alles Rechnens bieten, so müßen sie mit besonderer Sorgfalt behandelt werden. Bei jeder Zahl soll der Lehrer so lange verweilen, bis alles klar erfasst und fertig eingeübt ist; insbesondere aber müßen die Übungen im Zu- und Wegzählen, auf welche im ersten Schuljahre das Hauptgewicht zu legen ist, mit allem Fleiße betrieben werden. Nirgends straft sich ein zu schnelles Vorwärtseilen empfindlicher als beim ersten Rechenunterrichte.

b) Alle Übungen sind nicht nur mündlich, sondern auch schriftlich vorzunehmen. Überall sollen Kopf- und Zifferrechnen in harmonischer Verbindung neben einander fortschreiten. Durch die schriftlichen Übungen wird nicht nur die bei der mündlichen Behandlung gewonnene Einsicht befestiget; dieselben bieten auch namentlich in Schulen, wo die Unterklasse mehrere Abtheilungen enthält, ein vorzügliches Mittel, die Anfänger still zu beschäftigen, während der Lehrer eine andere Abtheilung unmittelbar unterrichtet.

c) Der Lehrer sage in der Regel die Aufgabe nur einmal vor und betone dabei besonders die Zahlwörter; dieß nöthigt die Schüler zur Aufmerksamkeit und fördert auch die Fertigkeit im Behalten der Zahlen.

d) Der Lehrer lasse die Schüler bald in vollständigen Sätzen, bald in der kürzesten Weise (bloß durch ein Zahlwort), im letzten Falle aber auch so rasch als möglich antworten. Jede dieser Formen hat ihren Wert. Während vollständige Antworten die Sprachrichtigkeit fördern, verdient die zweite Form der Antworten den Vorzug, wenn es auf die Übung der Fertigkeit, also auf Schnelligkeit ankommt.

e) Man lasse die Anfänger nie ununterbrochen zu lange Zeit (über eine halbe Stunde) rechnen, damit nicht Ermattung und Abspannung des Geistes eintrete.

I. Bildung und Auffassung der Zahlen von eins bis zehn.

§. 6. Anschauliche Bildung der einzelnen Zahlen.

Damit die Schüler eine richtige Vorstellung der einzelnen Zahlen erlangen, werde jede Zahl an verschiedenen äußern Gegenständen in mannigfaltiger Abwechslung zur Anschauung gebracht. Nur dadurch, daſs die Kinder an verschiedenen wechselnden Dingen die gleiche Menge stets mit demselben Zahlworte bezeichnen hören, merken sie sich dieses Zahlwort in Verbindung mit der dadurch ausgedrückten Anzahl und lernen es auch auf andere gleiche Mengen anwenden, d. h. sie abstrahieren die reine Zahl.

Der Lehrer lasse zuerst verschiedene Gegenstände, als Griffel, Stäbchen, Würfel, Fenster, Bänke u. s. w. zählen, und stelle dann die betrachtete Zahl an der Schultafel durch Punkte, Striche, Kreuzchen u. dgl. auch schriftlich dar.

Wird zur Veranschaulichung der Zahlen die russische Rechenmaschine angewendet, so muß dabei alles entfernt bleiben, was die Aufmerksamkeit von dem anzuschauenden Gegenstande ablenken könnte. Darum nehme man anfänglich alle Kugeln heraus, zu welchem Zwecke die eisernen Stäbe an dem einen Ende umgebogen, auf dem andern mit einer Mutterschraube versehen sind, und bringe dann erst nach und nach, so wie die aufeinander folgenden Zahlen auftreten, für die Zahl 1 *eine* Kugel auf den obersten Stab, für die Zahl 2 *zwei* Kugeln auf den zweiten Stab, für die Zahl 3 *drei* Kugeln auf den dritten Stab, u. s. w. bis 10.

Wenn auch hier die Kinder noch nicht mit den Ziffern bekannt zu machen sind, so können doch schon schriftliche Übungen eingeführt werden, indem man die Schüler die Darstellung der Zahlen durch Punkte, Striche,.. die der Lehrer früher vor ihren Augen an der Schultafel gemacht und besprochen hat, auf ihren Täfelchen *nachbilden* läßt.

a) Die Zahl *eins*.

●

|

+

Das ist *ein* Griffel. Wie viel Griffel sind das? Das Kind antwortet in einem vollständigen Satze: das ist *ein* Griffel. — Das ist *ein* Finger. Wie viel Finger sind das? — Das ist *ein* Würfel. — Das ist *eine* Kugel (auf die an dem obersten Stabe der russischen Rechenmaschine angebrachte Kugel zeigend). — Wie viel Köpfe hast du? — Was ist an deinem Kopfe nur *einmal* da? — Was ist in dem Schulzimmer nur *einmal* da?

Der Lehrer macht an der Schultafel einen Punkt. Wie viel Punkte sind das? Machet auf dem Schiefertäfelchen *einen* Punkt. Wie viel Punkte habt ihr gemacht? — Ebenso mache der Lehrer an der Wandtafel *einen* Strich, *ein* stehendes Kreuz, und lasse dieselben von den Schülern auf ihren Täfelchen nachbilden.

Ihr kennet nun *eine Zahl*. Sie heißt *eins*.

b) Die Zahl *zwei*.

● ●

| |

+ +

Das ist *ein* Würfel. Ich lege noch *einen* Würfel dazu, dann habe ich mehr als *einen* Würfel, ich habe *zwei* Würfel;

ein Würfel und ein Würfel sind zwei Würfel. — Wie viel Stäbchen sind ein Stäbchen und ein Stäbchen? — Wie viel Finger sind ein Finger und ein Finger? — Ein Fenster und ein Fenster sind wie viel Fenster? — (An der Rechenmaschine.) Wie viel Kugeln sind an dem ersten Stabe? Wie viele auf dem zweiten? — Was ist an deinem Kopfe zweimal da? — Wie viel Hände hast du? — Wie viel Füße? — Wie viel Füße hat die Henne? — Nenne noch andere Thiere, welche zwei Füße haben.

Nun zeichnet der Lehrer an der Schultafel zwei Punkte, darunter zwei Striche, zwei Kreuze, und spricht dabei: ein Punkt und ein Punkt sind zwei Punkte; ein Strich und ein Strich sind zwei Striche; ein Kreuz und ein Kreuz sind zwei Kreuze. Eins und eins ist zwei.

Diese Darstellungen werden dann von den Schülern nach der Vorschrift an der Schultafel auf ihren Täfelchen nachgebildet.

c) Die Zahl drei.

● ● ●

| | |

\+ + +

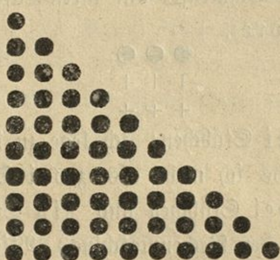
Hier sind zwei Stäbchen; ich lege zu denselben noch ein Stäbchen, dann habe ich mehr als zwei Stäbchen, ich habe drei Stäbchen; zwei Stäbchen und ein Stäbchen sind drei Stäbchen. — (An der Rechenmaschine.) Wie viel Kugeln sind an dem ersten Stabe? Wie viel an dem zweiten? Wie viel an dem dritten? — Das ist ein Würfel; das ist noch ein Würfel; wie viel Würfel sind es jetzt? Das ist noch ein Würfel; wie viel Würfel sind jetzt da? — Zähle von diesen Griffeln drei ab. — Wie viel Finger sind das? Das sind zwei Finger. Ich halte noch einen Finger dazu; wie viel sind es jetzt? Nun hebe jeder drei Finger in die Höhe! — Ein Kleeblatt hat drei Blätter; u. s. w.

Darstellung der Zahl drei durch Punkte, Striche, Kreuze, .. an der Schultafel; Nachbilden dieser Darstellung von den Schülern auf ihren Schiefertäfelchen.

d) Auf gleiche Weise werden die folgenden Zahlen vier bis zehn vorgeführt. Bei vier erinnert man etwa an die vier Füße eines Tisches, eines Pferdes, oder an die vier Räder eines Wagens, bei fünf an die fünf Finger einer Hand, bei sechs an die sechs Seiten (Flächen) eines Würfels oder an die sechs Beine einer Fliege, bei sieben an die sieben Tage einer Woche, bei acht an die acht Ecken eines Würfels, bei neun an einen Satz Kegel, bei zehn an die zehn Finger an beiden Händen.

§. 7. Übersichtliche Zusammenstellung der ersten zehn Zahlen.

A. Der Lehrer bilde an der Schultafel zehn Reihen von Punkten, welche die aufeinander folgenden Zahlen darstellen:



und knüpfe daran folgende Übungen:

a) Das Vorwärtszählen. Der Lehrer zeige auf die erste, dann auf die zweite, dritte, . . . zehnte Reihe und lasse die Kinder zählen: ein Punkt, zwei Punkte, drei Punkte, . . . zehn Punkte; hierauf bloß: eins, zwei, drei, . . , zehn.

b) Das Zählen außer der Ordnung. Der Lehrer zeigt außer der Ordnung irgend eine Anzahl von Punkten; die Schüler geben diese Zahl an.

c) Nennen einer Zahl und Zeigenlassen der entsprechenden Reihe von dem Schüler.

d) Angabe der Stelle, welche eine Zahl in der Zahlenreihe einnimmt. Welche Zahl folgt auf eins? auf sechs, vier, acht, drei, . . ? — Welche Zahl steht vor zwei? vor fünf, sieben, drei, neun, . . ? — Zwischen welchen Zahlen liegt zwei, sechs, drei, acht, . . ?

e) Nennen einer Zahl und Zeichnen der entsprechenden Anzahl Punkte von dem Schüler.

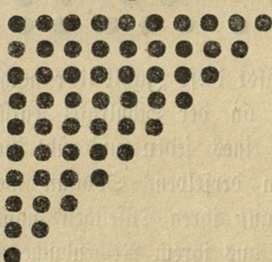
f) Nachbilden aller zehn Reihen von Punkten auf den Schiefertafeln als stille Beschäftigung.

Dieselben Übungen an der Rechenmaschine.

B. Damit die Aufeinanderfolge der Zahlen noch besser aufgefaßt werde, stelle der Lehrer die Zahlenreihe, von zehn ausgehend, rückwärts auf.

Zuerst an Stäbchen. Hier sind zehn Stäbchen; nehme ich ein Stäbchen weg, so habe ich weniger als zehn Stäbchen, ich habe nur neun Stäbchen. Nehme ich von neun Stäbchen noch ein Stäbchen weg, so habe ich weniger als neun Stäbchen, ich habe nur noch acht Stäbchen; u. s. f.

Dann wird ebenso an Punkten, welche vor den Augen der Schüler an die Schultafel gemacht werden, das Rückwärts-

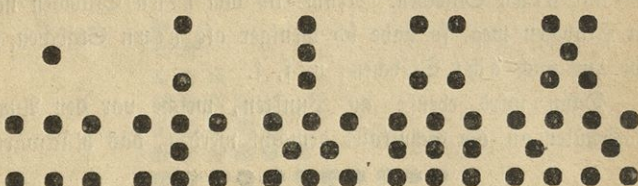


zählen geübt. Die Kinder zählen, indem der Lehrer auf die erste, zweite, dritte, . . . zehnte Reihe zeigt, zuerst: zehn Punkte, neun Punkte, acht Punkte, . . . ein Punkt; dann: zehn, neun, acht, . . eins.

Auch diese Darstellung von Punkten wird von den Schülern auf den Schiefertafeln nachgebildet.

§. 8. Zahlbilder.

Die noch ungeübten Kinder können eine größere Reihe von neben oder unter einander stehenden Punkten, sobald ihre Anzahl vier oder fünf übersteigt, nicht leicht übersehen und zur Zahl zusammenfassen. Sie haben bisher die durch Punkte versinnlichte Zahl durch das Abzählen derselben angegeben. Damit sie sich nun von jeder Zahl, ohne erst die Punkte zählen zu müßen, sogleich eine richtige Vorstellung machen können, führt man ihnen für die einzelnen Zahlen bestimmte *Zahlbilder* vor, in denen die versinnlichenden Punkte in einer leicht zu überblickenden Gruppe zusammengestellt erscheinen. Ein Zahlbild muß so gewählt werden, dass das Kind in demselben mit *einem* Blicke sogleich die dadurch ausgedrückte Zahl erkennt und alle ihre Bestandtheile vorfindet. Wir wählen hier die nachstehenden Zahlbilder:



Der Lehrer läßt diese Zahlbilder nach der Reihe vor den Augen der Schüler an der Schultafel entstehen, bespricht die Eigenthümlichkeiten eines jeden und übt die Kinder im raschen Erkennen und Lesen derselben. Sodann werden die Zahlbilder von den Schülern auf ihren Täfelchen nachgebildet, zuerst von der Schultafel oder aus ihrem Rechenbuche, später in und außer der Ordnung aus dem Gedächtnisse.

§. 9. Münzen, Maße und Gewichte.

In den angewandten Aufgaben treten die Münzen, Maße und Gewichte auf; diese müßen den Kindern erklärt und vorgezeigt werden. Der Lehrer wird übrigens bloß die *neuen*

Maße und Gewichte vorführen, die bisherigen aber gänzlich unberücksichtigt lassen; die heranwachsende Jugend bedarf des Neuen, nicht aber zugleich des Alten, wodurch nur Verwirrung eintreten würde.

In dem ersten Zehnerraume werden hierüber folgende Belehrungen zu ertheilen sein:

a) Münzen.

Wenn ihr Papier, Griffel, oder etwas anderes kaufet, müßet ihr dafür Geld zahlen. Geldstücke heißen Münzen. Die kleinsten Geldstücke, die wir haben sind der Kreuzer und der halbe Kreuzer (sie werden vorgezeigt). Beide sind aus Kupfer; sie heißen darum Kupfermünzen. Was man für einen Kreuzer kauft, kann man entweder mit 1 Kreuzer oder mit 2 halben Kreuzern bezahlen. 1 Kreuzer ist gleich 2 halben Kreuzern.

Der Lehrer zeigt dann ein Vierkreuzerstück und sagt: Außer dem Kreuzer und dem halben Kreuzer haben wir noch eine größere Kupfermünze, welche Vierkreuzerstück oder Vierer heißt. Ein Vierer gilt 4 Kreuzer.

Nicht alle Münzen bestehen aus Kupfer; einige sind auch aus Silber, und noch andere aus Gold. Silber ist mehr wert als Kupfer, Gold ist mehr wert als Silber.

Der Lehrer zeigt einen Fünfer, einen Zehner, einen Zwanziger und ein Guldenstück vor und sagt: Diese Münzen bestehen aus Silber und heißen darum Silbermünzen. Statt 5 Kreuzer zu zahlen, kann ich 1 Fünfer zahlen; 1 Fünfer ist gleich 5 Kreuzern. Statt 2 Fünfer zu zahlen, kann ich 1 Zehner zahlen; 1 Zehner ist gleich 2 Fünfern. Statt 2 Zehner oder 4 Fünfer zu zahlen, kann ich einen Zwanziger zahlen; 1 Zwanziger ist gleich 2 Zehnern oder 4 Fünfern. Statt 5 Zwanziger oder 10 Zehner zu zahlen, kann ich einen Gulden zahlen; 1 Gulden ist gleich 5 Zwanzigern oder 10 Zehnern.

Wir haben auch Papiergeld. Statt einen Gulden in Silber zu zahlen, können wir eine Staatsnote, welche auf einen Gulden lautet, zahlen.

b) Längenmaße.

Die Dinge, welche man kauft, werden gemessen oder gewogen; sie werden nach dem Maße oder Gewichte gekauft.

Tuch, Leinwand, Bänder u. dgl. werden mit dem Meter gemessen. Der Lehrer zeige einen Meterstab vor und erkläre die darauf befindliche Eintheilung. 1 Meter ist gleich 10 Decimeter; 1 Decimeter ist gleich 10 Centimeter.

Der Lehrer misst dann auch die Länge und die Breite des Schulzimmers mit dem Meterstabe und zeigt, wie man zuerst die Meter, und dann die Decimeter und Centimeter abzählt.

c) Hohlmaße.

Wein, Bier und andere Flüssigkeiten werden mit dem Liter und dem Deciliter gemessen. Der Lehrer zeige sowohl ein Liter- als ein Decilitermaß, fülle das Deciliter 10mal nach einander mit Wasser und gieße dieses jedesmal in das Liter, wodurch dasselbe voll wird. Die Kinder ersehen daraus, dass 1 Liter gleich 10 Deciliter ist.

Das Liter dient auch zum Messen des Getraides und anderer trockener Gegenstände.

d) Gewichte.

Zum Abwägen braucht man eine Wage und Gewichte. Als Gewicht dient das Kilogramm. Um kleinere oder kostbare Gegenstände, z. B. Seide, Gold u. dgl. zu wägen, braucht man das Dekagramm und das Gramm. Der Lehrer zeige sowohl die Wage als die genannten drei Gewichte vor und erkläre das Wägen. Um den Kindern zur Anschauung zu bringen, dass ein Kilogramm das Gewicht eines Liters Wasser ist, lege er auf die eine Wagschale ein leeres Litergefäß und auf die andere so viel an Gewicht, als nöthig ist, um das Gleichgewicht der Wage herzustellen; dann fülle er das Gefäß mit Wasser und stelle das Gleichgewicht durch Hinzulegen neuer Gewichte wieder her, wozu gerade ein Kilogramm erforderlich ist. So viel an Gewicht zugelegt werden mußte, so viel beträgt das Gewicht des in einem Liter enthaltenen Wassers, — somit ein Kilogramm.

Legt man ferner in die eine Wagschale 1 Dekagramm und in die andere 10 Gramm, so ist in beiden Wagschalen gleich viel Gewicht. 1 Dekagramm ist also gleich 10 Gramm.

Die Untertheilungen: 1 Gramm = 10 Decigramm, 1 Decigramm = 10 Centigramm, 1 Centigramm = 10 Milligramm, können, da sie für das gewöhnliche Leben von keiner praktischen Bedeutung sind, hier noch übergangen werden.

e) Zählmaße.

Viele Gegenstände werden nach der Anzahl der Stücke gekauft; z. B. Griffel, Äpfel u. dgl. Zwei Dinge nennt man ein Paar. Manche Dinge müßen zum Gebrauche paarweise vorhanden sein, z. B. ein Paar Schuhe, ein Paar Strümpfe u. dgl.

f) Zeitmaße.

Eine Woche hat 7 Tage. Wie heißt der erste Wochentag? der zweite? . . . der siebente? Ihr gehet an **6** Tagen in die Schule; das sind Schultage, Werktage oder Arbeitstage; der Sonntag ist der Ruhetag. 1 Woche hat 6 Arbeitstage.

II. Allseitige Behandlung der Zahlen von eins bis zehn.

§. 10.

1. Die Kinder haben bisher bis zehn mit Bewußtsein zählen gelernt. Dieses genügt jedoch nicht. Damit die gewonnene Anschauung einer Zahl zu größerer Klarheit erhoben, damit der Inhalt der Zahl vollständig erkannt werde, muß man dieselbe mit allen kleineren Zahlen vergleichen, sie zu diesem Zwecke in ihre Bestandtheile zerlegen und diese wieder zusammensetzen

lassen. Dabei ergeben sich von selbst die verschiedenen Rechnungsoperazionen, durch welche man die betrachtete Zahl mit den ihr vorangehenden verbinden kann. Da aber mit der wachsenden Zahl auch die Mannigfaltigkeit ihrer möglichen Zerlegungen zunimmt, von denen mehrere für die klare Auffassung der Zahl von keiner wesentlichen Wichtigkeit sind, so werden wir in dem nachfolgenden, um den Unterricht nicht unnöthiger Weise zu erschweren, jedesmal nur jene Zerlegungen in Betrachtung ziehen, welche sich aus der Vergleichung der bezüglichen Zahl mit jeder der vorhergehenden Zahlen ergeben, welche also darstellen, aus wie vielmal 1, aus wie vielmal 2, aus wie vielmal 3 u. s. f. die Zahl besteht, die eben behandelt wird. Diese Zerlegungen reichen hin, um alle Rechnungsfälle des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens zur unmittelbaren Anschauung zu bringen.

Die einzelnen Zerlegbilder müßen, nachdem sie mündlich behandelt und durchgesprochen worden sind, von den Schülern auf ihren Täfelchen, anfangs von der Schultafel oder aus dem Rechenbuche, später aus dem Gedächtnisse nachgezeichnet werden.

2. Da die mündlich vorgenommenen Rechenübungen von den Schülern auch in schriftlicher Darstellung wiederholt werden sollen, müßen dieselben im Anschlusse an das entsprechende Zahlbild auch mit dem Lesen und Schreiben der Ziffer für die betrachtete Zahl vertraut gemacht werden. Der Lehrer schreibt die Ziffer einigemale an die Tafel, macht dabei auf die einzelnen Züge aufmerksam, und fragt jedesmal: Was bedeutet diese Ziffer? Dann läßt er die Schüler die Ziffer auf den Schiefertafeln wiederholt nachbilden, bis sie dieselbe richtig und ziemlich geläufig schreiben können.

Die Begriffe Zahl und Ziffer dürfen nicht verwechselt werden; die Kinder sollen dieselben nicht definieren, wohl aber richtig gebrauchen können.

In Bezug auf die Behandlung der schriftlichen Aufgaben nicht nur im Anfange, sondern auch in der Folge, so oft eine Übung zum erstenmal auftritt, sei dem Lehrer folgendes empfohlen: Er schreibe die Aufgaben zuerst auf die Schultafel, spreche sie mit den Kindern durch, erkläre ihnen die arithmetischen Zeichen und setze die Resultate dazu. Dann lösche er letztere wieder weg, lasse nach der Reihe mehrere Schüler an die Tafel treten und von ihnen die Rechnung wiederholen. Hierauf lesen die Schüler einer nach dem andern die Aufgaben aus ihrem Rechenbuche und rechnen sie aus. Endlich werden die Schüler aufgefordert, die Aufgaben auf ihre Schiefertafeln zu schreiben, sie noch einmal auszurechnen und durch das Ansetzen des Resultates zu ergänzen. Ist dieß geschehen, so sehe der Lehrer die einzelnen Arbeiten genau durch und helfe nach, wo er es nöthig findet.

In den schriftlichen Übungen muß eine solche Sicherheit erreicht werden, dass die Schüler zuletzt Aufgaben und Antworten aus dem Rechenbuche lesen, als ob die fehlenden Zahlen gedruckt wären.

3. Ein weiteres Erfordernis zur allseitigen Anschauung einer Zahl ist, dass die erkannten Zahlenverhältnisse in einer dem Gesichtskreise des Kindes entsprechenden Weise sofort auf die mannigfaltigen Beziehungen des Lebens angewendet werden. Indem erst dadurch das Rechnen seine praktische Bedeutung erhält, trägt die Anwendung umgekehrt wieder das ihrige bei, Klarheit und Deutlichkeit in den Vorstellungen der Zahlenverhältnisse zu fördern.

4. Was die Schüler klar erfasst haben, das soll ihnen geläufig und zum unverlierbaren Eigenthum werden. Dazu ist anhaltende Übung und vielfältige Wiederholung nöthig. Bei den Übungen mit einer bestimmten Zahl müßen daher immer auch die Übungen mit den vorhergehenden Zahlen soviel als möglich zur Wiederholung gebracht werden.

Mit Rücksicht auf die voranstehenden Bemerkungen ordnen wir daher die Übungen bei der allseitigen Behandlung der einzelnen Zahlen nach folgenden Beziehungen:

A. Zerlegung der Zahl und daraus sich ergebende Rechnungsfälle; mündlich.

B. Vorführen der Ziffer und schriftliche Übungen.

C. Anwendungen.

D. Wiederholungen, mündlich und schriftlich.

---

§. 11. Die Zahl 1.

· 1

Bei der Zahl eins kann es sich, da dieselbe nicht zerlegt werden kann, nur um deren schriftliche Bezeichnung handeln.

Die Schüler lernen die Ziffer 1 kennen und schreiben.

---

§. 12. Die Zahl 2.

: 2

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

Der Lehrer zeigt auf die aneinander geschobenen Kugeln am zweiten Stabe der russischen Rechenmaschine. Wie viel Kugeln sind auf diesem Stabe? Nun rückt er die eine von der andern etwas weg. Wie viel Kugeln sind jetzt auf dem zweiten Stabe? Aber die zwei Kugeln sind nicht mehr zusammen, sie sind getrennt, zerlegt. Ich habe zwei Kugeln zerlegt in eine Kugel und eine Kugel. — Dasselbe geschieht mit zwei Würfeln, die man auf den Tisch neben einander legt und dann von einander schiebt. — Hier sind zwei Punkte. Ich kann sie nicht auseinander rücken; um sie zu zerlegen, mache ich zwischen den zwei Punkten einen kleinen Strich. Wie viel Punkte sind auf der einen Seite des Striches? Wie viel Punkte auf der andern? Zwei Punkte kann man zerlegen in einen Punkt und einen Punkt. —

Zwei kann man zerlegen in eins und eins. Zwei besteht aus eins und eins.

Nun sollen die Kinder auf die Rechnungsoperazionen geleitet werden, die sich aus der Zerlegung der Zahl 2 in 1 und 1 ergeben.

• | • $1 + 1 = 2$*) $2 - 1 = 1$**)

$2 \times 1 = 2$***) 1 in 2 = 2†) $\frac{1}{2}$ v. 2 = 1 ††)

1) 1 Punkt und 1 Punkt sind 2 Punkte. — Hier ist 1 Würfel; ich lege noch 1 Würfel dazu, wie viel Würfel sind es nun? 1 Würfel und 1 Würfel sind 2 Würfel. — 1 und 1 ist 2.

2) Hier sind 2 Würfel; ich nehme 1 Würfel weg. Sind es noch 2? Sind es mehr oder weniger? Wie viel sind es weniger? Und wie viel sind noch da? 2 Würfel weniger 1 Würfel ist also 1 Würfel. — Nehme ich von 2 Punkten 1 weg (das Wegnehmen wird durch das Verdecken angedeutet), wie viel Punkte bleiben noch? 2 Punkte weniger 1 Punkt ist 1 Punkt. — 2 weniger 1 ist 1.

(An der Rechenmaschine.) Wie viel Kugeln sind auf dem ersten Stabe? Wie viele auf dem zweiten? Wo sind mehr? Wo sind weniger? Um wie viel sind 2 Kugeln mehr als 1 Kugel? Um wie viel ist 1 Kugel weniger als 2 Kugeln? — 2 ist um 1 mehr als 1. 1 ist um 1 weniger als 2.

Hier ist 1 Würfel; wie viel Würfel muß ich noch dazusetzen, damit ich 2 Würfel erhalte? — 2 ist 1 und wieviel? (wird geschrieben 2 = 1 +.)

---

*) Lies: eins und eins ist zwei.

**) Lies: zwei weniger eins ist eins.

***) Lies: zweimal eins ist zwei.

†) Lies: eins ist in zwei zweimal enthalten.

††) Lies: Die Hälfte von zwei ist eins.

3) Ich mache 1 Strich 1mal; nun mache ich 1 Strich noch 1mal. Wie vielmal habe ich 1 Strich gemacht? Wie viel Striche sind es? 2mal 1 Strich sind also 2 Striche. — (An der Rechenmaschine auf die 2 Kugeln des zweiten Stabes deutend): 1mal 1 Kugel und noch 1mal 1 Kugel sind 2mal 1 Kugel. Wie viel Kugeln sind 2mal 1 Kugel? — Karl bekam am Sonntag 1 Apfel, am Montag wieder 1 Apfel; wie oft hat er 1 Apfel bekommen? Wie viel Äpfel hat er bekommen? 2mal 1 Apfel sind also 2 Äpfel. — 2mal 1 ist 2. Das Doppelte von 1 ist 2.

4) Zählt, wie oft ich von diesen 2 Würfeln auf dem Tische 1 Würfel wegnehme. (1mal, 2mal.) Wie oft ist also 1 Würfel in 2 Würfeln enthalten? — Wie oft kann ich von 2 Punkten 1 Punkt weglöschen? Wie oft ist also 1 Punkt in 2 Punkten enthalten? — (An der Rechenmaschine.) Wie oft kann ich von diesen 2 Kugeln 1 Kugel auf die andere Seite schieben? 1 Kugel ist also in 2 Kugeln 2mal enthalten. — 1 ist in 2 2mal enthalten.

5) Ich gebe dir 2 Kreuzer; vertheile sie unter deine zwei Nachbarn so, dass jeder gleich viel, jeder die Hälfte bekommt; wie viel mußt du jedem geben? Wie viel ist also die Hälfte von 2 Kreuzern? — Wie viel ist die Hälfte von 2 Kugeln? Wie viel ist die Hälfte von 2 Nüssen? — Die Hälfte von 2 ist 1.

B. Schriftliche Übungen.

Man mache die Kinder mit der Ziffer 2 bekannt und lasse sie auf den Schiefertafeln zwei Punkte und daneben die entsprechende Ziffer wiederholt nachbilden.

Für die weitere schriftliche Übung ergeben sich nebst der Nachzeichnung des Zerlegbildes • | • die an demselben schon mündlich behandelten Aufgaben:

$1 + 1 =$	$2 - 1 =$	$2 = 1 +$.
$2 \times 1 =$	1 in $2 =$	$\frac{1}{2}$ v. $2 =$

C. Anwendungen.

In den Anwendungen werden bei jeder Zahl zuerst die auf dieser Stufe ausführbaren Verwandlungen der Münzen, Maße und Gewichte vorgenommen.

Wie viel Kreuzer sind 2 halbe Kreuzer? Wie viel ist die Hälfte von 1 Kreuzer? — Wie viel Zehner sind 2 Fünfer? Wie viel Zehner sind die Hälfte von 1 Zwanziger? — Wie viel Tauben sind 1 Paar Tauben? 2 Pferde sind wie viel Paare?

Bei den angewandten Aufgaben wird der Lehrer im Anfange bald den Schülern die Lösung der Aufgabe gleichsam vordenken und bündig vorsprechen, bald dieselben durch angemessene Fragen auf die Schlüsse leiten, welche zur Lösung führen. In beiden Fällen erlangen die Schüler klare Einsicht in den Rechnungsgang, und lernen nach und nach die Schlüsse richtig aussprechen und selbständig bilden. Wir werden hier einigen Aufgaben auch die Lösung beifügen.

August bekommt von dem Vater 1 Kreuzer und von der Mutter 1 Kreuzer; wie viel bekommt er von beiden?

August bekommt 1 Kr. und noch 1 Kr.; 1 Kr. und 1 Kr. sind 2 Kr.

Anton kauft für 1 Kr. einen Griffel und für 1 Kr. ein Bild; wie viel Geld gibt er aus?

Fritz ist 1 Jahr alt, Karl ist 2 Jahre alt. Welcher von beiden ist älter? Welcher jünger? Um wie viel ist Karl älter als Fritz? Um wie viel ist Fritz jünger als Karl?

Um wie viel Jahre sind 2 Jahre mehr als 1 Jahr? Um wie viel Jahre ist also Karl älter als Fritz? — Um wie viel ist 1 Jahr weniger als 2 Jahre? Um wie viel Jahre ist also Fritz jünger als Karl?

Emilie hat 1 Kreuzer, sie kauft für 1 halben Kreuzer einen Apfel; wie viel Geld behält sie noch?

1 Kr. hat 2 halbe Kr.; Emilie gibt also von 2 halben Kr. 1 halben Kr. aus; sie behält noch 1 halben Kr.

Heinrich kauft 2 Bogen Papier, ein Bogen kostet 1 Kr.; wie viel muß Heinrich bezahlen?

So oft Heinrich 1 Bogen kauft, muß er 1 Kr. bezahlen; 2 Bogen sind 2mal 1 Bogen; also muß er für 2 Bogen auch 2mal 1 Kr. bezahlen; 2mal 1 Kr. sind 2 Kr.

Wie viel kosten 2 Bleistifte, wenn 1 Bleistift 1 Kr. kostet? — Wilhelm lernt jeden Tag 1 Buchstaben kennen; wie viel Buchstaben lernt er in 2 Tagen kennen?

Ein Vater hat 1 Sohn und 1 Tochter; wie viel Kinder hat er? — Der Sohn ist 1 Jahr alt, die Tochter ist doppelt (zweimal) so alt; wie alt ist die Tochter?

Anna kauft für 2 Kr. Birnen, jede Birne kostet 1 Kr.; wie viel Birnen bekommt Anna?

Wie viel Birnen bekommt Anna für 1 Kr.? Wie vielmal 1 Kr. sind 2 Kr.? Wie vielmal 1 Birne bekommt sie also für 2 Kr.? Wie viel sind 2mal 1 Birne?

Wie viel Tage reicht Anna mit diesen 2 Birnen aus, wenn sie jeden Tag 1 Birne ißt? — Wie viel Kreuzersemmeln kannst du für 2 Kr. kaufen? — 1 Nadel kostet 1 halben Kr.; wie viel Nadeln bekommt man für 1 Kr.?

Maria kauft 2 Griffel für 1 Kr.; wie viel kostet 1 Griffel?

1 Griffel ist die Hälfte von 2 Griffeln; 1 Griffel kostet auch nur die Hälfte von 1 Kr.; die Hälfte von 1 Kr. ist ein halber Kr.

Franz kauft 2 Bilder für 2 Kr.; wie viel kostet 1 Bild?

---

§. 13. Die Zahl 3.

⁝ 3

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

a. Hier stehen 3 Punkte neben einander. Ich mache nach dem ersten einen Strich. In wie viel Theile sind dadurch 3 Punkte zerlegt? Sind diese Theile gleich oder ungleich? Nun mache ich auch nach dem zweiten Punkte einen Strich. In wie viel Theile sind jetzt 3 Punkte zerlegt? Sind diese drei Theile auch ungleich? Was ist jeder Theil? 3 Punkte kann man also in drei gleiche Theile zerlegen, in 1 Punkt und 1 Punkt und 1 Punkt.

• | • | • $1 + 1 + 1 =$

$3 \times 1 =$ 1 in 3 = $\frac{1}{3}$ v. 3 =

1) Zählt, wie oft ich 1 Punkt mache. 1mal, 2mal, 3mal. Wie vielmal 1 Punkt ist da? Wie viel Punkte sind es zusammen? 3mal 1 Punkt sind also wie viel Punkte? — Ein Kind lernte am ersten Tage 1 Buchstaben, am zweiten 1 Buchstaben, am dritten auch 1 Buchstaben; wie vielmal 1 Buchstaben hat es gelernt? Wie viel Buchstaben sind es zusammen? 3mal 1 Buchstabe sind also 3 Buchstaben. — 3mal 1 ist 3.

2) Wie oft muß ich 1 Strich machen, um 3 Striche zu haben? 1 Strich ist also in 3 Strichen 3mal enthalten. — Wie oft kann ich von diesen 3 Stäbchen 1 Stäbchen wegnehmen? Wie oft ist also 1 Stäbchen in 3 Stäbchen enthalten? — 1 ist in 3 3mal enthalten.

3) Hier sind 3 Griffel; ich will sie unter 3 Schüler so vertheilen, daſs jeder gleichviel, jeder den dritten Theil bekommt; wie viel Griffel muß ich jedem geben? Der dritte Theil von 3 Griffeln ist also 1 Griffel. — Wie viel ist der dritte Theil von 3 Punkten? — Der dritte Theil (das Drittel) von 3 ist 1.

b. Man legt drei Würfel auf den Tisch nahe an einander. Wie viel Würfel sind das? Nun rückt man einen von den zwei andern etwas weg. Wie viele Würfel liegen jetzt auf dem Tische? Noch gerade so viel, drei. Aber liegen sie jetzt noch zusammen? Wie viel Würfel liegen da? Zwei. Und da? Einer. Drei Würfel kann man also zerlegen in zwei Würfel und einen Würfel. — Dasselbe an drei Kugeln der Rechenmaschine. — Mache auf der Tafel 3 Punkte, aber an zwei Stellen; wie viel Punkte wirst du an jeder Stelle machen? — Drei kann man zerlegen in zwei und eins.

$$: | \cdot \quad 2 + 1 = \qquad 3 - 1 = \qquad 3 = 2 + .$$
$$1 + 2 = \qquad 3 - 2 = \qquad 3 = 1 + .$$
$$2 \text{ in } 3 = 1\ (1)\ ^{*})$$

1) Hier stehen 2 Striche; ich mache noch 1 Strich dazu; wie viel Striche sind es jetzt? 2 Striche und 1 Strich sind also 3 Striche. — Hier sind 2 Kugeln (am dritten Stabe der Rechenmaschine); ich schiebe noch 1 Kugel dazu; wie viel sind es jetzt? 2 und 1 ist 3.

Hier steht 1 Punkt und hier stehen 2 Punkte; wie viel Punkte sind das zusammen? 1 Punkt und 2 Punkte sind also 3 Punkte. — Ich halte in der rechten Hand 1 Kreuzer, in der linken 2 Kreuzer; wie viel in beiden Händen? 1 Kr. und 2 Kr. sind 3 Kr. — 1 und 2 ist 3.

2) In dieser Bank sitzen 3 Schüler; wenn ich 1 Schüler wegsetze, wie viel Schüler bleiben noch darin sitzen? — Von 3 Birnen ißt Karl 1 Birne auf; wie viel bleiben ihm noch? 3 Birnen weniger 1 Birne sind also 2 Birnen. — 3 weniger 1 ist 2.

Wenn ich von 3 Kugeln (an der Rechenmaschine) 2 Kugeln auf die andere Seite schiebe, wie viel bleiben noch hier? 3 Kugeln weniger 2 Kugeln sind 1 Kugel. — 3 weniger 2 ist 1.

3) Mache unter einander drei Reihen von Punkten; in der ersten Reihe 1 Punkt, in der zweiten 2 Punkte, in der dritten 3 Punkte. Wie viel Punkte stehen in der dritten Reihe mehr als in der zweiten? Wie viel mehr als in der ersten? 3 ist um 1 mehr als 2. 3 ist um 2 mehr als 1. 3 ist 2 und wieviel? 3 ist 1 und wieviel?

4) Hier sind 3 Würfel; wie oft kann man von diesen 3 Würfeln 2 Würfel wegnehmen? 1mal und 1 Würfel bleibt noch übrig. — 2 ist in 3 1mal enthalten, bleibt 1; wofür man schreibt: 2 in 3 = 1 (1).

---

*) Lies: zwei ist in drei einmal enthalten, bleibt eins.

B. Schriftliche Übungen.

Bekanntmachung mit der Ziffer 3; Übung im Nachbilden der Ziffer 3, wobei derselben immer auch drei unter einander stehende Punkte als das entsprechende Zahlbild vorangestellt werden.

Die Aufgaben für das schriftliche Rechnen bieten die oben bei der Zerlegung angeführten Rechnungsfälle, zu denen von den Schülern auch die entsprechenden Zerlegbilder nachzuzeichnen sind.

C. Anwendungen.

Wie viele halbe Kr. sind 1 Kr. und 1 halber Kr.? — Wie viel Fünfer sind 1 Zehner und 1 Fünfer? Wie viel Zehner sind 1 Zwanziger und 1 Zehner? — Wie viel Stück sind 1 Paar und 1 Stück? — Karl hat 2 Kr., seine Schwester Marie 1 Kr. mehr; wie viel Kr. hat Marie? — Ein Mann schenkte einem Armen 1 Kr. und einem andern 2 Kr.; wie viel Kr. verschenkte er?

Anton ist 3 Jahre alt, Josef ist 1 Jahr jünger; wie alt ist Josef? — Du bist um 1 Uhr in die Schule gekommen, um 3 Uhr wirst du wieder fortgehen; wie viel Stunden bleibst du in der Schule? — Berta hat 3 Kr.; sie kauft für 2 Kr. Kirschen; wie viel Geld bleibt ihr noch?

Emilie und Anna bekamen zusammen 3 Äpfel; Emilie einen mehr als Anna; wie viel bekam jede?

1 Stricknadel kostet 1 Kr.; wie viel kosten 3 Stricknadeln? — Ein Knabe bekommt täglich 1 Apfel; wie viel Äpfel bekommt er in 3 Tagen? — Fritz ist 1 Jahr alt, Johann ist 3mal so alt; wie alt ist Johann?

Für 1 Kr. bekommt man 1 Semmel; wie viel Semmeln bekommt man für 3 Kr.? — Eduard kauft für 3 Kr. Papier; jeder Bogen kostet 1 Kr.; wie viel Bogen bekommt er?

Ein Liter Wein kostet 3 Zehner; ein Liter Milch nur den dritten Theil davon; wie viel kostet ein Liter Milch? — Wenn

3 Kinder untereinander 3 Birnen theilen, wie viel Birnen erhält jedes Kind? — Gustav bekam von seinen 3 Schwestern 3 Kr.; wie viel Kr. bekam er von jeder Schwester?

D. Wiederholungen.

Um die in dem Kinde erzeugten Zahlenvorstellungen zu befestigen und zum bleibenden Eigenthum des Geistes zu erheben, muß der Lehrer nach der Behandlung jeder Zahl über die an den vorhergehenden Zahlen vorgenommenen Übungen mündliche und schriftliche Wiederholungen eintreten lassen.

a. Beim mündlichen Wiederholen an der reinen Zahl ist insbesondere auch das Zählen und das Schnellrechnen in's Auge zu fassen.

Der Lehrer führe die auf einander folgenden Zahlbilder an der Schul- oder Wandtafel noch einmal vor und lasse sie von den Kindern nach der Reihenfolge benennen: ein Punkt, zwei Punkte, drei Punkte; dann: eins, zwei, drei. Welche Zahl kommt nach 1, welche nach 2? Hierauf lasse er an den Zahlbildern nach rückwärts zählen: drei, zwei, eins. Welche Zahl steht vor 3, welche vor 2? Zwischen welchen Zahlen liegt 2? Die Veranschaulichung des Zählens kann auch an der Rechenmaschine geschehen.

Wie viel ist 1 und 1? — 2 und 1? — 1 und 2?

Wie viel ist 3 weniger 1? — 2 weniger 1? — 3 weniger 2?

Um wie viel ist 2 mehr als 1? — 3 mehr als 2? — 3 mehr als 1?

Um wie viel ist 1 weniger als 2? — 2 weniger als 3? 1 weniger als 3?

Wie viel ist 1mal 1? — 1mal 2? — 1mal 3? — 2mal 1? — 3mal 1?

Wie oft ist enthalten 1 in 1? — 1 in 2? — 1 in 3?

Wie viel ist die Hälfte von 2? — Das Drittel von 3?

Beim Schnellrechnen treten mehrere Operazionen nach der Reihe in Verbindung; der Lehrer stellt die Aufgabe kurz, der Schüler sagt rasch das Resultat, an welches der Lehrer sogleich wieder die folgende Aufgabe knüpft, die an einen anderen Schüler gestellt wird. Z. B. Lehrer: Wie viel ist 3 weniger 1? Schüler A: 2. Lehrer: Davon die Hälfte? Schüler B: 1. Lehrer: Und 2? Schüler C: 3.

Wie viel ist 1 und 1, und 1? — Wie viel ist 1 und 2, weniger 1? — Wie viel ist 3 weniger 2, und 1? — Wie viel ist 2mal 1, weniger 1, 3mal genommen? — Wie viel ist die Hälfte von 2, und 2, weniger 1? — Wie viel ist 1 und 2, weniger 1, davon die Hälfte?

Zur Wiederholung der Anwendungen können die schon vorgekommenen oder ähnliche angewandte Aufgaben benützt werden.

b. Bei den schriftlichen Wiederholungsübungen werden die Aufgaben, welche sich bei den einzelnen Zahlen unmittelbar an die Zerlegbilder anschlossen, in beliebiger Aufeinanderfolge noch einmal aufgestellt. Für die Zahl 3 ergeben sich zur Wiederholung die im I. Rechenbuche S. 4 angeführten schriftlichen Aufgaben.

---

§. 14. Die Zahl 4.

⁚⁚4

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

• | • | • | •	1 + 1 + 1 + 1 =		
	4 × 1 =	1 in 4 =	$\frac{1}{4}$ v. 4 =
• | •	2 + 2 =	4 − 2 =	4 = 2 +.
• | •	2 × 2 =	2 in 4 =	$\frac{1}{2}$ v. 4 =
⁝ | •	3 + 1 =	4 − 1 =	4 = 3 +.
	1 + 3 =	4 − 3 =	4 = 1 +.
	1 × 3 + 1 =	3 in 4 =	

Die Behandlung ist im wesentlichen dieselbe wie bei der Zerlegung der Zahlen 2 und 3.

Hier kann den Schülern auch das Wegzählen einer Zahl von einer gleichen Zahl vorgeführt werden. Wenn ich von 4 Würfeln 1 Würfel wegnehme, wie viele bleiben noch übrig? — Wie viele Würfel bleiben übrig, wenn ich von 4 Würfeln 2 Würfel wegnehme? — wenn ich 3 Würfel wegnehme? — Wie viel bleibt übrig, wenn ich von 4 Würfeln alle 4 Würfel wegnehme? Nichts.

B. Schriftlich.

Die Ziffer 4. Als schriftliche Aufgaben dienen die Nachbildung der Zerlegbilder und die dabei angeführten Rechnungsfälle.

C. Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind die Hälfte von einem Vierer? Wie viel Kreuzer ist der 4te Theil von einem Vierer? — Wie viel halbe Kreuzer sind 2 Kreuzer? Wie viel Kreuzer sind 4 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner? Wie viel Zwanziger sind 4 Zehner? Wie viel Fünfer sind der 4te Theil von 2 Zwanzigern?

Dieses Zimmer hat 3 Fenster auf die Gasse und 1 Fenster auf den Hof; wie viel Fenster sind es zusammen? — In einen Topf, welcher 1 Kilogramm wiegt, gibt man 3 Kilogramm Butter; wie viel Kilogramm wiegt dann der Topf sammt der Butter? — In einem Wagen sitzen 2 Herren und 2 Frauen; wie viele Personen zusammen?

Auf der Violine sind 4 Saiten; wie viele sind es noch, wenn eine reißt? — Wie viel Füße hat der Hund mehr als die Gans? — Minchen kauft für 3 Kreuzer Birnen und zahlt 1 Vierkreuzerstück; wie viel muß sie zurückbekommen? — Karl bekam von seinen Ältern 4 Kr.; vom Vater erhielt er mehr als von der Mutter; wie viel gab ihm der Vater, wie viel die Mutter?

Die Tante kauft 2 Paar Handschuhe; wie viel Handschuhe sind es? — Ein Bleistift kostet 1 Vierer; wie viel Vierer kosten 4 Bleistifte? — Eine Semmel kostet 2 Kr.; wie viel kosten 2 Semmeln? — Eine Kuh gibt täglich 4 Liter Milch; wie viel Zehner ist die Milch wert, wenn das Liter 1 Zehner kostet? — August ist 1 Jahr alt, Emma 4 Jahre; wie vielmal so alt als August ist Emma?

Zu einem Hemdchen braucht die Mutter 2 Meter Leinwand; wie viel Hemdchen kann sie aus 4 Meter Leinwand machen? — Ein Griffel kostet 1 Kreuzer; wie viel Griffel bekommt man für 4 Kreuzer?

Peter bekam von der Großmutter 4 Äpfel, Paul nur halb so viel; wie viel Äpfel bekam Paul? — 4 Bogen Papier kosten 4 Kr.; wie viel kostet 1 Bogen? — Für 4 Vierer erhält man 2 Meter Band; wie viel für 2 Vierer? — Ludwig holt beim Kaufmanne für 4 Kr. 2 Dekagramm gebrannten Kaffee; wie viel kostet 1 Dekagramm?

D. Wiederholung.

Die mündliche Wiederholung findet in ähnlicher Weise wie bei der Zahl 3 statt. Noch besser kann der dabei zu beobachtende Vorgang aus der weiter unten bei der Zahl 10 beigefügten Wiederholung ersehen werden.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im I. Rechenbuche S. 5.

Bei den Aufgaben der vierten Reihe in der ersten Gruppe werden die Schüler mit dem Zeichen 0 (Null) bekannt gemacht. Wenn nichts übrig bleibt, schreibt man 0.

Die zweite Gruppe dieser Aufgaben enthält in der vierten Reihe wiederholtes Zuzählen, wiederholtes Wegzählen, und Zuzählen in Verbindung mit dem Wegzählen. Die Schüler zählen, wie beim mündlichen Rechnen, zu der ersten Zahl zuerst die zweite, und zu dem, was herauskommt, die dritte. Ähnlich verfahren sie beim wiederholten Wegzählen und bei dem verbundenen Zu- und Wegzählen. Einige dieser Aufgaben sind früher auf der Schultafel durchzuführen. Die Form für die schriftliche Ausrechnung sei anfänglich vollständig; z. B.

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 1 = \\ \hline 1 + 2 = 3 \\ 3 + 1 = 4 \\ \hline 1 + 2 + 1 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 - 3 + 2 = \\ \hline 4 - 3 = 1 \\ 1 + 2 = 3 \\ \hline 4 - 3 + 2 = 3 \end{array}$$

Das sind kurze und einfache Schlüsse, welche das Denk- und das Sprechvermögen in gleichem Maße üben. Darum halte man mit Strenge darauf. In keinem Falle soll jedoch die folgende, durchaus falsche und sinnlose Darstellung geduldet werden:

$$1 + 2 = 3 + 1 = 4; \qquad 4 - 3 = 1 + 2 = 3.$$

Bei vorgeschrittener Übung können sich die Schüler auch bloß der kürzeren Darstellungsweise bedienen; sie sprechen z. B. 4 weniger 3 ist 1, und 2 ist 3, und schreiben sogleich

$$4 - 3 + 2 = 3.$$

§. 15. Die Zahl 5.

Da das bisher befolgte unterrichtliche Verfahren sich auch bei der Behandlung der folgenden Zahlen im wesentlichen gleich bleibt, so werden wir weiterhin bei den einzelnen Zahlen bloß die angewandten Aufgaben anführen, und nur die Zahl 10 wieder ausführlicher behandeln.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Vierer und 1 Kr.? — Wie viel halbe Kreuzer sind 2 Kr. und $\frac{1}{2}$ Kr.? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner und 1 Fünfer? — Um wie viel sind 5 Fünfer mehr als 1 Zwanziger? — Wie viel Zehner sind 1 Zwanziger und 3 Zehner?

Ein Landmann hat 3 Ochsen, er kauft noch 1 Paar Ochsen; wie viel Ochsen hat er dann? — Anna hat 2 Kilogramm

Flachs gesponnen, Agnes 3 Kilogramm mehr; wie viel Kilogramm hat Agnes gesponnen?

Walter hat 5 Kr., er kauft ein Bild für 2 Kr.; wie viel Geld bleibt ihm noch? — Fritz hat 1 Fünfer, Leopold 3 Kr.; um wie viel hat Leopold weniger als Fritz? — In dieser Schulbank waren gestern 5 Knaben, heute sind nur 3 da; wie viele fehlen? — In beiden Händen habe ich 5 Bohnen, und zwar in der rechten 1 weniger als in der linken; wie viel habe ich in jeder Hand?

Wenn ich jedem von 5 Schülern einen Griffel geben will, wie viel Griffel brauche ich dazu? — Wie viel Fünfer kosten 5 Schreibhefte, wenn 1 Schreibheft 1 Fünfer kostet?

Für 1 Kr. erhält man 1 Bogen Papier; wie viel für 5 Kreuzer? Die Mutter braucht jede Woche 1 Kilogramm Zucker; wie viele Wochen wird sie mit 5 Kilogramm ausreichen?

5 Kilogramm Salz kosten 5 Zwanziger; wie viel Zwanziger kostet 1 Kilogramm? — 5 Stricknadeln kosten 1 Fünfer; wie viel kostet 1 Stricknadel? — Ein Vater vertheilt unter seine 4 Kinder 5 Birnen; das älteste bekommt 2 Birnen; wie viel bekommt jedes der übrigen Kinder?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 5

Die zwei letzten Aufgaben enthalten die Verbindung des Vervielfachens und Theilens mit dem Zu- und Wegzählen; sie werden ebenso behandelt, wie die Aufgaben über das verbundene Zu- und Wegzählen.

---

§. 16. Die Zahl 6.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 1 Kr.? — 1 Vierer und 2 Kr.? — 6 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind

3 Zehner? — Wie viel Zehner sind 3 Zwanziger? — Wie viel Zehner sind der dritte Theil von 6 Zwanzigern?

Ein Landmann hat 5 Kühe, er kauft noch eine; wie viel hat er dann? — Dein Onkel hat zwei Reisen gemacht; die eine dauerte 4 Tage, die andere 2 Tage; wie viel Tage dauerte die erste länger als die zweite? wie viel Tage dauerten beide zusammen? — Felix hat 6 Kr.; er kauft eine Schiefertafel für 5 Kr.; wie viel Geld bleibt ihm noch? — Von 6 Fensterscheiben hat der Hagel 2 zerschlagen; wie viele sind ganz geblieben?

Vor einen schwer beladenen Wagen sind 3 Paar Pferde gespannt; wie viel Pferde sind es? — Eine Häkelnadel kostet 3 Kr.; wie viel kosten 2 Häkelnadeln? — Adolf will 2 Schreibhefte machen, er braucht zu jedem 3 Bogen Papier; wie viel Bogen muß er haben? — 1 Briefbogen kostet 1 Kr.; wie viel kosten 6 Briefbogen?

In dieser Bank sitzen 6 Schüler; wie viel Paare sind es? — Rosa ist 3 Jahre alt, Mina 6 Jahre; wie vielmal so alt als Rosa ist Mina? — 1 Meter Band kostet 3 Kr.; wie viel Meter erhält man für 6 Kr.?

1 Kilogramm Rindfleisch kostet 6 Zehner; wie viel kostet ein halbes Kilogramm? — Moriz hat 6 Griffel, Fritz nur den dritten Theil davon; wie viel Griffel hat Fritz? wie viel hat er weniger als Moriz? — Ein Landmann hat 6 Kühe und halb so viele Pferde; wie viel Pferde hat er? — Karl hat 6 Bilder, davon gibt er die Hälfte der Schwester und den sechsten Theil dem Bruder; wie viel Bilder gibt Karl der Schwester? wie viele dem Bruder? wie viele behält er für sich?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 6.

Von den in der zweiten Gruppe enthaltenen Aufgaben wird $2 \times . = 4$ gelesen: 2mal wie viel ist 4? und $. \times 3 = 6$, wie vielmal 3 ist 6?

§. 17. Die Zahl 7.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 2 Kr.? — 1 Vierer und 3 Kr.? — 7 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 2 Zehner und 3 Fünfer? — Um wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger und 3 Fünfer mehr als 3 Zehner? — Um wie viel sind 2 Tage weniger als 1 Woche? — Von 1 Woche sind 4 Tage vergangen; wie viele kommen noch?

Die Mutter kauft einmal 3 Kilogramm Butter, ein anderesmal 4 Kilogr.; wie viel zusammen? — Ein Vater hat 5 Söhne und 2 Töchter; wie viel Kinder hat er? — Marie holte Eier aus dem Hühnerstalle; in einem Neste fand sie 2, in einem andern 1 und in einem dritten 4; wie viel im ganzen? — Von 7 Bäumchen sind 2 erfroren; wie viele sind übrig geblieben? — Eine Bäuerin trug 7 Hühner zu Markte und verkaufte 6; wie viel Hühner blieben ihr noch? — Hans suchte Erdbeeren und hatte bereits 5 gefunden; wie viele fehlten ihm noch, wenn er gerne 4 für die Mutter und 3 für sich haben wollte? — Mit welchen Geldstücken kann man 7 Kr. bezahlen?

Rosa hat 7 Kr., sie kauft 3 Bilder, wovon jedes 2 Kr. kostet; wie viel Geld bleibt ihr noch übrig? — Die Mutter braucht täglich 1 Liter Milch; wie viel in einer Woche? — Mina kaufte 2 Strängchen Zwirn, wovon jedes 3 Kr. kostet, und für 1 Kr. Nähnadeln; wie viel mußte sie zahlen?

Für 1 Kr. bekommt man 1 Knopf; wie viel Knöpfe bekommt man für 7 Kr.? — Wenn 7 Kinder untereinander 7 Nüsse vertheilen, wie viel Nüsse erhält jedes Kind? — 7 Birnen werden unter 6 Kinder vertheilt; wenn das älteste Kind 2 Birnen bekommt, wie viel bekommt jedes der übrigen? — Wenn du von 7 Kr. die Hälfte ausgibst, wie viel hast du noch?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 7 und 8.

---

§. 18. Die Zahl 8.

Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 8 Kr. bezahlen? — Wie viel Kreuzer sind 8 halbe Kreuzer? — Wie viel Zehner sind 8 Fünfer? — Wie viel Zehner sind 4 Zwanziger? — Wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger und 2 Zehner? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 1 Tag? — Wie viel Paar sind 8 Tauben?

Franz hat eine Schwester, welche 5 Jahre alt ist; er selbst ist um 3 Jahre älter; wie alt ist Franz? — In einem Garten sind 6 Birnbäume und 2 Apfelbäume; wie viel Obstbäume sind es zusammen? — Emil wirft mit zwei Würfeln 4mal hinter einander 8 Augen, aber jedesmal andere Zahlen; welche Zahlen bei jedem einzelnen Wurfe? — Jemand hat 8 Zehner zu bezahlen, er hat nur 7 Zehner; wie viel fehlt ihm noch? — Wie viel Ecken hat ein Würfel mehr als Seiten (Flächen)? — August hatte 8 Äpfel, er aß 3 davon; wie viele behielt er noch? — Elise hat 8 Bilder, sie verschenkt 4 Bilder; wie viel bleiben ihr noch? — Eine Zweikreuzersemmel wiegt 8 Dekagramm, eine Einkreuzersemmel 3 Dekagr.; um wie viel ist die erste Semmel schwerer als die zweite? um wie viel ist die zweite leichter als die erste? — Anna hat 5 Meter Band, dazu kauft sie noch 3 Meter und verbraucht dann 4; wie viel Meter Band hat sie noch?

Wie viel Räder haben 2 Wägen? — 4 Paar Schuhe sind wie viel einzelne Schuhe? — 1 Apfel kostet 1 Kr.; wie viel kosten 8 Äpfel? — Für 1 Kr. bekommt man 2 Griffel; wie viel für 4 Kr.? — 1 Meter Tuch kostet 2 fl.; wie viel kosten 2, 3, 4 Meter? — Peter kauft 2 Bilder, wovon jedes 3 Kr. kostet, und es bleiben ihm noch 2 Kr.; wie viel Kreuzer hatte Peter?

Wie viel Paar sind 8 Tauben? — Jemand hat 8 Pferde; wie viel Wägen kann er damit bespannen, wenn er an jeden 2 Pferde spannt? — 1 Semmel kostet 2 Kr.; wie viel Semmeln bekommt man für 8 Kr.? — Wie oft kann man 2 Meter Band von 8 Meter abschneiden?

Moriz kauft 8 Bogen Papier für 8 Kr.; wie viel kostet 1 Bogen? — Aus diesen 8 Bogen will Moriz 4 Schreibhefte machen; wie viel Bogen wird er zu jedem Hefte nehmen? — Reinhold hat in 4 Tagen 8 Buchstaben gelernt; wie viel Buchstaben lernte er täglich? — Wilhelm hat 8 Nüsse, er will daraus 2 gleiche Häufchen machen; wie viel Nüsse wird er auf 1 Häufchen legen?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 8 und 9.

---

§. 19. Die Zahl 9.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Fünfer und 1 Vierer? 2 Vierer und 1 Kr.? 9 halbe Kreuzer? — Wie viel Fünfer sind 4 Zehner und 1 Fünfer? — Wie viel Fünfer sind 1 Zwanziger, 2 Zehner und 1 Fünfer? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 2 Tage?

In der ersten Bank sitzen 5 Schüler, in der zweiten 4; wie viel in beiden Bänken? — Ein Landmann hat 2 Kühe im Stalle und 7 auf der Weide; wie viel Kühe hat er zusammen? — Der Stundenzeiger steht auf 4; wo wird er nach 5 Stunden stehen? — Marie fängt um 6 Uhr nachmittags zu stricken an und strickt 3 Stunden lang; um wie viel Uhr hört sie auf?

Wie viel Stunden sind von 1 Uhr bis 9 Uhr? — An einem Aste hängen 9 Äpfel, davon schüttelte der Wind 3 herab; wie viele blieben oben? — Ein Herr traf, als er auf der Kegelbahn die Kugel hinausschob, nur 2 Kegel; wie viele blieben stehen? — Von neun aufgerichteten Kegeln werden 5 (3, 7, 1, 6) umgeworfen; wie viele bleiben stehen? — Von 9 Kegeln ist 1 einziger (sind 3, 7, 2, 5) stehen geblieben; wie viele wurden umgeworfen? — Die Mutter kauft Butter; der Topf sammt der Butter wiegt 9 Kilogramm; der Topf allein wiegt 2 Kilogramm; wie viel wiegt die Butter?

1 Meter kostet 3 Zehner; wie viel kosten 3 Meter? — In einer Hauswirtschaft hat man 9 Hennen, jede legt täglich 1 Ei; wie viel Eier legen täglich alle Hennen? — Eine Bäuerin hat 3 Kühe, jede gibt täglich 3 Liter Milch; wie viel Milch geben alle zusammen? Von den 9 Liter Milch behält die Frau 5 für sich, die übrige Milch verkauft sie, das Liter zu 2 Fünfer; wie viel Fünfer nimmt sie dafür ein?

1 Schreibheft kostet 3 Kr.; wie viel Schreibhefte bekommt man für 9 Kr.? — Wie viel Bogen Papier bekommst du für 9 Kr., wenn 1 Bogen 1 Kr. kostet?

3 Kinder theilen untereinander 9 Birnen so, dass jedes gleich viel bekommt; wie viel erhält jedes Kind? — Berta hat 9 Kr., sie gibt davon den 9ten Theil der Schwester; wie viel bekommt diese? wie viel behält noch Berta? — 3 Liter Wein kosten 9 Zehner; wie viel kostet 1 Liter?

Schriftliche Aufgaben im Buche S. 9 und 10.

§. 20. Die Zahl 10.

•••••
• •
••••• **10**

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

•|•|•|•|•|•|•|•|•|•	$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1=$ $10 \times 1 =$	1 in 10 =	$\frac{1}{10}$ v. 10=
•|•|•|•|• •|•|•|•|•	$2+2+2+2+2=$ $5 \times 2=$	2 in 10 =	$\frac{1}{5}$ v. 10=
⁝|⁝|⁝|•	$3+3+3+1=$ $3 \times 3 + 1 =$	3 in 10 =	
••|••|• ••|••|•	$4+4+2=$ $2 \times 4 + 2 =$	4 in 10 =	
⁙|⁙	$5+5=$ $2 \times 5=$	$10-5=$ 5 in 10 =	$10=5+.$ $\frac{1}{2}$ v. 10 =
•••|•• •••|••	$6+4=$ $4+6=$ $1 \times 6 + 4 =$	$10-4=$ $10-6=$ 6 in 10 =	$10=6+.$ $10=4+.$
•••|• •|• •••|•	$7+3=$ $3+7=$ $1 \times 7 + 3 =$	$10-3=$ $10-7=$ 7 in 10 =	$10=7+.$ $10=3+.$
•••|• •• •••|•	$8+2=$ $2+8=$ $1 \times 8 + 2 =$	$10-2=$ $10-8=$ 8 in 10 =	$10=8+.$ $10=2+.$
••• •••|• •••	$9+1=$ $1+9=$ $1 \times 9 + 1 =$	$10-1=$ $10-9=$ 9 in 10 =	$10=9+.$ $10=1+.$

Von besonderer Wichtigkeit und darum bis zur größten Sicherheit zu üben sind die Zerlegungen:

$$10 = 9 + 1 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4 = 5 + 5.$$

B. Schriftliche Übungen.

Die Zahl zehn bezeichnet man mit zwei Ziffern 10. Der Grund dieser Bezeichnungsweise kann den Schülern erst später, wenn in dem bis zwanzig erweiterten Zahlenraume der Gegensatz zwischen Einern und Zehnern zur Geltung gelangen wird, angegeben werden.

Die Schüler bilden das Zahlbild nebst dem Zifferausdruck, dann die obigen Zerlegbilder nach und führen die sich daraus ergebenden Operazionen schriftlich aus.

C. Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind zwei Fünfer? 2 Vierer und 2 Kr.? 10 halbe Kr.? Um wie viel ist 1 Zehner mehr als 1 Fünfer und 3 Kr.? Wie viel Kr. ist die Hälfte, der 5te Theil von 1 Zehner?

Um wie viel ist 1 Meter länger als 7 Decimeter? Wie viel Decimeter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Meter? Wie viel Centimeter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Decimeter?

Um wie viel sind 6 Deciliter weniger als 1 Liter? Wie viel Deciliter ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Liter?

Wie viel Gramm ist $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ Dekagramm?

Wie viel Stücke sind 5 Paar? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 3 Tage?

Wie viel Uhr ist es 1 Stunde nach 9 Uhr? — Wie viel Zimmer sind in einem Hause, das unten 4, und oben 6 Zimmer hat? — Ein Gärtner pflanzte gestern 7, heute 3 Bäumchen; wie viel zusammen? — Karl legt Bauklötzchen auf den Tisch; in die erste Reihe 1, in die zweite 2, in die dritte 3, in die vierte 4; wie viel sind es zusammen? Ein Kind ist 7 Jahre alt; wie alt wird es nach 3 Jahren sein? wie alt war es vor 3 Jahren? — Für ein Schreibheft zahlt Karl 1 Zehner und bekommt 4 Kr. zurück; wie viel kostet das Schreibheft? — Von 10 Kilogramm Zucker sind 8 Kilogramm verbraucht worden; wie viel blieb noch übrig? — Du hast 1 Fünfer; wie viel fehlt dir noch zu 1 Zehner? — Von 10 Gläsern wurde eines zerbrochen; wie viele blieben ganz?

1 Meter Band kostet 5 Kr.; wie viel kosten 2 Meter? — Eine Stricknadel kostet 2 Kr.; wie viel kosten 5 Stricknadeln? — 1 Bild kostet 1 Kr.; wie viel kosten 10 Bilder? — Ein Vogel hat 2 Flügel; wie viel Flügel haben 2, 3, 4, 5 Vögel?

Für 1 Kr. bekommt man 2 Nüsse; wie viel für 5 Kr.? — 1 Meter Tuch kostet 5 fl.; wie viel Meter kann man für 10 fl. kaufen? — Wie viel Semmeln bekommt man für 10 Kr., wenn 1 Semmel 2 Kr. kostet? — Ein Fässchen enthält 10 Liter Bier; wie oft läſst sich ein Krug daraus füllen, der 2 Liter hält?

Eine Familie braucht in 5 Wochen 10 Kilogramm Zucker; wie viel braucht sie in 1 Woche? — 2 Pomeranzen kosten 10 Kr.; wie viel kostet 1 Pomeranze? — 1 Kilogramm Öl kostet 10 Zehner; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Kilogramm? — 10 Knöpfe kosten 10 Kr.; wie viel kostet 1 Knopf? — Heinrich hat 10 Kirschen, davon iſst er die Hälfte auf; wie viel bleiben ihm noch? — Zwei eiserne Kugeln sind gleich schwer und wiegen zusammen 10 Kilogramm; wie viel Kilogramm wiegt jede? — Wie viel kosten $2\frac{1}{2}$ Meter Tuch, das Meter zu 4 fl.?

D. Wiederholungen.

Damit das bisher Geübte zur möglichst großen Fertigkeit gebracht werde, sind darüber recht vielseitige Wiederholungen, an reinen und angewandten Zahlen, mündlich und schriftlich vorzunehmen.

Der Lehrer stelle die bisher behandelten 10 Zahlen an der Schultafel dar, indem er einen Punkt, darunter zwei Punkte, und in jeder folgenden Reihe einen Punkt mehr macht.

Wie viel Punkte sind in der ersten, zweiten, . . . zehnten Reihe? — Zählet nach der Ordnung: ein Punkt, zwei Punkte, . . . zehn Punkte; dann eins, zwei, . . . zehn. Nun zählet rückwärts: zehn, neun, . . . zwei, eins. — Welche Zahl folgt auf 1? auf 6, 4, 8, 3, 7, 2, 9, 5? — Welche Zahl steht vor 2? vor 5, 7, 3, 6, 9, 4, 8, 10? — Zwischen welchen Zahlen liegt 2, 6, 3, 8, 5, 9, 4, 7?

10, 7, 5, 9, 2, 8, 3, 6, 4 ist um 1 mehr als welche Zahl?
5, 3, 7, 10, 4, 8, 6, 9 „ 2 „ „ „ „
6, 8, 4, 9, 10, 5, 7 „ 3 „ „ „ „
5, 10, 8, 9, 7, 6 „ 4 „ „ „ „
8, 6, 9, 7, 10 „ 5 „ „ „ „
9, 8, 10, 7 „ 6 „ „ „ „
8, 9, 10 „ 7 „ „ „ „
10, 9 „ 8 „ „ „ „
10 „ 9 „ „ „ „

1, 3, 6, 9, 5, 7, 4, 2, 8 ist um 1 weniger als welche Zahl?
8, 4, 5, 1, 3, 7, 2, 6 „ 2 „ „ „ „
3, 7, 4, 2, 6, 5, 1 „ 3 „ „ „ „
5, 2, 1, 4, 3, 6 „ 4 „ „ „ „
4, 5, 2, 1, 3 „ 5 „ „ „ „
1, 3, 2, 4 „ 6 „ „ „ „
3, 1, 2 „ 7 „ „ „ „
2, 1 „ 8 „ „ „ „
1 „ 9 „ „ „ „

Dieselben Übungen an der Rechenmaschine.

Wie viel ist 3 und 1? — Wie viel ist 2 und 3? 4 und 4? 7 und 2? 1 und 8? 4 und 6? 5 und 3? u. s. w.

In welche zwei Theile kann man zerlegen: 3, 5, 7, 9? — In welche gleiche Theile kann man zerlegen: 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10?

Wie viel ist 2 und 3, und 1, und 2, und 2? — Wie viel ist 1 und 2, und 2, und 1, und 3? — Wie viel ist 2 und 2, und 2, und 4?

Karl kommt um 8 Uhr in die Schule, und bleibt da 2 Stunden; um wie viel Uhr geht er aus der Schule? — Man hat Gewichte von 1, 2, 5, Kilogramm; mit welchen Gewichten wird man 3, 6, 7, 8 Kilogramm abwägen?

Wie viel ist 5 weniger 2? — Wie viel ist 6 weniger 3? 4 weniger 2? 9 weniger 4? 10 weniger 7? 8 weniger 5? u. s. w.

Um wie viel ist 10 mehr als 3, 6, 8, 1, 7, 9? — Um wie viel ist 3 weniger als 5, 9, 4, 10, 8, 6?

Wie viel ist 10 weniger 2, weniger 5? — Wie viel ist 8 weniger 1, weniger 3, weniger 2? — Wie viel ist 7 weniger 3, und 5, weniger 6? — Wie viel ist 3 und 6, weniger 7, und 8, weniger 4?

Karl ist 9 Jahre alt, er ist 3 Jahre älter als Franz; wie alt ist Franz? — Wie viel Stunden sind von 2 Uhr bis 5, 8, 7, 10 Uhr? — Marie hat 1 Zehner, Emma 1 Fünfer; wie viel Kreuzer hat Emma weniger als Marie? — Von 9 Kegeln werden 2, 5, 3, 6 umgeworfen; wie viele bleiben stehen? — Eduard kauft für 3 Kr. Papier, er zahlt 1 Zehner; wie viel Kreuzer erhält er zurück? — Die Mutter kauft für sich ein Trinkglas, das 7 Kr. kostet, und für die kleine Anna eines, das 4 Kr. weniger kostet; wie viel muß sie für beide Trinkgläser bezahlen? — Unter 3 Kinder werden 9 Birnen vertheilt; das erste bekommt 2 Birnen, das zweite 1 mehr; wie viel das dritte?

Wie viel ist 3mal 4? 3 mal 3? 5mal 2? 7mal 1? 3mal 2? 1mal 9? 2mal 2? 2mal 5?

Wie viel ist 2mal 2, und 2? — Wie viel ist 2mal 5, weniger 4? — Wie viel ist 3mal 3, weniger 7, und 8? — Wie viel ist 4mal 2, und 1, weniger 6, und 5, weniger 3?

1 Ei kostet 2 Kr.; wie viel kosten 2, 3, 4, 5 Eier? — 1 Meter Tuch kostet 3 Gulden; wie viel kosten 2, 3 Meter? — 1 Liter Milch kostet einen Zehner; wie viel kosten 10 Liter? — 2 Gramm Seide kosten 1 Fünfer; wie viel kosten 2 Dekagramm? — In einem Zimmer sind 4 Fenster, jedes hat

2 Flügel; wie viel Flügel haben alle Fenster? — Fritz ist 4mal so alt, als seine Schwester; wie alt ist Fritz, wenn die Schwester 2 Jahre alt ist? — Johann kauft 3 Bogen weißes und 2 Bogen farbiges Papier; 1 Bogen weißes Papier kostet 1 Kr., 1 Bogen farbiges Papier kostet doppelt so viel; wie viel muß Johann für das Papier bezahlen?

Wie oft ist 5 in 10 enthalten? — Wie oft ist enthalten 2 in 4, 8, 6, 2, 10? 3 in 6, 9? 1 in 3, 5, 9, 7?

1 Paar Strümpfe kosten 4 Zehner; wie viel Paar bekommt man für 8 Zehner? — 2 Äpfel kosten 1 Kr.; wie viel Äpfel bekommt man für 2, 3, 4, 5 Kr.? — Wie viel Nadeln bekommst du für 3 Kr., wenn 3 Nadeln 1 Kr. kosten? — Adolf hat 10 Fünfer, er will sie gegen Zehner umwechseln; wie viel Zehner wird er dafür erhalten? — Aus 2 Bogen Papier macht man 1 Schreibheft; wie viele Schreibhefte macht man aus 4, 6, 10, 8 Bogen?

Wie viel ist der 5te Theil von 10? — Wie viel ist die Hälfte von 4, 8, 6, 2, 10? — Wie viel ist der 3te Theil von 6, 3, 9? — Wie viel ist der 4te Theil von 8, 4?

Wie viel ist die Hälfte von 10, und 4? — Wie viel ist das Drittel von 9, weniger 2? — Wie viel ist der 5te Theil von 10, und 7, weniger 4, doppelt genommen? — Wie viel ist 3mal 3, weniger 5, und 4, davon der vierte Theil?

3 Meter Tuch kosten 9 fl.; wie viel kostet 1 Meter? — 5 Dekagramm kosten 10 Kr.; wie viel kostet 1 Dekagramm? — 2 Liter Wein kosten 8 Zehner; wie hoch kommt 1 Liter? — 1 Kilogramm Öl kostet 8 Zehner; wie viel kostet $\frac{1}{4}$ Kilogramm? — Unter 5 Arme sollen 10 Kr. zu gleichen Theilen vertheilt werden; wie viel erhält einer? — Rudolf hat die Hälfte der Blätter in seinem Schreibhefte beschrieben; wie viel Blätter sind noch leer, wenn das Schreibheft aus 8 Blättern

besteht? — Berta hatte 9 Blumen; davon gab sie den 3ten Theil der Schwester, und 2 dem Bruder; wie viel behielt sie für sich? — Von 10 Äpfeln wurden aufgegessen der 5te Theil, von dem Reste noch die Hälfte und 1 Apfel; wie viel Äpfel blieben noch übrig?

Zweiter Abschnitt.

Zahlenraum von zehn bis zwanzig.

§. 21. Allgemeine Bemerkungen.

Dass nach dem Zahlenraume von 1 bis 10 nicht sogleich der zweite natürliche Zahlenkreis von 1 bis 100 vorgeführt, sondern den Zahlen von 11 bis 20 ein besonderer Abschnitt gewidmet werde, erscheint durch gewichtige pädagogische Rücksichten, welche bereits in der Einleitung näher hervorgehoben wurden, geboten.

Der Lehrgang und die Anordnung der Übungen sind hier im allgemeinen dieselben, wie im ersten Zahlenkreise. Auch hier schicken wir die Bildung der Zahlen voraus, verbinden aber damit sogleich auch die Bezeichnung derselben mit Ziffern, da die Schüler mit diesen schon vertraut sind. Dann folgt die allseitige Behandlung der einzelnen auf einander folgenden Zahlen von 11 bis 20. Die Rechnungsoperazionen, welche auch in diesem Zahlenraume neben einander fortschreiten, werden durch Zerlegungen gewonnen; nur werden diese hier noch mehr eingeschränkt werden müßen, als es bei den Grundzahlen geschah. Zur richtigen Erfassung der Zahlen wird es hinreichen, wenn man die aus ihrer Vergleichung mit den Zahlen von 1 bis 10 sich ergebenden Beziehungen allseitig betrachten läſst. Man wird daher jede Zahl in Bestandtheile, deren jeder 1 ist, dann in solche, deren jeder 2, 3, 4 . . . , 10 ist, zerlegen, und an diese Zerlegungen die Operazionen des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens anknüpfen. Aus wie vielmal 1 eine Zahl besteht, ist von selbst einleuchtend, und es bedarf hiezu keiner besonderen Zerlegung.

Auch die Veranschaulichungsmittel bleiben hier dieselben, wie bei den ersten zehn Zahlen. In Bezug auf den Gebrauch der russischen Rechenmaschine sei bemerkt, daſs man zur Versinnlichung der Zahlen von 11 bis 20 auf den ersten Stab sogleich 10 Kugeln, auf den zweiten aber erst nach und nach 1, 2, 3, . . . Kugeln bringen müße, während die übrigen Stäbe leer gelassen werden.

Bei allen Übungen hat der Lehrer unabläſsig dahin zu wirken, daſs die Schüler befähiget werden, die einzelnen Rechnungsoperazionen durch entsprechende Zerlegung der Zahlen sogleich selbst abzuleiten, und daſs sie die durch Anschauung gewonnenen Resultate möglichst auch dem Gedächtnisse einprägen. Gelingt dieses nicht bei allen Kindern, so hat der Lehrer bezüglich jener Rechnungsfälle, welche auf den folgenden Stufen noch einmal wiederkehren, noch immer Gelegenheit, allfällige Lücken auszufüllen.

Unbedingt muß aber gefordert werden, daſs im ersten Schuljahre alle Schüler bei der allseitigen Behandlung der Zahl 11 im Zu- und Wegzählen von 1, das sich dort abschließt, bei der Zahl 12 im Zu- und Wegzählen von 2, . . . bei der Behandlung der Zahl 20 im Zu- und Wegzählen von 10 die vollste Sicherheit und Geläufigkeit erlangen.

I. Bildung und Auffassung der Zahlen von eilf bis zwanzig.

§. 22. Anschauliche Bildung der einzelnen Zahlen.

Hier müßen den Schülern zunächst die Begriffe Zehner und Einer beigebracht werden.

Wie heißt das Geldstück, das 10 Kreuzer gilt? 10 Kreuzer sind 1 Zehner. — Wie viel Finger hast du an einer Hand? Wie viel Finger hast du an beiden Händen? 10 Finger sind 1 Zehner von Fingern. — 10 Würfel sind 1 Zehner von Würfeln. — Ich mache an der Schultafel 5 Punkte nebeneinander, und darunter wieder 5 Punkte. Wie viel Punkte sind es zusammen? 10 Punkte sind 1 Zehner von Punkten. — Jedes einzelne Ding heißt ein Einer; zehn Einer sind ein Zehner. Wie viel Einer hat 1 Zehner?

a) Die Zahl **eilf.**

Mündlich. Hier sehet ihr 10 Punkte oder 1 Zehner von Punkten; mache ich noch 1 Punkt dazu, so habe ich mehr als 10 Punkte, ich habe eilf Punkte; 10 Punkte und 1 Punkt sind eilf Punkte. — Hier sind 10 Kugeln (auf den obersten Stab der Rechenmaschine deutend), auf dem zweiten Stabe ist 1 Kugel; zusammen sind es eilf Kugeln. Wie viel sind 10 Kugeln und noch 1 Kugel? — Wie viel ist 10 und 1?

10 und 1 ist eilf.

1 Zehner und 1 Einer sind eilf Einer.

Schriftlich. Zehn ist zehnmal eins. 1 Zehner ist zehnmal so viel als 1 Einer. Wir schreiben darum auch für 1 Zehner die Ziffer 1; zum Zeichen jedoch, dass diese Ziffer 1 zehnmal so viel bedeutet als 1 Einer, rücken wir sie um eine Stelle weiter nach links, so daß sie an die zweite Stelle zu stehen kommt; um dann die leere Stelle rechts auszufüllen, setzen wir an dieselbe eine 0; also

zehn = 1 Zehner = 10.

Eilf besteht aus 1 Zehner und 1 Einer; 1 Zehner wird an die zweite Stelle (links), 1 Einer an die erste Stelle (rechts) geschrieben; also

eilf = 1 Zehner und 1 Einer = 11.

Die Schüler zeichnen nun auf ihren Täfelchen das obige Zahlbild von der Schultafel oder aus dem Rechenbuche nach und schreiben dazu: 10 + 1 = 11.

b) Die Zahl **zwölf.**

Mündlich. Zehn Punkte und noch zwei Punkte sind zwölf Punkte. — Auf dem ersten Stabe der Rechenmaschine sind zehn Kugeln, auf dem zweiten Stabe zwei Kugeln; wie viel Kugeln sind es zusammen? — Hier ist ein Bündel von zehn Stäbchen, ein Zehner Stäbchen; ich lege noch zwei einzelne Stäbchen dazu; wie viel Stäbchen sind dann?

10 und 2 ist zwölf.

1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer.

Schriftlich. Zwölf besteht aus 1 Zehner und 2 Einern; 1 Zehner wird links (an die 2. Stelle), 2 Einer werden rechts (an die 1. Stelle) geschrieben; also

zwölf = 1 Zehner und 2 Einer = 12.

Das obige Zahlbild wird nachgezeichnet und 10 + 2 = 12 dazugeschrieben.

Ebenso wird die Bildung der folgenden Zahlen und ihre Bezeichnung mit Ziffern anschaulich dargestellt.

c) Die Zahl **zwanzig.**

Mündlich. Hier stehen 10 Punkte und 9 Punkte; ich mache noch einen Punkt, dann habe ich 10 Punkte und 10 Punkte oder zwanzig Punkte, das sind 2 Zehner von Punkten. — 10 Kreuzer machen 1 Zehner. Hier ist 1 Zehner und daneben sind 9 Kr.; wie viel Kreuzer sind es zusammen? Ich lege zu den 19 Kr. noch 1 Kr.; 19 Kr. und 1 Kr. sind zwanzig Kreuzer. Welche Geldstücke sind da? 1 Zehner und 10 Kr. Für 10 Kr. kann ich 1 Zehner hinlegen, dann habe ich 2 Zehner; 2 Zehner sind also 20 Kr. — 10 Kugeln und 10 Kugeln sind 20 Kugeln. — Wie viel Finger hat 1 Kind an beiden Händen. Wie viel Finger haben 2 Kinder an beiden Händen?

10 und 10 ist zwanzig.

1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer oder 2 Zehner.

Schriftlich. Sowie man 1 Zehner durch 10 bezeichnet, so schreibt man auch für 2 Zehner 20.

Zwanzig = 2 Zehner 0 Einer = 20.

§. 22. Übersichtliche Zusammenstellung der Zahlen bis zwanzig.

Die vorliegende Darstellung lasse der Lehrer an der Schultafel vor den Augen der Schüler entstehen. Er mache zuerst 10 Punkte nebeneinander und lasse zählen: eins, zwei, ... zehn.

Zehn Einer sind ein Zehner.

Unter dieser Reihe macht er noch einen Punkt, dann sind es 11 Punkte; er läßt die Kinder sprechen: 10 und 1 ist 11;

1 Zehner und 1 Einer sind 11 Einer. Dann setzt der Lehrer in der zweiten Reihe einen zweiten, dritten, . . . zehnten Punkt dazu und läſst dabei sprechen:

10 und 2 ist 12; 1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer;
10 und 3 ist 13; 1 Zehner und 3 Einer sind 13 Einer;
u. s. f.
10 und 10 ist 20; 1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer
oder 2 Zehner.

(An der Rechenmaschine:) Am ersten Stabe sind 10 Kugeln; nehme ich vom zweiten Stabe 1 Kugel dazu, so erhalte ich 10 Kugeln und 1 Kugel, oder 11 Kugeln; setze ich am zweiten Stabe noch 1 Kugel dazu, so erhalte ich 10 Kugeln und 2 Kugeln, oder 12 Kugeln u. s. w. Endlich erhalte ich 10 Kugeln und 10 Kugeln oder 20 Kugeln.

Ebenso wird mit den zehntheiligen Münzen, Maßen und Gewichten gezählt.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 1 Kr.? 1 Zehner und 2 Kr.? 1 Zehner und 3 Kr.? . . . . 1 Zehner und 10 Kr.?

Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 1 Decimeter? 1 Meter und 2 Decimeter? . . . 1 Meter und 10 Decimeter?

Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 1 Deciliter? u. s. w.

Wie viel ist 10 und 1? 10 und 2? 10 und 10?

Durch diese übersichtliche Wiederholung wird den Schülern klar gemacht, daſs die Zahlen von 10 aufwärts ebenso gebildet werden, wie von 1 bis 10; daſs dabei der Zehner bleibt, und immer nur neue Einer dazukommen, bis diese wieder einen Zehner ausmachen.

Übungen.

Vorwärtszählen von 1 bis 20.

Rückwärtszählen von 20 bis 1.

Welche Zahl folgt auf 8? auf 13, 6, 17, 11, 19?

Welche Zahl steht vor 16? vor 7, 14, 20, 18, 9?

Zwischen welchen Zahlen liegt 15, 4, 17, 12, 5, 10, 19?

Welche Zahlen liegen zwischen 12 und 20? zwischen 7 und 13? zwischen 5 und 11? zwischen 9 und 17?

Zum Schlusse Übungen über das Lesen und Schreiben der Zahlen, wobei wiederholt betont wird, dass man die Zehner an die zweite Stelle (links), die Einer an die erste Stelle rechts schreibt. Schreibet alle Zahlen von 10 bis 20 wagrecht neben einander, dann senkrecht unter einander; ebenso die Zahlen von 20 abwärts bis 10. Schreibet 15, 12, 17, 19, 11, 16, 14, 20.

§. 24. Münzen, Maße und Gewichte.

An jede Erweiterung des Zahlenkreises schließt sich auch eine entsprechende Erweiterung der Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte an. Der Zahlenraum von 10 bis 20 bietet in dieser Beziehung nur wenig Neues.

a) Rücksichtlich der Münzen, welche die Schüler bereits kennen gelernt haben, wird nur bemerkt: 1 Zwanziger hat 20 Kreuzer, 1 Gulden hat 20 Fünfer.

b) Unter den Zählmaßen tritt das Dutzend auf; 12 Stück nennt man 1 Dutzend. Das ganze Dutzend wird in 2 halbe Dutzend getheilt.

c) Die Zeitmaße werden dahin vervollständiget, dass man angibt, das Jahr werde in 12 Monate eingetheilt. Wie heißen diese? Wie viel Monate hat 1 halbes Jahr, wie viel 1 Vierteljahr?

II. Allseitige Behandlung der Zahlen von zehn bis zwanzig.

§. 25. Die Zahl 11.

• • • • • • • • • • **11**
•

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

11 × 1 =	1 in 11 =	$\frac{1}{11}$ v. 11 =

5 × 2 + 1 =	2 in 11 =
3 × 3 + 2 =	3 in 11 =
2 × 4 + 3 =	4 in 11 =
2 × 5 + 1 =	5 in 11 =

6 + 5 =	11 − 5 =	11 = 6 +.
5 + 6 =	11 − 6 =	11 = 5 +.
1 × 6 + 5 =	6 in 11 =	
7 + 4 =	11 − 4 =	11 = 7 +.
4 + 7 =	11 − 7 =	11 = 4 +.
1 × 7 + 4 =	7 in 11 =	
8 + 3 =	11 − 3 =	11 = 8 +.
3 + 8 =	11 − 8 =	11 = 3 +.
1 × 8 + 3 =	8 in 11 =	
9 + 2 =	11 − 2 =	11 = 9 +.
2 + 9 =	11 − 9 =	11 = 2 +.
1 × 9 + 2 =	9 in 11 =	
10 + 1 =	11 − 1 =	11 = 10 +.
1 + 10 =	11 − 10 =	11 = 1 +.
1 × 10 + 1 =	10 in 11 =	

Das didaktische Verfahren entspricht demjenigen, das bei der Zerlegung der Grundzahlen befolgt wurde; nur über die Benützung des Rechenapparates, die hier in anderer Form auftritt, müßen wir einige Andeutungen beifügen.

Ist z. B. die Zerlegung von 11 in 7 und 4 zu veranschaulichen, so läſst der Lehrer, nachdem die Zahl 11 dargestellt wird, auf dem oberſten Stabe 7 Kugeln auf der linken Seite stehen, schiebt die übrigen 3 Kugeln sowie die eine Kugel des zweiten Stabes auf die entgegengesetzte Seite, und fragt: Wie viel Kugeln sind auf der linken Seite? 7. Und wie viele auf der andern Seite? 3 und 1, oder 4. 11 läſst sich also zerlegen in 7 und 4.

Wie viel ist 7 und 4? (Auf dem ersten Stabe werden links 7 Kugeln stehen gelassen, die andern 3, sowie die eine Kugel des zweiten Stabes weggeschoben.) Indem der Lehrer die 3 Kugeln des oberen Stabes zu den 7 Kugeln schiebt, spricht er: 7 und 3 ist 10. Nun haben wir erst 3 zugezählt; 4 ist aber 3 und 1; wie viel müßen wir noch zuzählen? 10 und 1 (indem er auch die eine Kugel des unteren Stabes zu den übrigen hinüberrückt) ist 11; 8 und 3 ist also 11.

Wie viel ist 11 weniger 4? — Der Lehrer schiebt zuerst die eine Kugel des zweiten Stabes auf die rechte Seite, und spricht: 11 weniger 1 ist 10. Jetzt haben wir erst 1 weggezählt; 4 ist aber 1 und 3; wie viel haben wir noch wegzuzählen? 10 weniger 3 (indem er noch 3 Kugeln von dem Zehner des ersten Stabes wegschiebt) ist 7; 11 weniger 4 ist also 7.

Es sei hier für alle folgenden Übungen bemerkt, daſs die geltenden Kugeln immer links stehen, und daſs wir beim Wegzählen die Kugeln nach rechts, beim Zuzählen nach links schieben.

B. Schriftliche Übungen.

Zur schriftlichen Übung dienen die oben bei der Zerlegung angeführten Rechnungsfälle als Aufgaben, denen von den Schülern auch die entsprechenden Zerlegbilder beizufügen sind.

C. Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 11 Kr. bezahlen? — Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 1 Zehner? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 1 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 1 Deciliter? — Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 1 Gramm? — Dein Vater war 1 Woche und 4 Tage auf der Reise; wie viel Tage macht dieses?

Ein Wort hat 8 Buchstaben, ein anderes 3 Buchstaben; wie viel Buchstaben haben beide zusammen? — Marie ist 5 Jahre alt, ihre ältere Schwester Emma 11 Jahre; um wie viel ist Emma älter als Marie? — 1 Kilogramm Kaffee kostet 11 Zehner, 1 Kilogramm Zucker 6 Zehner; wie viel kostet 1 Kilogramm Zucker weniger als 1 Kilogramm Kaffee? — Ein Landmann hat 4 Kühe, sein Nachbar hat 3 Kühe mehr; wie viel Kühe haben beide zusammen? — Fritz arbeitet vormittags 5 Stunden, nachmittags 4 Stunden; Konrad arbeitet täglich 11 Stunden; wie viel Stunden täglich arbeitet Konrad mehr als Fritz? — Karoline ist heute um 6 Uhr aufgestanden, 2 Stunden später gieng sie in die Schule und blieb da bis 11 Uhr; wie lange ist Karoline in der Schule gewesen? — Anna ist 6 Jahre und 6 Monate alt, Emilie ist 5 Monate älter; wie alt ist Emilie? — August hat 11 Bohnen, weiß und roth; von den weißen sind 5 mehr als von den rothen; wie viel hat er weiße, wie viel rothe Bohnen?

D. Wiederholungen.

Die mündliche Wiederholung wird in ähnlicher Weise wie bei der Zahl 10 vorgenommen.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im I. Rechenbuche Seite 15 und 16.

Im Zahlenumfange von 1 bis 11 gelangt das Zu- und Wegzählen von 1 zum vollständigen Abschlusse. Es ist daher bei den mündlichen und schriftlichen Wiederholungsaufgaben ein besonderes Gewicht darauf zu legen, dass hier die bezüglichen Rechnungsfälle in der letzten Gruppe Seite 15, die darum mit fetten Lettern dargestellt wurden, bis zur größten Geläufigkeit durchgeübt und bleibend dem Gedächtnisse aller Kinder eingeprägt werden.

In der ersten Gruppe auf Seite 16 kommen dieselben Aufgaben außer der Reihenfolge, dann Aufgaben über wiederholtes und verbundenes Zu- und Wegzählen vor.

Die Aufgaben der zweiten Gruppe enthalten das Zuzählen, wobei der Übergang in einen andern Zehner eintritt; sie sind von besonderer Wichtigkeit und sollen darum bis zur vollsten Sicherheit geübt werden. Die Übungen dieser Art können sich an die Zerlegbilder anschließen und beruhen auf der unmittelbaren äußeren Anschauung. Es ist jedoch wichtig, dass die Anschauung nach und nach immer mehr eine innere werde, dass die Zahlen bloß gedacht werden. Die Schüler sind im Zerlegen der Grundzahlen vielfältig geübt worden; die dadurch erworbene Fertigkeit soll hier verwertet werden, indem die zuzuzählende Zahl stets so zerlegt wird, dass man zuerst den Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zuzählt. Z. B.

$$7 + 4 = .$$

Wie viel muß ich zu 7 zuzählen, um 10 zu erhalten, um den Zehner voll zu machen? Noch 3. Wovon nehme ich die 3? Von 4. Aber 4 ist 3 + 1. Wie viel ist dann von 4 noch da? Noch 1. Wie viel ist 10 und 1? Um also 4 zu 7 zu zählen, zählen wir zuerst 3, und dann noch 1 dazu. — Wie die Veranschaulichung an der Rechenmaschine geschieht, ist schon oben bei der Zerlegung der Zahl 11 gezeigt worden.

Was die Form der schriftlichen Ausrechnung anbelangt, so lasse man anfänglich die vollständige Lösung aufschreiben, nämlich

$$\begin{array}{r} 7 + 4 = \\ \hline 7 + 3 = 10 \\ 10 + 1 = 11 \\ \hline 7 + 4 = 11 \end{array}$$

Später, wenn schon größere Fertigkeit vorherrscht, mögen die Kinder nur sogleich das Resultat anschreiben:

$$7 + 4 = 11.$$

Die dritte Gruppe auf S. 16 enthält Übungen im Wegzählen, wobei ein Übergang von einem Zehner in den andern stattfindet. Die Schüler werden angeleitet, immer zuerst so viel wegzunehmen, dass der reine Zehner übrig bleibt, und von diesem dann die noch übrigen Einer wegzuzählen. Z. B.

$$11 - 4 = .$$

Wie viel muß man von 11 wegnehmen, um auf 10 herunter zu kommen? 4 ist aber 1 + 3. Wie viel haben wir noch wegzuzählen? 10 weniger 3 ist 7. Anstatt also 4 von 11 auf einmal wegzuzählen, zählen wir zuerst 1, und dann noch 3 weg. — Wie die Veranschaulichung an der Rechenmaschine geschieht, ist oben unter A gezeigt worden.

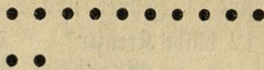
Die Form für die schriftliche Veranschaulichung ist anfänglich

$$\begin{array}{r} 11 - 4 = \\ \hline 11 - 1 = 10 \\ 10 - 3 = 7 \\ \hline 11 - 4 = 7; \end{array}$$

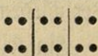
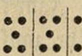
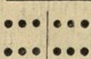
später wird bloß das Resultat angeschrieben:

$$11 - 4 = 7.$$

§. 26. Die Zahl 12.

 **12**

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

	$12 \times 1 =$	1 in $12 =$	$\frac{1}{12}$ v. $12 =$
	$6 \times 2 =$	2 in $12 =$	$\frac{1}{6}$ v. $12 =$
	$4 \times 3 =$	3 in $12 =$	$\frac{1}{4}$ v. $12 =$
	$3 \times 4 =$	4 in $12 =$	$\frac{1}{3}$ v. $12 =$
	$2 \times 5 + 2 =$	5 in $12 =$	
	$6 + 6 =$ $2 \times 6 =$	$12 - 6 =$ 6 in $12 =$	$12 = 6 +.$ $\frac{1}{2}$ v. $12 =$
	$7 + 5 =$ $5 + 7 =$ $1 \times 7 + 5 =$	$12 - 5 =$ $12 - 7 =$ 7 in $12 =$	$12 = 7 +.$ $12 = 5 +.$
	$8 + 4 =$ $4 + 8 =$ $1 \times 8 + 4 =$	$12 - 4 =$ $12 - 8 =$ 8 in $12 =$	$12 = 8 +.$ $12 = 4 +.$
	$9 + 3 =$ $3 + 9 =$ $1 \times 9 + 3 =$	$12 - 3 =$ $12 - 9 =$ 9 in $12 =$	$12 = 9 +.$ $12 = 3 +.$
	$10 + 2 =$ $2 + 10 =$ $1 \times 10 + 2 =$	$12 - 2 =$ $12 - 10 =$ 10 in $12 =$	$12 = 10 +.$ $12 = 2 +.$

Das unterrichtliche Verfahren wie bei den früheren Zahlen.

B. Schriftliche Übungen.

Die bei der Zerlegung mündlich behandelten Rechnungsfälle unter Beifügung der Zerlegbilder.

C. Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 2 Kr.? 2 Fünfer und 2 Kr.? 3 Vierer? 12 halbe Kreuzer? – Wie viel Gulden und Zehner sind 12 Zehner? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 2 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 12 Gramm? — Eine Woche hat 6 Arbeitstage; wie viel Arbeitstage haben 2 Wochen? Wie viel Monate sind $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ Jahr?

In einem Garten stehen auf einem Beete 8, auf einem andern 4 Rosenstöcke; wie viel auf beiden Beeten? — In einem Stalle stehen 7 Kühe, in dem andern 9; wie viele in beiden Ställen? — Eine Köchin erhält 12 Zwanziger und kauft Verschiedenes für 9 Zwanziger; wie viel muß sie zurückbringen? — Ein Kind ist 9 Monate alt; wie viel Monate fehlen ihm auf 1 Jahr? — Wie viel Zahlen stehen auf dem Zifferblatte einer Uhr zwischen 8 und 12? — Von 1 Dutzend werden 10 Stück verkauft; wie viel Stück bleiben noch übrig? — Für 1 Kr. erhält man 3 Birnen; wie viel für 4 Kr.? — Wie viel Füße haben 3 Pferde? — Ein Paar Tauben kosten 12 Fünfer; wie viel kostet 1 Taube? — Adolf braucht jeden Monat 2 Griffel; wie lange wird er mit 12 Griffeln ausreichen? — Zu einem Hemd braucht die Mutter 3 Meter Leinwand; wie viel Hemden kann sie aus 12 Ellen Leinwand machen? — Emil bekommt von der Mutter 12 Äpfel, er gibt davon den dritten Theil seiner Schwester; wie viel Äpfel behält er für sich? — Ein Vater zahlt für seinen Sohn monatlich 1 Gulden Schulgeld; wie viel beträgt dieses in $\frac{1}{4}$ Jahr? — Wenn eine Kuh täglich 6 Liter Milch gibt; wie viel gibt sie in 2 Tagen? — Eine Bäuerin hat 12 Hühner, sie verkauft davon den dritten und den vierten Theil; wie viel Hühner bleiben ihr noch?

D Wiederholungen.

Mündlich in ähnlicher Weise wie oben bei der Zahl 10.

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im I Rechenbuche Seite 17 und 18.

Bei der mündlichen und schriftlichen Wiederholung ist den Übungen im Zu- und Wegzählen von 2, das sich in dem Zahlenumfange von 1 bis 12 vollständig abschließt, die vorzüglichste Sorgfalt zuzuwenden.

---

§. 27. Die Zahl 13.

Da das Lehrverfahren sich gleich bleibt, so werden wir bei dieser und den folgenden Zahlen bloß die angewandten Aufgaben anführen, und methodische Winke nur dann beifügen, wenn besondere Übungen dazu Anlass bieten.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 3 Kr.? Um wie viel sind 13 Kr. mehr als 2 Vierer? Um wie viel ist 1 Fünfer weniger als 13 Kr.? Wie viel Zehner sind 1 fl. und 3 Zehner? 4 Zwanziger und 5 Zehner? — Wie viel Tage sind 1 Woche und 6 Tage? — Wie viel Meter und Decimeter sind 13 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 3 Deciliter? — Wie oft kann man 1 Dekagramm von 13 Gramm wegnehmen?

August bekam vom Vater 4 Kr., von der Mutter 3 Kr., und vom Onkel 6 Kr.; wie viel bekam er von allen? — Der Vater hat 13 Bäumchen gepflanzt, davon sind 3 verdorrt; wie viele wachsen? — Wie viel Stunden ist jemand gefahren, der um 5 Uhr morgens abgereist und um 6 Uhr abends am Ziele angekommen ist? — Anna bekam 13 Kr., um ein Buch zu kaufen; als sie aber in die Buchhandlung kam, hatte sie nur 9 Kr.; wie viel hat sie unterwegs verloren? — Von 13 Schafen verkauft ein Landmann 10; wie viel behält er noch? — In einem Garten stehen zwei Reihen Bäume; in der ersten Reihe sind 8, in der zweiten 5 Bäume; wie viel Bäume sind in der ersten

Reihe mehr als in der zweiten? wie viel Bäume stehen in beiden Reihen? — Die Mutter hat 13 Meter Leinwand, sie macht 2 Hemden, und braucht zu jedem 3 Meter Leinwand; wie viel Leinwand bleibt ihr noch übrig?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche Seite 19 und 20.

---

§. 28. Die Zahl 14.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 4 Kr.? 2 Fünfer und 1 Vierer? 3 Vierer und 2 Kr.? 14 halbe Kr.? Wie viel Zehner sind 14 Fünfer? Wie viel Gulden und Zehner sind 14 Zehner? — Wie viel Tage sind 2 Wochen? Um wie viel sind 14 Monate mehr als 1 Jahr? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 4 Decimeter? — Um wie viel ist 1 Liter weniger als 14 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 14 Gramm? — Wie viel Paar sind 14 Knöpfe? — Wie viel Stück sind 1 Dutzend und $\frac{1}{6}$ Dutzend?

Ein Zuckerhut wiegt 8 Kilogramm, ein anderer 6 Kilogramm; wie viel wiegen beide zusammen? — Wie viel Tage sind vom 2. bis 14. März? — Eine Treppe besteht aus zwei Absätzen; ein Absatz hat 9, der andere 5 Stufen; wie viel Stufen enthält die ganze Treppe? — Jemand kauft ein Kalb für 10 Gulden und verkauft es für 14 Gulden; wie viel gewinnt er? — Ein Knabe war in 2 Wochen 5 Tage krank; an wie viel Tagen war er während dieser Zeit gesund? — An einer Tafel saßen 14 Personen, 6 giengen fort; wie viele blieben zurück? — Ein Arbeiter verdient in 2 Tagen 1 Gulden; wie viel in 14 Tagen? — In diesem Schulzimmer sind 2 Reihen Bänke, in jeder Reihe stehen 7 Bänke; wie viel Bänke sind es zusammen? — Dein Vater war 1 Woche auf der Reise und brauchte täglich 2 Gulden; wie viel Geld hat er ausgegeben?

Eduard ist 7 Jahre, sein Bruder 14 Jahre alt; wie vielmal so alt als Eduard ist sein Bruder? — 2 Meter Band kosten 14 Kr.; wie viel kostet 1 Meter? — In einer Wagschale sind 9 Dekagramm, in der andern 5 Dekagramm; wie viel muß man aus der ersten in die zweite übertragen, um in beiden gleich viel Dekagramm zu haben?

Schriftliche Aufgaben im I Rechenbuche Seite 21 und 22.

---

§. 29. Die Zahl 15.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 5 Kr.? 3 Fünfer? 3 Vierer und 3 Kr.? Wie viel Zehner sind 1 fl. und 5 Zehner? 7 Zwanziger und 1 Zehner? Wie viel Gulden sind 15 Zwanziger? — Um wie viel sind 15 Tage mehr als 2 Wochen? Wie viel Monate sind 1 Jahr und 3 Monate? — Wie viel Centimeter sind 1 Decimeter und 5 Centimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und $\frac{1}{2}$ Liter? — Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 5 Gramm? — Um wie viel sind 15 Stück mehr als 1 Dutzend?

Von 15 Gulden gibt man 5 Gulden aus; wie viel Gulden behält man noch? — Von 15 Nüssen ißt Karl den dritten Theil, 6 verschenkt er; wie viel hat er noch? — Eine Uhr, welche bloß Stunden schlägt, hat in drei aufeinanderfolgenden Stunden 15 Schläge gemacht, welche Stunden waren es? — Ein Schreibheft kostet 5 Kr.; wie viel kosten 3 Schreibhefte? — Jemand hat 3 fl. ausgegeben; wie viel sind es Zwanziger? — Wenn man für 5 Kr. 15 Birnen bekommt, wie viel bekommt man für 1 Kr.? — Du hast 1 Zehner und 1 Fünfer; wie viel Meter Band kannst du dafür kaufen, wenn 1 Meter 3 Kr. kostet? — Ein reicher Herr theilte unter Arme 15 Gulden aus, jedem gab er 3 Gulden; wie viel Arme wurden von ihm beschenkt? — Ein Tischler erhält 15 Gulden für mehrere Fenster;

jedes Fenster kostet 5 Gulden; wie viel Fenster sind es? — Die Mutter macht aus 15 Meter Leinwand 5 Hemden; wie viel Meter braucht sie zu 1 Hemd? — Ein Landmann hat 15 Stück Schafe, er verkauft davon den dritten und den fünften Theil; wie viel bleiben ihm?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche Seite 23 und 24.

Die erste Gruppe dieser Aufgaben auf S. 24 hat den Zweck, die Schüler im Zu- und Wegzählen innerhalb desselben Zehners zu üben. Aus $2 + 3 = 5$ z. B. soll gefolgert werden: $12 + 3 = 15$. Der Lehrer rechnet die Aufgabe zuerst auf der Schultafel vor, etwa in folgender Weise: Wie viel ist 2 und 3? Wie viel wird 12 und 3 sein? 12 ist 1 Zehner und 2 Einer. Werden wir die 3 Einer zu dem Zehner, oder zu den 2 Einern zählen? Zählet also 3 Einer zu 2 Einern. 2 Einer und 3 Einer sind 5 Einer; und jetzt noch 1 Zehner dazu, sind 15. Wie viel ist also 12 und 3? — (An der Rechenmaschine:) Nachdem die Zahl 12 dargestellt wurde, schiebt der Lehrer zu den 2 Kugeln des zweiten Stabes noch 3 Kugeln hin. Wie viel Kugeln sind nun da? Oben sind 10, unten 2 und 3, d. i. 5; wie viel also zusammen? 12 und 3 ist also 15.

Um den Schülern zu zeigen, dass z. B. die Rechnung $15 - 4 = 11$ auf $5 - 4 = 1$ zurückgeführt werde, verfahre der Lehrer auf folgende Art: 15 ist 1 Zehner und 5 Einer. Um davon 4 Einer wegzuzählen, kann man sie von 1 Zehner oder auch von 5 Einern wegzählen; wovon werden wir sie wegnehmen, damit der Zehner ungeändert bleibe? 5 Einer weniger 4 Einer ist 1 Einer. Wie viel haben wir jetzt noch von 1 Zehner und 5 Einern? Noch 1 Zehner und 1 Einer, oder 11 Einer. Wie viel ist also $15 - 4$? — (An der Rechenmaschine:) Der Lehrer stellt die Zahl 15 dar und schiebt auf dem zweiten Stabe, auf welchem 5 Kugeln links stehen, 4 Kugeln nach rechts. Es bleiben dann noch die 10 Kugeln des ersten Stabes unverändert und auf dem zweiten Stabe noch 1 Kugel; also $15 - 4 = 11$.

§. 30. Die Zahl 16.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 6 Kr.? 3 Fünfer und 1 Kr.? 4 Vierer? 16 halbe Kreuzer? Wie viel Zehner sind 16 Fünfer? Wie viel Gulden und Zehner sind 16 Zehner? Wie viel Zehner sind 1 Gulden und 3 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 4 Monate? Wie viel Wochen und Tage sind 16 Tage? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 16 Gramm? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 6 Decimeter? — Wie viel Liter und Deciliter sind 16 Liter? — Wie viel Stück sind 1 Dutzend und $\frac{1}{3}$ Dutzend?

Der 10. Mai fällt auf einen Sonntag; auf welchen Wochentag fällt der 16. Mai? — Jemand kaufte eine Taschenuhr für 16 Gulden, und verkaufte sie später für 10 Gulden; wie viel Gulden verlor er dabei? — In einem Garten waren 16 Obstbäume; von diesen sind während eines strengen Winters 7 erfroren; wie viele Obstbäume blieben noch? — In einem Schreibhefte sind 16 Seiten, 6 sind schon voll geschrieben; wie viel Seiten sind noch leer? — Wie viele Kegel muß man jedesmal treffen, damit man in 3 Würfen 16 Kegel treffe, wenn nach jedem Wurfe die Kegel wieder aufgesetzt werden? — Wie viel Räder haben 4 Wägen? — Wenn vor jeden dieser Wägen 4 Pferde gespannt werden; wie viel Pferde sind es zusammen? — Auf 1 halbes Kilogramm gehen 8 Kerzen; wie viel auf 1 Kilogramm? — Wie viel Schreibhefte kann man aus 16 Bogen machen, wenn man zu jedem Schreibhefte 2 Bogen braucht? — Wie viel Paar sind 16 Handschuhe? — Zu 2 Paar Strümpfen braucht man 16 Dekagramm Garn; wie viel braucht man zu 1 Paar? — 3 Kilogramm Mehl geben 4 Kilogramm Brot; wie viel Brot erhält man aus 12 Kilogramm Mehl? — Von 16 Kirschen ißt Franz die Hälfte auf, den vierten

Theil schenkt er dem Bruder und den achten Theil der Schwester; wie viele Kirschen bleiben ihm noch?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 25 und 26.

---

§. 31. Die Zahl 17.

Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 17 Kr. bezahlen? Wie viel Zehner sind 1 fl. und 7 Zehner? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 5 Monate? 2 Wochen und 3 Tage sind wie viel Tage? — Wie viel Decimeter sind 1 Meter und 7 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 7 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 17 Gramm?

Deine Mutter kauft ein Glas für 9 Kr., und ein anderes für 8 Kr.; wie viel kosten beide Gläser? — Wie viel Griffel bekommt man für 17 Kr., wenn 1 Griffel 1 Kr. kostet? — Konrad bekam von seinem Vater 17 Bogen Papier, davon hat er nur noch 7 Bogen; wie viel hat er schon verbraucht? — Jemand kauft ein Kalb für 15 fl.; wie theuer muß er es verkaufen, wenn er dabei 2 fl. verdienen will? — Ein Kaufmann verkauft 1 Dekagramm 2 Gramm Safran und noch 5 Gramm; wie viel verkauft er zusammen? — Von 17 angepflanzten Linden vertrockneten 8; wie viele erhielten sich? — Karl, Eduard und Fritz spielten miteinander um Haselnüsse; Karl hat 17 gewonnen, Eduard 9 verloren; wie viele hat Fritz verloren? — Anna besucht die Schule 17 Monate, Berta 1 Jahr, $\frac{1}{4}$ Jahr und $\frac{1}{6}$ Jahr; welche besucht länger die Schule?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 27 und 28.

---

§. 32. Die Zahl 18.

Anwendungen.

Wie viel Kreuzer sind 1 Zehner und 8 Kr.? 3 Fünfer und 3 Kr.? 4 Vierer und 2 Kr.? 18 halbe Kreuzer? Wie viel Zehner sind 1 fl. und 8 Zehner? 9 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 1 halbes Jahr? — Wie viel Arbeitstage haben 3 Wochen? — Um wie viel Decimeter ist 1 Meter weniger als 18 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 8 Deciliter? — Wie viel Dekagramm und Gramm sind 18 Gramm?

Eine Bäuerin nahm in einem Monate für Milch 10 fl. und für Butter 8 fl. ein; wie viel zusammen? — In einem Dorfe, das 18 Häuser zählte, brannten 5 Häuser ab; wie viel blieben noch? — Drei Knaben haben zusammen 18 Nüsse; der erste hat 5, der zweite 6 Nüsse; wie viel Nüsse hat der dritte? — Edmund hat 1 Zehner und 1 Fünfer, er braucht aber für ein Buch 18 Kr.; wie viel fehlt ihm noch? — Die Mutter kauft 3 Pomeranzen, das Stück zu 6 Kr.; wie viel muß sie dafür bezahlen? — 1 Schreibheft kostet 6 Kr.; wie viel kosten 2, 3 Schreibhefte? — Wie viel kostet 1 Meter Tuch, wenn 6 Meter 18 fl. kosten? — 1 Liter Bier kostet 18 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Liter? — Auf 3 Bänken sitzen 18 Schüler gleich vertheilt; wie viele sitzen auf 1 Bank? — Ein Arbeiter verdient täglich $\frac{1}{2}$ fl.; wie viel in 3 Wochen? — Für 6 Kr. bekommt man einen schönen Bilderbogen; wie viel solche Bilderbogen kann man für 3 Fünfer und 3 Kr. kaufen?

Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche Seite 29 und 30.

§. 33. Die Zahl 19.

Anwendungen.

Mit welchen Geldstücken kann man 19 Kr. bezahlen? Wie viel Kreuzer sind 19 halbe Kreuzer? Wie viel Gulden und Zehner sind 19 Zehner? 19 Zwanziger? — Wie viel Monate sind 1 Jahr und 7 Monate? — Wie viel Meter und Decimeter sind 19 Decimeter? — Wie viel Deciliter sind 1 Liter und 9 Deciliter? — Wie viel Gramm sind 1 Dekagramm und 9 Gramm?

Ein Landmann hat 4 Paar Ochsen und 11 Stück Kühe; wie viel Stück Rindvieh sind dieß zusammen? — 1 Dutzend Knöpfe kostet 1 Fünfer; wie viel kosten 19 Dutzend? — Wie viel Tage sind vom 8. bis 19. Mai? — Eduard hat 10 Kirschen gegessen, jetzt hat er noch 9; wie viel Kirschen hatte er früher? — Ein Knabe lernte in 9 Tagen 18 Sprüche; wie viel Sprüche hat er in 1 Tag gelernt? — In einem Walde wurden 9 Eichen, 6 Buchen und 4 Fichten gefällt; wie viel Bäume sind das? — Karl kauft ein Buch um 19 Kr., eine Schiefertafel für 11 Kr. und ein Schreibheft für 8 Kr.; um wie viel ist das Buch theurer als die Schiefertafel? um wie viel ist das Schreibheft wohlfeiler als das Buch? — Man hat Gewichte von 1, 2, 5, 10 Dekagramm; mit welchen Gewichten kann man 19 Dekagramm abwiegen?

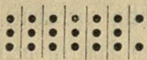
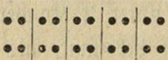
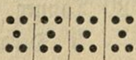
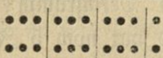
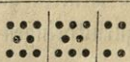
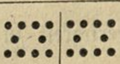
Schriftliche Aufgaben im I. Rechenbuche S. 31 und 32.

---

§. 34. Die Zahl 20.

• • • • • • • • • •
• • • • • • • • • • **20**

A. Zerlegung und Rechnungsoperazionen.

	$20 \times 1 =$	1 in 20 =	$\frac{1}{20}$ v. 20 =
	$10 \times 2 =$	2 in 20 =	$\frac{1}{10}$ v. 20 =
	$6 \times 3 + 2 =$	3 in 20 =	
	$5 \times 4 =$	4 in 20 =	$\frac{1}{5}$ v. 20 =
	$4 \times 5 =$	5 in 20 =	$\frac{1}{4}$ v. 20 =
	$3 \times 6 + 2 =$	6 in 20 =	
	$2 \times 7 + 6 =$	7 in 20 =	
	$2 \times 8 + 4 =$	8 in 20 =	
	$2 \times 9 + 2 =$	9 in 20 =	
	$10 + 10 =$ $2 \times 10 =$	$20 - 10 =$ 10 in 20 =	$20 = 10 +$. $\frac{1}{2}$ v. 20 =

B. Schriftliche Übungen.

Die unter A mündlich behandelten Rechnungsfälle, bei denen die Schüler auch die Zerlegbilder nachzuzeichnen haben.

C. Anwendungen.

Ein Landmann hat 10 Schafe, jedes gibt 2 Kilogramm Wolle; wie viel Wolle geben alle zusammen? — Ein Fuhrmann führt 12 Kisten Zucker und 8 Kisten Kaffee; wie viel

Kisten sind es zusammen? — Von 20 Meter Leinwand werden 10 Meter verkauft; wie viel Meter bleiben übrig? — Heinrich wechselt für 2 Zehner Vierkreuzerstücke ein; wie viele Vierer bekommt er? — Zum Fronleichnamsfeste bestellt die Mutter für die 5 Fenster ihrer Wohnung Blumen; wie viele Blumentöpfe braucht sie, wenn sie auf jedes Fenster 4 Töpfe aufstellen will? — Karl hatte 20 Aufgaben gerechnet, 4 Aufgaben waren unrichtig gerechnet; wie viele hatte er richtig gerechnet? — Unter 10 Arme werden 20 Zehner zu gleichen Theilen vertheilt; wie viel erhält jeder? — 20 Nüsse sollen unter 2 Knaben so vertheilt werden, dass der eine 2 Nüsse mehr bekommt, als der andere; wie viel bekommt jeder? — Von 20 Tannen wurden 14 Stück gefällt; wie viele blieben stehen? — 5 Dekagramm Gewürz kosten 20 Kr.; wie viel kostet 1 Dekagramm? — Dein älterer Bruder ist 15 Jahre alt, und hat noch 5 Jahre zu studieren; wie alt wird er sein, wenn er seine Studien vollendet hat? — Fritz holte 2 Kilogramm Reis für 6 Zehner und 1 Kilogramm Kaffee für 12 Zehner; die Mutter hatte ihm 2 fl. mitgegeben; wie viel Zehner muß er zurückbringen?

D. Wiederholungen.

Zu- und Wegzählen bis zur größten Fertigkeit zu üben.

Wie viel ist

11 + 1?	17 + 1?	13 + 1?	u. s. w.
14 + 2?	18 + 2?	11 + 2?	u. s. w.
12 + 3?	15 + 3?	17 + 3?	u. s. w.
. . .	. . .	. . .	. . .
11 + 9?	10 + 9?	10 + 10?	u. s. w.

Wie viel ist

11 — 1?	20 — 1?	15 — 1?	u. s. w.
15 — 2?	11 — 2?	18 — 2?	u. s. w.
12 — 3?	19 — 3?	14 — 3?	u. s. w.
. . .	. . .	. . .	. . .
19 — 9?	16 — 9?	13 — 9?	u. s. w.

Wie viel fehlt
zu 1, 7, 15, 19, 8, 16, 11, 4, 17, 12 an 20?
zu 13, 6, 18, 10, 3, 14, 7, 11, 9, 15 an 19?
u. s. w.

Wie viel ist 11 + 3 + 2 + 4? 7 + 5 + 1 + 6? 3 + 8 + 9 — 5? 17 — 6 + 8 — 9? 20 — 7 + 5 — 8 + 3?
u. s. w.

Leopold ist 19 Jahre alt, seine Schwester Marie wird erst nach 10 Jahren so alt sein; wie alt ist Marie? — Ein mit Butter gefüllter Kübel wiegt 20 Kilogramm, der leere Kübel wiegt 2 Kilogramm; wie viel Butter ist in demselben? — Wenn jetzt 9 Uhr morgens ist, wie viel Uhr wird nach 3, 6, 7, 11 Stunden sein? wie viel Uhr war vor 4, 6, 12, 15 Stunden? — Ein Arbeiter fängt um 6 Uhr früh mit der Arbeit an und arbeitet außer 1 Stunde Ruhezeit 12 Stunden; um wie viel Uhr hört er zu arbeiten auf? — Wie viel Äpfel sind unter drei Kinder vertheilt, wenn das erste 4 Äpfel, und jedes folgende 2 Äpfel mehr als das vorhergehende bekommt?

Vervielfachen, Messen und Theilen bis zur Fertigkeit zu üben.

Wie viel ist 1 × 2? 2 × 2? 3 × 2? 4 × 2? . . . 10 × 2? — Wie oft ist 2 in 2, 4, 6, 8, . . . 20 enthalten?

Wie viel ist 2 × 1? 2 × 2? 2 × 3? 2 × 4? . . . 2 × 10? — Wie viel ist die Hälfte von 2, 4, 6, 8, . . . 20?

Wie viel ist 1 × 3? 5 × 3? 2 × 3? 6 × 3? — Wie oft ist 3 in 15, 9, 18, 3, 12, 6 enthalten?

Wie viel ist 3 × 1? 3 × 5? 3 × 2? 3 × 6? 3 × 3? — Wie viel ist der dritte Theil von 6, 15, 3, 12, 18, 9?

Wie viel ist 4 × 5? — Wie vielmal 5 ist 20? — Wie oft ist 5 in 20 enthalten?

Wie viel ist 5 × 4? — 20 ist 5mal wie viel? Wie groß ist der 5te Theil von 20?

Wie viel ist 3 × 4 + 6 — 9? 2 × 9 — 7 + 6? 6 × 3 — 9 + 4? $\frac{1}{3}$ von 15 + 8 + 7? $\frac{1}{5}$ von 20 + 10 — 8? u. s. w.

1 Meter Tuch kostet 2 fl.; wie viel kosten 2, 5, 7, 9, 6, 4, 3, 8 Meter? — In einem Walde sollen 18 Bäume gefällt werden; in wie viel Tagen werden 3 Holzhauer damit fertig sein, wenn jeder täglich 2 Bäume fällt? — Ein Knabe verlor von 15 Kr. den 5. Theil; wie viel hat er noch? — Wie viel Scheiben haben 3 Fenster, wenn jedes Fenster 2 Flügel, und jeder Flügel 3 Scheiben hat? — Wie lange kann man 4 Pferde mit dem Heu füttern, das für 1 Pferd 20 Tage ausreicht? — 1 Liter Bier kostet 20 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Liter? — Für 1 Kr. kauft man 2 Griffel; wie viel für 1 Zehner? — In einer Gesellschaft waren 4 Frauen und 4mal so viele Herren; wie viele Personen waren in der Gesellschaft? — 3 Personen haben zusammen 20 fl. zu zahlen; davon trifft die erste die Hälfte, die zweite der 4te Theil, und die dritte das übrige; wie viel hat jede Person zu zahlen? — Ein Landmann verkauft 4 Schafe, eines zu 4 fl.; a) wie viel bekommt er dafür? b) wie viel Schafe hätte er verkauft, wenn er 20 fl. bekommen hätte? c) wie viel hätte ein Schaf kosten müßen, wenn er für die 4 Schafe 20 fl. bekommen hätte?

Schriftliche Wiederholungsaufgaben im I. Rechenbuche S. 33—35.

Zweite Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **zweiten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen im Zahlenraume bis hundert.

Einleitung.

---

§. 35.

Das zweite Rechenbuch umfaßt das Rechnen im Zahlenkreise von 1 bis 100 und ist für das zweite Schuljahr bestimmt.

In den beiden Zahlenräumen von 1 bis 10 und von 10 bis 20 sind wir, nachdem die Zahlen in denselben gebildet worden sind, allmählich von Zahl zu Zahl fortgeschritten und haben durch Zerlegung derselben die Resultate der verschiedenen Rechnungsoperazionen gewonnen, die dann von den Schülern eingeübt wurden. Wir werden auch hier zunächst den Zahlenraum bis 100 erweitern; wir dürfen, nachdem die Schüler schon bei den Zahlen von 10 bis 20 auf das Erkennen des Zehnergesetzes vorbereitet wurden, hier nur die bereits gewonnene Einsicht vervollständigen, um eine klare Auffassung der neuen Zahlen und ihres Zusammenhanges zu vermitteln. Auch bezüglich des Rechnens mit diesen Zahlen könnten wir denselben Weg, wie in den früheren

Zahlenkreisen, einschlagen; allein er wäre zu umständlich und hätte auch weder für die richtige Auffassung noch für die Anwendung einen besonderen Wert. Dazu tritt der Umstand, dass mit der Größe der Zahlen auch die Bestandtheile zunehmen, die man durch Zerlegungen erhalten kann, und dass die Menge der daraus hervorgehenden Rechnungsresultate sich nicht mehr, wie bei den kleineren Zahlen, dem Gedächtnisse einprägen läßt. Bereits in den Zahlenkreisen bis 10 und bis 20 wurde durch die vollständige Einübung des Einsundeins für das Zu- und Wegzählen auch der höheren Zahlen eine sichere Grundlage geschaffen, die nur einer sehr unbedeutenden Erweiterung bedarf, um diese Operazionen auf alle Zahlen des ersten Hunderts anwenden zu können. Die Übungen des Zu- und Wegzählens werden sich also hier hauptsächlich nur als Wiederholungsübungen gestalten. Dagegen traten im Rechnen mit den Zahlen bis 20 über das Vervielfachen, Messen und Theilen nur einzelne Fälle auf. Diese zu vervollständigen, das Einmaleins bis zur größten Geläufigkeit einzuüben und aus der Umkehrung desselben auch die verschiedenen Rechnungsfälle des Messens und Theilens abzuleiten, muß eine Hauptaufgabe des Rechnens im Zahlenraume bis 100 bilden. Da aber die Schüler Sicherheit und Fertigkeit in einer bestimmten Operazion, z. B. im Vervielfachen von 3, nur dann erlangen können, wenn sie längere Zeit ausschließlich in dieser Operazion geübt werden, so erscheint es am angemessensten, in den Rechnungsübungen dieses Zahlenraumes das Fortschreiten von Zehner zu Zehner festzuhalten und in jedem Zehner insbesondere diejenigen Vielfachen einzuüben, welche in demselben ihren vollständigen Abschluss finden, z. B. in dem Zahlenraume bis 30 das Vervielfachen von 3 und mit 3, im Zahlenraume bis 40 das Vervielfachen von 4 und mit 4 u. s. w., die Rechnungsfälle aber, welche in höhere Vielfache hinübergreifen, vor der Hand zu übergehen. So tritt z. B. im vierten Zehner die Verbindung $5 \times 8 = 40$ auf, sie wird jedoch, damit hier die Aufmerksamkeit ungetheilt auf die 4fachen der einzelnen

Zahlen gerichtet bleibe, vorläufig übergangen und findet später im fünften Zehner, wo die 5fachen der Zahlen an die Reihe kommen, ihre passendere Stelle. Die Gründlichkeit fordert keineswegs, dass auf jeder Stufe mit den Zahlen alle Verbindungen geübt werden, die sich überhaupt nur vornehmen lassen; im Fortgange des Unterrichtes legt sich eines an das andere, und man gelangt bei sachgerechter Anordnung schließlich zu einem vollständigen Ganzen.

Wir nehmen also, nachdem die Schüler den Zahlenkreis bis 100 kennen gelernt haben, in jedem einzelnen Zehner der Reihe nach die einzelnen Operazionen des Zu- und Wegzählens, des Vervielfachens, Messens und Theilens vor, und legen dabei das Hauptgewicht auf die in jedem Zehner sich abschließenden Vielfachen, in ganz analoger Weise, wie wir im Zahlenraume bis 20, bei der Zahl 11 das Zu- und Wegzählen von 1, bei der Zahl 12 das Zu- und Wegzählen von 2, u. s. f., als die hervorragendste Übung behandelt haben.

Kopf- und Zifferrechnen sind auch hier, der Ausführung nach, noch nicht von einander geschieden; dem reinen Rechnen folgt überall angewandtes Rechnen.

Beim reinen Rechnen behandeln wir neben den bisher geübten Grundaufgaben auch solche, die aus diesen durch Veränderung des sprachlichen Ausdruckes abgeleitet werden. Bei den Grundaufgaben wird die Operazion unmittelbar durch den Wortlaut der Aufgabe angegeben; bei den abgeleiteten Aufgaben bedarf es schon einer Überlegung, um aus dem Wortlaute der Aufgabe die Operazion zu erkennen, welche in Anwendung kommen muß. Eine Grundaufgabe ist die folgende: wie viel ist 32 und 6? Die Schüler antworten darauf entweder: 32 und 6 ist 38, oder, wenn es auf Schnelligkeit ankommt, bloß: 38. Dieser Grundaufgabe entspricht z. B. die abgeleitete Aufgabe: wie viel erhalte ich, wenn ich 32 um 6 vergrößere? Die Schüler antworten hier immer in einem vollständigen Satze: wenn ich 32 um 6 vergrößere, so erhalte ich 38.

Der Ausdruck kann für dieselbe Aufgabe sehr verschieden sein und gerade in diesem Wechsel der Ausdrucksweise liegt wesentlich der Wert der abgeleiteten Aufgaben für das denkende Rechnen und für die Sprechübung. Während die Grundaufgaben Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen bezwecken, dienen die abgeleiteten Aufgaben nicht bloß zur Übung im Rechnen, sondern vorzüglich auch zur Förderung der Denk- und Sprechfertigkeit. Die letzteren sollen darum immer erst dann auftreten, nachdem schon durch das Lösen zahlreicher Grundaufgaben Fertigkeit und Sicherheit in der jedesmaligen Operazion erreicht ist.

Bei dem angewandten Rechnen muß hier insbesondere auch die bisherige Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte ergänzt werden.

Das zweite Rechenbuch bringt die schriftlichen Übungsaufgaben mit reinen Zahlen und zahlreiche Anwendungen. Die letzteren werden größtentheils in der Schule selbst mündlich vorgenommen; will man ihre Lösung der stillen Selbstbeschäftigung oder dem häuslichen Fleiße überlassen, so werden die Schüler verhalten, die Resultate mit Ziffern aufzuschreiben.

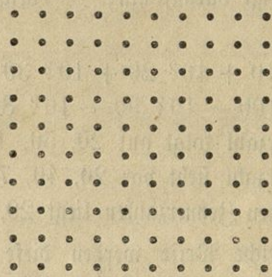
Die Anweisung zur methodischen Benützung dieses Rechenbuches liefert die vorliegende für Lehrer bestimmte Anleitung.

I. Erweiterung des Zahlenkreises bis 100.

§. 36. Mündlich.

1. Wir nehmen, damit das Zehnersystem besser aufgefaßt werde, zunächst bloß die Zehnerzahlen vor und entwickeln erst dann die einzelnen Zahlen in den aufeinander folgenden Zehnerräumen.

Die besten Veranschaulichungsmittel sind hier die Zehnertafel und die russische Rechenmaschine; weiter sind auch unsere Münzen und neuen Maße und Gewichte dazu zu verwenden.



Die voranstehende *Zehnertafel* läßt der Lehrer vor den Augen der Schüler entstehen. Er macht zuerst 10 Punkte nebeneinander und läßt zählen: eins, zwei, drei, . . . neun, zehn. *Zehn Einer sind ein Zehner.*

Der Lehrer bildet eine zweite Reihe von 10 Punkten. Wie viel Zehner sind es jetzt? *Zwei Zehner* sind *zwanzig Einer.*

Nun wird noch eine dritte Reihe von 10 Punkten dazugefügt. Wie viel Zehner sind es jetzt? *Drei Zehner* sind *dreißig Einer.*

Fügt man noch eine vierte, fünfte, . . . zehnte Reihe von 10 Punkten hinzu, so erhält man

vier Zehner oder *vierzig* Einer,
fünf Zehner oder *fünfzig* Einer,
u. s. w.
zehn Zehner oder *hundert* Einer, oder ein *Hundert.*

Diese Reihen werden nun wiederholt gelesen. Der Lehrer sagt vor und läßt die Kinder nachsprechen (auf den letzten Punkt der ersten Reihe zeigend): 1 Zehner oder 10 Einer; (auf den letzten Punkt der zweiten Reihe zeigend): 2 Zehner oder 20 Einer u. s. w.

Hierauf zeigt der Lehrer auf die Reihe (immer auf den letzten Punkt derselben) und läſst sich von den Schülern die Zehnerzahl nennen; dann nennt er selbst die Zehnerzahl und einer der Schüler zeigt darauf hin; — beides zuerst in, dann außer der Ordnung.

Wie viel ist 10 + 10? 20 + 10? 30 + 10? u. s. w.

Wie viel ist 100 — 10? 90 — 10? 80 — 10 u. s. w.

Welche Zehnerzahl folgt auf 20, 50, 10, 80, 40?

Welche Zehnerzahl steht vor 20, 40, 70, 60, 100?

Zwischen welchen Zehnerzahlen liegt 20, 50, 30, 90, 70?

Auf ganz gleiche Weise werden diese Übungen auch an der russischen Rechenmaschine durchgeführt, nachdem auf jeden Stab derselben 10 Kugeln gebracht wurden.

Mit den Münzen, Maßen und Gewichten. Wie viel Kreuzer hat 1 Zehner? 2 Zehner sind 20 Kr.; 3 Zehner sind 30 Kr.; . . . 10 Zehner sind 100 Kr. oder 1 Gulden. — Umgekehrt: 10 Kr. sind 1 Zehner; 20 Kr. sind 2 Zehner; . . . 100 Kr. sind 10 Zehner.

Wie viel Decimeter hat 1 Meter? 2 Meter sind 20 Decimeter, 3 Meter sind 30 Decimeter u. s. w.

Wie viel Deciliter hat 1 Liter? 2 Liter sind 20 Deciliter, 3 Liter sind 30 Deciliter u. s. w.

Wie viel Gramm hat 1 Dekagramm? 2 Dekagr. sind 20 Gramm, 3 Dekagr. sind 30 Gramm u. s. w.

An den Fingern. Wie viele Finger hat 1 Kind an beiden Händen? Wie viel Finger haben 2 Kinder an beiden Händen? Wie viel Finger haben 3, 4 . . . 10 Kinder?

2. Haben die Schüler die Zehnerzahlen richtig aufgefaſst, so gehe der Lehrer auf die Bildung der Zahlen in den einzelnen Zehnerräumen zurück, wobei er sich gleichfalls bald der Zehnertafel, bald der Rechenmaschine, bald der Münzen als Veranschaulichungsmittel bedient.

Von den Zahlen von 10 bis 20, welche schon in dem vorhergehenden Zahlenkreise allseitig angeschaut wurden, genügt hier eine wiederholende Zusammenstellung:

10 und 1 ist 11; 1 Zehner und 1 Einer sind 11 Einer;
10 und 2 ist 12; 1 Zehner und 2 Einer sind 12 Einer;
10 und 3 ist 13; 1 Zehner und 3 Einer sind 13 Einer;
u. s. w.
10 und 10 ist 20; 1 Zehner und 10 Einer sind 20 Einer
oder 2 Zehner.

Zahlen von 20 bis 30.

An der Zehnertafel.

Der Lehrer macht zwei Reihen von je 10 Punkten und sagt:

Hier stehen 10 Punkte, hier stehen auch 10 Punkte. Wie viel Zehner sind das? 2 Zehner sind 20.

Ich mache unter den beiden Reihen noch 1 Punkt; nun sind es 21 Punkte.

20 und 1 ist 21; 2 Zehner und 1 Einer sind 21 Einer.

Der Lehrer bringt in der dritten Reihe einen zweiten, dritten . . . zehnten Punkt an, und spricht:

20 und 2 ist 22; 2 Zehner und 2 Einer sind 22 Einer;
20 und 3 ist 23; 2 Zehner und 3 Einer sind 23 Einer;
u. s. w.
20 und 10 ist 30; 2 Zehner und 10 Einer sind 30 Einer
oder 3 Zehner.

Die Schüler sehen, dass von 20 aufwärts ebenso gezählt wird, wie von 10 aufwärts; die 2 Zehner bleiben und es kommen immer nur neue Einer dazu, bis diese wieder 1 Zehner ausmachen.

Übungen.

a) Der Lehrer lasse gezeigte Zahlen von den Schülern nennen, zuerst in der Reihenfolge, dann außer derselben; z. B. (auf den 4ten Punkt der 3ten Reihe zeigend): welche Zahl ist gezeigt?

b) Der Lehrer lasse genannte Zahlen von den Schülern zeigen.

c) Vorwärts- und Rückwärtszählen zwischen 1 und 30.

d) Zählen mit Überspringen einer Zahl:

1, 3, 5, 7 . . .	30, 28, 26, 24 . . .
2, 4, 6, 8 . . .	29, 27, 25, 23 . . .

e) Fragen, wie die folgenden:

Welche Zahl kommt nach 21, 25, 29, 24?

Welche Zahl steht vor 26, 28, 21, 27?

Zwischen welchen Zahlen liegt 22, 29, 25, 23?

f) Zusammenfassen der Zehner und Einer zu einer Zahl.

Wie heißt die Zahl, welche 2 Zehner und 4 Einer, — 2 Zehner und 7 Einer, — 2 Zehner und 1 Einer enthält?

g) Zerlegen in Zehner und Einer.

Wie viel Zehner und Einer hat 26, 23, 29, 21, 27, 30?

An der Rechenmaschine. Am ersten Stabe sind 10 Kugeln, am zweiten auch 10 Kugeln. Wie viel Kugeln sind an beiden Stäben? Wie viel Zehner? — Ich nehme noch 1 Kugel am dritten Stabe dazu; wie viel Kugeln sind es jetzt? 20 Kugeln und 1 Kugel sind 21 Kugeln. — Ebenso werden die folgenden Zahlen gebildet, indem man nach und nach auch die zweite, dritte . . . zehnte Kugel des dritten Stabes auf die linke Seite schiebt.

Mit Münzen. Ich lege hier links 2 Zehner und rechts daneben 1 Kr.; wie viel Kreuzer sind es zusammen? — Ich lege rechts noch 1 Kr.; jetzt sind es 2 Zehner und 2 Kr. oder 22 Kr. u. s. w. — Endlich erhalte ich 2 Zehner und 10 Kr.; wie viel Kreuzer sind es dann? Statt der 10 Kr. kann ich auch 1 Zehner hinlegen, dann habe ich 3 Zehner; 2 Zehner und 10 Kr. sind also 30 Kr. oder 3 Zehner.

Auf ähnliche Weise mit Maßen und Gewichten.

Nachdem in dem Voranstehenden die Entwicklung der Zahlen von 20 bis 30 ausführlich dargelegt wurde, brauchen wir nur beizufügen, dass auf ganz gleiche Weise auch die Zahlenräume

31, 32, 33 . . . 39, 40;
41, 42, 43 . . . 49, 50;
u. s. w.
91, 92, 93 . . . 99, 100

zu behandeln sind.

Nach jedem Zehner tritt eine Pause ein, die man zur Wiederholung der vorhergehenden Zahlen benützt, wobei insbesondere nach den Zehnern und Einern, aus denen eine Zahl besteht und umgekehrt nach der Zahl, welche die genannten Zehner und Einer enthält, sehr häufig zu fragen ist.

§. 37. Schriftlich.

Die schriftliche Darstellung der Zahlen dieses Zahlenraumes soll erst dann vorgenommen werden, wenn die Schüler durch die früher angedeuteten Übungen von diesen Zahlen eine klare Vorstellung und in deren Zerlegung in Zehner und Einer volle Sicherheit haben. Bis dahin mögen die schriftlichen Übungen nur aus dem Kreise von 1 bis 10 genommen werden.

Der Lehrer entwerfe auf der Schultafel nachstehende Zahlentabelle:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
11	12	13	14	15	16	17	18	19	**20**
21	22	23	24	25	26	27	28	29	**30**
31	32	33	34	35	36	37	38	39	**40**
41	42	43	44	45	46	47	48	49	**50**
51	52	53	54	55	56	57	58	59	**60**
61	62	63	64	65	66	67	68	69	**70**
71	72	73	74	75	76	77	78	79	**80**
81	82	83	84	85	86	87	88	89	**90**
91	92	93	94	95	96	97	98	99	**100**

Indem die einzelnen Felder nach und nach ausgefüllt werden, lasse der Lehrer immer die Frage beantworten, wie viel Zehner und Einer die jedesmalige Zahl enthalte, und schreibe dann die Zehner links, die Einer rechts an. Kommt er auf eine Zahl, welche nur Zehner enthält, z. B. 30, so mache er darauf aufmerksam, dass diese Zahl 3 Zehner und keine (0) Einer enthalte, dass man also in die zweite Stelle 3, in die erste Stelle 0 schreiben müße.

Aus dieser Behandlung der Zahlen ersehen die Schüler, dass die Zehner stets links an der zweiten Stelle, die Einer rechts an der ersten Stelle stehen, und das Fehlen der letzten durch 0 bezeichnet wird.

Bei 100 bemerkt man: 1 Zehner ist 10mal so viel als 1 Einer; 1 Hundert ist 10mal so viel als 1 Zehner. Wir schreiben für 1 Einer die Ziffer 1 in die erste, für 1 Zehner in die zweite Stelle; für 1 Hundert schreiben wir auch die Ziffer 1, setzen sie aber wieder um eine Stelle weiter nach links, also in die dritte Stelle, und füllen die erste und zweite Stelle, weil keine Zehner und Einer vorkommen, mit Nullen aus; also

hundert = 1 Hundert = 100.

Zur Einübung folgt:

a) Vor- und Rückwärtszählen an der Zahlentafel;

b) Lesen gezeigter Zahlen an der Zahlentafel;

c) Aufsuchen genannter Zahlen an der Zahlentafel;

d) Lesen von Zahlen, die der Lehrer auf die Schultafel schreibt;

e) Anschreiben genannter Zahlen auf der Schultafel und auf den Schiefertäfelchen.

Bei den Übungen im Vor- und Rückwärtszählen muß man darauf sehen, dass dieselben, mögen sie mit einzelnen Schülern oder im Chor vorgenommen werden, nicht in ein gedankenloses Hersagen ausarten. Zu diesem Ende lasse der Lehrer öfter bei irgend einer Zahl plötzlich innehalten und sich über dieselbe nähere Rechenschaft geben. Wenn z. B. die Schüler beim Vorwärtszählen bis 36 gekommen sind, wird plötzlich abgebrochen und gefragt: in welchem Zehner sind wir? (im vierten); wie viel Einer fehlen noch, bis der vierte Zehner voll ist? (vier Einer); beim Rückwärtszählen dagegen: wie viel Einer bleiben im vierten Zehner noch übrig? (sechs Einer).

Schließlich werden von den Schülern die Aufgaben aus dem II. Rechenbuche Seite 4 und 5 durchgeführt.

§. 38. Münzen, Maße und Gewichte.

Die bisher vermittelte Kenntnis der Münzen, Maße und Gewichte wird in diesem Zahlenraume durch folgende Angaben vervollständiget:

a) Münzen. 1 Gulden hat 100 Kreuzer.

An Papiergeld haben wir Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden und Banknoten zu 10 und 100 Gulden.

b) Längenmaße.

Das Metermaß kann hier schon eingehender behandelt werden. Zur Veranschaulichung dient, wie bereits oben im §. 9, b bemerkt wurde, zunächst ein mit den betreffenden Untertheilungen versehener Meterstab, an welchem gezeigt wird, dass man das Meter in 10 Decimeter, das Decimeter in 10 Centimeter und das Centimeter in 10 Millimeter theilt, und dass demnach ein Meter 10 Decimeter, oder 100 Centimeter enthält. Der Lehrer kann dieses auch an der Schultafel anschaulich darstellen, indem er darauf ein Meter zeichnet und dieses vor den Augen der Schüler zuerst in Decimeter, dann in Centimeter, und ein Centimeter noch in Millimeter eintheilt. Es wird den Schülern auch noch ein Bandmaß aus Metallblech von 2, 5 oder 10 Meter Länge gezeigt und bemerkt, dass dieses zum Ausmessen größerer Längen benützt wird.

Ein sehr wichtiges Maßglied in der Stufenleiter der Längenmaße ist das Decimeter, nicht nur, weil sich aus ihm sehr leicht alle übrigen Längenmaße ableiten lassen, sondern insbesondere auch darum, weil dasselbe die Grundlage des Hohl- und des Gewichtsmaßes bildet. Um sich die Länge desselben besser einzuprägen, soll jeder Schüler auf seinem Lineal die Zeichnung eines Decimeters haben. Er wird aus derselben unmittelbar die Eintheilung in Centimeter und Millimeter ersehen. Er soll sich aber auch mittels dieser Zeichnung aus einem starken Bindfaden ein Meter selbst anfertigen, indem er mit Hilfe eines Papierstreifens die gezeichnete Länge des Decimeters möglichst genau zehnmal auf den Bindfaden aufträgt und nach jeder Länge eines Decimeters einen Knoten einbindet.

Damit die Schüler mit den neuen Längenmaßen recht vertraut werden, messe man mit dem Meterstabe mehrere im Schulzimmer befindliche Gegenstände, z. B. die Länge und Breite der Schultafel, des Schultisches, einer Bank, einer Fensterscheibe. Auch lasse man die Schüler die Länge ihres Mittelfingers, ihres Armes, sowie ihre Körperlänge in Centimeter angeben. Später versuche man Längen nach dem Augenmaße abzuschätzen und lasse der Schätzung jedesmal die wirkliche Messung nachfolgen.

Auch kann hier vorläufig bemerkt werden, dass man eine Strecke, welche ein Fußgeher bequem in einer Viertelstunde zurücklegt, 1 Kilometer nennt; die genaue Bestimmung des Kilometers wird erst in dem späteren Zahlenraume erfolgen können.

c) Hohlmaße. 1 Hektoliter = 100 Liter. Mit dem Hektoliter misst man nicht nur Wein, Bier und Flüssigkeiten überhaupt, sondern auch Getraide und andere trockene Gegenstände. 1 Liter = 10 Deciliter, 1 Deciliter = 10 Centiliter, daher 1 Liter = 100 Centiliter.

d) Gewichte. 1 Kilogramm hat 100 Dekagramm.

e) Zählmaße. 60 Stück nennt man 1 Schock.

f) Papiermaße. Wir unterscheiden Schreibpapier und Druckpapier. Beim Schreibpapier bilden 24 Bogen, beim Druckpapier 25 Bogen ein Buch. 20 Buch nennt man 1 Rieß, 10 Rieß einen Ballen.

g) Zeitmaße. 1 Jahr hat 12 Monate und wird auch in 52 Wochen eingetheilt. Die Monate bestehen aus Tagen, aber nicht alle Monate haben gleich viele Tage. Die Monate Jänner, März, Mai, Juli, August, Oktober und Dezember haben 31 Tage; die Monate April, Juni, September und November haben 30 Tage; der Monat Februar hat 28 oder 29 Tage. Bei vielen Rechnungen wird der Monat = 30 Tage angenommen.

Zur Vervollständigung der Zeitmaße wird ferner angeführt, dass 1 Tag 24 Stunden hat, und zugleich gezeigt, wie die Stunden an unseren Uhren gezählt werden. 1 Stunde wird in 60 Minuten und 1 Minute in 60 Sekunden eingetheilt. Die letzteren Eintheilungen werden gleichfalls an einer Uhr anschaulisch gemacht. Der Lehrer zeigt, wie der Stundenzeiger nur von einer Zahl zur nächstfolgenden rückt, während der Minutenzeiger eine ganze Umdrehung macht. Hat die Uhr auch einen Sekundenzeiger, so sieht man, dass derselbe eine ganze Umdrehung macht, bis der Minutenzeiger von einem Striche zum nächstfolgenden rückt.

II. Das Rechnen im Zahlenraume von eins bis hundert.

§. 39. Wiederholung der Rechnungsübungen im Zahlenraume bis zehn.

Auf jeder Stufe des Unterrichtes soll das Neue mit dem bereits Gelernten in enge Verbindung gebracht und das letztere fleißig wiederholt werden, um bei einzelnen Schülern Vergessenes zu erneuern, Fehlendes zu ergänzen, bei sämmtlichen Schülern aber das im ersten Schuljahre Geübte zu befestigen und zur vollen Sicherheit zu bringen.

A. Reines Rechnen.

1. Mündlich.

a) Die natürliche Zahlenreihe.

Vorwärtszählen von 1 bis 10, Rückwärtszählen von 10 bis 1; beides an der Rechenmaschine, nachdem man auf die einzelnen Stäbe folgeweise 1, 2, 3 . . . 10 Kugeln gebracht hat.

b) Zerlegung (mit Benützung der Rechenmaschine).

$$2 = 1 + 1 \qquad 3 = 1 + 1 + 1 \qquad 4 = 1 + 1 + 1 + 1$$
$$= 2 + 1 \qquad = 2 + 2$$
$$= 3 + 1$$

u. s. w.

Eine Zahl, welche in zwei gleiche Theile zerlegt werden kann, heißt eine gerade Zahl, jede andere eine ungerade Zahl. — Die Schüler selbst sollen die geraden und die ungeraden Zahlen aufsuchen. 2, 4, 6, 8, 10 sind gerade, 1, 3, 5, 7, 9 ungerade Zahlen. Nenne du eine gerade Zahl, du eine ungerade, du eine ungerade, du eine gerade!

c) Zuzählen.

Wie viel ist 1 und 1? 2 und 1? 5 und 1? u. s. w.

Wie viel ist 1 und 2? 2 und 2? 8 und 2? u. s. w.

Ebenso Zuzählen von 3, 4, 5 . . . 9.

Wie viel muß ich noch zu 3 zuzählen, um 4 zu erhalten? 3 und wie viel ist also 4? — 5 und wie viel ist 6? — 5 und wie viel ist 7? u. s. w.

Gedankenloses Zuzählen der Einheiten, etwa noch mit Hilfe der Finger, darf hier nicht geduldet werden.

d) Wegzählen.

Wie viel ist 4 — 1? 6 — 1? 3 — 1? u. s. w.

Wie viel ist 3 — 2? 7 — 2? 2 — 2? 9 — 2? u. s. w.

Ebenso Wegzählen von 3, 4, 5. . . . 9.

e) Vervielfachen von 1 und mit 1.

Da die Vielfachen von 1 unmittelbar aus der Vorstellung der Zahlen von 1 bis 10 hervorgehen, so braucht man bei denselben nicht lange zu verweilen; es genügt die Schüler darauf aufmerksam zu machen, dass z. B. statt der Ausdrucksweise „1 und 1 und 1 und 1 ist 4“ der kürzere Ausdruck „4mal 1 ist 4“ gebraucht wird. Ebenso ist von selbst einleuchtend, dass 1mal 4 4, 1mal 7 7 u. s. w. ist.

Die Vielfachen 2 × 3, 3 × 3, 5 × 2 u. s. w., die ebenfalls schon im ersten Zehner auftreten, werden hier übergangen, und erst bei den späteren Zehnern im Zusammenhange vorgenommen werden.

f) Das Messen durch 1.

Wie oft 1 in den einzelnen Zahlen enthalten ist, folgt gleichfalls unmittelbar aus der Vorstellung dieser Zahlen und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung.

Das Theilen braucht hier noch nicht berücksichtiget zu werden; die Rechnungsfälle $\frac{1}{2}$ von 6, $\frac{1}{3}$ von 9, $\frac{1}{5}$ von 10 u. s. w. bleiben den folgenden Zehnern vorbehalten.

2. Schriftlich.

Was die Schüler mündlich geübt haben, führen sie nun auch schriftlich durch. In Bezug auf die Behandlung der schriftlichen Aufgaben gilt auch hier das hierüber in der 1. Abtheilung §. 10 unter 2. Gesagte.

Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 5 und 6, unter a und b.

B. Anwendungen.

Angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche S. 6, c.

Bei den angewandten Aufgaben muß mit Strenge darauf gesehen werden, dass die Schüler nicht bloß das Resultat angeben, sondern jedesmal während der Lösung selbst auch die Schlüsse aussprechen, auf denen die Auflösung beruht.

§. 40. Wiederholung der Rechnungsübungen im Zahlenraume bis zwanzig.

Die hier vorzunehmenden Wiederholungsübungen haben sich insbesondere auf das Zu- und Wegzählen mit dem Übergange aus dem einen Zehner in den andern, auf das Vervielfachen von 2 und mit 2, das Messen und Theilen durch 2 zu erstrecken.

A. Reines Rechnen.

a) Vorwärtszählen von 1 bis 20, Rückwärtszählen von 20 bis 1. (An der Rechenmaschine, nachdem auf die ersten zwei Stäbe je zehn Kugeln gestellt wurden.)

Nenne alle geraden Zahlen bis 20. Schreibe sie mit Ziffern. — Nenne alle ungeraden Zahlen bis 20. Schreibe sie mit Ziffern.

b) Zu- und Wegzählen.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 9 und 1? — Wie viel ist 9 und 3? (An der Rechenmaschine:) Auf dem ersten Stabe werden links 9 Kugeln stehen gelassen. Der Lehrer schiebt zu denselben noch 1 Kugel dazu und spricht: 9 und 1 ist 10. Nun haben wir erst 1 zugezählt; 3 ist aber 1 und 2; wie viel müßen wir noch zuzählen? 10 und 2 (indem der Lehrer 2 Kugeln des unteren Stabes nach links rückt) ist 12; 9 und 3 ist also 12.

Die zuzuzählende Zahl wird daher so zerlegt, dass man zuerst den Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zuzählt.

Wie viel ist 8 und 2? 8 und 3? 8 und 7? u. s. w.

6 und wie viel ist 13? — Wie viel muß ich zu 6 zuzählen, um 10 zu erhalten? Wie viel muß ich noch zu 10 zuzählen, um 13 zu erhalten? Ich muß also zu 6 zuerst 4, und dann noch 3, zusammen 7 zuzählen, um 13 zu erhalten; also $6 + 7 = 13$. (An der Rechenmaschine.)

$8 + . = 11$; $9 + . = 14$; $7 + . = 15$ u. s. w.

Wie viel ist 12 weniger 2? — Wie viel ist 12 weniger 5? (An der Rechenmaschine:) Auf dem ersten Stabe befinden sich links 10, auf dem zweiten 2 Kugeln. Der Lehrer schiebt zuerst die 2 Kugeln des zweiten Stabes auf die rechte Seite und spricht: 12 weniger 2 ist 10. Nun haben wir erst 2 weggezählt; 5 ist aber 2 und 3; wie viel haben wir noch wegzuzählen? 10 weniger 3 (dabei schiebt der Lehrer noch 3 Kugeln des ersten Stabes nach rechts weg) ist 7; 12 weniger 5 ist also 7.

Man zählt also zuerst so viel weg, dass der reine Zehner übrig bleibt; dann werden die noch übrigen Einer weggezählt.

Wie viel ist 11 weniger 3? — 13 weniger 6? — 16 weniger 7? u. s. w.

2. Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 7, a.

c) Vervielfachen von 2 und mit 2.

Das Vervielfachen wird den Schülern als ein kürzeres Verfahren beim Zuzählen gleichgroßer Zahlen dargestellt; statt 4 und 4 sagen wir 2mal 4, statt 2 und 2 und 2 und 2 sagen wir kürzer 4mal 2. Das Vervielfachen der Grundzahlen besteht in der Kenntnis des sogenannten Einmaleins. Der vollständigen Einübung desselben muß die größte Aufmerksamkeit zugewendet werden. Das Einmaleins muß den Kindern durch passende Veranschaulichungsmittel zum klaren Verständnis gebracht und sodann durch anhaltende Übung dem Gedächtnisse derselben fest und unverlierbar eingeprägt werden.

Die Veranschaulichung geschieht am besten an Punkten, die in gleicher Anzahl untereinander angebracht werden, und an der Rechenmaschine.

Das Einprägen der durch Anschauung abgeleiteten Vielfachen soll durch fortgesetzte Übung und Anwendung in der Schule selbst vermittelt werden. Das Können des Einmaleins erfordert Schlagfertigkeit; die Schüler dürfen sich zuletzt auf das Resultat gar nicht mehr besinnen, bei dem Klange „8mal 2“ muß auch schon die Zahl 16 vor ihrem geistigen Auge stehen.

1. Mündlich.

Die Vielfachen von 2.

Diese sind bereits im ersten Schuljahre bei der Behandlung der Zahlen von 1 bis 20 aufgetreten; vielen Schülern werden dieselben auch schon bekannt sein; gleichwohl müßen sie hier noch einmal im Zusammenhange vorgenommen und bis zur größten Fertigkeit durchgeübt werden.

• • Der Lehrer mache zuerst 2 Punkte nebeneinander und
• • frage: Wie vielmal stehen hier 2 Punkte? Wie viel
• • Punkte sind es? Wiel viel sind also 1mal 2 Punkte? 1mal 2 ist 2.

Ich setze noch einmal 2 Punkte darunter. Wie vielmal stehen jetzt 2 Punkte da? Wie viel Punkte sind es? 2 Punkte und 2 Punkte sind 4 Punkte. Wie viel sind also 2mal 2 Punkte? 2mal 2 ist 4.

Ebenso wird durch weitere Zufügung von je zwei Punkten nach und nach $3 \times 2 = 6$, $4 \times 2 = 8$ . . . $10 \times 2 = 20$ abgeleitet.

Die Veranschaulichung an den Kugeln der *Rechenmaschine* könnte auf gleiche Weise wie an den Punkten der Schultafel geschehen, indem nämlich nach und nach 2 Kugeln eines jeden Stabes nach links vorgeschoben werden. Um jedoch zugleich das Anwachsen der Vielfachen zu Zehnern und Einern anschaulich zu machen, erscheint es *zweckmäßiger*, dieselben durch das Aneinanderschieben der wiederholt zuzuzählenden Kugeln sogleich an den obersten Stäben zu versinnlichen. Der Lehrer schiebt 2 Kugeln des ersten Stabes nach links und spricht: 1mal 2 ist 2; dann schiebt er 2 weitere Kugeln, und zwar mit *einem* Griffe, nach links und spricht: 2mal 2 ist 4 u. s. w. bis 5mal 2 ist 10. Hierauf schiebt er ebenso 2 Kugeln des zweiten Stabes nach links und spricht: 6mal 2 ist 12 u. s. w. bis 10 mal 2 ist 20.

Die auf diese Art durch Anschauung gewonnenen Resultate werden nun zuerst in der Ordnung durchgesprochen, dann außer der Reihe gefragt und so lange geübt, bis die Antworten rasch und sicher erfolgen.

Die 2fachen der Zahlen.

Das Vervielfachen mit 2 wird in ähnlicher Weise, wie das Vervielfachen von 2, versinnlichet. Der Lehrer macht auf

der Schultafel einen Punkt und daneben noch einen Punkt und fragt: Wie vielmal 1 Punkt ist da? Wie viel Punkte sind es zusammen? 2mal 1 ist 2.

Unter die zwei Punkte setzt der Lehrer noch zwei Punkte; da stehen links 2 Punkte und rechts 2 Punkte. Wie vielmal 2 Punkte sind da? Wie viel Punkte sind es zusammen? 2mal 2 ist 4.

Ebenso leitet man weiter 2mal 3, 2mal 4 . . . 2mal 10 ab, indem die Schüler jedesmal angeben müßen, wie vielmal die Zahl von Punkten, welche in einer senkrechten Reihe stehen, vorkommt, und wie viele Punkte es in beiden senkrechten Reihen zusammengenommen gibt.

Die Schüler werden dadurch zu der Überzeugung geführt, dass z. B. 2 × 3 eben so viel als 3 × 2 ist. Zählt man nämlich in der obigen Darstellung die senkrechten Reihen, so hat man 2 Reihen und in jeder Reihe 3 Punkte, also zusammen 2mal 3 Punkte; zählt man dagegen die wagrechten Reihen, so hat man 3 Reihen und in jeder Reihe 2 Punkte, somit zusammen 3mal 2 Punkte, jedoch in beiden Fällen dieselbe Gesammtzahl von Punkten; also 2 × 3 = 3 × 2. — Dieses kann auch so versinnlicht werden: Der Lehrer stelle 6 Schüler in 2 Reihen auf, so dass auf jede Reihe 3 kommen, dann sind 2 × 3 Schüler aufgestellt; lässt man nun die Schüler eine Viertelschwenkung nach rechts machen, so bilden sie 3 Reihen, jede zu 2 Schülern, zusammen sind also 3 × 2 Schüler; da nun die Zahl der Schüler jedesmal die gleiche ist, so ist 2 × 3 = 3 × 2.

2. Schriftlich.

Die Schüler bilden auf ihren Schiefertafeln die Vielfachen mit Punkten und Ziffern und schreiben die Resultate dazu:

1 • •	2	$1 \times 2 =$	$2 \times 1 =$
2 • •	4	$2 \times 2 =$	$2 \times 2 =$
3 • •	6	$3 \times 2 =$	$2 \times 3 =$
4 • •	8	$4 \times 2 =$	$2 \times 4 =$
5 • •	10	$5 \times 2 =$	$2 \times 5 =$
6 • •	12	$6 \times 2 =$	$2 \times 6 =$
7 • •	14	$7 \times 2 =$	$2 \times 7 =$
8 • •	16	$8 \times 2 =$	$2 \times 8 =$
9 • •	18	$9 \times 2 =$	$2 \times 9 =$
10 • •	20	$10 \times 2 =$	$2 \times 10 =$

Dann folgen Wiederholungsaufgaben in Verbindung mit dem Zu- und Wegzählen, im II. Rechenbuche S. 8, 1. Gruppe.

d) Messen durch 2.

Das Messen läßt sich auf ein wiederholtes Wegzählen derselben Zahl zurückführen; man untersucht dabei, wie oft eine Zahl von einer anderen weggezählt werden kann, oder, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist. Z. B. Wie oft läßt sich 2 von 8 wegzählen $8 - 2 = 6$; $6 - 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $2 - 2 = 0$. 2 läßt sich also von 8 4 mal wegzählen, oder 2 ist in 8 4 mal enthalten. Die Zahl, welche man beim Messen findet, ist stets von dem Wörtchen „mal" begleitet.

Das Messen der Zahlen wird entweder an der Rechenmaschine veranschaulicht, oder auch mit Rücksicht auf die bekannten Vielfachen ohne Veranschaulichung gelöst. Darum soll zum Messen jedesmal erst dann übergegangen werden, wenn die Schüler im Vervielfachen der bezüglichen Zahl bereits vollkommene Sicherheit erlangt haben.

Zuerst wird das Messen von solchen Zahlen, die keinen Rest zurücklassen, dann auch das Messen von Zahlen, wobei ein Rest bleibt, vorgenommen.

1. **Mündlich.**

Wie oft ist 2 in 6 enthalten?

Veranschaulichung an der Rechenmaschine. Die Zahl 6 wird dargestellt. Zählet, wie oft ich 2 Kugeln von 6 Kugeln wegnehme. Indem der Lehrer immer 2 Kugeln gleichzeitig faßt und sie nach rechts schiebt, zählen die Schüler: 1mal, 2mal, 3mal. 2 läßt sich also von 6 3mal wegnehmen, oder 2 ist in 6 3mal enthalten. — Beim Wegschieben werden hier immer die letzten Kugeln, also die Kugeln rechts, und wenn die Kugeln auf mehreren Stäben stehen, die Kugeln des letzten Stabes zuerst in Anspruch genommen.

Herleitung aus den Vielfachen von 2. Nachdem die Vielfachen von 2, nämlich $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$ . . . wiederholt wurden, fragt der Lehrer: wie vielmal 2 ist 6? 6 ist **3**mal 2. Wie oft ist also 2 in 6 enthalten?

Ist 16 ein Vielfaches von 2? Wie oft ist also 2 in 6 enthalten?

Der Lehrer lasse nun die Reihe

2 ist	**1**mal 2,	also ist	2	in	2	1mal	enthalten;
4 „	**2**mal 2,	„ „	2	in	4	2mal	„
6 „	**3**mal 2,	„ „	2	in	6	3mal	„
. . .	. . .	. . .	.	.	.	. . .	. . .
20 „	**10**mal 2,	„ „	2	in	20	10mal	„

in der Ordnung wiederholt durchsprechen und frage sie dann auch außer der Ordnung ab, bis völlige Sicherheit erreicht ist.

Hierauf folgen Übungen im Messen, wobei ein Rest übrigbleibt. Z. B.

Wie oft ist 2 in 13 enthalten?

Wenn man an der Rechenmaschine die Zahl 13 darstellt, dann immer 2 Kugeln mit einem Griffe nach rechts schiebt, so findet man, dass sich 2 Kugeln von 13 Kugeln 6mal wegnehmen lassen, uud dass noch 1 Kugel übrigbleibt. Was übrig bleibt, heißt der Rest. 2 ist also in 13 6mal enthalten und es bleibt noch 1 als Rest. — Wenn Kugeln, welche sich nicht auf demselben Stabe befinden, wegzuzählen sind, so muß man sie auf einmal fassen und gleichzeitig nach rechts schieben.

Mit Rücksicht auf die Vielfachen. 13 ist kein Vielfaches von 2, die nächstkleinere Zahl, welche ein Vielfaches von 2 ist, ist 12. nämlich 6mal 2; 13 ist also 6mal 2 und noch 1, oder 2 ist in 13 6mal enthalten und es bleibt noch 1 übrig.

Wie oft ist 2 in 15, 19, 9, 5, 17, 3, 7 enthalten?

Wie oft kann man 2 von 1 wegnehmen? Was bleibt übrig, wenn ich von 1 nichts wegnehme? 2 ist also in 1 keinmal enthalten, es bleibt 1 (unvermindert) übrig.

2. Schriftliche Übungsaufgaben im II. Rechenbuche S. 8, c.

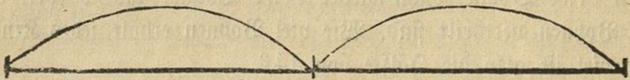
e. Theilen durch 2.

Durch das Theilen wird eine Zahl in mehrere gleiche Theile zerlegt und bestimmt, wie groß ein solcher Theil ist. Zur Veranschaulichung ist hier die Rechenmaschine höchstens beim Theilen durch 2 verwendbar; bei den übrigen Theilungen bedient man sich der Bohnen, Nüsse oder Kreuzer als Versinnlichungsmittel. Im allgemeinen wird die Größe eines Theiles durch Folgerung aus dem bekannten entsprechenden Vielfachen ohne äußere Anschauung entwickelt.

Die Begriffe der verschiedenen Theile eines Ganzen, als der Halben, Drittel, Viertel u. s. w. wurden den Schülern schon im ersten Schuljahre bei der Behandlung der ersten zwanzig Zahlen zur Anschauung gebracht, sie sollen jedoch auch hier wieder an einem Apfel, an einem Papierstreifen oder an einer Linie versinnlichet und zu größerer Klarheit erhoben werden.

1. **Mündlich.**

Hier ist ein ganzer Apfel. Wenn ich denselben zerschneide, so heißen die Stücke Theile. Zerschneide ich den Apfel durch die Mitte, so daß ein Stück eben so groß wird, als das andere, so erhalte ich zwei gleiche Theile, und jeder solche Theil ist ein halber Apfel oder die Hälfte eines Apfels.



Ein Halbes = $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

Ich ziehe auf der Schultafel eine Linie. Ich kann dieselbe in zwei ungleiche, aber auch in zwei gleiche Theile theilen. Wo muß ich die Linie theilen, damit beide Theile gleich groß werden? Ich theile also die Linie genau in der Mitte; was ist dann ein Theil? Ein Halbes oder die Hälfte der ganzen Linie. Die Hälfte von eins ist also ein Halbes. — Wie viel Halbe hat 1 Ganzes? 2 Halbe sind also 1 Ganzes. — Wie viel Halbe sind 2 Ganze? 3, 4, 5 . . . 10 Ganze? — Wie viel Halbe sind 3 Ganze und 1 Halbes? 3 Ganze sind 3mal 2 Halbe, d. i. 6 Halbe, und 1 Halbes sind 7 Halbe. — Wie viel Halbe sind $5 + \frac{1}{2}$? $2 + \frac{1}{2}$? $4 + \frac{1}{2}$? — Wie viel Halbe sind $3 - \frac{1}{2}$? $6 - \frac{1}{2}$? $4 - \frac{1}{2}$?

Nun wird die Hälfte der einzelnen Zahlen von 1 bis 20 sowohl anschaulich als mit Rücksicht auf die bekannten Vielfachen entwickelt, und zwar zuerst, wenn die Hälfte eine ganze Zahl, und dann, wenn die Hälfte keine ganze Zahl ist.

Wie viel ist die Hälfte von 14?

(An der Rechenmaschine.) Die Zahl 14 wird so dargestellt, daß die 10 Kugeln des ersten und die 4 Kugeln des zweiten Stabes sich in der Mitte befinden und links und rechts freien Raum lassen. Nun wird zuerst auf dem ersten Stab, hierauf auf dem zweiten je eine Kugel nach links und eine nach rechts geschoben, bis alle Kugeln auf den beiden Seiten erscheinen. Dann sind auf beiden Seiten gleich viele Kugeln, d. i. die

14 Kugeln sind in 2 gleiche Theile getheilt. Auf jeder Seite sind 5 und 2, d. i. 7 Kugeln; also ist die Hälfte von 14 gleich 7.

(Mit Bohnen.) Hier sind 14 Bohnen; sie sollen unter 2 Kinder so vertheilt werden, dass das eine so viel wie das andere, dass also jedes die Hälfte bekommt. Ich gebe jedem zuerst eine Bohne, dann wieder eine Bohne, und so fort, bis alle Bohnen vertheilt sind. Wie viel Bohnen erhält jedes Kind? Wie viel ist also die Hälfte von 14?

(Aus den Vielfachen.) Nachdem die 2fachen der Zahlen, nämlich $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 3 = 6$ . . . wiederholt wurden, fragt der Lehrer: ist 14 das 2fache oder Doppelte von einer Zahl? Von welcher Zahl? Von 7. Was ist also die Hälfte von 14? — Oder: 14 ist 2mal wie viel? Die Hälfte von 14 ist also 1mal 7, d. i. 7.

Auf dieselbe Art wird die Hälfte von jeder der übrigen durch 2 theilbaren Zahlen bis 20 entwickelt, und die Schlussreihe

2 ist	2mal	**1**;	die Hälfte von	2	ist also	1;
4 „	2mal	**2**;	„ „ „	4	„ „	2;
6 „	2mal	**3**;	„ „ „	6	„ „	3;
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
20 „	2mal	**10**;	„ „ „	20	„ „	10

in und außer der Ordnung so lange durchgesprochen, bis volle Sicherheit vorherrscht.

Hierauf wird das Halbieren solcher Zahlen, die durch 2 nicht ohne Rest theilbar sind, vorgenommen. Z. B.

Wie viel ist die Hälfte von 9?

(Mit Kreuzern.) Ich soll 9 Kr. unter 2 Schüler so vertheilen, dass jeder die Hälfte bekommt. Ich gebe jedem zuerst 1 Kr., dann noch 1 Kr. und wieder 1 Kr., und noch 1 Kr. Wie viel Kreuzer hat jetzt jeder? Wie viel ist vertheilt worden? 2mal 4 Kr., d. i. 8 Kr. Wie viel bleibt noch zur Vertheilung übrig? Für 1 Kr. setze ich 2 halbe Kreuzer und gebe jedem

Schüler noch 1 halben Kreuzer. Wie viel hat dann jeder Schüler? — Die Hälfte von 9 ist $4\frac{1}{2}$.

(Mit Rücksicht auf die Vielfachen.) Ist 9 das 2fache einer Zahl? Welches ist das nächstkleinere 2fache? Von welcher Zahl ist 8 das 2fache? Was ist also die Hälfte von 8? 9 besteht aber aus 8 und 1; die Hälfte von 8 ist 4, die Hälfte von 1 ist $\frac{1}{2}$; die Hälfte von 9 ist also 4 und $\frac{1}{2}$. — Oder: 9 ist 2mal wie viel? 9 ist 2mal 4 und noch 1; die Hälfte von 2mal 4 ist 1mal 4, d. i. 4, die Hälfte von 1 ist $\frac{1}{2}$, die Hälfte von 9 ist also $4\frac{1}{2}$.

Wie viel ist die Hälfte von 7, 13, 17, 3, 19, 11, 5, 15?

2. Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 8, d.

Die Aufgaben der letzten Gruppe sind anfänglich vollständig, wie bei $\frac{1}{2}$ v. 15 angeführt ist, darzustellen; später können die Schüler sogleich nur das Resultat, nämlich $\frac{1}{2}$ v. 15 $= 7\frac{1}{2}$, anschreiben.

f. Schnellrechnen.

Zur Wiederholung der bisher geübten Operazionen gebe man Aufgaben, in welchen diese Operazionen in bunter Aufeinanderfolge in Verbindung treten, und wende dabei, um nebst reger Bethätigung und unausgesetzter Aufmerksamkeit aller Schüler zugleich die größtmögliche Fertigkeit im Rechnen zu erzielen, das sogenannte Schnellrechnen an. (I. Abth. §. 13, D, a.)

Z. B.: Wie viel ist 8 und 6? — weniger 4? — davon die Hälfte? — und 3? — das 2mal?

Wie viel ist 12 weniger 5? — 2mal? — und 4? — die Hälfte? — und 6? — weniger 9? u. s. w.

Auf solche Übungen im Schnellrechnen sollte in jeder Schule ein großer Wert gelegt werden; sie spornen, da auf die Frage die Antwort folgen soll, zur Kraftanstrengung und Sammlung der Gedanken an und befördern den Lerneifer. Nur hüte sich der

Lehrer, dabei die schwächeren Schüler zu übertreiben, oder sie gar gänzlich zurückzulassen und sich nur an die fähigeren zu halten. Bei schwächeren Schülern warte er etwas zu, bis sie das Resultat angeben, und hebe eben ihre Leistungen besonders hervor.

g. Abgeleitete Aufgaben.

Welche Zahl ist um 9 größer als 7? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 10 um 5 vergrößere? — Von welcher Zahl muß man 6 wegnehmen, um 8 zu erhalten? — Von welcher Zahl bleibt 4 übrig, wenn man von ihr 8 weggenommen hat? — Welche Zahl erhalte ich, wenn ich in der Zahlenreihe von 9 an noch um 3 fortschreite? — Wie heißt die 5te Zahl nach 6? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 10 und 7 zusammenzähle? — Welche Zahl ist so groß, als 8 und 8 zusammen?

Wie viel erhalte ich, wenn ich von 17 7 wegnehme? — Wie viel erhalte ich, wenn ich 20 um 5 vermindere? — Wie viel bleibt übrig, wenn von 11 4 abgezogen wird? — Welche Zahl erhalte ich, wenn ich in der Zahlenreihe von 18 an um 9 zurückschreite? — Wie heißt die 7te Zahl vor 15? — Um wie viel ist 17 größer als 8? — Um wie viel ist 2 kleiner als 10? — Welches ist der Unterschied zwischen 16 und 6? — Wie viel muß ich von 18 wegnehmen, um 8 zu erhalten? — Um wie viel muß ich 12 vermindern, um 7 zu erhalten? — Ich denke mir eine Zahl; zähle ich zu ihr 4, so erhalte ich 13; welche Zahl habe ich mir gedacht? — Zu welcher Zahl muß ich 5 zuzählen, um 11 zu erhalten? — Wenn ich 17 in zwei Zahlen zerlege, von denen die eine 10 ist; wie groß ist die andere? — 14 besteht aus zwei Zahlen, die eine ist 6; wie groß ist die andere?

Welche Zahl erhalte ich, wenn ich 2 4mal nehme? — Welche Zahl ist das 6fache von 2? — Wie heißt das Doppelte von 9? — Welche Zahl ist 8mal so groß als 2? — Welche Zahl beträgt 5mal so viel als 2? — Von welcher Zahl läßt sich 2 7mal wegnehmen? — In welcher Zahl ist 2 6mal enthalten? — Von welcher Zahl beträgt die Hälfte 4?

Wie vielmal 2 ist 18? — Das Wievielfache von 2 ist 10? — Wie vielmal 2 muß ich zusammenzählen, um 6 zu erhalten? — Wie viele gleiche Zahlen, deren jede 2 ist, muß ich zusammenzählen, um 12 zu erhalten? — Wie oft kann ich 4 um 2 vermindern? — Wie oft kann ich 2 von 11 wegnehmen? — Wie oft kann 2 von 9 abgezogen werden? — Aus wie vielmal 2 besteht 8? — Der wievielte Theil von 16 ist 2? — In wie viele Theile muß ich 18 zerlegen, damit auf jeden Theil 2 kommt?

Wie viel erhalte ich, wenn ich die Zahl 16 in 2 gleiche Theile zerlege? — Aus welchen 2 gleichen Zahlen besteht 12? — Welche Zahl muß ich 2mal nehmen, um 6 zu erhalten? — Von welcher Zahl ist 18 das Doppelte? — Welche Zahl ist in 10 2mal enthalten?

B. Anwendungen.

Angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche S. 9, e.

Bei einigen dieser Aufgaben sind auch schon die Schlüsse angedeutet, welche die Schüler bei der Auflösung zu bilden haben; für andere dieser Aufgaben lassen wir sie hier folgen:

Zur Aufgabe 4): 1 Fünfer hat 5 Kr., 2 Fünfer sind 2 × 5 Kr., d. i. 10 Kr., und 2 Kr. sind 12 Kr.

Zur Aufgabe 16): Für 1 Kr. erhält man 2 Griffel, für 2 Kr. erhält man 2 × 2 Griffel, d. i. 4 Griffel u. s. w.

Zur Aufgabe 18): Für 2 Kr. erhält man 1 Ei; 6 Kr. sind 3 × 2 Kr., für 6 Kr. erhalte ich daher 3 × 1 Ei, also 3 Eier u. s. w.

Zur Aufgabe 19): 2 Liter kosten 18 Kr., 1 Liter ist nur die Hälfte von 2 Liter, es kostet also auch nur die Hälfte von 18 Kr., d. i. 9 Kr.

Zur Aufgabe 20): 8 Meter kosten 8 × $2\frac{1}{2}$ fl.; 8mal 2 fl. sind 16 fl., 8 × $\frac{1}{2}$ fl. sind $\frac{8}{2}$ fl., d. i. 4 ganze Gulden; 16 fl. und 4 fl. sind 20 fl.; 8 Meter kosten also 20 fl.

---

§. 41. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis dreißig.

A. Reines Rechnen.

a. Vorwärts- und Rückwärtszählen. Die Reihe der ungeraden und der geraden Zahlen; Anschreiben und Lesen derselben.

b. Zu- und Wegzählen.

Nachdem wir uns in dem Vorhergehenden auf das Zu- und Wegzählen der Einer beschränkt und darin einen sicheren Grund gelegt haben, werden wir auf dieser und den folgenden Stufen das Zu- und Wegzählen auf alle daselbst auftretenden Fälle ausdehnen, und daher folgende Übungen vornehmen:

1. **Mündlich.**

a) Zuzählen der Einer, zuerst innerhalb desselben Zehners, dann mit Überschreitung des Zehners

Um hier das bereits Geübte zu wiederholen und gleichzeitig zu erweitern, erscheint es am angemessensten, zu Zahlen, welche um 10 fortschreiten, die also gleiche Einer haben, dieselbe Zahl zuzuzählen. Z. B.

Wie viel ist 6 und 2? — Wie viel wird nun 16 und 2 sein? (An der Rechenmaschine.) Nachdem die Zahl 16 dargestellt wurde, schiebt der Lehrer zu den 6 Kugeln des zweiten Stabes noch 2 Kugeln hin. Wie viel Kugeln sind nun da? Oben sind 10, unten 6 und 2, d. i. 8; wie viel zusammen? 16 und 2 ist 18. — Wie viel ist 26 und 2? (Die Veranschaulichung geschieht auf gleiche Weise an der Rechenmaschine; auch eignen sich dazu vorzüglich unsere Münzen.) Hier sind 2 Zehner und daneben 6 Kr.; wie viele Kreuzer sind es? Zu den 6 Kr. lege ich noch 2 Kr.; dann habe ich 2 Zehner und 8 Kr. oder 28 Kr.

Die Schüler gelangen dadurch zu der Einsicht, dass die Rechnungen 16 + 2 = 18 und 26 + 2 = 28 auf dem bekannten Rechnungsfalle 6 + 2 = 8 beruhen, dass dabei die Zahl 2 nur zu den Einern zugezählt wird, die Zehner aber ungeändert bleiben.

Man führe eben so durch

4 + 3, 14 + 3, 24 + 3; 2 + 4, 12 + 4, 22 + 4;
8 + 1, 18 + 1, 28 + 1; 3 + 5, 13 + 5, 23 + 5;
6 + 3, 16 + 3, 26 + 3 u. s. w.

Bevor man zu dem Zuzählen mit Überschreitung des Zehners übergeht, muß vor allem die Ergänzung einer gegebenen Zahl zu dem nächsten Zehner tüchtig geübt werden.

Wie viel ist

9 + 1? 19 + 1? 29 + 1?
8 + 2? 18 + 2? 28 + 2?
7 + 3? 17 + 3? 27 + 3? u. s. w.

Wie viel ist 6 und 7? — Wie viel ist 16 und 7? (An der Rechenmaschine.) Die Zahl 16 wird dargestellt; dann schiebt man zuerst auf dem zweiten Stabe die noch vorhandenen 4 Kugeln nach links und spricht: 16 und 4 ist 20. Wir haben aber 7 zuzuzählen, 7 ist 4 + 3, wir müßen also noch 3 zuzählen; 20 und 3 (indem auf dem dritten Stabe 3 Kugeln nach links geschoben werden) ist 23; also 16 + 7 = 23. — (Mit Münzen.) Hier ist 1 Zehner und 6 Kr., zu diesem soll ich 7 Kr. zuzählen. Ich lege zu den 6 Kr. zuerst 4 Kr., dann sind es 10 Kr.; dafür kann ich 1 Zehner hinlegen; wie viel Zehner sind es jetzt? Wie viel Kreuzer habe ich von den 7 Kr. noch hinzuzulegen? Dann erhalte ich 2 Zehner und 3 Kr., oder 23 Kr.

Die Zahl, welche zugezählt werden soll, wird hier immer so zerlegt, dass zuerst die Zehner ergänzt und dann die noch übrigen Einer zugezählt werden.

Wie viel ist

9 + 2? 19 + 2?	7 + 4? 17 + 4?	5 + 7? 15 + 7?
8 + 5? 18 + 5?	6 + 8? 16 + 8?	4 + 9? 14 + 9?

u. s. w.

b. Wegzählen der Einer, zuerst innerhalb desselben Zehners, dann mit Übergang in den nächsten Zehner.

Wie viel ist 8 — 6? Wie viel ist 18 — 6? (An der Rechenmaschine.) Nachdem die Zahl 18 dargestellt wird, schiebt man von den 8 Kugeln des zweiten Stabes 2 Kugeln nach rechts. Wie viel Kugeln bleiben noch? Wie viel ist also 18 — 6? — (Mit Münzen.) Hier habe ich 1 Zehner und daneben 8 Kr.; nehme ich 6 Kr. weg, so bleibt noch 1 Zehner und 2 Kr., oder 12 Kr. — Ebenso entwickelt man auch 28 — 6 = 22.

Die Schüler ersehen, dass hier die Zahl von den Einern weggezählt wird, die Zehner aber unverändert bleiben, dass es sich also dabei nur um das Wegzählen im Zahlenkreise von 1 bis 10 handelt.

Wie viel ist

4 — 1? 14 — 1? 24 — 1?	8 — 5? 18 — 5? 28 — 5?
7 — 2? 17 — 2? 27 — 2?	7 — 6? 17 — 6? 27 — 6?
9 — 3? 19 — 3? 29 — 3?	9 — 7? 19 — 7? 29 — 7?
u. s. w.	u. s. w.

Wie viel ist 13 — 7? — Wie viel ist 23 — 7? (An der Rechenmaschine.) Der Lehrer stellt die Zahl 23 dar und schiebt zuerst die drei Kugeln des dritten Stabes, und dann noch 4 Kugeln des zweiten Stabes nach rechts. Wie viel Kugeln bleiben noch auf der linken Seite? 23 — 7 ist also 16. Hier wurde 7 in 3 und 4 zerlegt, und von 23 zuerst 3, dann 4 weggezählt. — (Mit Münzen.) 23 Kr. sind 2 Zehner und 3 Kr. Um von 23 Kreuzern 7 Kr. wegzuzählen, nehme ich zuerst 3 Kr.

weg; dann bleiben noch 2 Zehner oder 1 Zehner und 10 Kr.; nun zähle ich davon noch 4 Kr. weg, dann bleibt 1 Zehner und 6 Kr., oder 16 Kr.

Hier werden also zuerst so viele Einer, dass man auf die reinen Zehner herabkommt, und dann die noch übrigen Einer weggezählt.

Wie viel ist

13—3?	23—3?	11—2?	21—2?	15—8?	25—8?
17—7?	27—7?	14—6?	24—6?	18—9?	28—9?

u. s. w.

c) Zuzählen der Zehner zu Zehnern, zu Zehnern mit Einern, dann Zuzählen der Zehner mit Einern zu Zehnern mit Einern.

Wie viel ist 20 und 10? — 20 sind 2 Zehner, 10 sind 1 Zehner; 2 Z. und 1 Z. sind 3 Z. oder 30; 20 und 10 ist also 30. (Ist an der Rechenmaschine zu veranschaulichen.)

Wie viel ist 18 und 10? — 10 und 10 ist 20, und 8 ist 28. (An der Rechenmaschine.) Wenn eine zweistellige Zahl mit einer andern zweistelligen in Beziehung zu bringen ist, so wird an der Rechenmaschine die erstere am angemessensten so dargestellt, dass links oben auf dem ersten Stabe die Einer, und unten die Zehner erscheinen; ob die Einer unten oder oben sind, ändert nichts an dem anschaulichen Zahlbilde. Der Lehrer stellt also für die vorliegende Aufgabe auf dem ersten Stabe 8 und auf dem zweiten 10 Kugeln dar, schiebt dann die 10 Kugeln des dritten Stabes nach links und spricht: 10 und 10 ist 20, und 8 ist 28.

Wie viel ist 11 + 10? 15 + 10? 19 + 10? u. s. w.

Im Anfange werden diese Aufgaben vollständig mit Zerlegung, dann bloß mit der Angabe des Ergebnisses gelöst, z. B. 18 und 10 ist 28. — Diese kürzere Auflösungsweise muß zuletzt zur vollen Fertigkeit gebracht werden.

Wie viel ist 15 und 13? — Man zählt zu der ersten Zahl zuerst die Zehner und dann die Einer der letzten Zahl nämlich: 15 und 10 ist 25, und 3 ist 28. (An der Rechenmaschine.) Die Zahl 15 wird so dargestellt, dass auf dem ersten Stabe links 5, auf dem zweiten 10 Kugeln stehen. Dann schiebt man alle 10 Kugeln des dritten Stabes und 3 Kugeln des ersten Stabes nach links. Nun sind links 28 Kugeln; also 15 + 13 = 28.

Wie viel ist 12 und 17? 13 und 14? 15 und 13? 11 und 19? u. s. w.

d. Wegzählen der Zehner von Zehnern, von Zehnern mit Einern, dann Wegzählen der Zehner mit Einern von Zehnern mit Einern.

Wie viel ist 30 weniger 20? — Anfangs: 30 sind 3 Zehner, 20 sind 2 Zehner, 3 Z. weniger 2 Z. ist 1 Z., oder 10; also 30 weniger 20 ist 10. (An der Rechenmaschine.)

Wie viel ist 27 weniger 10? — Anfangs: 20 weniger 10 ist 10, und 7 dazu ist 17. Später sogleich: 27 weniger 10 ist 17. (An der Rechenmaschine.) Die Zahl 27 wird so dargestellt, dass 7 Kugeln auf dem ersten Stabe stehen. Man schiebt dann die 10 Kugeln des dritten Stabes nach rechts und spricht: 27 weniger 10 ist 17.

Wie viel ist 28 — 10? 21 — 10? 26 — 10? u. s. w.

Wie viel ist 29 weniger 12? — Hier zählt man von der größeren Zahl zuerst die Zehner, dann die Einer der kleineren Zahl weg, also: 29 weniger 10 ist 19, weniger 2 ist 17. (An der Rechenmaschine.) Man stellt die Zahl 29 so dar, dass die 9 Einer am ersten Stabe erscheinen, schiebt dann alle 10 Kugeln des dritten Stabes und noch 2 Kugeln des ersten Stabes nach rechts. Zählt man nun die links bleibenden Kugeln, so findet man deren 17; also 29 — 12 = 17.

Wie viel ist 27 — 14? 23 — 11? 28 — 15? 30 — 16? u. s. w.

e. Zerlegung der Zahlen in zwei Bestandtheile.

Ist der eine Bestandtheil mit der gegebenen Zahl innerhalb desselben Zehners, so darf man nur zu den Einern so viel zuzählen, dass man die Einer der gegebenen Zahl erhält; was zugezählt wurde, ist der andere Bestandtheil. Z. B. 27 ist 24 und wie viel? 4 und 3 ist 7; 24 und 3 ist 27.

15 und wie viel ist 19? 11 +. = 18; 21 +. = 25 u. s. w.

Wenn sich aber der eine Bestandtheil mit der zu zerlegenden Zahl nicht innerhalb desselben Zehners befindet, so muß man zu demselben zuerst so viel zuzählen, dass man den nächsten Zehner ergänzt; dann zählt man noch so viel zu, dass man die gegebene Zahl selbst erhält; die beiden zugezählten Zahlen zusammengenommen bilden den zweiten Bestandtheil. Z. B. 12 und wie viel ist 27? 12 und 8 ist 20, und 7 ist 27; 8 und 7 ist 15; 12 und 15 ist also 27.

13 und wie viel ist 21? 14 +. = 24; 15 +. = 28; 16 +. = 30 u. s. w.

2. Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 10, a.

c. Vervielfachen von 3 und mit 3.

Bei den Vielfachen der Zahl 2 haben wir das didaktische Verfahren ausführlich erklärt. Für die Vielfachen der folgenden Zahlen wird die einfache Anführung der vorzunehmenden Aufgaben genügen; nur dort, wo wesentliche Abweichungen eintreten, sollen die nöthigen Erklärungen beigefügt werden.

1. **Mündlich.**

Anschauliche Entwicklung der Vielfachen von 3 an Punkten, wie die der Vielfachen von 2 im Zahlenraume bis 20.

An der Rechenmaschine. Hier findet bei dem Übergange vom ersten Stabe auf den zweiten, und von diesem auf den dritten eine Zerlegung statt. Der Lehrer schiebt mit jedem Griffe

3 Kugeln des ersten Stabes nach links und spricht: 1mal 3 ist 3, 2mal 3 ist 6, 3mal 3 ist 9. Bei 4mal 3 erfolgt der Übergang auf den zweiten Stab; zu 9 müßen 3 zugezählt werden, es ist aber auf dem ersten Stabe nur noch 1 Kugel; 3 ist 1 und 2, es müßen also 1 Kugel des ersten Stabes und noch 2 Kugeln des zweiten Stabes nach links geschoben werden; dann erhalten wir 12 Kugeln; 4mal 3 ist also 12 u. s. w.

Durchsprechen der Vielfachen von 3 im Chor und einzeln vorwärts und rückwärts.

Fragen außer der Reihe bis zur vollen Geläufigkeit.

Auf gleiche Weise werden auch die 3fachen der einzelnen Zahlen vorgenommen.

2. Schriftlich.

1 • • • 3	$1 \times 3 =$	$3 \times 1 =$
2 • • • 6	$2 \times 3 =$	$3 \times 2 =$
3 • • • 9	$3 \times 3 =$	$3 \times 3 =$
4 • • • 12	$4 \times 3 =$	$3 \times 4 =$
u. s. w.	. . . .	. . . . .
	$10 \times 3 =$	$3 \times 10 =$

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 11, b.

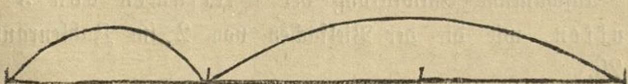
d. Messen durch 3.

1. **Mündlich.**

Wie beim Messen durch 2.

2. Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 11, c.

e. Theilen durch 3.



Ein Drittel = $\frac{1}{3}$. Zwei Drittel = $\frac{2}{3}$.

1. **Mündlich.**

Theile ich ein Ganzes, z. B. einen Apfel, einen Papierstreifen, eine Linie, in drei gleiche Theile, so erhalte ich Drittel. 1 Theil davon ist 1 Drittel, 2 solche Theile sind 2 Drittel, 3 solche Theile sind 3 Drittel und geben wieder 1 Ganzes. — Wie erhalte ich also $\frac{1}{3}$ vom Ganzen? wie erhalte ich $\frac{2}{3}$ vom Ganzen?

Wie viel Drittel sind 2 Ganze? 3, 4, 5 . . . 10 Ganze? — Wie viel Drittel sind 2 Ganze und 1 Drittel? 2 Ganze sind 2mal 3 Drittel, oder 6 Drittel, und 1 Drittel sind 7 Drittel. — Wie viel Drittel sind $3 + \frac{1}{3}$? $3 + \frac{2}{3}$? $6 + \frac{2}{3}$? $5 + \frac{1}{3}$? $9 + \frac{2}{3}$? — Wie viel Drittel sind $1 - \frac{1}{3}$? $2 - \frac{2}{3}$? $4 - \frac{1}{3}$? $8 - \frac{2}{3}$? $9 - \frac{1}{3}$?

Der dritte Theil von 1 ist $\frac{1}{3}$. — Wie viel ist der dritte Theil von 2? Wenn 3 Kinder 2 Kuchen untereinander vertheilen sollen, so theilen sie zuerst den einen Kuchen, da erhält jedes Kind 1 Drittel; hierauf theilen sie auch den zweiten Kuchen, da erhält wieder jedes 1 Drittel; wie viel Drittel kommen daher zusammen auf jedes Kind? Der dritte Theil von 2 ist also 2 Drittel.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 18?

(Anschaulich mit Nüssen.) Sollen aus 18 Nüssen 3 gleiche Häuflein gebildet werden, so lege ich auf jedes Häuflein so oft eine Nuss, bis alle Nüsse vertheilt sind. Wie viel Nüsse enthält dann jedes Häuflein? Der dritte Theil von 18 ist also 6.

(Aus den Vielfachen.) 18 ist 3mal wie viel? 18 ist 3mal **6**; der dritte Theil von 18 ist also 1mal 6, oder 6.

24 ist 3mal wie viel? 24 ist 3mal 8; der dritte Theil von 24 ist also 8.

Die Schlussreihe

3	ist	3mal	**1**,	das	Drittel	von	3	ist also	1;
6	„	3mal	**2**,	„	„	„	6	„ „	2;
9	„	3mal	**3**,	„	„	„	9	„ „	3;
.	.	.	.	.	.	.	.	. .	.
30	„	3mal	**10**,	„	„	„	30	„ „	10;

muß wiederholt bis zur Geläufigkeit durchgesprochen werden.

Dann folgen Übungen im Theilen, wo dieses auf einen Bruch führt. Z. B.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 20?

Ist 20 das 3fache einer Zahl? Welches ist das nächstkleinere 3fache? 20 besteht nun aus 18 und 2; der dritte Theil von 18 ist 6, der dritte Theil von 2 ist 2 Drittel; der dritte Theil von 20 ist also 6 und $\frac{2}{3}$.

Wie viel ist das Drittel von 7, 8, 16, 17, 28, 29, 4, 5, 22, 23, 10, 11, 25, 26, 13, 14?

2. Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 12, d.

Die letzte Gruppe enthält Wiederholungsübungen, theilweise in Verbindung mit dem Zu- und Wegzählen.

f. Schnellrechnen.

Wie viel ist 7 und 2? — davon das Drittel? — und 5? — 3mal? — weniger 6? — die Hälfte? — 3mal?

12 — 3, + 5, die Hälfte, 3mal, — 3, das Drittel, + 4, 2mal.

3 × 9, — 7, + 4, das Drittel, + 2, 2mal, — 8, die Hälfte, 3mal u. s. w.

g. Abgeleitete Aufgaben.

Wie im Zahlenraume bis 20.

Angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche S. 12 u. 13. e.

Bei diesen ist unnachsichtlich darauf zu bestehen, dass die Schüler während der Auflösung selbst auch die Schlüsse, auf welchen diese beruht, bündig aussprechen.

§. 42. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis vierzig.

Nachdem wir bei den vorhergehenden Zahlenräumen das zu beobachtende unterrichtliche Verfahren ausführlich dargelegt haben, werden wir uns bei den folgenden Zehnern zur Vermeidung von Wiederholungen darauf beschränken, die auszuführenden schriftlichen und angewandten Aufgaben bloß anzudeuten und nur dort, wo neue Übungen auftreten, die erforderlichen Erläuterungen beizufügen.

Im Zahlenraume bis 40 ist das didaktische Verfahren beim mündlichen Rechnen das gleiche, wie in dem vorhergehenden Zahlenraume; nur tritt bezüglich der Darstellung an der Rechenmaschine ein neuer Fall ein. Z. B.

Beim Zuzählen: Wie viel ist 17 + 15? — Die Zahl 17 wird so dargestellt, dass die 7 Einer auf dem ersten Stabe links erscheinen; 15 denkt man sich in 10 und 5 zerlegt. Man schiebt nun zuerst alle 10 Kugeln des dritten Stabes, und dann, weil noch 5 = 3 + 2 zuzuzählen ist, außer den 3 Kugeln des ersten Stabes noch 2 Kugeln des vierten Stabes nach links. Man erhält dadurch zuerst 17 und 10 ist 27, dann 27 und 5 ist 32.

Beim Wegzählen: Wie viel ist 34 — 16? — Die Zahl 34 wird so dargestellt, dass die 4 Einer oben und die 3 Zehner unten stehen; 16 denkt man sich in 10 und 6 zerlegt. Nun schiebt man zuerst alle 10 Kugeln des vierten Stabes, und hierauf, da noch 6 = 4 + 2 wegzuzählen ist, außer den 4 Kugeln des ersten Stabes noch 2 Kugeln des dritten Stabes nach rechts; dann bleiben noch 18 Kugeln. Man erhält nämlich zuerst 34 weniger 10 ist 24, dann 24 weniger 6 ist 18.

Schriftliche Übungen und angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche Seite 13—17.

---

§. 43. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis fünfzig.

Für das Zu- und Wegzählen der Einer empfehlen sich hier und für die Folge, da man bereits ein größeres Zahlengebiet beherrscht, am besten die Reihen.

So beim Zuzählen:

Fange mit 1 an und zähle immer 2 dazu.

1 und 2 ist 3; 3 und 2 ist 5; 5 und 2 ist 7 u. s. w. bis 47 und 2 ist 49.

Fange	mit	1	an	und	zähle immer	1, 3, 4 … 8, 9	dazu.
"	"	2	"	"	"	2, 3, 4 … 8, 9	"
"	"	3	"	"	"	3, 4 … 8, 9	"
"	"	4	"	"	"	4, 5 … 8, 9	"
"	"	5	"	"	"	5, 6, 7, 8, 9	"
"	"	6	"	"	"	6, 7, 8, 9	"
"	"	7	"	"	"	7, 8, 9	"
"	"	8	"	"	"	8, 9	"
"	"	9	"	"	"	9	"

Ebenso beim Wegzählen:

Fange mit 50 an und zähle immer 2 weg.

50 weniger 2 ist 48; 48 weniger 2 ist 46; 46 weniger 2 ist 44 u. s. w. bis: 2 weniger 2 ist nichts.

Fange	mit	50	an	und	zähle immer	1, 3, 4 … 8, 9	weg.
"	"	49	"	"	"	2, 3, 4 … 8, 9	"
"	"	48	"	"	"	3, 4 … 8, 9	"
"	"	47	"	"	"	4, 5 … 8, 9	"
"	"	46	"	"	"	5, 6, 7, 8, 9	"
"	"	45	"	"	"	6, 7, 8, 9	"
"	"	44	"	"	"	7, 8, 9	"
"	"	43	"	"	"	8, 9	"
"	"	42	"	"	"	9	"

Schriftliche und angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche Seite 17—21.

Die erste Gruppe auf S. 17 enthält Aufgaben über das Zu- und Wegzählen der Einer in Reihen. Diese sind ein vorzügliches Mittel, eine oder mehrere Abtheilungen schriftlich zu beschäftigen; sie lassen sich mit wenigen Ziffern andeuten und eben so leicht auch kontrolieren. Anstatt z. B. bei der Aufgabe 4 zu sagen: Fanget bei der Zahl 2 an und zählet immer 3 dazu, also $2 + 3 = 5$, $5 + 3 = 8$, $8 + 3 = 11 \ldots$, kann der Lehrer die Aufgabe ganz kurz mit den Worten bezeichnen: Rechnet die Reihe $2 + 3$.

---

§. 44. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis sechzig.

Unterrichtlicher Vorgang wie bei den früheren Zahlenräumen.

Schriftliche und angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche Seite 21—25.

---

§. 45. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis siebenzig.

In dem Vorhergehenden haben wir uns auf das Vervielfachen der Einer (Grundzahlen) beschränkt. Die weiteren Übungen werden sich, da wir uns nun schon in einem größeren Zahlenkreise bewegen können, auch auf das Vervielfachen der Zehner, sowie der Zehner und Einer erstrecken, dann ebenso im Messen und Theilen eine angemessene Erweiterung erhalten.

Nachdem die Vielfachen von 7 und die 7fachen der ersten zehn Zahlen in gleicher Weise, wie z. B. das Vervielfachen von 3 und mit 3, entwickelt wurden, folgen Übungen im Vervielfachen zweistelliger Zahlen.

Wie viel ist 2×10? 3×10? 5×10? 7×10?

Wie viel ist 2 × 20? — 20 sind 2 Zehner, 2mal 2 Z. sind 4 Z., d. i. 40. (An der Rechenmaschine zu veranschaulichen.)

Wie viel ist 2 × 30? — 3 × 20?

Wie viel ist 2 × 12? — 2mal 10 ist 20, 2mal 2 ist 4; 20 und 4 ist 24. (An der Rechenmaschine:) Die Zahl 12 wird so dargestellt, dass auf dem ersten Stabe 2 und auf dem zweiten 10 Kugeln links erscheinen; man hat 1 Zehner und 2 Einer. Da Zehner und Einer 2mal genommen werden sollen, so schieben wir alle 10 Kugeln des dritten und noch 2 Kugeln des ersten Stabes nach links. Zählen wir die links stehenden Kugeln, so finden wir deren 24; also 2 × 12 = 24.

Wie viel ist 2 × 11? 2 × 13? 2 × 14? 2 × 23? 2 × 31? 2 × 21? 4 × 12? 5 × 11?

Wie viel ist 2 × 27? — 2mal 20 ist 40, 2mal 7 ist 14; 40 und 14 ist 54. (An der Rechenmaschine:) Die Zahl 27 wird so dargestellt, dass die 7 Einer oben erscheinen. Schieben wir zuerst die sämmtlichen 20 Kugeln des vierten und fünften Stabes, und dann nebst den 3 Kugeln des ersten Stabes noch 4 Kugeln (7 ist 3 und 4) des sechsten Stabes nach links, so erhalten wir 5 Zehner und 4 Einer, wobei die Einer auf dem untersten Stabe stehen; also 2 × 27 = 54.

Wie viel ist 2 × 15? 2 × 16? 2 × 18? 2 × 26? 2 × 29? 3 × 18? 4 × 16?

Auch beim Messen kann man schon mit solchen Aufgaben des Messens beginnen, bei denen die kleinere Zahl in der größeren mehr als 10mal enthalten ist.

Wie oft ist 2 in 60 enthalten? — 2 ist in 6 3mal enthalten, 60 ist aber 10mal so viel als 6, folglich ist 2 in 60 10mal so oft als in 6, also 30mal enthalten.

Ebenso

2 in 2 = 1	2 in 4 = 2	3 in 3 = 1	3 in 6 = 2
2 in 20 = 10	2 in 40 = 20	3 in 30 = 10	3 in 60 = 20

Wie oft ist 2 in 48 enthalten? — 48 ist 40 und 8, 2 ist in 40 20mal, in 8 4mal, in 48 also 24mal enthalten.

Wie oft ist enthalten 2 in 24? 2 in 26? 2 in 42? 2 in 46? 3 in 63? 3 in 69?

Wenn die kleinere Zahl in den Zehnern der größeren nicht ohne Rest enthalten ist, muß man die größere Zahl so zerlegen, dass der eine Bestandtheil Zehner enthält, die ein Vielfaches der kleineren Zahl sind. Z. B. Wie oft ist 2 in 54 enthalten? — 54 ist 40 und 14, 2 ist in 40 20mal, in 14 7mal, in 54 also 27mal enthalten.

Wie oft ist enthalten 2 in 36? 2 in 32? 2 in 58? 2 in 34? 3 in 42? 3 in 48? 3 in 51? 3 in 50? 4 in 52? 4 in 56? 4 in 60?

Ebenso wird beim Theilen in diesem Zahlenraume mit solchen Aufgaben der Anfang gemacht, bei denen der gesuchte Theil größer als 10 ist.

Wie viel ist die Hälfte von 40? — 40 sind 4 Zehner, die Hälfte von 4 Z. sind 2 Z. oder 20; also $\frac{1}{2}$ von 40 = 20.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 20? $\frac{1}{2}$ von 60? $\frac{1}{3}$ von 30? $\frac{1}{3}$ von 60?

Ist die zu theilende Zahl zweistellig, so zerlege man sie in zwei Bestandtheile und nehme als ersten eine solche Zehnerzahl an, welche sich in die verlangte Anzahl gleicher Theile theilen lässt. Z. B.

Wie viel ist das Drittel von 69? — 69 ist 60 und 9, $\frac{1}{3}$ von 60 ist 20, $\frac{1}{3}$ von 9 ist 3, $\frac{1}{3}$ von 69 also 20 und 3, d. i. 23.

Wie viel ist die Hälfte von 32? — 32 ist 20 und 12, die Hälfte von 20 ist 10, die Hälfte von 12 ist 6, die Hälfte von 32 also 10 und 6, d. i. 16.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 24? $\frac{1}{2}$ von 28? $\frac{1}{2}$ von 44? $\frac{1}{2}$ von 46? $\frac{1}{2}$ von 64? $\frac{1}{2}$ von 34? $\frac{1}{2}$ von 35? $\frac{1}{2}$ von 52? $\frac{1}{2}$ von 50? $\frac{1}{3}$ von 42? $\frac{1}{3}$ von 54? $\frac{1}{3}$ von 58? $\frac{1}{4}$ von 52? $\frac{1}{4}$ von 60? $\frac{1}{4}$ von 65?

Schriftliche und angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche Seite 25–29.

§. 46. Rechnungsübungen in den Zahlenräumen bis achtzig und neunzig.

Der didaktische Vorgang wie bei der Behandlung der vorhergehenden Zehnerräume.

Schriftliche und angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche Seite 29—39.

Die erste Gruppe der schriftlichen Übungen im Zahlenraume bis 90 auf Seite 34 enthält Reihen, in denen man bald zwei verschiedene Zahlen abwechselnd zuzuzählen, bald zwei verschiedene Zahlen abwechselnd wegzuzählen, bald abwechselnd eine Zahl zuzuzählen und eine andere wegzuzählen hat. Ihre Bedeutung ist in den angefangenen Reihen 1, 2 und 3 angegeben.

---

§. 47. Rechnungsübungen im Zahlenraume bis hundert.

Mit dieser Stufe gelangt der Zahlenkreis bis 100 zum vollständigen Abschlusse. Indem dabei das bisherige Rechnen mit Rücksicht auf den erweiterten Zahlenraum zu vervollständigen und insbesondere der Zahl 100, da sie bei unseren Münzen, Maßen und Gewichten eine so wichtige Rolle spielt, die größte Beachtung zu widmen ist, müßen zugleich alle in den früheren Zahlenräumen vorgenommenen Rechnungsübungen auf das sorgfältigste wiederholt werden. Darum ist ein längeres Verweilen bei dieser Stufe unabweisbar geboten. Was von jedem Schüler am Schlusse des zweiten Schuljahres unbedingt gefordert werden muß, ist die volle Sicherheit und Fertigkeit im Zu- und Wegzählen der Grundzahlen, in dem Einmaleins und in den daraus sich ergebenden Aufgaben des Messens und des Theilens.

Der Stufengang bleibt der bisher befolgte.

Schriftliche Aufgaben im II. Rechenbuche S. 39—45.

Die Aufgaben der letzten Gruppe auf S. 40 sollen, da sie im Hinblick auf die Hunderttheilung unseres Guldens, Meters, Hektars, Hektoliters und Kilogramms sehr häufig in Anwendung kommen, bis zur größten Fertigkeit durchgeübt werden.

Bei den Aufgaben der Gruppe auf S. 45 sollen die Schüler anfangs die vollständige Ausrechnung, wie sie dort angegeben ist, darstellen, später nur die Resultate anschreiben.

Angewandte Aufgaben im II. Rechenbuche S. 45—48.

---

§. 48. Preisberechnungen.

Durch die Wichtigkeit, welche die Preisberechnungen für das praktische Leben haben, erscheint es gerechtfertiget, dass denselben schon bei der Behandlung des engeren Zahlenraumes bis 100 eine besondere Stelle eingeräumt werde. Die hieher gehörigen Aufgaben führen auf das Vervielfachen, auf das Theilen oder auf eine Verbindung des Theilens mit dem Vervielfachen. Die Aufgaben der letzteren Art gehören zu den eigentlichen Dreisatzrechnungen und müßen auf dieser Stufe so gewählt werden, dass das Theilen und Vervielfachen im Kopfe leicht vollzogen werden kann.

Wir ordnen hier die Aufgaben nach folgenden Fällen:

Man schließt

a. von dem Preise der Einheit auf den Preis der Mehrheit;

b. von dem Preise der Mehrheit auf den Preis der Einheit;

c. von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Vielfachen dieser Mehrheit;

d. von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Theiles dieser Mehrheit; endlich

e. von dem Preise der Mehrheit durch den Preis der Einheit auf den Preis einer andern Mehrheit.

Bei allen diesen Aufgaben ist auf die Bildung richtiger Schlüsse große Sorgfalt zu verwenden.

a.

Schluss von dem Preise der Einheit auf den Preis der Mehrheit.

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 49 und 50.

Diese Aufgaben haben wir in vier Gruppen eingetheilt.

1. Bei den Aufgaben der ersten Gruppe wird die Rechnung durch eine einfache Vervielfachung ausgeführt. Z. B.

1 Meter kostet 7 fl.; wie viel kosten 9 Meter?

So oft ich 1 Meter kaufe, so oft muß ich 7 fl. zahlen; 9 Meter sind 9mal 1 Meter, für 9 Meter muß ich daher 9mal 7 fl. zahlen; 9mal 7 fl. sind 63 fl.; 9 Meter kosten also 63 fl. — Kürzer: 1 Meter kostet 7 fl., 9 Meter sind 9mal 1 Meter, 9 Meter kosten also 9mal 7 fl., d. i. 63 fl.

2. Bei den Aufgaben der zweiten Gruppe beruhet die Auflösung auf dem Zusammenhange, welcher zwischen den Eintheilungszahlen unserer Münzen, Maße und Gewichte besteht. Aus der Lösung dieser Aufgaben werden die Schüler von selbst folgende allgemeine Sätze (Rechnungsvortheile) abstrahieren:

So viele Kreuzer das Decimeter, eben so viele Zehner kostet das Meter.

So viele Kreuzer das Buch Papier, eben so viele Zwanziger kostet das Rieß.

So viele Kreuzer das Kilogramm kostet, eben so viele Gulden kosten 100 Kilogramm.

So viele Kreuzer das Liter, eben so viele Gulden kostet das Hektoliter.

3. Bei den Aufgaben der dritten Gruppe wird die Rechnung durch Zerlegung in Zehner und Kreuzer ausgeführt.

Bevor die hieher gehörigen Rechnungen vorgenommen werden, sind die im Zahlenraume bis 100 vorgekommenen Aufgaben über das Verwandeln der Geldsorten als Vorübungen fleißig zu wiederholen.

Die Schlüsse, welche bei diesen im gewöhnlichen Leben besonders häufig vorkommenden Rechnungen gebildet werden müßen, sind aus der Aufgabe 19 ersichtlich.

4. Die Aufgaben der vierten Gruppe enthalten Kreuzerzahlen, welche bequeme Guldentheile sind, oder sich in solche zerlegen lassen.

Während die früher behandelte Rechnung nach Zehnern und Kreuzern allgemein mit Vortheil anwendbar ist, erscheint das Rechnen nach Guldentheilen nur dann vortheilhaft, wenn der Preis der Einheit 20 Kr. = $\frac{1}{5}$ fl., 25 Kr. = $\frac{1}{4}$ fl. oder 50 Kr. = $\frac{1}{2}$ fl. beträgt, oder wenn er von diesen Guldentheilen oder von einem Gulden nur um wenige Kreuzer abweicht.

Die Auflösung und die dabei zu bildenden Schlüsse sind in den Aufgaben 34 und 35 angedeutet.

b.

Schluſs von dem Preise der Mehrheit auf den Preis der Einheit.

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 51.

Die Aufgaben der ersten Gruppe lassen sich durch eine einfache Theilung berechnen. Z. B.

5 Dutzend kosten 20 fl.; wie viel kostet 1 Dutzend?

Will ich wissen, wie viel 1 Dutzend kostet, so muß ich die 20 fl. auf 5 Dutzend so vertheilen, daſs auf ein Dutzend so viel kommt, als auf das andere; ich muß also 20 fl. in

5 gleiche Theile zerlegen. Auf 1 Dutzend kommt also der 5te Theil von 20 fl., oder 4 fl. — Kürzer: 5 Dutzend kosten 20 fl., 1 Dutzend ist der 5te Theil von 5 Dutzend, 1 Dutzend kostet also auch nur den 5ten Theil von 20 fl., d. i. 4 fl.

Die Aufgaben der zweiten Gruppe beruhen auf dem Zusammenhange zwischen den Eintheilungszahlen der Münzen, Maße und Gewichte, und führen auf folgende Rechnungsvortheile:

So viele Zehner das Meter, eben so viele Kreuzer kostet das Decimeter.

So viele Zwanziger das Rieß Papier, eben so viele Kreuzer kostet das Buch.

So viele Gulden 100 Kilogramm kosten, eben so viele Kreuzer kostet das Kilogramm.

So viele Gulden das Hektoliter, eben so viele Kreuzer kostet das Liter.

c.

Schluss von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Vielfachen dieser Mehrheit.

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 52.

Die Lösung dieser Aufgaben führt auf das Vervielfachen; der Vorgang ist in der Aufgabe 64 angedeutet.

d.

Schluss von dem Preise der Mehrheit auf den Preis eines Theiles dieser Mehrheit.

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 52.

Die Rechnung wird, wie aus der Aufgabe 77 ersichtlich ist, bei allen diesen Aufgaben durch das Theilen ausgeführt.

e.

Schluſs von dem Preise der Mehrheit durch den Preis der Einheit auf den Preis einer andern Mehrheit.

Aufgaben im II. Rechenbuche S. 53.

Dieß sind eigentliche Regeldetri-Aufgaben, bei denen das Theilen mit dem Vervielfachen in Verbindung tritt. Z. B. 4 Rieß kosten 12 fl.; wie viel kosten 7 Rieß?

Aus dem Preise von 4 Rieß kann ich den Preis von 7 Rieß nicht unmittelbar berechnen; ich muß zuerst wissen, wie viel 1 Rieß kostet; 1 Rieß ist der 4te Theil von 4 Rieß, 1 Rieß kostet also auch nur den 4ten Theil von 12 fl., d. i. 3 fl.; 7 Rieß sind 7mal 1 Rieß, also kosten 7 Rieß 7mal 3 fl., d. i. 21 fl. Die übersichtliche Darstellung dieser Rechnung ist in der bezüglichen Aufgabe 89 angeführt.

Dritte Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **dritten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen im Zahlenraume bis 1000 und in den höheren Zahlenkreisen.

Einleitung.

---

§. 49. Die vier Grundrechnungsarten.

Die Grundverrichtung, auf welcher alles Rechnen beruht, ist das Zählen, welches gegensätzlich als Zuzählen oder als Wegzählen auftritt. Das einfache Zählen wird schrittweise, d. i. durch allmähliches Zufügen oder Wegnehmen einer Einheit, vollzogen. Die Folge der Zahlen, die dadurch entsteht, ist die natürliche Zahlenreihe. Beim Vorwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe werden die Einheiten schrittweise zugezählt, beim Rückwärtszählen schrittweise weggezählt.

Das Zählen kann auch sprungweise geschehen, indem man nicht nach und nach die Einheiten selbst, sondern in einem Akte sogleich eine Gesammtheit von Einheiten, eine Zahl, zu- oder wegzählt. Das sprungweise Zuzählen heißt Addieren, das sprungweise Wegzählen Subtrahieren. Beim Addieren schreitet man in der natürlichen Zahlenreihe von einer gegebenen

Zahl aus um eine andere gegebene Zahl nach vorwärts, beim Subtrahieren in gleicher Weise nach rückwärts.

Man kann endlich eine Zahl auch mehrmal zählen. Das mehrmalige Zu- oder Wegzählen derselben Zahl führt bezüglich auf das Multiplizieren oder das Dividieren. Beim Multiplizieren wird eine Zahl mehrmal zu sich selbst gezählt, also die gegebene Zahl selbst mehrmal genommen; beim Dividieren wird von einer Zahl eine zweite mehrmal, und zwar so oft weggezählt, als möglich ist.

Dieß ist der genetische Begriff der vier Grundoperazionen. Das Multiplizieren ist ein abgekürztes Addieren, das Dividieren ein abgekürztes Subtrahieren. Das Subtrahieren ist dem Addieren, das Dividieren dem Multiplizieren entgegengesetzt. Über die doppelte Auffassung des Dividierens als Messen und Theilen wird weiter unten bei der Division das Erforderliche gesagt werden.

§. 50. Das schriftliche Rechnen.

In dem Zahlenkreise von 1 bis 10, wie auch in dessen Erweiterung bis 20 und 100 fand zwischen Kopf- und Zifferrechnen der Ausführung nach kein Unterschied statt. Die schriftlichen Übungen schlossen sich durchgängig an die mündlichen an; dieselben Schlüsse, durch welche die Schüler beim Kopfrechnen zum Resultate gelangten, mußten sie auch beim schriftlichen Rechnen machen; Gedankengang und Form waren bei beiden durchaus dieselben.

Diese Form des schriftlichen Rechnens ist auch in dem weiteren Zahlenkreise bis 1000 noch recht gut anwendbar; sie kann jedoch beim Rechnen mit den später auftretenden größeren Zahlen, das sich meistens nicht mehr im Kopfe ausführen läßt, nicht beibehalten werden. Die Einrichtung unseres Zahlensystems bietet da eigene kürzere Formen, die von der Weise des Kopfrechnens mehr oder weniger abweichen, und das eigentliche

Zifferrechnen bilden. Mit diesem kürzeren Verfahren können die Schüler am leichtesten und zweckmäßigsten schon an den Zahlen des kleineren Zahlenraumes bis 1000 vertraut gemacht werden; es wird dadurch nicht nur in die schriftlichen Übungen dieses Zahlenkreises durch den Reiz der Neuheit mehr Anregung gebracht, sondern auch für das später auftretende Zifferrechnen mit größeren Zahlen die nöthige Grundlage gewonnen.

Das eigentliche Zifferrechnen wird übrigens in dem Zahlenraume bis 1000 bei jeder Operazion erst dann vorzunehmen sein, wenn die Schüler schon im mündlichen Rechnen volle Geläufigkeit erlangt haben. Der Lehrer hat dabei nachstehendes zu berücksichtigen:

1. Mit den technischen Ausdrücken, welche im Rechnen eingeführt sind, werden die Schüler bei den ersten Beispielen des Zifferrechnens bekannt gemacht, wozu es jedoch nicht so sehr der Definizionen, als vielmehr des wiederholten Gebrauches dieser Ausdrücke bedarf. Niemals ist mit Namen und Definizionen anzufangen; früher muß die Sache da sein, dann folgt der Name.

2. Das bei jeder Operazion zu beobachtende Verfahren soll den Schülern nicht durch bloßes Vorsagen beigebracht werden; diese müßen vielmehr durch entsprechende Fragen, durch Hinweisung auf ihre von den Zahlen und deren Verhältnissen erworbenen Kenntnisse angeleitet werden, durch angeregtes Nachdenken gleichsam selbst zu finden, was sie bei jeder Rechnungsart thun, wie sie dieses nach einander verrichten sollen, und warum das, was sie thun, richtig ist.

3. Das Rechnungsverfahren d. i. die Regel, welche auf diese Art die Schüler unter der Führung des Lehrers aus mehreren Beispielen selbst ableiten, wird schließlich in bündiger Weise in Worten ausgesprochen. Die lebendige Selbstthätigkeit ist zwar die beste Grundregel, die überall, und besonders im Rechnen, praktisch zur Anwendung kommen soll, und man kann nicht genug darauf dringen, dass aus dem Unterrichte jedes trockene und gedankenlose Regelwerk verbannt bleibe; allein es

ist eben so eitler Wahn, wenn manche fordern, dass der Schüler keine Regel anwende, dass er auf keiner Stufe etwas mechanisch übe, sondern bei der Ausrechnung stets nur heuristisch vorgehe. Mögen die Schüler noch so sehr angehalten werden, jede Rechnung durch eine Reihe von Erwägungen und Schlüssen rein geistig auszuführen, so werden sie nach vielfältiger Übung doch immer zuletzt dahin kommen, dass sie sich die mechanische Regel abstrahieren, dass ihnen das Rechnen zur Sache des unmittelbaren Könnens wird, welches jener Schlussfolgerungen nicht mehr bedarf. Will man dieses Mechanismus nennen, so ist es ein Mechanismus edlerer Art, weil ihm Einsicht und Überzeugung zu Grunde liegt.

4. Das jedesmalige Rechnungsverfahren wird an vielen reinen und angewandten Aufgaben, die theils in der Schule auszuarbeiten, theils zur häuslichen Wiederholung aufzugeben sind, eingeübt. Die von den Schülern zu Hause ausgearbeiteten Aufgaben müßen von dem Lehrer durchgesehen, und, wenn darin Fehler vorkommen, verbessert werden. Jede Gleichgiltigkeit des Lehrers in dieser Hinsicht hat Unfleiß und Leichtfertigkeit der Schüler zur unausbleiblichen Folge. Häufig geschieht es, dass schwächere oder auch nachlässige Kinder die häuslichen Aufgaben nicht selbst lösen, sondern die Ausarbeitungen anderer Schüler abschreiben; der verständige Lehrer wird einen solchen Unfug bald entdecken und demselben mit allem Nachdrucke entgegen wirken. — Bei den angewandten Aufgaben dringe der Lehrer stets auf eine verständige Beurtheilung der gegebenen Sach- und Zahlenverhältnisse; der Schüler soll z. B. bei einer Multiplikazionsaufgabe nicht bloß darum das Multiplizieren anwenden, weil eben diese Operazion an der Reihe ist, sondern durch folgerichtige Schlüsse die Überzeugung gewinnen, dass gerade nur durch die Multiplikazion der zwei gegebenen Zahlen die in Frage gestellte Zahl gefunden werden kann.

5. Der Lehrer schreite nicht eher zu einer folgenden Rechnungsart, als bis es die Schüler in der Ausführung der vorher-

gehenden zur vollen Sicherheit und Fertigkeit gebracht haben. Das beständige Zurückgreifen, um bereits Vorgenommenes von neuem zu entwickeln und zu üben, ermüdet den Schüler und lähmt den Fortschritt; es ist zugleich ein Beweis, dass sich der Lehrer Übereilungen zu Schulden kommen ließ. Überhaupt suche der Lehrer, wenn es nicht vorwärts gehen will, die Ursache stets in sich und in seiner Behandlungsweise und nicht in den Kindern.

§. 51. Einrichtung des dritten Rechenbuches.

Das dritte Rechenbuch enthält zwei Abschnitte, von denen der erste das Rechnen im Zahlenraume von 1 bis 1000, der zweite das Rechnen in den höheren Zahlenräumen umfasst.

Schon in dem ersten Abschnitte tritt ein Vorgang auf, welcher von dem Wege, der in den vorhergehenden Zahlenräumen eingeschlagen wurde, theilweise abweicht. In dem Zahlenraume bis 10 schritten wir von Zahl zu Zahl, in jenem bis 100 von Zehner zu Zehner vorwärts. Dieß war dort nothwendig, damit die Zahlen des ersten Zehners mit Hilfe der Zerlegung allseitig aufgefasst, und damit in den Zehnerräumen des ersten Hunderts die wichtigsten Ergebnisse, insbesondere das Einmaleins, dem Gedächtnisse fester eingeprägt wurden. Wir könnten nun auch bei den Zahlen bis 1000 von Hundert zu Hundert fortschreiten; das hätte jedoch keinen praktischen Wert, da alle Zahlen nach demselben Gesetze gebildet sind, und es, wenn einmal dieses Gesetz erkannt wird, gleichgiltig ist, welche Zahlen in der Rechnung vorkommen. Wir werden daher zuerst die Zahlen des neuen Zahlenkreises vorführen und schriftlich darstellen, und dann sogleich innerhalb dieses ganzen Zahlenumfanges nach der Reihe die einzelnen Rechnungsoperazionen vornehmen. Bei jeder Operazion zerfallen die Übungen in zwei Abtheilungen, von denen die erste das Rechnen im Kopfe und solche schriftliche Übungen, die nach Form und Ausführung genau mit dem mündlichen Rechnen übereinstimmen, die zweite das eigentliche Zifferrechnen enthält. Bei den Übungen im Kopfrechnen wird, damit das Neue an Bekanntes angeknüpft und zugleich das, was einzelnen Schülern etwa entschwunden ist, erneuert und befestiget werde, überall mit Wiederholungen des bereits Geübten begonnen; dazu tritt dann die Erweiterung der bezüglichen Übungen an den größeren Zahlen des neuen Zahlenkreises. An das reine Rechnen schließt sich auf jeder Stufe angewandtes Rechnen an.

Der zweite Abschnitt stellt sich zunächst die Erweiterung der Zahlenreihe über 1000 hinaus und die klare Erfassung des Gesetzes unseres Zahlensystems zur Aufgabe. Die hierauf folgenden vier Rechnungsoperazionen mit den höheren Zahlen enthalten nichts Neues; überall ist dasselbe Zifferrechnen, wie bei den Zahlen unter 1000, nur ausgedehnt auf den erweiterten Zahlenumfang.

Den Übergang aus dem ersten Abschnitte in den zweiten bilden Dreisatzrechnungen im Kopfe innerhalb des Zahlenkreises bis 1000. Diese Übungen sind auch neben dem Zifferrechnen des zweiten Abschnittes mit besonderer Sorgfalt fortzusetzen.

Das dritte Rechenbuch bringt die schriftlichen Übungsaufgaben mit reinen Zahlen und mit Anwendungen, wie auch mehrere Kopfrechnungsaufgaben. Dass die Schüler durch die getroffene Sonderung der Aufgaben für das mündliche und schriftliche Rechnen zu der Meinung verleitet würden, als gäbe es Aufgaben, die nur für das Zifferrechnen bestimmt sind, ist nicht zu befürchten, sobald der Lehrer die früher im Kopfe gelösten Aufgaben später auch mit Hilfe der Ziffern, und ebenso einzelne Aufgaben des Zifferrechnens auch im Kopfe auflösen lässt.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen im Zahlenraume von eins bis tausend.

1. Kenntnis der Zahlen von 1 bis 1000.

---

§. 52. Wiederholende Zusammenstellung der Zahlen von 1 bis 100.

Wiewohl die Schüler schon in den ersten zwei Schuljahren mit den Zahlen bis 100 bekannt gemacht wurden, so erscheint es aus pädagogischen Rücksichten dennoch rathsam, dieselben auch hier noch einmal wiederholend vorzuführen, damit aber auch schon auf eine immer deutlichere Auffassung des Grundgesetzes unseres Zahlensystems hinzuarbeiten.

1. Mündlich.

Der Lehrer lasse zuerst bis 10, dann bis 100 zählen, und bemerke: Ihr kennet bereits hundert Zahlen. Von diesen bestehen einige bloß aus Einern, andere bloß aus Zehnern, die meisten aber aus Zehnern und Einern. Welche Zahlen bestehen bloß aus Einern? Welche bloß aus Zehnern? Nun nennet auch Zahlen, welche aus Zehnern und Einern bestehen.

Aus wie viel Zehnern und Einern besteht 47, 21, 83, 38, 19, 57, 64, u. s. w.?

Wie heißt die Zahl, welche aus 4 Einern, aus 9 Zehnern, aus 2 Z. und 4 E., aus 7 Z. und 1 E., u. s. w. besteht?

Zeigt sich da oder dort noch eine Stockung, so helfe man mit der Veranschaulichung an der russischen Rechenmaschine, oder an der Zehnertafel oder an unseren Münzen nach. (II. Abtheilung.)

2. Schriftlich.

Die Einer werden in die erste Stelle (rechts), die Zehner in die zweite Stelle (links) geschrieben.

Nach dieser Vorbemerkung lasse der Lehrer zuerst mit Ziffern geschriebene Zahlen lesen, hierauf ausgesprochene Zahlen mit Ziffern anschreiben.

Leset die Zahl 27. — An welcher Stelle steht hier die Ziffer 2? Was bedeutet sie also? An welcher Stelle steht die Ziffer 7? Was bedeutet sie also? Wie heißt die Zahl, welche aus 2 Zehnern und 7 Einern besteht? 27 wird also gelesen: sieben und zwanzig.

Das Lesen zweiziffriger Zahlen beruhet demnach auf dem Zusammenfassen der Zehner und Einer zu einer Zahl; 27 = 2 Z. 7 E. = sieben und zwanzig.

Wie wird die Zahl drei und vierzig mit Ziffern geschrieben? — Drei und vierzig besteht aus 4 Zehnern und 3 Einern; man schreibt also die Ziffer 3 in die erste und die Ziffer 4 in die zweite Stelle.

Wie wird die Zahl fünfzig geschrieben? Fünfzig besteht aus 5 Zehnern, hat aber keine Einer. Ihr setzet also 5 in die zweite Stelle; was kommt in die erste Stelle? Dürfet ihr diese leer lassen? Würde dann die Ziffer 5 fünf Zehner bedeuten? Ihr setzet also in die Stelle der Einer 0, um anzuzeigen, dass keine Einer vorkommen.

Das Anschreiben zweistelliger Zahlen beruhet demnach auf dem Zerlegen derselben in Zehner und Einer;

drei und vierzig = 4 Z. 3 E. = 43,
fünfzig = 5 Z. 0 E. = 50.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 3.

§. 53. Erweiterung des Zahlenraumes bis 1000.

1. Mündlich.

Es ist schwer, den Schülern so viele gleichartige Gegenstände vorzuführen, dass sie die Zahlen von 100 bis 1000 daran anschauen können. An der russischen Rechenmaschine kann dieses nicht geschehen. Am besten kann man sich zur Versinnlichung der Hunderttafel sowie unserer Münzen bedienen.

Die nachstehende Hunderttafel wird von dem Lehrer auf der Schultafel entworfen, oder in großem Maßstabe auf einem Bogen Papier gezeichnet und auf Pappendeckel aufgezogen.

1 Z.	2 Z.	3 Z.	4 Z.	5 Z.	6 Z.	7 Z.	8 Z.	9 Z.	10 Z.	
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	1 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	2 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	3 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	4 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	5 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	6 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	7 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	8 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	9 H.
:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	:::::	10 H.

1. Auffassung der Hunderte.

Die anschauliche Entwicklung beginnt mit den Hunderten. Die Schüler sehen an der Hunderttafel, dass in jedem Felde zehn Punkte, in jeder Reihe zehn solche Felder vorkommen, und dass zehn solche Reihen unter einander stehen. Es werden nun die Zehner der ersten Reihe gezählt: 1 Zehner, 2 Z., 3 Z., . . . 9 Z., 10 Z.; 10 Zehner sind 1 Hundert oder hundert. In zwei Reihen stehen 20 Zehner oder 2 Hunderte, oder zweihundert; u. s. w. In 10 Reihen sind 100 Zehner oder 10 Hunderte, oder tausend.

Die Reihenfolge

1 Hundert oder 10 Zehner, oder hundert;
2 Hunderte oder 20 Zehner, oder zweihundert;
3 Hunderte oder 30 Zehner, oder dreihundert;
u. s. w.
10 Hunderte oder 100 Zehner, oder tausend

wird nun, indem der Lehrer dabei stets auf die bezügliche Reihe, und zwar auf den letzten Zehner derselben zeigt, wiederholt durchgesprochen.

Hierauf zeigt der Lehrer auf die Reihe und läßt sich von den Schülern die Hunderte nennen; dann nennt er selbst die Hunderte und ein Schüler zeigt auf die entsprechende Reihe; beides zuerst in, dann außer der Ordnung.

Schließlich hebt man noch die dekadischen Einheiten und ihren Zusammenhang hervor: 10 Einer sind 1 Zehner, 10 Zehner sind 1 Hundert, 10 Hunderte sind 1 Tausend, und es folgen Fragen:

Wie viel Zehner sind 1 Hundert, 2 H., 8 H., 5 H.?
Wie viel Hunderte sind 10 Zehner, 60 Z., 30 Z., 90 Z.?
Wie viel Einer sind 1 Hundert, 3 H., 7 H., 4 H.?
Wie viel Hunderte sind 200 Einer, 600 E., 900 E., 500 E.?

2. Auffassung der Hunderte mit Zehnern.

Indem zu der ersten Reihe der Hunderttafel nach und nach das erste, zweite, . . . zehnte Feld der zweiten Reihe hinzugefügt wird, sprechen die Schüler

1 H. und 1 Z. oder hundert zehn,
1 H. und 2 Z. oder hundert zwanzig,
— — — — — —
1 H. und 10 Z. oder 2 H. oder zweihundert;

dann ebenso

2 H. und 1 Z. oder 210	3 H. und 1 Z. oder 310
2 H. und 2 Z. oder 220	3 H. und 2 Z. oder 320
— — — — —	— — — — —

und so fort bis 9 H. und 10 Z. oder 10 H. oder 1000.

Hierauf läßt man gegebene Zehnerzahlen als Hunderte und Zehner sowie als Einerzahlen und umgekehrt darstellen; nämlich

10 Z. = 1 H. = 100	20 Z. = 2 H. = 200
11 Z. = 1 H. u. 1 Z. = 110	21 Z. = 2 H. u. 1 Z. = 210
12 Z. = 1 H. u. 2 Z. = 120	22 Z. = 2 H. u. 2 Z. = 220
13 Z. = 1 H. u. 3 Z. = 130	23 Z. = 2 H. u. 3 Z. = 230
— — — — —	— — — — —

u. s. w. bis 100 Z. = 10 H. = 1000;

dann umgekehrt:

100 = 10 Z.	200 = 20 Z.	300 = 30 Z.
110 = 11 Z.	210 = 21 Z.	310 = 31 Z.
120 = 12 Z.	220 = 22 Z.	320 = 32 Z.
— — —	— — —	— — —

u. s. f. bis 1000 = 100 Z.

Diese Umwandlungen werden zuerst in Reihenfolgen, dann außer der Ordnung bis zur Fertigkeit geübt.

3. Auffassung der Hunderte mit Zehnern und Einern.

Nachdem die Schüler bis 1000 zuerst nach Hunderten, dann nach Zehnern gezählt haben, wird nun die Zahlenreihe auch durch die Einer vervollständigt. Der Lehrer zeigt auf die erste Reihe der Hunderttafel und auf den ersten Einer der zweiten Reihe und sagt: wir haben

1 Hundert und 1 Einer oder hundert eins.

Zählen wir noch 1 Einer dazu, so haben wir

1 H. und 2 E. oder hundert zwei.

Setzen wir so einen Einer nach dem andern dazu, so erhalten wir

1 H. und 3 E. oder hundert drei,
1 H. und 4 E. oder hundert vier,

u. s. w.

1 H. u. 10 E. oder 1 H. u. 1 Z. oder hundert zehn.

Der Lehrer nimmt ebenso aus dem zweiten Felde der zweiten Reihe einen Einer nach dem andern dazu und läßt die Schüler sprechen:

1 H., 1 Z. u. 1 E. oder hundert eilf,

1 H., 1 Z. u. 2 E. oder hundert zwölf,

u. s. w.

1 H., 1 Z. u. 10 E. oder 1 H. u. 2 Z. oder hundert zwanzig.

Die Schüler sehen bald, dass sie bei weiterer Fortsetzung der Reihe zu allen Zahlen kommen, welche sie schon an der Zehnertafel oder an der Rechenmaschine kennen gelernt haben, nur dass jede um 1 Hundert größer ist.

Ist die ganze zweite Reihe zugezählt, so erhält man 2 Hunderte oder zweihundert. Dann nimmt man wieder nach und nach die Einer der dritten Reihe dazu und erhält: zweihundert eins, zweihundert zwei, . . . dreihundert.

Ebenso geht die Bildung der Zahlenreihe im vierten, fünften, . . . zehnten Hundert vor sich.

Um die erweiterte Zahlenreihe mit Hilfe unserer Münzen zu veranschaulichen, braucht der Lehrer 10 Guldenstücke, 10 Zehnkreuzerstücke und 10 Kreuzerstücke. Stellt der Kreuzer einen Einer vor, so stellt das Zehnkreuzerstück einen Zehner, und der Gulden, da er 100 Kreuzer gilt, ein Hundert vor. Legt man zu einem Gulden einen Kreuzer, so hat man hundert und einen Kreuzer, es ist also die Zahl 101 dargestellt, welche aus 1 Hundert und 1 Einer besteht. Nimmt man nach und nach immer einen Kreuzer dazu, so erhält man die Zahlen 102, 103, . . . 110. Bei der letzten Zahl kann man die 10 Kreuzer durch einen Zehner ersetzen; 110 besteht aus 1 H. und 1 Z.; das Hundert stellt der Gulden, den Zehner das Zehnkreuzerstück vor. Legt man weitere Kreuzer dazu, so hat man die Zahlen 111, 112, 113, . . . 120; bei 120 kann man wieder 10 Kreuzer durch ein Zehnkreuzerstück ersetzen, die Zahl besteht aus 1 H. und 2 Z., dargestellt durch 1 Gulden und 2 Zehnkreuzerstücke. Auf diese Art wird fortgefahren bis 199; wird hier noch ein Kreuzer hinzugefügt, so erhält man 1 Gulden, 9 Zehner und 10 Kreuzer; die 10 Kreuzer ersetzt man durch 1 Zehner und hat dann 1 Gulden und 10 Zehner; ersetzt man noch die 10 Zehner durch 1 Gulden, so hat man 2 Gulden, welche die Zahl 200 darstellen. Fährt man auf diese Weise fort, so kann die Zahlenreihe bis 999 fortgesetzt werden, welche Zahl durch 9 Gulden, 9 Zehner und 9 Kreuzer dargestellt wird; fügt man noch einen Kreuzer dazu, so hat man 9 Gulden, 9 Zehner und 10 Kreuzer; statt 10 Kreuzer 1 Zehner gesetzt, erhält man 9 Gulden und 10 Zehner; ersetzt man auch die 10 Zehner durch 1 Gulden, so hat man 10 Gulden, welche die Zahl 1000 darstellen. Man kann auch die 10 Gulden durch eine Zehngulden-Banknote ersetzen, welche daher die Zahl 1000 darstellt, wenn der Kreuzer die Zahl 1 vorstellt.

Auf gleiche Weise können die Zahlen bis tausend auch durch die metrischen Längenmaße versinnlichet werden. 10 Millimeter sind 1 Centimeter, 10 Centimeter sind 1 Decimeter, 10 Decimeter sind 1 Meter. Wird daher das Millimeter als ein Einer angenommen, so stellt das Centimeter einen Zehner, das Decimeter ein Hundert und das Meter ein Tausend vor.

Es ist von besonderer Wichtigkeit, dass sich die Schüler, bevor zur schriftlichen Darstellung der erweiterten Zahlenreihe geschritten wird, von jeder dieser Zahlen die dekadischen Bestandtheile klar vorzustellen im Stande sind. Der Lehrer frage zu diesem Ende bald nach der Zahl, welche gegebene Hunderte, Zehner und Einer enthält, bald umgekehrt nach den Bestandtheilen einer gegebenen Zahl; z. B.:

Wie heißt die Zahl, welche 7 H. 2 Z. und 9 E. enthält? Wie heißt die Zahl, welche 5 H. 6 Z. 1 E., — 3 H. 8 Z. 0 E., — 8 H. 0 Z. 5 E. u. s. w. enthält?

Wie viele Hunderte, Zehner und Einer enthält die Zahl 346? Aus wie vielen H., Z. und E. besteht die Zahl 812, 559, 940, 407 u. s. w.?

2. Schriftliche Darstellung.

Die Schüler wissen bereits, dass jede Ziffer in der ersten Stelle Einer, in der zweiten Zehner vorstellt; auch haben sie beim Anschreiben der Zahl 100 gesehen, dass die Ziffer 1 in der dritten Stelle 1 Hundert bedeutet. Es wird nun beigefügt, dass auch jede andere Ziffer an der dritten Stelle eben so viele Hunderte bedeutet, als sie an der ersten Stelle Einer darstellt. Es bedeutet demnach 200 zweihundert, 300 dreihundert, u. s. w.

In Bezug auf die Zahl tausend wird bemerkt: Sowie 1 Zehner 10mal so viel als 1 Einer, und 1 Hundert 10mal so viel als 1 Zehner ist, so ist auch 1 Tausend 10mal so viel als 1 Hundert. Sowie man daher die Ziffer 1, damit sie 1 Zehner bedeute, in die zweite, damit sie 1 Hundert bedeute, in die dritte Stelle setzt, ebenso muß man die Ziffer 1, damit sie 1 Tausend bedeute, wieder um eine Stelle weiter links, also in die vierte Stelle rücken. Es ist demnach

1 = eins, 10 = zehn, 100 = hundert, 1000 = tausend.

Den Rang der einzelnen Stellen kann der Lehrer durch folgendes Schema, das er auf der Schultafel entwirft und von den Schülern auf den Schiefertäfelchen nachbilden läſst, zur Anschauung bringen:

4. Stelle **Tausende**	3. Stelle **Hunderte**	2. Stelle **Zehner**	1. Stelle **Einer**		
1	0	0	0	= 1 T. 0 H. 0 Z. 0 E. =	1000
	7	0	0	= 7 H. 0 Z. 0 E. =	700
	4	6	0	= 4 H. 6 Z. 0 E. =	460
	3	9	8	= 3 H. 9 Z. 8 E. =	398
	2	0	5	= 2 H. 0 Z. 5 E. =	205

Um eine dreiziffrige Zahl zu lesen, darf man nur die Hunderte, Zehner und Einer derselben zu einer Zahl zusammenfassen; z. B. 571 bedeutet 5 H., 7 Z., 1 E., also fünf hundert ein und siebenzig.

Um eine gegebene dreistellige Zahl mit Ziffern anzuschreiben, braucht man dieselbe nur in Hunderte, Zehner und Einer aufzulösen und die Hunderte in die dritte, die Zehner in die zweite, die Einer in die erste Stelle zu setzen. Z. B. fünfhundert acht und zwanzig besteht aus 5 H., 2 Z. und 8 E.; man schreibt daher 5 in die dritte, 2 in die zweite, und 8 in die erste Stelle, also 825. Siebenhundert drei besteht aus 7 H. und 3 E., hat aber keine Zehner; man setzt darum 7 in die dritte, 0 in die zweite, und 3 in die erste Stelle, nämlich 703.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 4 und 5.

Bei diesen Übungen muß so lange verweilt werden, bis alle Schüler jede dreistellige Zahl sicher und fertig lesen und schreiben können.

§. 54. Maße und Gewichte.

Nachdem der Zahlenraum bis 1000 eweitert wurde, wird der Lehrer nicht unterlassen, auch die Kenntnis der Maße und Gewichte entsprechend zu vervollständigen.

Zur Vervollständigung der Zeiteintheilung wird angeführt: ein gemeines Jahr hat 365 Tage, ein Schaltjahr hat 366 Tage; 10 Jahre bilden ein Jahrzehend, 100 Jahre ein Jahrhundert, 1000 Jahre ein Jahrtausend.

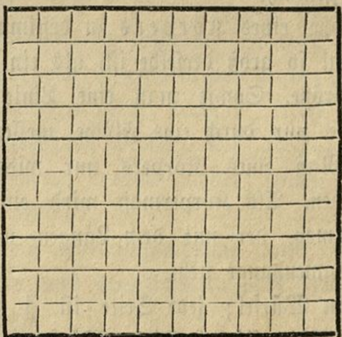
Die Eintheilung der Gewichte wird durch folgende Angaben vervollständiget: 1 Kilogramm = 1000 Gramm; 1 Tonne = 1000 Kilogramm; 1 Gramm = 10 Decigramm, 1 Decigramm = 10 Centigramm; 1 Centigramm = 10 Milligramm, also 1 Gramm = 1000 Milligramm.

Zu den Längenmaßen wird bemerkt: 1 Kilometer = 1000 Meter, 10 Kilometer = 1 Myriameter. 1 Centimeter = 10 Millimeter, also 1 Meter = 1000 Millimeter.

Hier werden die Schüler auch mit den Flächen- und Körpermaßen bekannt gemacht.

Um die Größe einer Fläche zu bestimmen, muß man suchen, wie vielmal so groß sie ist, als eine andere Fläche von bekannter Größe. Als Maß einer Fläche kann daher nur wieder eine Fläche genommen werden. Als Flächenmaße nimmt man Quadrate an, deren Seiten den Einheiten des Längenmaßes gleich sind. Ist die Einheit des Längenmaßes ein Meter, so ist die Einheit des Flächenmaßes ein Quadrat, dessen jede Seite 1 Meter lang ist, und das ein Quadratmeter heißt. Was ist hiernach 1 Quadratdecimeter? 1 Quadratcentimeter?

Diese Flächenmaße sind den Schülern zur unmittelbaren Anschauung zu bringen. Einige können aus steifem Papier ausgeschnitten, andere auf die Wandtafel gezeichnet werden, wobei auch auf die Untertheilung derselben aufmerksam zu machen ist. Der Lehrer zeichnet an die Schultafel ein Quadrat, dessen Seite ein Meter lang ist, d. i. ein Quadratmeter.



Wie viel Decimeter enthält jede Seite des Quadratmeters? Ich theile jede Seite in 10 gleiche Theile; wie lang ist ein solcher Theil? Wenn ich nun je zwei gegenüberstehende Theilungspunkte durch eine gerade Linie verbinde, so entstehen lauter kleinere Quadrate, deren jedes ein Decimeter lang und ein Decimeter breit ist. Was stellt daher jedes dieser Quadrate vor?

Aus dieser Zeichnung und Eintheilung ersehen die Schüler, dass 1 Quadratmeter 10mal 10 d. i. 100 Quadratdecimeter enthält.

Ebenso wird den Schülern gezeigt, dass 1 □ Decimeter = 100 □ Centimeter und 1 □ Centimeter = 100 □ Millimeter ist.

Größere Flächen, als Gärten, Äcker, Waldungen, werden nach Hektar und Ar gemessen, 100 Quadratmeter sind 1 Ar, 100 Ar sind 1 Hektar.

Um den Schülern die Vorstellung eines Ar beizubringen, misst der Lehrer im Freien mit dem Bandmaße ein Quadrat ab, das 10 Meter lang und 10 Meter breit ist, lässt in den vier Eckpunkten Pflöcke einschlagen und um dieselben eine Schnur spannen. Die so begränzte Quadratfläche ist ein Ar. Es wird noch beigefügt, dass 1 Hektar eine Quadratfläche von 100 Meter Länge und 100 Meter Breite ist.

Auf ähnliche Weise werden die Schüler mit den Körpermaßen bekannt gemacht.

Um die Größe eines Körpers zu bestimmen, muß man suchen, wie vielmal so groß derselbe ist, als ein anderer Körper von bekannter Größe. Sowie man eine Linie nur durch eine Linie, eine Fläche nur durch eine Fläche messen kann, ebenso kann auch als Maß eines Körpers nur wieder ein Körper angenommen werden. Als Körpermaß wird ein Würfel oder Kubus angenommen, der mit dem Längen- und Flächenmaße in innigem Zusammenhange steht.

Hier ist ein Würfel; jede Seite ist 1 Centimeter lang. Wie groß ist jede Seitenfläche? Dieser Würfel heißt ein Kubikcentimeter.

Hier sehet ihr einen größeren Würfel. Jede Seite ist 1 Decimeter lang. Wie groß ist jede Seitenfläche? Ein solcher Würfel heißt ein Kubikdecimeter.

Was ist dann ein Kubikmeter?

Alle diese Maße heißen Körpermaße.

Um die Eintheilung der Körpermaße zu veranschaulichen, nehme der Lehrer ein Kubikdecimeter, dessen untere Fläche in 10 × 10 = 100 □ Centimeter, und dessen Höhe in 10 Centimeter eingetheilt ist. Auf der unteren Fläche lassen sich 100 Kubikcentimeter auflegen. Diese Schichte reicht aber nur 1 Centimeter hoch. Um das ganze Kubikdecimeter auszufüllen, muß man 10 solche Schichten über einander legen; ein Kubikdecimeter enthält also 10mal 100 Kubikcentimeter = 1000 Kubikcentimeter.

Die Veranschaulichung kann auch so geschehen. Man theilt an einem Kubikdecimeter, das aus Holz verfertiget wird, jede Seite in 10 Centimeter und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch eingeritzte Linien; jede der sechs Würfelflächen erscheint dadurch in 100 □ Centimeter eingetheilt. Dieser Würfel wird parallel mit der Grundfläche in 10 gleiche Platten durchschnitten; eine dieser Platten wird wieder in 10 gleiche Säulen, und eine dieser Säulen in 10 gleiche Würfel, deren jeder ein Kubikcentimeter ist, durchschnitten. Stellt man nun diese 10 Würfel neben einander hin, so bilden sie eine Säule, welche 10 Kubikcentimeter enthält; legt man daran die übrigen Säulen, so stellen alle 10 Säulen eine Platte vor, welche 10mal 10 oder 100 Kubikcentimeter enthält; trägt man darüber auch die übrigen unzerlegten Platten auf, so hat man wieder das ganze Kubikdecimeter, welches daher 10mal 100, oder 1000 Kubikcentimeter enthält.

Durch diese Veranschaulichung und durch Anwendung ähnlicher Schlüsse wird den Schülern auch zum klaren Verständnisse gebracht, dass

1 Kubikmeter = 1000 Kubikdecimeter, und
1 Kubikcentimeter = 1000 Kubikmillimeter ist.

Nun kann auch der Zusammenhang zwischen dem allgemeinen Körpermaße und dem Hohlmaße anschaulich dargestellt werden. Der Lehrer füllt zu diesem Zwecke einen hohlen Würfel von Blech, der inwendig 1 Decimeter lang, 1 Decimeter breit und 1 Decimeter tief ist, also ein Kubikdecimeter, mit Wasser und gießt dieses in ein Litergefäß über; die Schüler überzeugen sich dadurch, dass ein Liter denselben Rauminhalt wie ein Kubikdecimeter hat, dass also die Einheit des Hohlmaßes das Kubikdecimeter unter dem Namen Liter ist, welches jedoch wegen des bequemeren Gebrauches eine runde Form erhält. Sollte dem Lehrer nur ein hohler Würfel von Pappe zu Gebote stehen, so würde er denselben mit Sand füllen und durch Umschütten in ein Litergefäß nachweisen, dass Liter und Kubikdecimeter denselben Inhalt haben.

---

2. Zusammenzählen oder Addieren.

§. 55. Zuzählen im Kopfe.

In den ersten zwei Schuljahren haben die Schüler mit den Zahlen von 1 bis 100 gerechnet. Wenn auch der Lehrer hiebei nach richtigen Grundsätzen und mit sicherer Gewandtheit zu Werke gegangen ist, so wird doch der erzielte Erfolg bei den einzelnen Kindern sehr verschieden sein. Um auch den schwächeren Schülern ein sicheres und erfolgreiches Fortschreiten möglich zu machen, ist es durchaus nothwendig, dass die bereits vorgenommenen Übungen der Hauptsache nach auch hier wiederholt und den in naturgemäßer Stufenfolge daran sich anschließenden neuen Aufgaben zu Grunde gelegt werden. Nur die öfters wiederkehrende Wiederholung kann das Gelernte fest erhalten und zum bleibenden Eigenthum machen.

a) Zuzählen von Einern.

1. **Mündlich.**

Das Zuzählen von 1 ist nichts anderes, als das Vorwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe, und bedarf darum keiner besonderen Übung.

Beim Zuzählen von 2 empfiehlt sich die Bildung von Reihen. Z. B. Fanget bei 1 an und zählet immer 2 zu; nämlich:

$$1 + 2 = 3,\ 3 + 2 = 5,\ 5 + 2 = 7, \ldots \text{ bis } 99.$$

Ebenso:

$$2 + 2 = 4,\ 4 + 2 = 6,\ 6 + 2 = 8, \ldots \text{ bis } 100.$$

Ferner folgende Übungen:

$$1 + 2 = 3,\quad 11 + 2 = 13,\quad 21 + 2 = 23,\quad \ldots$$
$$2 + 2 = 4,\quad 12 + 2 = 14,\quad 22 + 2 = 24,\quad \ldots$$
$$3 + 2 = 5,\quad 13 + 2 = 15,\quad 23 + 2 = 25,\quad \ldots$$

An diese Wiederholungen schließe sich das Zuzählen von 2 in den höheren Hunderten, als:

$$101 + 2 = 103, 103 + 2 = 105, 105 + 2 = 107, \ldots \text{ bis } 199;$$
$$802 + 2 = 804, 804 + 2 = 806, 806 + 2 = 808, \ldots \text{ bis } 900.$$

Dabei werden die Schüler ersehen, dass man 2 (die Einer) stets nur zu den Einern zu zählen braucht, die Hunderte aber ungeändert lässt.

Hierauf folgen Übungsfragen außer der Reihenfolge: Wie viel ist 15 und 2? 37 und 2? 78 und 2? 129 und 2? 386 und 2? u. s. w.

Auf gleiche Weise wird sodann das Zuzählen von 3, 4, 5, . . . 9 vorgenommen.

Um die Übungen noch mannigfaltiger zu machen und zugleich das Vorangegangene zu wiederholen, lasse man auch abwechselnd zwei Zahlen zuzählen. Z. B. Fanget bei 2 an und zählet abwechselnd 3 und 4 zu; nämlich: $4 + 3 = 7$, $7 + 4 = 11$, $11 + 3 = 14$, $14 + 4 = 18$, u. s. w.

Das Zuzählen der Grundzahlen muß zur vollsten Sicherheit geübt werden.

2. **Schriftlich.**

Die schriftlichen Übungen bestehen in Reihen, welche sich ganz an die Form des mündlichen Rechnens anlehnen.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 6, a.

---

b) Zuzählen von Zehnern zu Zehnern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 50 und 20?

Anfangs mit Zahlwerten: 50 sind 5 Z., 20 sind 2 Z.; 5 Z. und 2 Z. sind 7 Z. oder 70; also 50 und 20 ist 70. — Schließlich sogleich: 50 und 20 ist 70.

Wie viel ist 40 und 30? 20 und 60? 110 und 80? 530 und 50?

Ebenso: Wie viel ist 300 und 200? 300 = 3 H., 200 = 2 H.; 3 H. und 2 H. sind 5 H. oder 500; also 300 + 200 = 500.

Wie viel ist 700 und 200? 400 und 500? 500 und 300? 200 und 400?

Besonders zu üben sind Aufgaben mit dem Übergange aus einem Hundert in das andere. Dabei ergänzt man zunächst die erste Zahl zum vollen Hundert, und zählt dann zum neuen Hundert das übrige dazu. Z. B.

Wie viel ist 80 und 70? 80 und 20 ist 100, und noch 50 dazu, ist 150. — Auch so: 8 Z. und 7 Z. sind 15 Z. oder 150.

Wie viel ist 360 und 90? 360 und 40 ist 400, und 50 ist 450.

Wie viel ist 70 und 50? 90 und 60? 160 und 50? 580 und 30? 790 und 40?

2. **Schriftlich.**

Für die schriftlichen Übungen dienen auch hier vorzugsweise Reihen.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 6, b.

---

c) Zuzählen von Zehnern zu Zehnern und Einern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 45 und 30?

45 ist 40 + 5; 40 + 30 = 70, 70 + 5 = 75; also 45 + 30 = 75. — Oder: 45 sind 4 Z. und 5 E., 30 sind 3 Z.; 4 Z. und 3 Z. sind 7 Z. oder 70 E., und 5 E. sind 75 E. oder 75.

Wie viel ist 26 + 40? 63 + 30? 234 + 50? 160 + 200? 540 + 60?

Das Zerlegen in Zehner und Einer darf übrigens nur anfänglich stattfinden; ist die Einsicht erreicht, dann müßen die Schüler sogleich zu der unzerlegten ersten Zahl die zweite dazuzählen, also kurz: 45 und 30 ist 75. Fertigkeit verlangt Kürze.

Auch hier ist der Übergang von einem Hundert in ein anderes sorgfältig zu üben. Z. B. Wie viel ist 97 und 40? 97 und 10 ist 107, und 30 ist 137.

Die Schüler überzeugen sich bei diesen Übungen, dass die Zehner zu den Zehnern gezählt werden, die Einer aber unge-ändert bleiben.

2. **Schriftlich.**

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 7, c.

---

d) Zuzählen von Zehnern und Einern zu Zehnern und Einern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 25 und 43?

25 und 40 ist 65, und 3 ist 68. — Hier werden zu der unzerlegten ersten Zahl zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl zugezählt.

Oder: 25 = 2 Z. + 5 E., 43 = 4 Z. + 3 E.; 2 Z. + 4 Z. = 6 Z., 5 E. + 3 E. = 8 E.; 6 Z. + 8 E. = 68.

Die zweite Ausrechnungsweise ist weitläufiger, sie bereitet jedoch auf das Zifferrechnen vor, indem die Schüler daran klar ersehen, daſs Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern zuzuzählen sind. Für das mündliche Rechnen verdient das erstere kürzere Verfahren schon darum den Vorzug, weil es gegen das Vergessen einzelner Theile der Rechnung schützt, worauf beim Kopfrechnen immer ein besonderes Gewicht zu legen ist.

Wie viel ist 56 + 31? 25 + 15? 38 + 39? 79 + 12? 32 + 67? 88 + 45? 360 + 35? 275 + 22? 709 + 53?

Wenn zu einer Zahl eine zweite, welche Hunderte, Zehner und Einer enthält, zugezählt werden soll, so zählt man zu der unzerlegten ersten Zahl zuerst die Hunderte, dann die Zehner und endlich die Einer der zweiten Zahl dazu. Z. B. Wie viel ist 473 und 216? 473 und 200 ist 673, und 10 ist 683, und 6 ist 689.

Wie viel ist 512 und 346? 709 und 240? 591 und 209? 253 und 670? 364 und 488?

Da die Kinder zwei dreistellige Zahlen nicht leicht im Gedächtnisse behalten können, so wird der Lehrer bei den Aufgaben dieser Art nicht zu lange verweilen; befähigtere Schüler sollen jedenfalls auch solche Aufgaben im Kopfe zu lösen wissen.

2. Schriftlich.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 7, d.

Ob alle oder nur einzelne dieser schriftlichen Aufgaben durchzuarbeiten sind, muß der Beurtheilung des Lehrers überlassen bleiben, welcher dabei die geistigen Kräfte seiner Schüler in billige Erwägung ziehen wird.

Vortheile beim Zuzählen im Kopfe.

Bei der bisherigen Ausführung des Zuzählens haben wir überall das allgemeine Verfahren, welches sich bei allen Aufgaben derselben Art ohne Beschränkung anwenden läſst, angegeben. Es gibt aber auch Aufgaben von besonderer Beschaffenheit, welche häufig wesentliche Erleichterungen in der Ausrechnung gewährt. Dieß ist insbesondere der Fall, wenn die eine Zahl nur wenig kleiner oder größer als ein voller Zehner oder ein volles Hundert ist. Dabei wird diese Zahl um so viel vermehrt oder vermindert, daſs man gerade einen vollen Zehner oder ein volles Hundert erhält, und dann die andere Zahl um eben so viel vermindert oder vermehrt. Z. B.

$$\begin{aligned} 45 + 29 &= 44 + 30 = 74, \\ 36 + 42 &= 38 + 40 = 78, \\ 58 + 64 &= 60 + 62 = 122, \\ 225 + 198 &= 223 + 200 = 423, \\ 402 + 367 &= 400 + 369 = 769, \\ 543 + 290 &= 533 + 300 = 833. \end{aligned}$$

Wie viel ist 38 + 29? 65 + 78? 37 + 81? 48 + 26? 98 + 114? 325 + 297? 502 + 435?

---

e) Abgeleitete Aufgaben.

III. Rechenbuch S. 8, e.

Diese Aufgaben haben die Bestimmung, neben dem Rechnen auch die klare Auffassung verschiedener Ausdrucksweisen und die sprachrichtige Darstellung zusammengesetzter Satzformen, also das Denken und Sprechen zu üben. Die Antwort muß immer in einem vollständigen Satze erfolgen.

---

f) Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 8, f.

Bei den angewandten Aufgaben hat der Lehrer unnachsichtlich darauf zu dringen, daſs die Schüler vor der Ausrechnung immer die nöthigen Schlüſſe bilden, und dabei hier, beim Zuzählen, das Wörtchen **und** betonen. Z. B.

Ein Landmann hat 70 Schafe, er kauft noch 60 dazu; wie viel Schafe hat er dann?

Der Landmann hat dann 70 und 60 Schafe, d. i. 130 Schafe.

---

§. 56. Schriftliches Addieren.

Die schriftlichen Übungen, die bisher über das Zuzählen vorgenommen wurden, unterscheiden sich in der Form nicht vom mündlichen Rechnen, sie lehnten sich durchgängig an das Verfahren des Kopfrechnens an. Hier soll nun das schriftliche Rechnen die bisherige Form verlassen und die ihm eigenthümliche Form annehmen, welche auf der Anordnung des Zehnersystems beruht und auch für die höheren Zahlenräume ihre Giltigkeit behält. Ein wichtiger Gegensatz zwischen diesen beiden Rechnungsweisen besteht darin, dass man bei dem eigentlichen Zifferrechnen bei den Einern beginnt und von unten hinauf arbeitet, während beim Kopfrechnen bei der höchsten Stelle angefangen und von oben nach unten gearbeitet wird.

Damit die Schüler eine klare Einsicht in den Gang des neuen schriftlichen Verfahrens gewinnen und den Grund desselben erkennen, müßen sie auf dieser Stufe angehalten werden, zu den einzelnen Ziffern stets auch die Benennung der dekadischen Ordnungen, als: Einer, Zehner, Hunderte beizufügen; erst bei den Operazionen in den höheren Zahlenräumen, wo es sich zugleich um das Schnellrechnen handelt, werden diese Benennungen weggelassen werden.

a. Addieren ohne Übergang in höhere Ordnungen.

Die Schüler haben schon aus den Übungen im Kopfrechnen ersehen, dass nur gleichnamige Zahlen zu einander gefügt werden können, nämlich Einer zu Einern, Zehner zu Zehnern, u. s. w.

Sie begreifen daher auch, dass es am zweckmäßigsten sei, wenn man, um die gleichnamigen Zahlen leichter überblicken und zusammenzählen zu können, dieselben gleich beim Anschreiben so stellt, dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner, ... zu stehen kommen.

Es seien die Zahlen 32 und 53 zusammenzuzählen.

Im Kopfe:

Wir lassen 32 unzerlegt, und zählen dazu zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl 53; also: 32 und 50 ist 82, und 3 ist 85.

Oder: Wir zerlegen beide Zahlen in Zehner und Einer, und zählen dann Zehner zu Zehnern und Einer zu Einern; also: 32 = 3 Z. + 2 E., 53 = 5 Z. + 3 E., 3 Z. und 5 Z. sind 8 Z., 2 E. und 3 E. sind 5 E., 8 Z. und 5 E. sind 85.

Schriftlich.

$$\begin{array}{r} 32 \\ \underline{53} \\ 85 \end{array}$$

Wir schreiben Einer unter Einer und Zehner unter Zehner und zählen zuerst die Einer zusammen: 3 E. und 2 E. sind 5 E., und schreiben 5 unter die Einer, ziehen aber, damit die neue Zahl von den gegebenen Zahlen abgesondert werde, noch früher einen Querstrich. Dann zählen wir die Zehner zusammen: 5 Z. und 3 Z. sind 8 Z., und schreiben 8 unter die Zehner. Wir erhalten also 8 Z. und 5 E. d. i. 85.

Lässt man sodann das Zusammenzählen von oben herab vornehmen, hierauf zuerst die Zehner und dann die Einer zusammenzählen, so werden sich die Schüler überzeugen, dass man in jedem Falle dieselbe Zahl bekommt.

Nun werden die Schüler mit den technischen Ausdrücken bekannt gemacht. Ihr habet hier die Zahlen 32 und 53 zusammengezählt. Zwei oder mehrere Zahlen zusammenzählen, heißt auch addieren. Welche Zahlen habet ihr also hier addiert? Die Zahlen, welche zusammengezählt werden, heißen Posten oder

Summanden. Aus wie vielen Posten besteht unsere Rechnung? Wie heißt der erste Posten, von oben nach unten gezählt? Wie heißt der zweite Posten? Welche Zahl habet ihr durch das Zusammenzählen gefunden? Diese Zahl heißt die Summe. Was ist mehr: 32 und 53, oder 85? Die Summe ist nur eine Zahl, und diese eine Zahl ist genau so groß, als die addierten Zahlen zusammengenommen.

Diese Ausdrücke werden, damit sie den Schülern recht geläufig werden, bei den folgenden Aufgaben wiederholt gebraucht.

---

b. Addieren mit Übergang in höhere Ordnungen.

$$68 + 24 = ?$$

Im Kopfe: 68 und 20 ist 88, und 4 ist 92.

Schriftlich.

68 Wir addieren zuerst die Einer: 4 E. und 8 E. sind
24 12 E., oder 1 Z. und 2 E.; die 2 E. kommen an die
92 Einerstelle, 1 Z. wird zu den vorhandenen Zehnern gezählt. 1 Z. und 2 Z. sind 3 Z., und 6 Z. sind 9 Z.; die 9 setzen wir an die Zehnerstelle. Wie viel beträgt also die Summe? 9 Z. 2 E. = 92.

Nun lasse man die Addizion bei den Zehnern beginnen. 2 Z. und 6 Z. sind 8 Z.; diese schreiben wir in die Zehnerstelle. Nun addieren wir die Einer: 4 E. und 8 E. sind 12 E., oder 1 Z. und 2 E.; die 2 E. setzen wir an die Einerstelle. Wohin kommt aber 1 Z. zu stehen? An die Zehnerstelle können wir ihn nicht setzen, weil dort schon 8 Z. stehen; wir werden daher 1 Z. zu den bereits erhaltenen 8 Z. zählen, also die schon angeschriebene Ziffer 8 weglöschen und dafür 9 setzen. Diese Verbesserung ist nicht nöthig, wenn man bei den Einern zu addieren anfängt.

Daraus ersehen die Schüler, dass es am zweckmäßigsten sei, die schriftliche Addizion immer bei den Einern zu beginnen.

Ebenso verfahren wir bei dreistelligen Zahlen. Z. B.

245	9 E. und 7 E. sind 16 E., und 8 E. sind 24 E.,
118	und 5 E. sind 29 E., oder 2 Z. und 9 E.; die
207	9 E. werden an die Einerstelle geschrieben, die 2 Z.
339	zu den gegebenen Zehnern weiter gezählt.
909	

2 Z. und 3 Z. sind 5 Z., und 1 Z. sind 6 Z., und 4 Z. sind 10 Z. = 1 H. 0 Z.; wir setzen an die Zehnerstelle eine Null und zählen 1 H. zu den vorhandenen Hunderten.

1 H. und 3 H. sind 4 H., und 2 H. sind 6 H., und 1 H. sind 7 H., und 2 H. sind 9 H.; 9 schreiben wir an die Stelle der Hunderte.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 9 und 10.

c. Abgeleitete Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 11.

Bei diesen Aufgaben bilden das Denken und der sprachliche Ausdruck die Hauptsache.

d. Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 11 und 12.

3. Wegzählen oder Subtrahieren.

§. 57. Wegzählen im Kopfe.

Der Stufengang, den wir hier befolgen, entspricht vollständig demjenigen beim Zuzählen im Kopfe.

a. Wegzählen von Einern.

1. **Mündlich.**

Das Wegzählen von 1, d. i. das Rückwärtszählen in der natürlichen Zahlenreihe, hat keine Schwierigkeit.

Zur Einübung des Wegzählens von 2 und den folgenden Grundzahlen können auch hier sehr vortheilhaft die Reihen benutzt werden.

100 — 2 = 98, 98 — 2 = 96, 96 — 2 = 94, . . . bis 0;
99 — 2 = 97, 97 — 2 = 95, 95 — 2 = 93, . . . bis 1.

Ebenso in den höheren Hunderten:

200 — 2 = 198, 198 — 2 = 196, . . . bis 100;
799 — 2 = 797, 797 — 2 = 795, . . . bis 701.

Ferner:

3 — 2 = 1, 13 — 2 = 11, 23 — 2 = 21, . . .
7 — 2 = 5, 17 — 2 = 15, 27 — 2 = 25, . . .
u. s. w.

Endlich außer der Ordnung: Wie viel ist 19 — 2? 30 — 2? 51 — 2? 101 — 2? 378 — 2? 800 — 2? u. s. w.

Ähnliche Übungen werden beim Wegzählen von 3, 4, 5, . . . 9 vorgenommen.

Zum Schlusse lasse man abwechselnd zwei Zahlen wegzählen, oder eine Zahl zuzählen und eine zweite wegzählen. Z. B.:

100 — 2 = 98	3 + 7 = 10	300 — 8 = 292
98 — 6 = 92	10 — 3 = 7	292 + 5 = 297
92 — 2 = 90	7 + 7 = 14	297 — 8 = 289
90 — 6 = 84	14 — 3 = 11	289 + 5 = 294
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

2. Schriftlich.

Die mündlich vorgenommenen Übungen werden auch schriftlich wiederholt.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 13, a.

b. Wegzählen der Zehner von Zehnern.

1. **Mündlich.**

60 — 20 = ?

Zuerst ausführlich: 60 sind 6 Z., 20 sind 2 Z.; 6 Z. weniger 2 Z. sind 4 Z. oder 40; also 60 weniger 20 ist 40.

Dann ohne Zahlwerte sogleich: 60 weniger 20 ist 40.

Wie viel ist 30 — 10? 50 — 20? 70 — 30? 80 — 40? 140 — 30? 290 — 50?

Ebenso mit Hunderten.

800 — 300 = ?

800 sind 8 H., 300 sind 3 H.; 8 H. weniger 3 H. sind 5 H. oder 500. — Dann kurz: 800 weniger 300 ist 500.

Wie viel ist 700 — 100? 600 — 200? 500 — 300? 900 — 400?

Wenn beim Wegzählen der Zehner der Übergang aus einem Hundert in das andere eintritt, zähle man von der ersten Zahl zuerst so viele Zehner weg, dass man das reine Hundert erhält, und dann von diesem die noch übrigen Zehner. Z. B.

Wie viel ist 130 weniger 50? 130 weniger 30 ist 100, weniger 20 ist 80; also 130 — 50 = 80.

Wie viel ist 110 — 60? 220 — 30? 740 — 90? 850 — 80?

2. **Schriftliche Übungen.**

III. Rechenbuch S. 13, b.

---

c. Wegzählen der Zehner von Zehnern und Einern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 76 weniger 40?

Anfangs: 76 = 70 + 6; 70 — 40 = 30, 30 + 6 = 36, also 76 — 40 = 36. — Oder: 76 sind 7 Z. und 6 E., 40 sind 4 Z.; 7 Z. weniger 4 Z. sind 3 Z.; 3 Z. und 6 E. sind 36.

Später läſst man die erste Zahl unzerlegt und zählt von ihr sogleich die Zehner der zweiten weg; nämlich: 76 weniger 40 ist 36.

Die Schüler überzeugen sich dabei, daſs die Zehner von den Zehnern weggezählt werden, die Einer aber ungeändert bleiben.

Wie viel ist 54 — 20? 46 — 30? 71 — 40? 187 — 50? 334 — 20? 768 — 60? 340 — 200? 775 — 400?

Nun werden auch Aufgaben vorgelegt, bei denen ein Durchgang durch das Hundert stattfindet. Z. B.:

Wie viel ist 234 weniger 40? 234 weniger 30 ist 204 weniger 10 ist 194.

Wie viel ist 116 — 70? 325 — 50? 658 — 70? 839 — 80?

2. Schriftlich.

Im III. Rechenbuche S. 14, c.

---

d. Wegzählen der Zehner und Einer von Zehnern und Einern.

1. Mündlich.

Wie viel ist 65 weniger 41?

Wir lassen die Zahl 65 unzerlegt und zählen von ihr zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl weg; nämlich: 65 weniger 40 ist 25, weniger 1 ist 24.

Oder: 65 = 6 Z. + 5 E., 41 = 4 Z. + 1 E.; 6 Z. — 4 Z. = 2 Z., 5 E. — 1 E. = 4 E.; 2 Z. + 4 E. = 24.

Das erste Verfahren ist kürzer und für das Kopfrechnen vortheilhafter, das zweite gewährt den Schülern die Einsicht, dass Zehner von Zehnern, Einer von Einern weggezählt werden, und bereitet dadurch auf das Zifferrechnen vor.

Wie viel ist 35 — 22? 89 — 47? 167 — 53? 957 — 34? 681 — 65? 823 — 42? 715 — 69?

Das gleiche Verfahren gilt beim Wegzählen dreistelliger Zahlen. Man läſst die erste Zahl unzerlegt, und zählt von ihr zuerst die Hunderte, dann die Zehner, endlich die Einer der zweiten Zahl weg. Z. B.:

Wie viel ist 791 weniger 548? 791 weniger 500 ist 291, weniger 40 ist 251, weniger 8 ist 243.

Wie viel ist 865 — 343? 598 — 320? 652 — 407? 528 — 461?

Die Übungen der letztern Art sind schwierig und dürfen, damit sie nicht ermüden, nicht zu weit getrieben werden.

2. Schriftlich.

Im III. Rechenbuche S. 14, d.

Vortheile beim Wegzählen im Kopfe.

Wie beim Zuzählen, ebenso läſst sich auch beim Wegzählen im Kopfe die Rechnung öfters dadurch vereinfachen, dass man unbequeme Zahlen in andere, das Resultat nicht ändernde bequeme Zahlen verwandelt und sodann mit diesen rechnet. Hier ist vor allem nöthig, den Schülern den Satz zur Klarheit zu bringen, dass sich der Unterschied ganz gleich bleibt, ob derselbe zwischen den gegebenen, oder zwischen den um gleichviel vergrößerten oder um gleichviel verkleinerten Zahlen bestimmt wird. Nehmen wir die Zahlen 85 und 65, so ist 85 — 65 = 20; vergrößern wir die beiden Zahlen um 5, so ist auch 90 — 70 = 20; verkleinern wir die Zahlen um 5, so ist auch 80 — 60 = 20; der Unterschied ändert sich also nicht. Dasselbe ist an mehreren Beispielen zu zeigen. Durch die Anwendung dieses Satzes lassen sich nun die gegebenen Zahlen so verwandeln, dass jedesmal nur reine Zehner wegzuzählen sind. Z. B.:

46 — 28 = 48 — 30 = 18,
95 — 32 = 93 — 30 = 63,
148 — 73 = 145 — 70 = 75,
414 — 57 = 317 — 60 = 257,
853 — 298 = 855 — 300 = 555.

Wie viel ist 69 — 43? 86 — 68? 75 — 31? 82 — 66? 197 — 54? 208 — 85? 477 — 97? 632 — 303?

Auf diese vortheilhaftere Berechnung sind die Schüler, wenn sie nicht von selbst darauf kommen, durch entsprechende Fragen hinzuleiten, jedoch erst dann, wenn sie die allgemein anwendbare Rechnungsweise richtig erfasst und vielseitig geübt haben.

---

e. Abgeleitete Aufgaben im III. Rechenbuche S. 14, e.

---

f. Angewandte Aufgaben im III. Rechenbuche S. 15.

Die Schüler sind anzuhalten, bei jeder angewandten Aufgabe zunächst die gegebenen Bedingungen zu beurtheilen, und die zur Auflösung erforderlichen Schlüsse klar und bündig auszusprechen. Z. B.:

Eine Kiste mit Feigen wiegt 84 Pfd., die Kiste allein wiegt 9 Pfd.; wie viel wiegen die Feigen?

Auflösung. Die Feigen und die Kiste wiegen zusammen 84 Pfd.; das Gewicht der Feigen allein erhält man, wenn man von dem ganzen Gewichte, 84 Pfd., das Gewicht der Kiste, 9 Pfd., wegzählt. Die Feigen wiegen also 84 Pfd. weniger 9 Pfd., d. i. 75 Pfd.

Ein Landmann verkauft einen Acker, den er vor 10 Jahren um 500 fl. kaufte, für 800 fl.; wie viel gewinnt er?

Auflösung. Er gewinnt so viel, als 800 fl. mehr sind als 500 fl.; um das zu finden, muß man 500 fl. von 800 fl. wegzählen. Er gewinnt also 800 weniger 500, d. i. 300 fl.

---

§. 58. Schriftliches Subtrahieren.

Die schriftliche Subtrakzion kann auf zweierlei Art verrichtet werden. Um den Unterschied zweier Zahlen zu erhalten, kann man entweder die kleinere von der größeren wegzählen und angeben, wie viel noch übrig bleibt, oder man kann suchen, wie viel zu der kleineren Zahl zugezählt werden müße, um die größere zu erhalten. In beiden Fällen erhält man dasselbe Resultat. Es sei z. B. der Unterschied zwischen 9 und 4 zu bestimmen; entweder zählt man 4 von 9 weg, worauf noch 5 zurückbleibt, oder man sucht, wie viel noch zu 4 zugezählt werden müße, um 9 zu erhalten, und man findet ebenfalls 5.

Die zweite Art des Subtrahierens erscheint zwar für den weiter fortgeschrittenen Rechnungsunterricht sehr vortheilhaft, ihre Auffassung ist jedoch für den Anfänger etwas schwierig, auch bringt sie den Begriff des Subtrahierens als Wegzählen nicht zu so unmittelbarer Anwendung, als die erste oben angedeutete Subtrakzionsweise. Darum halten wir es für zweckentsprechend, auf dieser Stufe das schriftliche Subtrahieren auch in der Ausführung als eigentliches Wegzählen zu behandeln.

a. Subtrahieren ohne Übergang in andere Ordnungen.

Da die Schüler schon bei den Aufgaben über das Wegzählen im Kopfe eingesehen haben, dafs Einer nur von Einern, Zehner nur von Zehnern, . . . weggezählt werden können, werden sie hier aufmerksam gemacht, dafs dasselbe auch beim schriftlichen Wegzählen stattfindet, und dafs es daher wegen der leichteren Übersicht der gleichnamigen Zahlen am zweckmäßigsten ist, die Zahl, welche weggezählt werden soll, so unter die andere

Zahl zu schreiben, dass Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w., zu stehen kommen.

Es soll von 58 die Zahl 23 weggezählt werden.

Im Kopfe.

Wir lassen 58 unzerlegt, und zählen davon zuerst die Zehner, dann die Einer der zweiten Zahl 23 weg; nämlich: 58 weniger 20 ist 38, weniger 3 ist 35.

Oder: 58 = 5 Z. + 8 E., 23 = 2 Z. + 3 E.; 5 Z. — 2 Z. = 3 Z., 8 E. — 3 E. = 5 E.; 3 Z. + 5 E. = 35.

Schriftlich.

58 Wir schreiben Einer unter Einer, Zehner unter Zehner,
23 und zählen zuerst die Einer, dann die Zehner weg. 3 E.
35 von 8 E. bleiben 5 E.; 2 Z. von 5 Z. bleiben 3 Z.
Wir erhalten also 3 Z. und 5 E. = 35.

Sollten die Schüler, wie sie es vom Kopfrechnen her gewohnt sind, zuerst die Zehner, dann die Einer wegzählen wollen, so lasse man es angehen; sie überzeugen sich, dass auch da dieselbe Zahl herauskommt.

Eine Zahl von einer andern wegzählen, heißt auch subtrahieren; hier wurde also 23 von 58 subtrahiert. Von welcher Zahl wurde hier weggezählt? Diese Zahl, 58, heißt der Minuend. Welche Zahl wurde von 58 weggezählt? Diese Zahl, 23, heißt der Subtrahend. Und welche Zahl ist übrig geblieben? Diese Zahl, 35, wird der Rest genannt. Da der Rest 35 anzeigt, um wie viel sich 58 und 23 von einander unterscheiden, so heißt er auch der Unterschied (die Differenz).

b. Subtrahieren mit Übergang in andere Ordnungen.

Um z. B. 37 von 82 wegzuzählen, setzen wir die gleichnamigen Stellen unter einander und beginnen bei den Einern zu subtrahieren.

8̇2 7 E. können von 2 E. nicht weggezählt werden. Was
37 würdet ihr thun, wenn ihr 7 Kr. bezahlen solltet, und
45 bloß 2 Kr., aber auch Zehnkreuzerstücke hättet? Ebenso werdet ihr es hier machen; ihr werdet von den 8 Zehnern einen Zehner entlehnen oder borgen, und denselben in Einer verwandeln. Wie viele Zehner waren im Minuend da? Und wenn ihr davon einen borget, wie viele Zehner bleiben noch? Im Minuend sind also jetzt nicht mehr 8, sondern nur 7 Zehner; um dieses anzuzeigen, setzen wir über 8 einen Punkt, den Borgepunkt. Nun kann subtrahiert werden. Wie viele Einer gibt der geborgte Zehner? Und die vorhandenen 2 Einer dazu, sind 12 Einer; von diesen 12 E. sind 7 E. wegzuzählen: 7 E. von 12 E. bleiben 5 E. Was bedeutet 8 mit dem Borgepunkte? Wir haben also: 3 Z. von 7 Z. bleiben 4 Z. Wie groß ist der ganze Rest?

Würden die Schüler das Wegzählen bei den Zehnern anfangen, so hätten sie: 3 Z. von 8 Z. bleiben 5 Z.; 7 E. kann man von 2 E. nicht wegnehmen, man muß von den übriggebliebenen 5 Z. einen Z. borgen; dann bleiben nur noch 4 Z., und man müßte die im Reste schon angeschriebenen 5 Zehner weglöschen und dafür 4. Z. setzen; u. s. w. Ein solches Verbessern schon geschriebener Ziffern würde, wenn man bei der höchsten Stelle zu subtrahieren beginnt, jedesmal eintreten, so oft man borgen muß; dagegen tritt es niemals ein, wenn man das Wegzählen bei den Einern anfängt. Die Schüler sehen daher ein, dass es beim Zifferrechnen zweckmäßiger sei, das Subtrahieren jedesmal bei den Einern anzufangen.

Ebenso verfährt man, wenn bei den Hunderten entlehnt wird. Z. B.:

3̇59 7 E. von 9 E. bleiben 2 E.; 6 Z. kann ich von
167 5 Z. nicht wegnehmen, ich borge 1 H., dieses gibt
192 10 Z., und 5 Z. sind 15 Z., 6 Z. von 15 Z. bleiben 9 Z.; 1 H. von 2 H. (3 mit dem Borgepunkte bedeutet nur 2) bleibt 1 H.

Eine besondere Berücksichtigung verdient noch der Fall, wenn die Stelle des Minuends, von welcher entlehnt werden soll, eine Null enthält. Z. B.:

Wie viel ist 705 — 248?

7̇05	8 E. kann ich von 5 E. nicht wegnehmen, ich sollte
248	1 Z. entlehnen, aber es sind keine Zehner da; ich
457	borge daher bei den 7 H. ein Hundert, es bleiben

dort noch 6 H., was ich durch einen Punkt über 7 andeute. Das geborgte Hundert gibt 10 Zehner, welche an die Stelle der 0 kommen; von diesen 10 Z. borge ich nun 1 Z., es bleiben noch 9 Z., und das deute ich durch einen Punkt über 0 (eigentlich 10) an. Der entlehnte Zehner hat 10 Einer, und die bereits vorhandenen 5 E. dazu, sind 15 Einer. Ich habe dann: 8 E. von 15 E. bleiben 7 E.; 4 Z. von 9 Z. bleiben 5 Z.; 2 H. von 6 H. bleiben 4 H. — Die Schüler gewinnen dabei die Einsicht, dass Null mit dem Borgepunkte (0̇) 9 bedeutet.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 16 und 17.

Die Aufgaben 56 bis 70 enthalten wiederholtes Subtrahieren in Reihen, wobei von dem gegebenen Minuend, sowie von jedem neuen Reste stets dieselbe Zahl weggezählt wird. Z. B.

530
53
477 In allen diesen Aufgaben darf, da der Minuend
53 überall ein Vielfaches des Subtrahends ist, zuletzt kein
424 Rest übrigbleiben.
53
371
u. s. w.

c. Abgeleitete Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 17.

d. Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 18 und 19.

3. Vervielfachen oder Multiplizieren.

§. 59. Vervielfachen im Kopfe.

a) Vervielfachen von Einern mit Einern.

Die Grundlage des Vervielfachens, das Einmaleins, ist schon in den einzelnen Zehnerräumen des ersten Hunderts zur Veranschaulichung und vielseitigen Übung gelangt. Damit sich jedoch dasselbe unverlierbar dem Gedächtnisse der Schüler einpräge, wird hier eine Wiederholung um so zweckmäßiger erscheinen, als ja überhaupt das Neue an Bekanntes angeknüpft werden muß.

1. **Mündlich.**

Die hier vorzunehmenden Übungen enthalten:

1) Das Vervielfachen einer und derselben Grundzahl mit allen Grundzahlen, als:

1mal 1 ist 1	1mal 2 ist 2	1mal 3 ist 3	u. s. w.
2mal 1 ist 2	2mal 2 ist 4	2mal 3 ist 6	
3mal 1 ist 3	3mal 2 ist 6	3mal 3 ist 9	
4mal 1 ist 4	4mal 2 ist 8	4mal 3 ist 12	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

2) Das Vervielfachen sämmtlicher Grundzahlen mit derselben Grundzahl, nämlich:

1mal 1 ist 1	2mal 1 ist 2	3mal 1 ist 3	u. s. w.
1mal 2 ist 2	2mal 2 ist 4	3mal 2 ist 6	
1mal 3 ist 3	2mal 3 ist 6	3mal 3 ist 9	
1mal 4 ist 4	2mal 4 ist 8	3mal 4 ist 12	
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	

Die Vielfachen jeder Gruppe werden zuerst in der Ordnung bald von einzelnen Schülern bald im Chor durchgesprochen, dann außer der Reihenfolge angegeben und bis zur vollsten Geläufigkeit wiederholt.

Zu diesen Übungen können sogleich einfache Anwendungen dazutreten; z. B.

1 Semmel kostet 2 Kr.;	2	Semm.	kost.	2×2	Kr.	oder	4 Kr.;
	3	„	„	3×2	„	„	6 „
	4	„	„	4×2	„	„	8 „
				u. s. w.			
1 fl. = 5 Zwanziger;	2 fl.	=	2×5	Zw.	oder	10	Zw.;
	3 „	=	3×5	„	„	15	„
	4 „	=	4×5	„	„	20	„
			u. s. w.				
1 Woche hat 7 Tage;	2	Wochen	haben	2×7	T.	oder	14 T.;
	3	„	„	3×7	„	„	21 „
	4	„	„	4×7	„	„	28 „
				u. s. w.			

2. Schriftliche Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 20.

Die erste Gruppe enthält das Vervielfachen der Grundzahlen, die zweite das Vervielfachen in Verbindung mit dem Zu- oder Wegzählen, die dritte die Ergänzung der Vielfachen zu einer gegebenen Zahl.

---

b) Vervielfachen von reinen Zehnern oder reinen Hunderten mit Einern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 2mal 30?

Anfangs: 30 sind 3 Z., 2mal 3 Z. sind 6 Z. oder 60. Später sogleich: 2mal 30 ist 60.

Wie viel ist 3 × 20? 5 × 20? 4 × 30? 6 × 80? 7 × 50.

Ebenso:

2 × 300 = 2 × 3 H. = 6 H. = 600.

Wie viel ist 4 × 200? 3 × 300? 2 × 500?

Auch hier empfehlen sich Anwendungen in Reihen; z. B.

1 Hektol. kostet 40 fl.; 2 Hekt. kosten 2×40 fl. oder 80 fl.;
3 „ „ 3×40 „ „ 120 „
4 „ „ 4×40 „ „ 160 „
u. s. w.

1 Stunde = 60 Min.; 2 St. = 2×60 M. oder 120 M.;
3 „ = 3×60 „ „ 180 „
4 „ = 4×60 „ „ 240 „
u. s. w.

2. **Schriftlich.**

III. Rechenbuch S. 21, b.

---

c) Vervielfachen von Zehnern und Einern.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist 2mal 34? — 2mal 30 ist 60, 2mal 4 ist 8, 60 und 8 ist 68.

Es werden also zuerst die Zehner, dann die Einer 2mal genommen und dann die beiden Vielfachen zusammengezählt.

Wie viel ist 3 × 21? 3 × 26? 4 × 41? 6 × 82? 8 × 54? 7 × 69?

Ebenso bei dreistelligen Zahlen.

Wie viel ist 2mal 426? — 2mal 400 ist 800; 2mal 20 ist 40, 800 und 40 ist 840; 2mal 6 ist 12, 840 und 12 ist 852.

Wie viel ist 2 × 180? 4 × 213? 6 × 138?

Anwendungen:

1 Jahr hat 12 Monate; 2 J. = 2×12 M. oder 24 M.;
3 „ = 3×12 „ „ 36 „
u. s. w.

1 Hektoliter kostet 43 fl.; 2 Hekt. kost. 2×43 fl. = 86 fl.;
3 " " 3×43 " = 129 "
u. s. w.

2. Schriftlich.

III. Rechenbuch S. 21, c.

---

d) Vervielfachen mit reinen Zehnern.

1. Mündlich.

Hier ist zunächst das Vervielfachen mit 10 und mit 100 zu üben.

10 × 10 = 10 × 1 Z. = 10 Z. = 100,
10 × 20 = 10 × 2 Z. = 20 Z. = 200,
10 × 30 = 10 × 3 Z. = 30 Z. = 300, u. s. w.

Ist die Einsicht erreicht, so sprechen die Schüler kurz: 10 × 10 = 100, 10 × 20 = 200, 10 × 30 = 300 u. s. w.

Um das Vervielfachen mit 20 zum klaren Verständnis zu bringen, schicke man folgendes voraus: 20 ist 10mal so viel als 2. Wenn ich daher eine Zahl 20mal nehme, so habe ich 10mal so viel, als wenn ich sie 2mal nehme.

Eine Zahl wird also 20mal genommen, wenn ich sie 2mal nehme und das zweifache von ihr 10mal nehme.

Z. B. Wie viel ist 20mal 4?

2 × 4 = 8, 20 × 4 ist 10mal so viel, also 10 × 8 oder 80.

Wie viel ist 20 × 2? 20 × 3? 20 × 5? 20 × 8? 20 × 9?

Ebenso verfährt man beim Vervielfachen mit 30, 40, 50, . . . 90.

Sind Einer mit reinen Hunderten, oder reine Zehner mit reinen Zehnern, oder endlich Zehner und Einer mit reinen

Zehnern zu vervielfachen, so sind es dieselben Schlüsse, nach denen die Rechnung vollzogen wird. Z. B.

Wie viel ist 200mal 3?

2 × 3 = 6, 200 × 3 ist 100mal so viel, also 100 × 6 = 600.

Wie viel ist 30mal 20?

3 × 20 = 60; 30mal 20 ist 10mal so viel, also 10 × 60 = 600.

Wie viel ist 60mal 12?

6 × 12 = 72; 60mal 12 ist 10mal so viel, also 10 × 72 = 720.

Eine sorgfältige Behandlung dieser und ähnlicher Aufgaben wird das spätere Zifferrechnen vortheilhaft unterstützen. Man halte darauf, dass die Schüler ihre Schlüsse genau und bündig aussprechen.

2. **Schriftlich.**

III. Rechenbuch S. 21, d.

---

e) Vervielfachen mit Zehnern und Einern.

1. **Mündlich.**

Sind Einer mit Zehnern und Einern zu vervielfachen, so vervielfacht man sie zuerst mit den Zehnern, dann mit den Einern, und zählt die beiden Vielfachen zusammen. Z. B.

Wie viel ist 12mal 7?

10mal 7 ist 70, 2mal 7 ist 14, 70 und 14 ist 84.

Wie viel 11 × 8? 21 × 4? 35 × 5? 62 × 9? 54 × 7?

Wenn eine zweistellige Zahl mit Zehnern und Einern zu vervielfachen ist, lässt man die erste Zahl unzerlegt, vervielfacht sie mit den Zehnern, dann mit den Einern, und zählt die gefundenen Zahlen zusammen. Z. B.

Wie viel ist 13mal 24?

10mal 24 ist 240, 3mal 24 ist 72, 240 und 72 ist 312.

Wie viel ist 11 × 37? 15 × 40? 16 × 51? 25 × 32? 12 × 12? 18 × 18? 38 × 20? 21 × 43?

Wenn die zweistellige Zahl, mit welcher vervielfacht werden soll, selbst ein Vielfaches einer anderen Zahl ist, so kann das Vervielfachen oft erleichtert werden. Mit diesem Vortheile können hier die Schüler bekannt gemacht werden.

Wenn ich 6 3mal nehme, so erhalte ich 18. Wenn ich das 6fache einer Zahl 3mal nehme, so erhalte ich das 18fache dieser Zahl. Um also eine Zahl 18mal zu nehmen, nehme ich sie zuerst 6mal, und das 6fache von ihr noch 3mal. Z. B.

Wie viel ist 18mal 9?

Das 18fache ist 3mal so viel als das 6fache; 6mal 9 ist 54, 3mal 54 ist 162.

Ebenso:

Das 12fache ist 3mal so viel als das 4fache,
„ 15 „ „ 3 „ „ „ „ „ 5 „
„ 36 „ „ 4 „ „ „ „ „ 9 „
„ 49 „ „ 7 „ „ „ „ „ 7 „ u. s. w.

Wie viel ist 12 × 8? 21 × 4? 63 × 5? 81 × 6? 15 × 17? 32 × 23? 42 × 19?

2. Schriftlich.

III. Rechenbuch S. 22, e.

---

f) Abgeleitete Aufgaben.

III. Rechenbuch S. 22, f.

---

g) Angewandte Aufgaben.

III. Rechenbuch S. 22 und 23, g.

Bei den Anwendungen ist vor allem das Verwandeln (Resolvieren) der Münzen, Maße und Gewichte besonders sorgfältig zu üben. Dabei wie auch bei den eigentlichen angewandten Aufgaben haben die Schüler ihre Schlüsse im Zusammenhange auszusprechen, ohne jedoch zu viele Worte zu machen; insbesondere soll das Wörtchen „mal“ jedesmal hervorgehoben werden.

Neu treten hier die Flächenberechnungen auf. (Aufgaben 104—107.) Rücksichtlich der Behandlung solcher Aufgaben verweisen wir auf die in der fünften Abtheilung enthaltene Lehre von der Raumgrößenrechnung.

---

§. 60. Schriftliches Multiplizieren.

a) Multiplizieren mit Einern.

Zuerst werden Aufgaben behandelt, wo kein Übergang in eine höhere Ordnung stattfindet. Z. B.

Wie viel ist 3mal 32?

Um an Bekanntes anzuknüpfen, betrachten wir das Multiplizieren zunächst als ein wiederholtes Addieren, und schreiben die Zahl 32 3mal unter einander; wir erhalten: 2 E. und 2 E. sind 4 E., und 2 E. sind 6 E.; 3 Z. und 3 Z. sind 6 Z., und 3 Z. sind 9 Z.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ 32 \\ \hline 96 \end{array}$$

Durch das Vervielfachen kann die Rechnung abgekürzt werden. Wir setzen die Zahl 32 nur einmal; dass sie 3mal genommen werden soll, zeigen wir dadurch an, dass wir die Ziffer 3 darunter schreiben. Wir sagen dann kürzer: 3mal 2 E. sind 6 E.; 3mal 3 Z. sind 9 Z.

$$\begin{array}{r} 32 \\ 3 \\ \hline 96 \end{array}$$

Diese abgekürzte Art des Addierens nennt man das Vervielfachen oder Multiplizieren. 32 3mal nehmen heißt also 32 mit 3 multiplizieren. Welche Zahl wurde hier mehrmal genommen? Diese Zahl heißt der Multiplikand. Wie oftmal wurde 32 genommen? Diese Zahl, welche anzeigt, wie vielmal eine andere genommen wird, heißt der Multiplikator. Multiplikand und Multiplikator heißen auch Faktoren. Welche Zahl erhält man, wenn man 32 3mal nimmt, oder 32 mit 3 multipliziert? Diese Zahl heißt das Produkt.

Da die Schüler auf diese Art die Multiplikazion als eine abgekürzte Addizion kennen lernen, so sehen sie leicht ein, dass man auch hier, wie beim schriftlichen Addieren, die Rechnung bei den Einern anfangen müße.

Wenn man auch einen einstelligen Multiplikator gewöhnlich nicht anzuschreiben pflegt, so wird es Anfängern doch zu gestatten sein, daſs sie der unmittelbaren Anschauung wegen denselben unter den Multiplikand setzen.

Nun werden wir auch den Fall behandeln, wo ein Übergang in höhere Ordnungen stattfindet. Z. B.

Wie viel ist 5mal 127?

Im Kopfe: 5mal 100 ist 500, 5mal 20 ist 100, 500 und 100 ist 600; 5mal 7 ist 35, 600 und 35 ist 635.

127
5
635

Beim Zifferrechnen multiplizieren wir zuerst die Einer, dann die Zehner, endlich die Hunderte; nämlich:

5mal 7 E. sind 35 E., oder 3 Z. und 5 E.; die 5 E. schreiben wir unter die Einer, die 3 Z. aber vereinigen wir mit den Zehnern des Produktes. 5mal 2 Z. sind 10 Z., und die im Sinne behaltenen 3 Z. dazu, sind 13 Z. oder 1 H. und 3 Z.; 3 Z. schreiben wir unter die Zehner, 1 H. vereinigen wir mit den Hunderten. 5mal 1 H. sind 5 H., und 1 H. sind 6 H.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 24 und 25.

b) Multiplizieren mit reinen Zehnern.

Wie viel ist 10mal 54?

54
10
540

10mal 4 E. sind 40 E. oder 4 Z.; 10mal 5 Z. sind 50 Z. oder 5 H. Beim Multiplizieren mit 10 rückt also jede Ziffer in die nächst höhere Ordnung vor. (Wir finden dasselbe Verhältnis auch bei benannten Zahlen, z. B. 10mal 1 kr. ist 1 Zehner, 10mal 1 Zehner ist 1 Gulden.) Die Ziffern bleiben dieselben; nur muß die Ziffer 4, damit sie 4 Z. gelte, in die zweite, und die Ziffer 5, damit sie Hunderte gelte, in die dritte Stelle kommen. Dieß alles geschieht einfach dadurch, daſs man der Zahl rechts eine Null anhängt.

Wie viel ist 30mal 27?

27
30
810

Um eine Zahl 30mal zu nehmen, nehme ich sie zuerst 3mal, und das 3fache von ihr noch 10mal; ich multipliziere also die Zahl 27 mit 3 und rücke jede Ziffer des Produktes 81 in die nächst höhere Stelle, welches dadurch geschieht, dass ich dem Produkte zur Rechten eine Null anhänge.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 25, zweite Gruppe.

c) Multiplizieren mit Zehnern und Einern.

Die Aufgaben können sich hier, da 1000 nicht überschritten werden darf, nur in einem beschränkten Kreise bewegen, sie reichen aber immerhin aus, um das Verfahren zu erläutern und einzuüben.

Wie viel ist 26mal 36?

36
26
216
72.
936

Um 36 26mal zu nehmen, nehmen wir 36 zuerst 6mal, dann 20mal, und zählen beides zusammen. 6mal 36 ist 216; nämlich: 6mal 6 E. sind 36 E. oder 3 Z. und 6 E.; 6mal 3 Z. sind 18 Z., dazu 3 Z. sind 21 Z. oder 2 H. und 1 Z. Um 20mal 36 zu erhalten, nehmen wir 36 zuerst 2mal, und dann das 2fache noch 10mal; 2mal 36 ist 72; das zweifache 72 wird 10mal genommen, indem wir die Einer zu Zehnern und die Zehner zu Hunderten machen, also jede Ziffer um eine Stelle weiter gegen die Linke schreiben. Wir haben dann: 6 E.; 2 Z. und 1 Z. sind 3 Z.; 7 H. und 2 H. sind 9 H. Das Produkt ist also 936.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 25, dritte Gruppe.

d) Abgeleitete Aufgaben im III. Rechenbuche S. 25, letzte Gruppe.

e) Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 26 und 27.

Hier müßen wir folgendes bemerken:

1. Der Lehrer dulde nicht, dass die Schüler in ihren Schlüssen die Zahlen der Aufgabe verwechseln. Auf die Frage: wie viel kosten 35 Hektoliter, wenn 1 Hektoliter 8 fl. kostet? antworten die Schüler häufig: 8mal 35 fl., während sie 35mal 8 fl. sagen sollten. Gestattet man den Schülern solche fehlerhafte Antworten, so hört alle unmittelbare Anschauung von der Richtigkeit der Schlüsse auf.

2. Der Lehrer achte ebenso darauf, dass sich die Schüler keiner sinnlosen Redensarten bedienen, dass sie z. B. in der vorigen Aufgabe nicht folgern, man müße 8 fl. mit 35 Hektoliter multiplizieren, weil man 8 fl. wohl 35mal, aber nicht 35hektolitermal nehmen kann. Überhaupt sind die Schüler aufmerksam zu machen, dass beim Multiplizieren benannter Zahlen der Multiplikator stets eine unbenannte Zahl sein muß und das Produkt denselben Namen erhält, welchen der Multiplikand hat.

---

5. Messen und Theilen oder Dividieren.

§. 61. Das Messen im Kopfe.

Die Aufgaben des Messens und des Theilens im Kopfe müßen hier noch auseinander gehalten und jede auf ihre besondere Art behandelt werden, wenn Klarheit und Einsicht erreicht werden soll.

Durch das Messen soll gefunden werden, wie oft eine Zahl in einer andern Zahl enthalten ist. Über die Ausführung dieser Operazion sind schon auf den früheren Stufen zahlreiche Übungen vorgenommen worden. Hier handelt es sich um die Wiederholung und eine angemessene Erweiterung.

a) Messen durch Einer, wenn auch im Resultate bloß Einer erscheinen.

1. Mündlich.

Die hieher gehörigen Übungen, nämlich

1 ist in 1 1mal enthalten	2 ist in 2 1mal enthalten	u. s. w.
1 „ „ 2 2 „ „	2 „ „ 4 2 „ „	
1 „ „ 3 3 „ „	2 „ „ 6 3 „ „	
1 „ „ 4 4 „ „	2 „ „ 8 4 „ „	
u. s. w.	u. s. w.	

beruhen auf der Umkehrung des Einmaleins. Z. B.: Wie oft ist 2 in 12 enthalten? — 12 ist wie vielmal 2? Von 12 läßt sich also 2 6mal wegnehmen, oder 2 ist in 12 6mal enthalten.

Die oben angedeuteten Reihenfolgen können daher am zweckmäßigsten in Verbindung mit dem Einmaleins wiederholt werden. Z. B.:

1mal 3 ist 3, also ist 3 in 3 1mal enthalten;
2 „ 3 „ 6, „ „ 3 „ 6 2 „ „
3 „ 3 „ 9, „ „ 3 „ 9 3 „ „
4 „ 3 „ 12, „ „ 3 „ 12 4 „ „
u. s. w.

Diese Übungen, welche die Grundlage für das schriftliche Dividieren bilden und darum bis zur größten Sicherheit zu wiederholen sind, umfassen die Fälle, wo beim Messen kein Rest übrig bleibt. Nun folgen Aufgaben, wo beim Messen ein Rest übrig bleibt.

Wie oft ist 5 in 23 enthalten? — Wie vielmal 5 ist 23? 23 ist 4mal 5 und 3. Wie oft läßt sich daher 5 von 23 wegnehmen? Und wie viel bleibt übrig?

Wie vielmal 8 ist 42? 42 ist 5mal 8 und 2. Wie oft ist also 8 in 42 enthalten? Wie viel bleibt noch übrig?

Wie vielmal 6 ist 19? 19 ist 3mal 6 und 1; 6 ist also in 19 3mal enthalten, mit dem Reste 1.

36 ist wie vielmal 4? wie vielmal 5, 6, 7, 8, 9? Wie oft ist also 4 in 36 enthalten, wie oft 5, 6, 7, 8, 9?

2. **Schriftlich.**

Die schriftlichen Übungen schließen sich genau an die mündlichen an. In Beziehung auf die Bezeichnungsart des Messens erscheint es an der Zeit, anstatt der im Zahlenkreise bis 100 gebrauchten Ausdrucksweise: 4 in 20 = 5, welche gelesen wurde: 4 in 20 ist 5mal enthalten, weiterhin die richtigere Anschreibweise 20 : 4 = 5 einzuführen.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 28, a.

---

b) Messen durch Einer, wenn das Resultat 10 oder mehr als 10 beträgt.

1. **Mündlich.**

Wie oft ist 2 in 20, 3 in 30, 4 in 40, . . . 9 in 90 enthalten?

Wie oft ist 2 in 200, 3 in 300, . . . 9 in 900 enthalten?

Wie oft ist 4 in 80 enthalten? — 4 ist in 8 E. 2mal, in 8 Z. 10mal so oft, also 20mal enthalten.

Wie oft ist 6 in 240 enthalten? — 6 ist in 24 E. 4mal, in 24 Z. 10mal so oft, also 40mal enthalten.

Wie oft ist 2 in 600 enthalten? — 2 ist in 6 E. 3mal, in 6 H. 100mal so oft, also 300mal enthalten.

Nach mehreren solchen Übungen sprechen die Schüler kurz: 4 ist in 80 20mal enthalten, 6 ist in 240 40mal enthalten, u. s. w.

Enthält die Zahl, welche gemessen werden soll, nicht bloß Zehner oder Hunderte, so muß sie in eine größere und eine kleinere Zahl so zerlegt werden, dass die größere reine Zehner enthält, die ein Vielfaches der Einer sind, durch welche man messen soll. Z. B.:

Wie oft ist 3 in 69 enthalten? — Wir zerlegen 69 in 60 und 9, und folgern: 3 ist in 60 20mal, in 9 3mal, in 69 also 23mal enthalten.

Wie oft ist 2 in 68, 4 in 84, 3 in 96, 5 in 105, 8 in 248, 9 in 369, 6 in 186, 5 in 155 enthalten?

Wie oft ist 3 in 84 enthalten? — Wir zerlegen 84 in 60 (ein Vielfaches von 3) und 24, und rechnen: 3 ist in 60 20mal, in 24 8mal, in 84 also 28mal enthalten.

Wie oft ist 6 in 324 enthalten? — 324 wird zerlegt in 300 und 24; 6 ist in 300 50mal, in 24 4mal, in 324 also 54mal enthalten.

Wie oft ist 8 in 96, 3 in 54, 6 in 72, 2 in 78, 5 in 185, 7 in 364 enthalten?

Die Reste machen keine Schwierigkeit. Z. B.:

Wie oft ist 7 in 304 enthalten? — Wir zerlegen 304 in 280 und 24; 7 ist in 280 40mal, in 24 3mal enthalten, mit dem Reste 3; 7 ist also in 304 43mal enthalten und es bleibt 3 als Rest.

2. Schriftliche Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 28 und 29, b.

---

c) Messen durch Zehner und Einer.

1. **Mündlich.**

Wie oft ist 10 in 20, in 30, 40. . . . 90 enthalten?

Wie oft ist 20 in 160 enthalten? — 20 sind 2 Z., 160 sind 16 Z., 2 Z. sind in 16 Z. ebenso oft, als 2 E. in 16 E., also 8mal enthalten.

Wie oft ist 30 in 270 enthalten? — 3 Z. sind in 27 Z. eben so oft als 3 in 27, also 9mal enthalten.

Wie oft ist 40 in 80, 20 in 100, 30 in 150, 40 in 360, 60 in 238, 30 in 220, 20 in 175 enthalten?

Das Messen durch Zehner und Einer beschränken wir, da dasselbe eine sichere Kenntnis der Vielfachen der höheren Zahlen voraussetzt, auf das Messen durch die Zahlen 11 und 12, von denen die Vielfachen leicht zu merken sind.

Wie viel ist 2mal, 3mal, . . . 9mal 11? Wie oft ist daher 11 in 22, in 33, . . . 99 enthalten?

Wie viel ist 2mal, 3mal, . . . 9mal 12? Wie oft ist daher 12 in 24, 36, . . . 108 enthalten?

Wie oft ist 11 in 25, 68, 81, 100; wie oft 12 in 30, 52, 80, 97, 110 enthalten?

2. Schriftlich.

III. Rechenbuch S. 29, c.

---

d) Abgeleitete Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 29, d.

---

e) Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 29 und 30, e.

Die erste Gruppe von Aufgaben enthält Übungen im Reduzieren der Münzen, Maße und Gewichte; die zweite verschiedene praktische Anwendungen.

Um die hier vorkommende Schlussweise besser ersichtlich zu machen, wollen wir zu einigen Aufgaben die Auflösung mittheilen.

Wie viele Schreibhefte können aus 144 Bogen Papier gemacht werden, wenn man zu jedem Schreibhefte 4 Bogen nimmt?

Auflösung. Nehme ich von den 144 Bogen Papier 4 Bogen weg, so gibt das 1 Schreibheft; nehme ich von dem Reste nochmal 4 Bogen weg, so gibt das wieder 1 Heft; u. s. w. So oft ich also von 144 Bogen 4 Bogen wegnehmen kann, so vielmal 1 Heft erhalte ich. 4 Bogen können aber von 144 Boben so oft weggenommen werden, als 4 Bogen in 144 Bogen enthalten sind. 144 B. = 120 B. + 24 B.; 4 B. sind in 120 B. 30mal, in 24 B. 6mal, in 144 B. also 36mal enthalten. 144 Bogen geben darum 36mal 1 Heft, d. i. 36 Hefte.

Ein Rechteck hat 32 □ Meter Fläche und eine Länge von 8 Meter; wie groß ist seine Breite?

Diese Aufgabe enthält eine Umkehrung der oben beim Vervielfachen behandelten Flächenberechnungen.

Auflösung. Da das Rechteck 8 Meter lang ist, so lassen sich darin an der Längenseite 8 □ Meter auftragen, welche einen Streifen von 1 Meter Breite bilden. Nehme ich daher von 32 □ Meter einen Streifen von 8 □ Meter weg, so gibt das 1 Meter Breite; nehme ich von dem Reste noch einmal einen Streifen von 8 □ Meter weg, so gibt das wieder 1 Meter Breite u. s. w. Ich erhalte also so vielmal 1 Meter Breite, als 8 □ Meter in 32 □ Meter enthalten sind; 8 □ Meter sind in 32 □ Meter 4mal enthalten; das Rechteck hat also 4mal 1 Meter d. i. 4 Meter Breite.

---

§. 62. Das Theilen im Kopfe.

Durch das Theilen soll eine Zahl in mehrere gleiche Theile zerlegt und die Größe eines solchen Theiles bestimmt werden.

a) Theilen durch Einer, wenn auch im Resultate bloß Einer erscheinen.

1. Mündlich.

Zuerst werden die Begriffe „ein Halbes, ein Drittel, ein Viertel, . . .“ wiederholungsweise veranschaulicht. Dann übt man nach der Reihe die folgenden Sätze durch:

$\frac{1}{2}$ v. 2 = 1	$\frac{1}{3}$ v. 3 = 1	u. s. w.
$\frac{1}{2}$ v. 4 = 2	$\frac{1}{3}$ v. 6 = 2	
$\frac{1}{2}$ v. 6 = 3	$\frac{1}{3}$ v. 9 = 3	
u. s. w.	u. s. w.	

Die Ableitung geschieht aus den Vielfachen der Zahlen durch Schlüsse. Z. B.

3mal	1	ist	3,	der	dritte	Theil	von	3	ist	also	1;
3	" 2	"	6,	"	"	"	"	6	"	"	2;
3	" 3	"	9,	"	"	"	"	9	"	"	3;
3	" 4	"	12,	"	"	"	"	12	"	"	4;

u. s. w.

Nun folgen Aufgaben, wo das Theilen auf einen Bruch führt. Z. B.

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 25? — 25 ist 24 und 1; $\frac{1}{3}$ v. 24 ist 8, $\frac{1}{3}$ v. 1 ist $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ von 25 ist also $8\frac{1}{3}$.

Wie viel ist $\frac{1}{4}$ v. 39? — 39 ist 36 und 3; $\frac{1}{4}$ v. 36 ist 9, $\frac{1}{4}$ v. 3 ist $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ v. 39 ist also $9\frac{3}{4}$.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 17? $\frac{1}{3}$ v. 28? $\frac{1}{4}$ v. 35? $\frac{1}{5}$ v. 17? $\frac{1}{6}$ v. 41? $\frac{1}{7}$ v. 50? $\frac{1}{8}$ v. 61? $\frac{1}{9}$ v. 70?

Zur Wiederholung kann hier auch das Theilen in Verbindung mit dem Vervielfachen vorgenommen werden. Z. B.

Wie viel ist 3mal der 4te Theil von 32, oder wie viel ist $\frac{3}{4}$ v. 32? — $\frac{1}{4}$ v. 32 ist 8, $\frac{3}{4}$ v. 32 ist also 3mal 8 d. i. 24.

Wie viel ist $\frac{2}{3}$ v. 27? $\frac{2}{5}$ v. 35? $\frac{5}{6}$ v. 42? $\frac{3}{7}$ v. 28? $\frac{7}{8}$ v. 48? $\frac{4}{9}$ von 72?

2. Schriftliche Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 31, a.

---

b) Theilen durch Einer, wenn das Resultat 10 oder mehr als 10 beträgt.

1. **Mündlich.**

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 20, $\frac{1}{3}$ von 30, $\frac{1}{4}$ von 40, ... $\frac{1}{9}$ von 90?

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 200, $\frac{1}{3}$ von 300, $\frac{1}{4}$ von 400, ... $\frac{1}{9}$ von 900?

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 60? — $\frac{1}{3}$ von 6 Z. sind 2 Z. oder 20.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ v. 80? $\frac{1}{4}$ v. 120? $\frac{1}{5}$ v. 250? $\frac{1}{6}$ v. 240? $\frac{1}{7}$ v. 350? $\frac{1}{8}$ v. 480? $\frac{1}{9}$ v. 630?

Wie viel ist $\frac{1}{3}$ von 96? — $\frac{1}{3}$ v. 90 ist 30, $\frac{1}{3}$ v. 6 ist 2, $\frac{1}{3}$ v. 96 ist also 32.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ v. 48? $\frac{1}{4}$ v. 84? $\frac{1}{5}$ v. 105? $\frac{1}{6}$ v. 426? $\frac{1}{7}$ v. 567? $\frac{1}{8}$ v. 328? $\frac{1}{9}$ v. 729?

Wie viel ist $\frac{1}{4}$ von 52? — 52 ist 40 und 12; $\frac{1}{4}$ v. 40 ist 10, $\frac{1}{4}$ von 12 ist 3, $\frac{1}{4}$ v. 52 ist also 13.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von 36? $\frac{1}{3}$ v. 72? $\frac{1}{4}$ v. 55? $\frac{1}{5}$ v. 85? $\frac{1}{6}$ v. 252? $\frac{1}{7}$ v. 98? $\frac{1}{8}$ v. 453? $\frac{1}{9}$ v. 387?

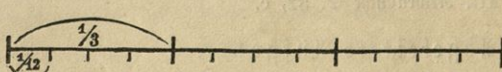
2. Schriftlich.

Im III. Rechenbuche S. 31, b.

c) Theilen durch Zehner, durch Zehner und Einer.

1. Mündlich.

Im Kopfe lösbar ist hier im allgemeinen nur das Theilen durch reine Zehner (als Vielfache von 10) und das Theilen durch solche zweistellige Zahlen, welche im Einmaleins als Vielfache vorkommen. Wir beschränken uns daher auf Aufgaben dieser Art, schicken jedoch, da hier ein zweimaliges Theilen nothwendig ist, zur Begründung einige einleitende Übungen voraus.



Theile ich ein Ganzes (eine Linie, ein Stäbchen, einen Papierstreifen) in 3 gleiche Theile, so erhalte ich 3 Drittel. Theile ich jedes Drittel in 4 gleiche Theile, so erhalte ich 3mal 4 oder 12 gleiche Theile. Jeder solche Theil ist daher ein Zwölftel. Um also den 12ten Theil eines Ganzen zu erhalten, suche ich zuerst den dritten Theil, und von diesem Drittel den 4ten Theil. $\frac{1}{12}$ könnte ich auch erhalten, wenn ich zuerst $\frac{1}{4}$, und dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ bestimme.

Was für Theile einer Linie erhalte ich, wenn ich dieselbe zuerst in 5 gleiche Theile, und jeden solchen Theil noch in 3 gleiche Theile theile? Um also $\frac{1}{15}$ zu erhalten, suche ich zuerst $\frac{1}{5}$, und dann $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{5}$.

Ebenso wird den Schülern veranschaulicht, dass $\frac{1}{25} = \frac{1}{5}$ von $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{32} = \frac{1}{4}$ von $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{50} = \frac{1}{5}$ von $\frac{1}{10}$ u. s. w. ist.

Durch ähnliche Schlussfolgerungen wird den Schülern auch klar gemacht, dass der 10te Theil von 1 Zehntel 1 Hundertel und der 10te Theil von 1 Hundertel 1 Tausendtel ist.

Ist dieses alles richtig aufgefasst worden, so wird das Theilen der Zahlen in den oben angegebenen Fällen keine weitere Schwierigkeit bieten.

Wie viel ist $\frac{1}{10}$ von 10, 20, 40, 90, 100, 160, 250?

Wie viel ist $\frac{1}{20}$ von 160? — $\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ v. $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$ v. 160 ist 16, $\frac{1}{2}$ v. 16 ist 8; $\frac{1}{20}$ v. 160 ist also 8.

Wie viel ist $\frac{1}{30}$ von 210? $\frac{1}{40}$ von 360? $\frac{1}{50}$ v. 250? $\frac{1}{60}$ v. 480? $\frac{1}{70}$ v. 630? $\frac{1}{80}$ v. 320? $\frac{1}{90}$ v. 720?

Wie viel ist $\frac{1}{15}$ von 135? — $\frac{1}{15}$ ist $\frac{1}{3}$ v. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5}$ v. 135 ist 27, $\frac{1}{3}$ v. 27 ist 9; $\frac{1}{15}$ v. 135 ist also 9.

Wie viel ist $\frac{1}{12}$ v. 144? $\frac{1}{16}$ v. 176? $\frac{1}{24}$ v. 288? $\frac{1}{32}$ v. 224? $\frac{1}{45}$ v. 945?

2. Schriftlich.

Im III. Rechenbuche S. 32, c.

d) Abgeleitete Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 32, d.

e) Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 32 und 33, e.

Wir wollen auch die bei diesen Aufgaben eintretenden Schlussfolgerungen andeuten.

In einer Haushaltung braucht man wöchentlich 49 Dekagramm Kaffee; wie viel täglich?

Auflösung. 1 Tag ist der 7te Theil einer Woche, in 1 Tage braucht man daher nur den 7ten Theil von 49 Dekagramm Kaffee; der 7te Theil von 49 Dekagramm sind 7 Dekagramm; man braucht also täglich 7 Dekagramm Kaffee.

Ein Rechteck hat 54 □ Meter Fläche und eine Breite von 6 Meter; wie groß ist die Länge?

Auflösung. Ich zerlege das Rechteck in 6 gleiche Streifen. Jeder Streifen enthält den 6ten Theil von 54 □ M., also 9 □ Meter. Da jeder solche Streifen 1 Meter breit ist, so hat er so viel Meter Länge, als □ Meter auf ihm Platz haben, also 9 Meter Länge. Die Länge des Streifens ist aber zugleich die Länge des Rechteckes, also ist das Rechteck 9 Meter lang.

---

§. 63. Schriftliches Dividieren.

Wir hielten bisher das Messen und Theilen strenge auseinander und konnten auch, um Klarheit und einsichtsvolle Beurtheilung zu ermöglichen, nicht anders vorgehen, da bei den beiden Operazionen eine verschiedene Ausdrucksweise und wesentlich verschiedene Schlüsse in Anwendung kommen. Beim Zifferrechnen bezeichnen wir das Messen und das Theilen mit dem gemeinschaftlichen Namen Dividieren, das aber eben darum in einem zweifachen Sinne aufgefasst werden muß.

Ist z. B. 12 durch 4 zu dividieren, und ich fasse das Dividieren im Sinne des Messens auf, so habe ich zu suchen, wie oft 4 in 12 enthalten ist; ich muß also 12 in 4 + 4 + 4, also in 3mal 4 zerlegen und finde dadurch, dass 4 in 12 3mal enthalten ist.

Fasse ich aber die obige Division als Theilung auf, so muß ich suchen, wie viel der 4te Theil von 12 ist; ich zerlege also 12 in 4 gleiche Theile d. i. in 3 + 3 + 3 + 3 oder 4mal 3, und schließe: der 4te Theil von 12 ist 3.

Die erste Aufgabe kann durch die Darstellung

• • • •   • • • •   • • • •

die zweite dagegen durch

• • •   • • •   • • •   • • •

anschaulich gemacht werden.

Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Divisionsarten an benannten Zahlen hervor.

Es sei z. B. die Aufgabe: „1 Meter Tuch kostet 4 fl.; wie viel Meter erhalte ich für 12 fl?“ Dabei wird gefolgert: ich erhalte so vielmal 1 Meter, als 4 fl. in 12 fl. enthalten sind; 4 fl. sind in 12 fl. 3mal enthalten; ich erhalte also 3mal 1 Meter, oder 3 Meter. Hier werden 12 fl. durch 4 fl. gemessen, und man erhält zur Antwort: 3mal. Beim Messen benannter Zahlen sind also Dividend und Divisor benannt und zwar gleichnamig, der Quozient aber ist unbenannt.

Ist dagegen die Aufgabe: „4 Meter Tuch kosten 12 fl.; wie viel kostet 1 Meter?“ zu lösen, so wird geschlossen: 1 Meter ist der 4te Theil von 4 Meter, 1 Meter kostet daher nur den 4ten Theil von 12 fl. d. i. 3 fl. Hier werden 12 fl. in 4 gleiche Theile getheilt, wodurch man 3 fl. als einen Theil erhält. Beim Theilen benannter Zahlen sind also Dividend und Quozient benannt und zwar gleichnamig, der Divisor aber muß immer eine unbenannte Zahl sein.

So verschieden übrigens die beiden Divisionsweisen in Bezug auf die Ausdrucksweise und Folgerungen sind, so kommen sie doch darin überein, dass beide für denselben Dividend 12 und für denselben Divisor 4 dieselbe Zahl 3 als Quozienten geben, was auch leicht erklärbar ist, weil sich das Theilen durch ganz einfache Schlüsse immer auf das Messen zurückführen lässt. Um den 4ten Theil von 12 zu erhalten, nehme ich von je 4, welche in 12 vorkommen, immer nur 1; ich erhalte also so vielmal 1, als 4 in 12 vorkommt, d. h. der 4te Theil von 12 ist so viel, als 4 in 12 enthalten ist.

Dieser innige Zusammenhang zwischen den Aufgaben des Messens und des Theilens macht es möglich, dass beim schriftlichen Dividieren dasselbe Zeichen und dasselbe Rechnungsverfahren angewendet wird. Der Ausdruck $12 : 4 = 3$ (12 dividiert durch 4 ist gleich 3) kann gelesen werden: 4 ist in 12 3mal enthalten, oder: der 4te Theil von 12 ist 3. Der Stufengang in den Übungen entspricht dem bei der schriftlichen Multiplikazion eingehaltenen.

---

a) Dividieren durch Einer.

Das schriftliche Dividieren unterscheidet sich nur wenig von dem mündlichen Messen und Theilen. Man dividiert die einzelnen Stellen von der höchsten angefangen; dividiert man Hunderte, so erhält man Hunderte; dividiert man Zehner, so erhält man Zehner; dividiert man Einer, so erhält man Einer.

Wir behandeln zuerst Aufgaben, wo kein Übergang in eine andere Ordnung stattfindet. Z. B.

Es sei 96 durch 3 zur dividieren.

$$\begin{array}{l} \overset{\text{Z.E.}}{96} : 3 = \overset{\text{Z.E.}}{32} \\ \underline{9.} \\ \ \ 6 \\ \ \ \underline{6} \end{array}$$

Man kann anfänglich wegen der leichteren Anschauung die dekadische Bedeutung der einzelnen Ziffern durch darübergestellte Buchstaben anzeigen lassen.

1. Im Sinne des Messens: Wie oft ist 3 in 96 enthalten?

3 ist in 9 E. 3mal, in 9 Z. also 30mal enthalten; wir schreiben daher hinter dem Gleichheitszeichen 3 Z. an. Wir wollen auch sehen, ob 3 in 9 Z. genau 30mal enthalten ist; 30mal 3 ist 90 oder 9 Z., diese schreiben wir unter die 9 Z. und subtrahieren. Bleibt etwas übrig? Also ist 3 in 9 Z. genau

30mal enthalten. — Nun suchen wir, wie oft 3 in 6 E. enthalten ist; wir setzen daher die 6 E. herab. 3 ist in 6 E. 2mal enthalten; diese 2 E. schreiben wir hinter die 3 Z.; 2mal 3 ist 6; werden diese 6 unter die 6 E. geschrieben und von diesen subtrahiert, so bleibt nichts übrig. 3 ist also in 96 30mal und 2mal d. i. 32mal enthalten.

2. Im Sinne des Theilens: Wie viel ist der dritte Theil von 96?

Theilen wir 9 Z. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 3 Z.; diese schreiben wir rechts. Getheilt sind nun 3mal 3 Z. oder 9 Z.; diese setzen wir unter 9 Z. und subtrahieren. Es bleibt kein Zehner übrig. — Nun sind noch 6 E. zu theilen, wir setzen sie herunter. Theilen wir 6 E. in 3 gleiche Theile, so kommen auf 1 Theil 2 E.; die setzen wir wieder rechts. Getheilt haben wir nun 3mal 2 E. oder 6 E.; 6 E. von 6 E. bleibt nichts. Der dritte Theil von 96 sind also 3 Z. und 2 E. d. i. 32.

Hier haben wir 96 durch 3 gemessen und getheilt. Eine Zahl durch eine andere messen oder theilen heißt **dividieren**. Die Zahl 96, welche gemessen oder getheilt wird, heißt der **Dividend**; die Zahl 3, durch welche gemessen oder getheilt wird, der **Divisor**; und die Zahl 32, welche beim Messen oder Theilen herauskommt, der **Quozient**.

Das gleiche Verfahren gilt auch beim Dividieren einer dreistelligen Zahl durch Einer. Z. B.

```
H.Z.E.       H.Z.E.
426  :  2  =  213
4 . .
 2 .
 2 .
   6
   6
```

Welche Zahl ist hier der Dividend, welche der Divisor, und welche der Quozient?

Nun wollen wir auch solche Fälle behandeln, wo bei der Division der höheren Stellen Reste übrig bleiben, wo daher ein Übergang in niedrigere Ordnungen stattfindet.

Wie oft ist 2 in 78 enthalten?

```
Z.E.       Z.E.
78 : 2 = 39
6.
 18
 18
```

2 ist in 7 E. 3mal, in 7 Z. also 30mal enthalten; wir schreiben daher 30 oder 3 Z. in den Quozienten. 30mal 2 ist 60 oder 6 Z.; 6 Z. von 7 Z. bleibt noch 1 Z. übrig. Nun ist noch zu suchen, wie oft 2 in 1 Z. und 8 E. enthalten ist. 1 Z. = 10 E.; 10 E. und 8 E., welche wir zu 1 herabsetzen, sind 18 E.; 2 ist in 18 E. 9mal enthalten; wir schreiben die Ziffer 9 hinter 3 Z. in die Einerstelle. 9mal 2 ist 18, von 18 weggenommen, bleibt nichts.

Wie viel ist der 4te Theil von 347?

```
H.Z.E.       Z.E.
347 : 4 = 86 3/4
32.
 27
 24
  3
```

Zuerst sind 3 H. in 4 gleiche Theile zu theilen; da kann auf 1 Theil kein Hundert kommen; wir verwandeln daher die 3 H. in Zehner; 3 H. sind 30 Z., dazu die vorhandenen 4 Z. sind 34 Z. Der 4te Theil von 34 Z. sind 8 Z.; 4mal 8 Z. sind jedoch nur 32 Z., und es bleiben von den 34 Z. noch 2 Z. zur Vertheilung übrig. Es sind also noch 2 Z. und 7 E. zu theilen; 2 Z. = 20 E., 20 E. und 7 E. sind 27 E.; der 4te Theil von 27 E. sind 6 E.; 4mal 6 E. sind 24 E., und es bleiben von den 27 E. noch 3 E. zu theilen übrig. Der Quozient ist also 86 mit dem Reste 3. — Man kann nun auch noch den Rest 3 in 4 gleiche Theile theilen; der 4te Theil von 1 ist $\frac{1}{4}$, der 4te Theil von 3 also $\frac{3}{4}$. Der vierte Theil von 347 ist demnach $86\frac{3}{4}$.

Die Schüler werden bald sehen, dass man über die einzelnen Ziffern des Quozienten ihre Bedeutung gar nicht zu setzen braucht, weil sie nach der Ordnung Hunderte, Zehner und Einer bedeuten, und weil dieselben wenn man sie nur nach der Reihe hinschreibt, schon durch diese Anordnung selbst in ihrer wahren Bedeutung erscheinen. Es wird daher die bisher wegen der leichteren Übersicht vorgenommene Bezeichnung des Stellenwertes der Ziffern durch darübergesetzte Buchstaben allmählich wegfallen.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 34 und 35.

---

b) Dividieren durch reine Zehner.

Wir machen mit der Division durch 10 den Anfang.

Wie viel ist der 10te Theil von 730?

73,0 : 1,0 = 73

Der 10te Theil von 1 H. ist 1 Z., von 7 H. also 7 Z.; der 10te Theil von 3 Z. sind 3 E.; der 10te Theil von 730 sind also 7 Z. und 3 E. oder 73. Beim Dividieren durch 10 rückt daher jede Ziffer in die nächst niedrigere Ordnung zurück. Dieses geschieht einfach dadurch, dass man der Zahl rechts eine Ziffer abschneidet; die abgeschnittene Ziffer gibt, wenn sie nicht Null ist, den Rest. Z. B.

65,5 : 1,0 = 65
5 Rest.

Wie viel ist der 20ste Theil von 380?

38,0 : 2,0 = 19
2.
18
18

$\frac{1}{20}$ ist $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{10}$. Um also den 20sten Theil von 380 zu erhalten, nimmt man von 380 zuerst den 10ten Theil, indem man rechts eine Ziffer abschneidet, und dann von 38 noch die Hälfte.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 35, zweite Gruppe.

---

c) Dividieren durch Zehner und Einer.

Bei der Division durch einen zweistelligen Divisor verfährt man auf dieselbe Art, wie bei der Division durch einen einstelligen; im allgemeinen werden dabei sogleich die zwei höchsten Stellen des Dividends in's Auge gefasst. Wir wählen für den Anfang solche zweistellige Divisoren, worin die Einer sehr klein sind, weil sich in diesem Falle die Ziffern des Quozienten leichter bestimmen lassen; z. B.

Wie oft ist 21 in 714 enthalten?

714 : 21 = 34 63. 84 84	Da hier nicht 21 H. vorhanden sind, so verwandle ich die 7 H. in Zehner; 7 H. = 70 Z.; 70 Z. und 1 Z. sind 71 Z. Ich suche nun zunächst,

wie oft 21 E. in 71 E. enthalten sind, und schließe: 21 E. sind in 71 E. beiläufig so oft enthalten, als 20 E. in 70 E., oder 2 Z. in 7 Z., nämlich 3mal; es werden daher 21 E. in 71 Z. 10mal so oft, also 30mal enthalten sein. Ob das richtig ist, finde ich sogleich, wenn ich 30mal 21 E. nehme und untersuche, ob sie sich von 71 Z. wegnehmen lassen; 30mal 21 E. sind 630 E. oder 63 Z., welche sich von 71 Z. subtrahieren lassen; es bleiben 8 Z. übrig. 8 Z. = 80 E., und 4 E. sind 84 E.; 21 E. sind nun in 84 E. nahe so oft enthalten, als 20 E. in 80 E., oder 2 Z. in 8 Z., also 4mal. 4mal 21 E. sind 84 E., es bleibt also von 84 E. nichts übrig. Mithin ist 21 in 714 34mal enthalten.

Schwieriger gestaltet sich das Dividieren, wenn die Einer des Divisors groß sind, z. B. das Dividieren durch 19, 39, 69, oder durch 18, 48, 78. Man kann sich übrigens die Lösung dadurch erleichtern, dass man sich beim Suchen der Ziffern des Quozienten für den gegebenen Divisor die nächst höhere reine Zehnerzahl denkt. Z. B.

513 : 19 = 27 38. 133 133	Anstatt 19 denke ich mir 20. So oft 20 in einer Zahl enthalten ist, so oft ist jedenfalls auch 19 darin enthalten.

Ich rechne also: 19 ist in 51 E. nahe so oft, als 20 in 50, oder 2 Z. in 5 Z., mithin 2mal enthalten; 19 ist in 51 Z. 10mal so oft, daher 20mal enthalten; 2 Z. kommen in den Quozienten. 20mal 19 ist 38 Z.; werden diese von 51 Z. weggenommen, so bleiben noch 13 Z., welche als solche durch 19 nicht gemessen werden können; ich verwandle daher 13 Z. in Einer; 13 Z. sind 130 E., und 3 E. herab, sind 133 E. Ich schließe ferner: 19 ist in 133 E. nahe so oft als 20 in 130, oder 2 Z. in 13 Z., mithin 6mal enthalten. 6mal 19 ist 114; 114 von 133 bleibt 19. So viel darf aber nicht bleiben, weil 19 in dem Reste 19 noch 1mal enthalten ist; die Ziffer 6 des Quozienten ist also um 1 zu klein angenommen worden. Ich sage daher: 19 ist in 133 E. 7mal enthalten; 7mal 19 ist genau 133; es bleibt kein Rest übrig. Der Quozient ist 27.

Wenn der Divisor einstellig ist, so kann die jedesmalige Ziffer des Quozienten auf Grund des Einmaleins sogleich richtig bestimmt werden. Anders ist es bei der Division durch einen zweistelligen Divisor. Da man hier die einzelnen Ziffern des Quozienten dadurch bestimmt, dass man versuchsweise immer nur die höchste oder die zwei höchsten Stellen des Dividends durch die höchste Stelle des Divisors dividiert, so erscheinen dabei die Ziffern des Quozienten nicht immer sogleich richtig, sie müßen manchmal noch verbessert werden. Um sich zu überzeugen, ob die gefundene Ziffer des Quozienten richtig sei, multipliziert man damit den Divisor und subtrahiert das Produkt von dem Dividende. Bleibt kein Rest übrig, oder ein Rest, welcher kleiner als der Divisor ist, so ist die Ziffer des Quozienten richtig. Bleibt ein Rest, welcher so groß oder größer als der Divisor ist, so dass in diesem Reste der Divisor noch einmal enthalten ist, so ist die Ziffer des Quozienten zu klein angenommen worden, man muß eine größere Ziffer nehmen. Ist aber das Produkt aus dem Divisor und der Ziffer des Quozienten größer als der Dividend, so dass man nicht subtrahieren kann, so wurde die Ziffer des Quozienten zu groß angenommen, man muß sie durch eine kleinere ersetzen.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 35, dritte Gruppe.

d) Abgeleitete Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 35, letzte Gruppe.

e) Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 36 und 37.

Nachdem die Schüler die Grundoperazionen in dem Zahlraume bis 1000 tüchtig durchgeübt haben, lasse man sie nun von den gewonnenen Mitteln einen möglichst vielseitigen Gebrauch machen. Das erhöhet ihre geistige Gewandtheit und ihr Interesse für den Unterricht. Die Verbindung der verschiedenen Operazionen macht es hier insbesondere möglich, leichtere Kaufs- und Verkaufsrechnungen, Dreisatz-, Gesellschafts- und Durchschnittsrechnungen zu lösen. Die Dreisatzrechnungen werden wir hier übergehen, da denselben in der unmittelbar folgenden Abtheilung eine besondere Behandlung gewidmet werden soll. Bei den zusammengesetzten Rechnungen ist nicht nur auf richtige Schlüsse, sondern auch auf eine genauere äußere Form und auf eine übersichtliche Darstellung zu sehen. Z. B.

Jemand kauft 3 Hektoliter Wein à 28 fl., 2 Hektoliter à 26 fl. und 7 Hektoliter à 20 fl.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 Hektoliter zu stehen?

Diese Aufgabe enthält eine Durchschnittsrechnung und führt auf folgenden Ansatz:

3	Hektoliter	à 28 fl.	kosten	84 fl.
2	„	à 26 fl.	„	52 fl.
7	„	à 20 fl.	„	140 fl.
12	Hektoliter	kosten	. . .	276 fl.

1 Hektoliter kostet 276 fl. : 12 = 23 fl.

6. Dreisatzrechnungen.

§. 64. Allgemeine Bemerkungen.

Den Schluſs des ersten Abschnittes bildet eine Reihe von Dreisatzrechnungen (Regeldetrie- oder Verhältnisaufgaben), welche sich innerhalb des Zahlraumes bis 1000 durch einfache Schlüsse im Kopfe lösen lassen. Aufgaben dieser Art wurden als Preisberechnungen schon am Schlusse des Zahlkreises bis 100 behandelt; hier sollen dieselben eine angemessene Erweiterung erhalten. Die Dreisatzrechnungen im weiteren Sinne treten unter einer der folgenden Hauptformen auf:

1. a. 1 Meter kostet 4 fl.; wie viel kosten 12 Meter?
   b. 1 Arbeiter braucht zu einer Arbeit 15 Tage; wie viel Tage brauchen dazu 3 Arbeiter?
2. a. 15 Meter kosten 75 fl.; wie viel kostet 1 Meter?
   b. 8 Arbeiter vollenden ein Werk in 3 Tagen; wie viel Tage braucht dazu 1 Arbeiter?
3. a. 7 Meter kosten 21 fl.; wie viel kosten 9 Meter?
   b. 12 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 8 Tagen; in wie viel Tagen kommen damit 16 Arbeiter zustande?

Bei den Aufgaben der ersten Hauptform wird von der Einheit auf die Mehrheit geschlossen; der Schluſs führt auf eine Multiplikazion oder Division. Bei den Aufgaben der zweiten Form wird von der Mehrheit auf die Einheit geschlossen; der Schluſs führt auf eine Division oder Multiplikazion. Bei den Aufgaben der dritten Art endlich wird von der Mehrheit auf eine andere Mehrheit geschlossen; der Schluſs führt im allgemeinen auf eine Verbindung der Multiplikazion mit der Division, in besonderen Fällen auch auf eine bloße Multiplikazion oder eine bloße Division.

Nur die Aufgaben der dritten Form sind eigentliche Regeldetrie-Aufgaben oder Dreisatzrechnungen im engeren Sinne. Da jedoch gerade die Aufgaben der ersten und zweiten

Form im Leben am häufigsten vorkommen, so sollen sie auch in der Schule vorzügliche Berücksichtigung finden und den Gegenstand der sorgfältigsten Übung bilden.

Bei jeder der obigen drei Hauptformen der Dreisatzrechnungen haben wir zwei Arten derselben angedeutet, da es zwei wesentlich verschiedene Wechselverhältnisse gibt, auf denen sie beruhen.

2mal so viel von derselben Ware kostet auch 2mal so viel Geld, 3mal so viele Ware kostet 3mal so viel Geld, u. s. w. Wenn also die Menge der Ware zunimmt, so nimmt auch ihr Preis in demselben Verhältnisse zu. Man sagt: Ware und Preis stehen in geradem Verhältnisse.

In einem geraden Verhältnisse stehen auch die Zeit der Arbeit und der Lohn, die Weite des Weges und der Frachtlohn, — das Gewicht der Last und der Frachtlohn, — die Zeit und der zurückgelegte Raum, — Kapital und Zins, u. dgl.

Wenn man einen Taglöhner aufnimmt, um einen Garten umzugraben, so braucht er dazu eine bestimmte Zeit. Bestellt man nun statt des einen, zwei eben so fleißige Arbeiter, so brauchen diese offenbar nur halb so viel Zeit, als der eine Arbeiter. Nimmt man 3 Arbeiter auf, so brauchen sie nur den dritten Theil der Zeit, die 1 Arbeiter braucht, u. s. w. Wenn also die Zahl der Arbeiter zunimmt, so nimmt die Zahl der Arbeitstage in demselben Verhältnisse ab. Man sagt: die Zahl der Arbeiter und die Arbeitszeit stehen in umgekehrtem Verhältnisse.

Ebenso stehen in umgekehrtem Verhältnisse: die Zahl der zu Nährenden und die Zeit, während welcher die Lebensmittel ausreichen sollen, — das Gewicht der Last und die Weite des Weges bei gleichem Frachtlohn, — die Länge und die Breite eines Stoffes bei gleichem Inhalte, u. dgl.

Bei allen Dreisatzrechnungen sind die Schlüsse nur dann richtig, und daher die beiden betrachteten Arten von Zahlen nur dann thatsächlich in einem geraden oder umgekehrten Verhältnisse, wenn alle in der Aufgabe nicht angeführten Umstände als sich gleichbleibend vorausgesetzt werden.

Die voranstehenden Andeutungen werden dem Lehrer ausreichende Anhaltspunkte zur Beurtheilung der verschiedenen Dreisatzrechnungen darbieten. Für die Schüler sind dieselben nicht nothwendig; es genügt, wenn diese bei jeder einzelnen Aufgabe die rechten Schlüsse bilden und sich auch der Richtigkeit derselben klar bewusst sind. Weil wir auf das Bilden wichtiger Schlüsse überhaupt im ganzen Rechenunterrichte ein großes Gewicht legen, und insbesondere die Regeldetrie-Aufgaben von vielen vorzugsweise mit dem Namen „Schlussrechnungen" bezeichnet werden, so erscheint es am angemessensten, dass wir die hierher gehörigen Aufgaben nach den verschiedenen Schlussformen, welche ihrer Lösung zu Grunde liegen, auf einander folgen lassen. Dadurch wird nicht nur die Übersicht erleichtert, sondern auch den Schülern Gelegenheit geboten, durch das längere Verweilen bei einer und derselben Schlussform sich in der Anwendung derselben die gewünschte Sicherheit und Gewandtheit anzueignen.

Dass in dem Rechenbuche die Dreisatzrechnungen am Schlusse des ersten Abschnittes stehen, darf nicht so aufgefasst werden, als ob sie dort auch vollständig vorzunehmen seien; dieselben sollen vielmehr auch später neben dem schriftlichen Rechnen mit den höheren Zahlen, welche sich nur in sehr beschränktem Maße für das Kopfrechnen eignen, als Stoff für die Fortsetzung der Kopfrechnungsübungen benützt werden.

---

§. 65. Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit.

Diese Schlussform kommt im bürgerlichen Leben am häufigsten vor, darum sollen die Schüler in der Anwendung derselben die größte Sicherheit erlangen. Nach der Mannigfaltigkeit der hierher gehörigen Aufgaben wird auch die Ausrechnung auf verschiedene Art vollzogen.

a.

Die Rechnung wird durch eine **einfache Multiplikazion** ausgeführt.

Die Schlussfolge bei solchen Aufgaben ist ganz einfach. Z. B.

1 Meter kostet 5 fl.; wie viel kosten 8 Meter?

So oft ich 1 Meter kaufe, so oft muß ich 5 fl. bezahlen; 8 Meter sind 8mal 1 Meter, also muß ich für 8 Meter 8mal 5 fl. bezahlen; 8mal 5 fl. sind 40 fl.; 8 Meter kosten also 40 fl. — Kürzer: 1 Meter kostet 5 fl., 8 Meter sind 8 × 1 Meter, 8 Meter kosten also 8 × 5 fl., d. i. 40 fl.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 38, a.

b.

Die Rechnung wird durch Anwendung von **Vortheilen** ausgeführt.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 38—40, b.

Verständnis und Sicherheit im Rechnen ist vor allem und mehr anzustreben als Schnelligkeit. Wir legen darum auf die sogenannten **Rechnungsvortheile** keinen besondern Wert und machen eine Ausnahme nur bezüglich jener eben so einfachen als wichtigen Vortheile, welche sich aus dem Zusammenhange, der zwischen den Eintheilungszahlen unserer Münzen, Maße und Gewichte besteht, unmittelbar ergeben. Diese Vortheile müßen übrigens aus den vorgelegten Aufgaben durch entsprechende Schlüsse von den Schülern selbst gefunden werden; am meisten Vortheil hat der Schüler von dem, was er durch eigenes Nachdenken gefunden hat.

Zunächst muß hier das Verwandeln der Geldsorten, als: der Zehner in Kreuzer, der Kreuzer in Zehner und Kreuzer, — der Gulden in Zehner, der Zehner in Gulden und Kreuzer, — der Zwanziger, Viertelgulden und halben Gulden in Gulden und Kreuzer, fest durchgeübt werden. Diese Vorübungen sind in der ersten Gruppe unter b enthalten. Die zweite Gruppe enthält die Vortheile selbst, welche wir schon in der II. Abtheilung §. 48, a, 2 näher bezeichnet haben.

c.

Die Rechnung wird durch **Zerlegung der Kreuzer in Zehner und Kreuzer** ausgeführt.

Preisrechnungen dieser Art kommen im praktischen Leben täglich vor und erfordern daher eine besonders sorgfältige Durchübung. Man zerlegt dabei die Kreuzer im Preise der Einheit in Zehner und Kreuzer, berechnet den Preis der Mehrheit für die Zehner und für die Kreuzer und zählt dann beide zusammen. Kommen im Preise der Einheit neben den Kreuzern auch Gulden vor, so wird der Preis der Mehrheit zuerst für die Gulden berechnet, dann der Preis für die Zehner und endlich der Preis für die Kreuzer zugezählt.

Eine übersichtliche Darstellung wird das Verständnis wesentlich erleichtern; z. B.

1 Kilogr. Reis kostet 32 Kr.; wie viel kosten 8 Kilogr.?

1 Kilogr. kostet 32 Kr. = 3 Zehn. + 2 Kr.
8 Kilogr. kosten 8 × 3 Zehn. + 8 × 2 Kr.
8 × 3 Zehner sind 24 Zehn. = 2 fl. 40 Kr.
8 × 2 Kr. sind 16 Kr.
2 fl. 40 Kr. + 16 Kr. sind 2 fl. 56 Kr.

In dieser Form sollen die Schüler anfänglich mehrere Aufgaben schriftlich durchführen, damit ihnen die Schlussfolge geläufiger wird. Später, wenn schon die nöthige Einsicht erzielt ist, kann bei den schriftlichen Übungen sogleich nur das Resultat angeschrieben werden.

Auch hier empfehlen sich Reihen, um den Schülern in Kürze Aufgaben für eine längere Beschäftigung zu geben; z. B.

1)				2)			
1	Liter kostet		43 Kr.	1	Meter kostet		61 Kr.
2	„ kosten		86 „	3	„ kosten	1 fl.	83 „
3	„ „	1 fl.	29 „	7	„ „	4 „	27 „
4	„ „	1 „	72 „	2	„ „	1 „	22 „
5	„ „	2 „	15 „	8	„ „	4 „	88 „
6	„ „	2 „	58 „	5	„ „	3 „	5 „
7	„ „	3 „	1 „	9	„ „	5 „	49 „
8	„ „	3 „	44 „	4	„ „	2 „	44 „
9	„ „	3 „	87 „	10	„ „	6 „	10 „
10	„ „	4 „	30 „	6	„ „	3 „	66 „

Die Reihenfolge unter 1) ist nicht zweckentsprechend. Die Schüler werden bald merken, daſs die auf einander folgenden Preise um den Einheitspreis wachsen; sie würden also, anstatt den Mehrheitspreis jedesmal besonders zu berechnen, nur zu dem vorhergehenden Mehrheitspreise immer den Preis der Einheit zuzählen, und so würde der hier beabsichtigte Übungszweck nicht erreicht werden. Um dem vorzubeugen, wähle man daher eine andere, von der natürlichen Zahlenreihe abweichende Reihe, z. B. 1, 3, 7, 2, 8, 5, 9, 4, 10, 6, wie solche unter 2) dargestellt ist, und behalte diese unabänderlich in allen folgenden Aufgaben bei.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 40 u. 41, c.

d.

Die Rechnung wird durch Zerlegung der Kreuzer in Guldentheile (Gulden) und Kreuzer ausgeführt.

Diese Zerlegung ist gegenüber der unter c. angeführten, allgemein anwendbaren Rechnungsweise nur dann von Vortheil, wenn die Zahl der Kreuzer von 20, 25, 50 oder 100 nicht bedeutend abweicht, also insbesondere für folgende Kreuzerzahlen:

17 Kr. = 1/5 fl. — 3 Kr.	48 Kr. = 1/2 fl. — 2 Kr.
18 „ = 1/5 „ — 2 „	49 „ = 1/2 „ — 1 „
19 „ = 1/5 „ — 1 „	51 „ = 1/2 „ + 1 „
21 „ = 1/5 „ + 1 „	52 „ = 1/2 „ + 2 „
22 „ = 1/5 „ + 2 „	53 „ = 1/2 „ + 3 „
23 „ = 1/5 „ + 3 „	54 „ = 1/2 „ + 4 „
24 „ = 1/4 „ — 1 „	55 „ = 1/2 „ + 5 „
26 „ = 1/4 „ + 1 „	95 „ = 1 „ — 5 „
27 „ = 1/4 „ + 2 „	96 „ = 1 „ — 4 „
28 „ = 1/4 „ + 3 „	97 „ = 1 „ — 3 „
29 „ = 1/4 „ + 4 „	98 „ = 1 „ — 2 „
46 „ = 1/2 „ — 4 „	99 „ = 1 „ — 1 „
47 „ = 1/2 „ — 3 „	

Die Auflösung ist aus folgenden Beispielen ersichtlich:

1 Kilogr. kostet 52 kr.; wie viel kosten 17 Kilogr.?

1 Kilogr. . . . 52 Kr. = $\frac{1}{2}$ fl. + 2 kr.
17 Kilogr. . . . $\frac{17}{2}$ fl. + 17 × 2 kr.
$\frac{17}{2}$ fl. = 8 fl. 50 kr.
17 × 2 kr. = 34 kr.
8 fl. 50 kr. + 34 kr. = 8 fl. 84 kr.

1 Meter kostet 23 kr.; wie viel kosten 28 Meter?

1 Meter . . . 23 kr. = $\frac{1}{4}$ fl. — 2 kr.
28 Meter . . . $\frac{28}{4}$ fl. — 28 × 2 kr.
$\frac{28}{4}$ = 7 fl.
28 × 2 kr. = 56 kr.
7 fl. — 56 kr. = 6 fl. 44 kr.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 42, d.

e.

Die Rechnung wird durch eine einfache Division ausgeführt.

Dieser Fall tritt bei Aufgaben ein, welche auf umgekehrten Verhältnissen beruhen. Die Schlussfolge ersieht man aus folgendem Beispiele:

Eine Wiese wird von 1 Mäher in 36 Stunden abgemäht; in wie viel Stunden würde sie von 4 Mähern abgemäht werden?

1 Mäher mäht die Wiese in 36 Stunden ab; 4 Mäher leisten in derselben Zeit 4mal so viel als 1 Mäher, 4 Mäher brauchen daher zum Abmähen derselben Wiese nur den 4ten Theil der Zeit, welche 1 Mäher dazu braucht, also den 4ten Theil von 36 Stunden; der 4te Theil von 36 Stunden sind 9 Stunden; 4 Mäher mähen also die Wiese in 9 Stunden ab.

Man könnte auch so folgern: Denkt man sich die Wiese in 36 gleiche Theile getheilt, so stellt jeder Theil die Arbeit vor, welche 1 Mäher in 1 Stunde zu leisten hat. 1 Mäher wird also zu der ganzen Arbeit 36 Stunden brauchen. Werden nun 4 Mäher aufgenommen, so kommt auf jeden nur $1/4$ von den 36 Theilen, also 9 Theile; 4 Mäher werden also mit der Arbeit in 9 Stunden fertig.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 43, e.

---

§. 66. Schluſs von der Mehrheit auf die Einheit.

a.

Die Rechnung wird durch eine einfache Division ausgeführt.

Schluſsfolge:

8 Meter Tuch kosten 56 fl.; wie viel kostet 1 Meter?

Um zu finden, wie viel 1 Meter kostet, muß man die 56 fl. auf die 8 Meter so vertheilen, daſs auf ein Meter so viel kommt, als auf das andere; man muß daher 56 fl. in 8 Theile zerlegen. Auf 1 Meter kommt also der 8te Theil von 56 fl. d. i. 7 fl. — Kürzer: 8 Meter kosten 56 fl.; 1 Meter ist nur der 8te Theil von 8 Metern, 1 Meter kostet daher auch nur den 8ten Theil von 56 fl., also 7 fl.

Ist die Mehrheit eine zweistellige Zahl, welche sich in zwei Grundfaktoren zerlegen läſst, so theilt man den Betrag der Mehrheit durch den einen Faktor, und das, was herauskommt, noch durch den andern Faktor. Z. B.

15 Kilogr. kosten 12 fl.; wie viel kostet 1 Kil.?

1 Kilogr. $= 1/15$ von 15 Kilogr., 1 Kilogr. kostet daher $1/15$ von 12 fl.; $1/15 = 1/5$ von $1/3$, d. h. den 15ten Theil einer Zahl erhält man, wenn man zuerst den 3ten Theil dieser Zahl sucht, und von dem 3ten Theile sodann den 5ten Theil nimmt; der dritte Theil von 12 fl. sind 4 fl., der 5te

Theil von 4 fl. sind (der 5te Theil von 1 fl. sind 20 Kr., der 5te Theil von 4 fl. also 4 × 20 Kr. d. i.) 80 Kr.; also kostet 1 Kilogr. 80 Kr.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 43, a.

b.

Die Rechnung wird durch Anwendung von Vortheilen ausgeführt.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 44, b.

Die sich hier ergebenden Rechnungsvortheile sind bereits in der II. Abtheilung, §. 48, b angeführt worden.

c.

Die Rechnung wird durch eine passende Zerlegung des Preises in Zehner und Kreuzer ausgeführt.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 44 und 45, c.

Hier müßen die Schüler zunächst angeleitet werden, den Preis in der Mehrheit so in Zehner und Kreuzer zu zerlegen, dass die Zahl der Zehner ein Vielfaches von der Zahl wird, durch welche getheilt werden soll.

Ist z. B. 5 fl. 84 Kr. durch 8 zu theilen, so hat man erstlich 5 fl. 84 Kr. = 50 Zehn. + 8 Zehn. + 4 Kr. Von den 58 Zehnern nimmt man nun so viele als den einen Bestandtheil, dass sie ein Vielfaches von 8 sind, also 56 Zehner; die übrigen 2 Zehner fasst man mit den 4 Kreuzern zu 24 Kreuzern zusammen und man erhält also 5 fl. 84 Kr. = 56 Zehner + 24 Kr. Sodann ist es leicht, davon den 8ten Theil zu nehmen.

Die Vorübungen dieser Art enthält die erste Gruppe der oben bezeichneten Aufgaben. Die zweite Gruppe bringt die Dreisatzrechnungen selbst, deren Ausrechnung auf der angedeuteten Zerlegung beruht; ihre Auflösung ist aus folgendem Beispiele ersichtlich:

7 Meter kosten 5 fl. 95 kr.; wie viel kostet 1 Meter?

7 Meter . . . 5 fl. 95 kr. = 56 Z. + 35 Kr.
1 Meter . . . $\frac{1}{7}$ v. 56 Z. + $\frac{1}{7}$ v. 35 Kr.
$\frac{1}{7}$ v. 56 Z. = 8 Z. = 80 Kr.
$\frac{1}{7}$ v. 35 Kr. = 5 Kr.
80 Kr. + 5 Kr. = 85 Kr.

d.

Die Rechnung wird durch eine Multiplikazion ausgeführt.

Die hieher gehörigen Aufgaben beruhen auf umgekehrten Verhältnissen. Z. B.

6 Personen reichen mit einem Mehlvorrathe 15 Tage aus; wie lange reicht damit 1 Person aus?

Denkt man sich den Vorrath nach der Zahl der Tage in 15 gleiche Theile, und jeden Theil nach der Zahl Personen wieder in 6, also den ganzen Vorrath in 6 × 15 oder 90 gleiche Theile getheilt, so ist jeder Theil die tägliche Porzion für 1 Person und man hat 90 solche Porzionen; mit diesen wird daher 1 Person durch 90 Tage ausreichen. — Kürzer: 1 Person ist der 6te Theil von 6 Personen; 1 Person kommt daher mit demselben Vorrathe 6mal so lange aus, als 6 Personen, also 6mal 15 Tage, oder 90 Tage.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 45, d.

---

§. 67. Schluss von der Mehrheit auf ein Vielfaches derselben.

a.

Die Rechnung wird durch die Multiplikazion ausgeführt.

Schlussfolge:

1 Arbeiter verdient in 6 Tagen 11 fl.; wie viel in 42 Tagen?

So vielmal 6 Tage, eben so vielmal 11 fl. Verdienst; 42 Tage sind 7mal 6 Tage, in 42 Tagen verdient also der Arbeiter 7mal 11 fl., also 77 fl.

Aufgaben im III. Rechenbuche S. 45, a.

b.

Die Rechnung wird durch die Division ausgeführt.

Z. B. A hat für 4 Pferde auf 9 Monate Hafer; wie lange würde dieser für 12 Pferde ausreichen?

12 Pferde sind 3 $\times$ 4 Pferde; 12 Pferde verzehren also 3mal so viel als 4 Pferde, daher reicht für sie derselbe Vorrath nur auf den dritten Theil von 9 Monaten, also auf 3 Monate aus.

15 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 12 Tagen; wie viele Tage brauchen dazu 30 Arbeiter?

30 Arbeiter sind 2mal 15 Arbeiter; doppelt so viele Arbeiter brauchen zu derselben Arbeit nur die halbe Zeit, also die Hälfte von 12 Tagen, d. i. 6 Tage.

---

§. 68. Schluss von der Mehrheit auf einen Theil derselben.

a.

Die Rechnung wird durch die Division ausgeführt.

Schlussfolge:

72 Liter kosten 44 fl.; wie viel kosten 9 Liter?

9 Liter sind der 8te Theil von 72 Liter, 9 Liter kosten daher nur den 8ten Theil von 44 fl.; der 8te Theil von 40 fl. sind 5 fl., der 8te Theil von 4 fl. sind 50 Kr.; der 8te Theil von 44 fl. also 5 fl. 50 kr.; folglich kosten 9 Liter 5 fl. 50 kr.

Hier können auch Aufgaben vorgenommen werden, in denen durch eine passende Zerlegung der Schluss von der Mehrheit auf ein Vielfaches und der Schluss von der Mehrheit auf einen Theil in Verbindung treten. Z. B.

15 Liter kosten 3 fl. 42 kr.; wie viel kosten 35 Liter?

35 Liter lassen sich zerlegen in 30 Liter und 5 Liter; 30 Liter sind 2mal 15 Liter, sie kosten also 2mal 3 fl. 42 kr., oder 6 fl. 84 kr.; 5 Liter sind der dritte Theil von 15 Liter, sie kosten also den dritten Theil von 3 fl. 42 kr., oder 1 fl. 14 kr.; 35 Liter kosten also 6 fl. 84 kr. und 1 fl. 14 kr. d. i. 7 fl. 98 kr.

12 Kilogr. kosten 7 fl. 20 kr.; wie viel kosten 46 Kilogr.?

46 Kilogr. sind 48 Kilogr. weniger 2 Kilogr.; 48 Kilogr. sind 4mal 12 Kilogr., sie kosten also 4mal 7 fl. 20 kr. oder 28 fl. 80 kr.; 2 Kilogr. sind der 6te Theil von 12 Kilogr., sie kosten also den 6ten Theil von 7 fl. 20 kr. oder 1 fl. 20 kr.; 46 Kilogr. kosten daher 28 fl. 80 kr. weniger 1 fl. 20 kr., d. i. 27 fl. 60 kr.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 46 und 47, a.

b.

Die Rechnung wird durch die Multiplikazion ausgeführt.

Z. B. Wenn jemand täglich 4 Zehner erspart, so muß er 9 Wochen sparen, um sich von den Ersparnissen einen Rock kaufen zu können; wie lange muß er sparen, wenn er täglich nur 2 Zehner erübrigt?

2 Zehner sind die Hälfte von 4 Zehnern; wer daher täglich nur 2 Zehner erspart, muß, um ein bestimmtes Ersparnis zu erzielen, 2mal so lange Zeit sparen, als derjenige, welcher täglich 4 Zehner erspart, also 2mal 9 Wochen d. i. 18 Wochen. — Hier kann man die Schüler auch berechnen lassen, wie viel der Rock kostet.

Aufgaben im III. Rechenbuche Seite 47, b.

§. 69. Schluss von der Mehrheit durch einen Theil derselben auf ein Vielfaches dieses Theiles.

a.

Die Rechnung beruht auf geraden Verhältnissen und wird durch eine Division und eine Multiplikazion ausgeführt.

Die Schlussform ist bei diesen Aufgaben zusammengesetzt. Z. B.

24 Kilogr. kosten 16 fl.; wie viel kosten 30 Kilogr.?

6 Kilogr. sind der 4te Theil von 24 Kilogr., 30 Kilogr. aber sind 5mal 6 Kilogr.; 6 Kilogr. kosten daher den 4ten Theil von 16 fl. oder 4 fl.; 30 Kilogr. oder 5mal 6 Kilogr. aber kosten 5mal 4 fl. = 20 fl.

Die Rechnung erhält folgende übersichtliche Darstellung:

24 Kilogr.	kosten	16 fl.	
6 „	„	$\frac{1}{4}$ von 16 fl.	= 4 fl.
30 „	„	5mal 4 fl.	= 20 fl.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 47 und 48, a.

b.

Die Rechnung beruhet auf umgekehrten Verhältnissen und wird durch eine Multiplikazion und eine Division ausgeführt.

Z. B. Jemand will von A nach B reisen; geht er täglich 60 Kilometer weit, so kommt er in 10 Tagen an; in welcher Zeit wird er nach B kommen, wenn er täglich nur 40 Kilometer zurücklegt?

20 Kilometer sind der dritte Theil von 60 Kilometer, 40 Kilometer aber sind 2mal 20 Kilometer; geht man daher täglich nur 20 Kilometer weit, so braucht man zur Reise 3mal so viel Zeit, als wenn man täglich 60 Kilometer weit gienge, also 3mal 10 Tage, oder 30 Tage; legt man aber täglich 40

Kilometer oder 2mal 20 Kilometer zurück, so braucht man nur die Hälfte von 30 Tagen, also 15 Tage.

Übersichtliche Darstellung:

täglich	60	Kilometer, so braucht man	10 Tage,
„	20	„ „ „ „	3mal 10 Tage = 30 T.
„	40	„ „ „ „	$\frac{1}{2}$ v. 30 Tagen = 15 T.

Die Auflösung könnte auch so geschehen: Da man 10 Tage braucht, wenn man täglich 60 Kilometer macht, so ist die Entfernung von A nach B 10 × 60 Kilometer oder 600 Kilometer. Legt man nun täglich 40 Kilometer zurück, so dauert die Reise so viele Tage, als 40 Kilometer in 600 Kilometer enthalten sind, d. i. 15 Tage.

Aufgaben im III. Rechenbuche Seite 48, b.

---

§. 70. Schluss von der Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit.

Schon bei den drei zuletzt angeführten Schlussformen wurde aus dem Betrage der Mehrheit der Betrag einer andern gleichartigen Mehrheit gesucht; jene Schlussformen lassen sich jedoch nur in solchen besonderen Fällen anwenden, in denen die Mehrheit, deren Betrag gesucht wird, entweder ein Vielfaches, oder ein Theil, oder endlich das Vielfache eines Theiles der Mehrheit ist, deren Betrag man kennt.

Dagegen ist die Schlussform, nach welcher von der Mehrheit zunächst auf die Einheit, und dann von dieser auf eine andere Mehrheit geschlossen wird, allgemein anwendbar.

Damit die Rechnungen für diese Stufe nicht zu verwickelt erscheinen, müßen die Aufgaben so gewählt werden, dass das Theilen und das Vervielfachen im Kopfe vollzogen werden kann.

a.

Die Rechnung beruhet auf geraden Verhältnissen und wird durch eine Division und eine Multiplikazion ausgeführt.

Schlussfolge:

8 Meter kosten 24 fl.; wie viel kosten 5 Meter?

Wüsste ich, wie viel 1 Meter kostet, so würde ich leicht berechnen, wie viel 5 Meter kosten; der Preis 1 Meters ist zwar nicht gegeben, aber er kann ohne Schwierigkeit gefunden werden. 8 Meter kosten 24 fl., 1 Meter ist der 8te Theil von 8 Metern, 1 Meter kostet daher nur den 8ten Theil von 24 fl. oder 3 fl. Wenn nun 1 Meter 3 fl. kostet, so kosten 5 Meter oder 5mal 1 Meter auch 5mal 3 fl., oder 15 fl. — Kürzer: Wenn 8 Meter 24 fl. kosten, so kostet 1 Meter den 8ten Theil von 24 fl. d. i. 3 fl.; 5 Meter kosten dann 5mal 3 fl., d. i. 15 fl.

Die Rechnung wird so dargestellt:

8 Meter kosten 24 fl.
1 „ kostet $\frac{1}{8}$ v. 24 fl. = 3 fl.
5 „ kosten 5 × 3 fl. = 15 fl.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 48 und 49, a.

b.

Die Rechnung beruhet auf umgekehrten Verhältnissen und wird durch eine Multiplikazion und eine Division ausgeführt.

Schlussfolge:

14 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 9 Tagen; wie viel Tage brauchen dazu 9 Arbeiter?

Da 1 Arbeiter der 14te Theil von 14 Arbeitern ist, und daher täglich nur den 14ten Theil von dem leistet, was 14 Arbeiter zustande bringen, so braucht er für die ganze Zeit 14mal so viel Zeit als diese, also 14mal 9 Tage, d. i. 126 Tage. 9 Arbeiter sind 9mal 1 Arbeiter und leisten also 9mal so viel als 1 Arbeiter; 9 Arbeiter werden daher nur den 9ten Theil jener Zeit brauchen, in welcher 1 Arbeiter mit der Arbeit fertig würde, also den 9ten Theil von 126 Tagen, d. i. 14 Tage.

Die Rechnung läſst sich so darstellen:

14	Arbeiter	brauchen	9 Tage
1	"	"	14×9 Tage $= 126$ Tage
9	"	"	$\frac{1}{9}$ v. 126 Tagen $= 14$ "

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 49, b.

§. 71. Einfache Zinsrechnungen.

Wiewohl die Zinsrechnungen gewöhnliche Dreisatzaufgaben sind und nach den bisher geübten Schlüssen ausgeführt werden können, so erscheint es doch angemessen, dieselben hier abgesondert folgen zu lassen, nicht nur wegen der hervorragenden Anwendung, welche sie im Leben finden, sondern auch wegen der besonderen praktischen Verhältnisse, auf denen sie beruhen, und deren Kenntnis den Schülern zum richtigen Verständnisse dieser Rechnungen unentbehrlich ist. In dieser Beziehung kann der Lehrer ungefähr folgende Bemerkungen vorausschicken.

Wenn einer kein eigenes Haus hat, so muß er sich eine Wohnung mieten und dem Hauseigenthümer für die Benützung derselben eine jährliche Entschädigung, welche man Zins nennt, bezahlen.

Ebenso muß derjenige, welcher zu einem Geschäfte nicht genug eigenes Geld hat, dasselbe von einem andern ausleihen und diesem dafür bis zur Rückzahlung eine jährliche Vergütung, welche ebenfalls Zins heißt, bezahlen. Derjenige, welcher Geld entlehnt, heißt Schuldner, derjenige, welcher es darleiht, Gläubiger, und das dargeliehene Geld heißt Kapital.

Der Zins wird dadurch bestimmt, dass man angibt, wie viel jährlich von 100 fl. Kapital als Entschädigung gezahlt werden muß; das nennt man den Zinsfuß oder die Prozente (%).

Z. B. Jemand entlehnt 500 fl. und muß für jede 100 fl. jährlich 5 fl. Zins zahlen. Hier sagt man: er entlehnt das Kapital zu 5 Prozent.

Nach diesen Vorbemerkungen werden nun die bezüglichen Rechnungsübungen vorgenommen. Dabei beschränken wir uns auf dieser Stufe auf den am häufigsten vorkommenden Fall, wo der Zins gesucht wird, und selbst da nur auf die einfachsten Aufgaben.

Die Stufenfolge, in welcher die hier zu übenden Zinsrechnungen vorzunehmen sind, wie auch den bei ihrer Behandlung zu beobachtenden Vorgang ersieht man aus den folgenden Aufgaben:

a) Von 100 fl. erhält man 5 fl. Zins; wie viel von 600 fl.?

Hier wird von einer Mehrheit auf ein Vielfaches derselben geschlossen. 600 fl. sind 6mal 100 fl.; 600 fl. geben daher 6mal 5 fl. d. i. 30 fl. Zins.

b) 100 fl. Kapital geben jährlich 6 fl. Zins; wie viel Zins gibt 1 fl. Kapital?

Hier wird von der Mehrheit auf die Einheit geschlossen. 1 fl. ist der 100ste Theil von 100 fl., 1 fl. Kapital gibt also den 100sten Theil von 6 fl. Zins; der 100ste Theil von 1 fl. ist 1 Kr., der 100ste Theil von 6 fl. sind daher 6 Kr.; 1 fl. Kapital also 6 Kr. Zins.

Rechnungsvortheil: So viele Gulden jährlichen Zins von 100 fl. Kapital, eben so viele Kreuzer Zins erhält man von 1 fl. Kapital.

c) Ein Kapital ist zu 4% angelegt; wie viel Zins erhält man jährlich von 32 fl. Kapital?

Hier wird von der Mehrheit zuerst auf die Einheit, und dann von dieser auf eine andere Mehrheit geschlossen. 100 fl. Kapital geben jährlich 4 fl. Zins, 1 fl. Kapital gibt daher 4 Kr. Zins, 32 fl. Kapital geben 32mal 4 Kr. d. i. 1 fl. 28 kr. Zins.

d) Ein Kapital von 430 fl. ist zu 6% angelegt; wie groß ist der jährliche Zins?

Die Ausrechnung wird durch eine passende Zerlegung vorgenommen. 430 fl. sind 400 fl. + 30 fl.; 400 fl. geben 4mal 6 fl. d. i. 24 fl. Zins, 30 fl. geben 30mal 6 Kr. d. i. 1 fl. 80 kr. Zins; 24 fl. und 1 fl. 80 kr. sind 25 fl. 80 kr.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 50.

Zweiter Abschnitt.

Das Rechnen in den höheren Zahlenräumen.

§. 72. Allgemeine Bemerkungen.

In diesem Abschnitte, welcher das Rechnen mit ganzen Zahlen zum Abschluſs bringen soll, erfolgt zunächst der weitere Ausbau des Zahlengebäudes mit stetem Hinblick auf das dekadische Zahlengesetz.

Sodann folgen Übungen in den vier Rechnungsoperazionen. Das Zifferrechnen in den höheren Zahlenkreisen ist eine bloße Wiederholung des bereits an den kleineren Zahlen Geübten im erweiterten Zahlenumfange. Die Schüler haben das Wesen des Zifferechnens bereits in dem Zahlenraume bis 1000 erkannt und in diesem das kürzere schriftliche Rechnungsverfahren anwenden gelernt. Die Anwendung auf größere Zahlen erfordert nur eine Erweiterung der Zahlenvorstellungen. Diese wird hier vermittelt. Da sonach die einzelnen Operazionen im allgemeinen keine besondere Erläuterung mehr erheischen, so werden wir nähere Erklärungen nur dort beifügen, wo etwas Neues auftritt.

Neben dem Zifferrechnen soll auf jeder Stufe auch das Kopfrechnen sorgfältig fortgeübt werden. Da sich jedoch die höheren Zahlenkreise nur im beschränkten Maße für das Kopfrechnen eignen, so wird das letztere hier abgesondert zu betreiben sein. Man widme wochentlich mindestens zwei halbe Stunden dem mündlichen Rechnen; als Übungsstoff empfehlen sich dabei am besten die schon in dem vorhergehenden Abschnitte behandelten Dreisatzrechnungen.

§. 73. Bildung der höheren Zahlen.

a.

Zahlenkreis der Tausende.

Mit den Zahlen bis 1000 sind die Schüler schon bekannt gemacht worden; auch wissen sie, dass 10 Einer einen Zehner, 10 Zehner ein Hundert und 10 Hunderte ein Tausend bilden, dass ferner beim Anschreiben der Zahlen die Einer in die erste, die Zehner in die zweite, die Hunderte in die dritte Stelle gesetzt werden.

Nun werden zunächst die Tausende vorgeführt.

10 Hunderte sind 1 Tausend,
20 „ „ 2 Tausende,
30 „ „ 3 „ u. s. w.

Umgekehrt: Wie viel Hunderte sind 1, 2, 3, 4, . . . 9 Tausende?

Da 1 Tausend 10mal so groß ist als 1 Hundert, so wird es um eine Stelle weiter links geschrieben, als 1 Hundert. Die Hunderte stehen an der dritten Stelle; die Tausende kommen daher in die vierte Stelle.

1 Tausend = 1000,
2 Tausende = 2000,
3 „ = 3000, u. s. w.

Durch die Verbindung der Tausende mit den Hunderten, Zehnern und Einern entstehen die einzelnen Zahlen des neuen Zahlenkreises. Das Zählen wird in jedem Tausend auf gleiche Weise vorgenommen, wie in dem Zahlenraume von 1 bis 1000; nämlich:

1001, 1002, . . . 1010, 1011, . . . 1099, 1100;
1101, 1102, . . . 1110, 1111, . . . 1199, 1200;
u. s. w.

Ebenso

2001, 2002, . . . 2010, 2011, . . . 2099, 2100;
2101, 2102, . . . 2110, 2111, . . . 2199, 2200;
u. s. w. bis 9999.

Die Übungen, welche hier unbedingt vorzunehmen sind, bestehen im Zusammenfassen und Zerlegen, beziehungsweise im Lesen und Schreiben der Zahlen. Z. B.

1) Fasse 5 T. 8 H. 2 Z. 6 E. in eine Zahl zusammen. 5 T. 8 H. 2 Z. 6 E. = fünftausend achthundert sechs und zwanzig.

2) Zerlege die Zahl 9357 a) in die einzelnen Zahlwerte, b) in Tausende und Einer.

9357 = 9 T. 3 H. 5 Z. 7 E. = 9 T. 357 E.

3) Lies die Zahl 8296.

8296 = 8 T. 296 E. = achttausend zweihundert sechs und neunzig.

Man spricht zuerst die Tausende, und dann die durch die drei niedrigeren Stellen ausgedrückte Zahl, als wenn sie allein stünde, aus.

4) Schreibe die Zahl: zweitausend dreihundert acht und vierzig.

Zweitausend dreihundert acht und vierzig = 2 T. 3 H. 4 Z. 8 E. = 2348.

Man schreibt zuerst die Tausende an, und setzt in die drei niedrigeren Stellen nach der Ordnung die Hunderte, Zehner und Einer. Nach den Tausenden müßen immer drei Stellen folgen; wird eine derselben nicht angegeben, so ist an jene Stelle eine Null zu setzen.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 51, a.

b.

Zahlenkreis der Zehntausende.

10 Tausende sind 1 Zehntausend. Die Zehntausende werden in die fünfte Stelle geschrieben. So viel Einer eine Ziffer an sich bedeutet, so viel Zehntausende bezeichnet sie in der fünften Stelle.

Vorgang und Übungen entsprechen denjenigen im Zahlenkreise der Tausende unter a.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 52, b.

c.

Zahlenkreis der Hunderttausende.

10 Zehntausende sind 1 Hunderttausend. Die Hunderttausende setzt man in die sechste Stelle. So viel Einer also eine Ziffer an sich bezeichnet, eben so viel Hunderttausende bedeutet sie in der sechsten Stelle.

Vorgang und Übungen wie im Zahlenkreise der Tausende unter a.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 52 und 53, c.

d.

Millionen und höhere Zahlen.

10 Hunderttausende sind 1 Million. Die Millionen werden in die siebente Stelle geschrieben.

Die bisherige Erweiterung des Zahlengebietes genügt, um den Schülern unser Zahlengesetz zum klaren Bewußtsein zu bringen.

10 E. = 1 Z.	10 T. = 1 Z. T.
10 Z. = 1 H.	10 Z. T. = 1 H. T.
10 H. = 1 T.	10 H. T. = 1 M.

Betrachten wir die geschriebene Zahl

2222222.

Hier steht die Ziffer 2 siebenmal. Was bedeutet diese Ziffer an jeder Stelle von der rechten Hand gegen die linke? Die 2 in der ersten Stelle gilt 2 Einer. Die 2 in der zweiten Stelle gilt 2 Zehner, also 10mal 2 Einer. Die 2 in der dritten Stelle gilt 2 Hunderte, also 10mal 2 Zehner. Die 2 in der vierten Stelle gilt 2 Tausende, also 10mal 2 Hunderte; u. s. w.

Das Ergebnis läßt sich in folgende zwei Sätze zusammenfassen:

1. Je zehn Einheiten einer Ordnung bilden immer eine Einheit der nächst höheren Ordnung; 10 Einer sind 1 Zehner, 10 Zehner sind 1 Hundert, 10 Hunderte sind 1 Tausend, u. s. f.

2. Jede Ziffer bedeutet in der folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel als in der nächst vorhergehenden, also in der ersten Stelle Einer, in der zweiten Zehner, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende, u. s. w.

Man nennt darum diese Anordnung unserer Zahlen die Zehnerordnung oder das dekadische Zahlensystem (vom griechischen deka zehn).

Nachdem die Schüler auf diese Weise in das Verständnis unseres Zahlengesetzes eingeführt worden, kann der Bau des Zahlengebäudes ohne Schwierigkeit noch weiter fortgeführt, und dabei auf die Unendlichkeit der Zahl hingewiesen werden.

10 Millionen	= 1 Zehnmillion	=	10,000.000
10 Zehnmillionen	= 1 Hundertmillion	=	100,000.000
10 Hundertmillionen	= 1 Tausendmillion	=	1.000,000.000
10 Tausendmillionen	= 1 Zehntausendmillion	=	10.000,000.000
10 Zehntausendmillionen	= 1 Hunderttausendmillion	=	100.000,000.000
10 Hunderttausendmillionen	= 1 Billion	=	1,,000.000,000.000

u. s. w.

Die Schüler werden bald warnehmen, dass sich, wie bei den Zahlen unter tausend, ebenso auch bei den höheren Zahlen die Einer, Zehner, Hunderte in fortschreitender Aufeinanderfolge wiederholen. Man bemerke ihnen, dass je drei auf einander folgende Stellen der Einer, Zehner und Hunderte eine eigene Klasse von Einheiten bilden, dass die drei niedrigsten Stellen geradezu Einer, Zehner, Hunderte heißen, die nächstfolgenden drei Stellen, Einer, Zehner, Hunderte von Tausenden, die weiter folgenden Einer, Zehner, Hunderte von Millionen u. s. w.

Zur Erleichterung der Übersicht wird der Lehrer auf der Schultafel, der Schüler auf seiner Schiefertafel, folgendes Schema bilden:

u. s. w.	Hund.	Zehn	Ein	Hunderter	Zehner	Einer	Hundert	Zehner	Einer	Hunderte	Zehner	Einer
	Tausend											
	Millionen						Tausend					
	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1.
						3	7	8	2	6	4	9

In diese Tabelle werden verschiedene Zahlen, nachdem sie früher in ihre Zahlenwerte zerlegt worden, eingetragen.

Die Eintheilung der Zahlen in Klassen zu drei Stellen, welche nach der Ordnung Einer, Zehner und Hunderte enthalten, wird das Zahlenlesen und Zahlenschreiben wesentlich erleichtern.

Beim Lesen geschriebener Zahlen lasse man diese, von der Rechten angefangen, in Klassen zu drei Ziffern abtheilen, und bei größeren Zahlen wegen der leichteren Übersicht nach der ersten Klasse einen Punkt, nach der zweiten einen Strich, nach der dritten wieder einen Punkt setzen. Die Schüler merken bald, dass sie dann von der Linken anfangend, bloß jede einzelne Klasse für sich, als stünde sie ganz allein, auszusprechen, und bei dem Punkte das Wort Tausend, bei dem Striche das Wort Million hinzuzusetzen haben.

Es soll z. B. die Zahl 15,408.063 ausgesprochen werden. Nachdem die Eintheilung in Klassen gehörig bewerkstelliget wurde, frage der Lehrer: Welche Zahl kommt in der Klasse der Millionen vor? Ihr habet also zuerst 15 Millionen. Wie viele Hunderte, Zehner und Einer enthält die Klasse der Tausende? Ihr leset also: 408 Tausend. Sprechet nun noch die niedrigste Klasse aus. Was steht an der Stelle der Hunderte? Ihr werdet daher die Hunderte auch gar nicht nennen. Wie viel Zehner und Einer sind da? Wie werden diese ausgesprochen? Die ganze Zahl wird also gelesen: Fünfzehn Millionen, vierhundert acht tausend, drei und sechzig.

Eben so leicht erscheint auch das Anschreiben ausgesprochener Zahlen. Man lasse die Schüler jedesmal zuerst jene ein-, zwei- oder dreistellige Zahl anschreiben, nach welcher das erstemal der Beisatz Tausend oder Million gehört wird, und sodann gegen die Rechte hin die übrigen Bestandtheile nach der Ordnung, wie man sie in Abtheilungen nach Hunderten, Zehnern und Einern ausspricht, ebenso auch schriftlich in Klassen von je drei Ziffern darstellen. Man mache sie ferner aufmerksam, dass dabei nicht immer Hunderte, Zehner und Einer genannt werden;

dass sie, wenn in einer Klasse nicht alle diese drei Bestandtheile vorkommen, das Fehlende durch Nullen ergänzen, und wenn beim Aussprechen eine ganze Klasse nicht angegeben wird, alle drei Stellen mit Nullen ausfüllen müßen.

Es soll z. B. die Zahl: neun Millionen, sieben und fünfzig tausend, dreihundert und acht mit Ziffern angeschrieben werden. Wie viel Millionen werden hier angegeben? Ihr schreibet also zuerst die Ziffer 9, und machet nach derselben einen Strich. Wie viele Klassen von Ziffern müßen noch folgen? Also wie viele Ziffern? Wenn außer den 9 Millionen nichts anderes angegeben würde, was müßtet ihr an die folgenden sechs Stellen setzen? Ich gebe aber zu den 9 Millionen noch an: sieben und fünfzig tausend; diese Klasse muß also in die nächsten drei Stellen kommen. Höret ihr in dieser Klasse Hunderte, Zehner und Einer? Da die Hunderte nicht angegeben werden, womit müßet ihr die Stelle derselben ausfüllen? Ihr setzet also in die zweite Klasse 057, und machet nach derselben einen Punkt. Wie viele Ziffern müßen noch folgen, damit diese Klasse Tausende bedeute? Was müßte an die Stelle derselben gesetzt werden, wenn nichts mehr ausgesprochen würde? Zu den 9 Millionen 57 tausend wird aber noch angegeben: dreihundert acht. Höret ihr hier Hunderte, Zehner und Einer aussprechen? Welche Benennung höret ihr nicht? Was muß daher an die Stelle der Zehner gesetzt werden? Ihr schreibet also 9,057.308.

Da sehr hohe Zahlen im wirklichen Leben nur selten vorkommen, so wäre es unpraktisch, auf das Lesen und Schreiben derselben zu viel Zeit zu verwenden.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 53 und 54, d.

§. 74. Römische Ziffern.

Hier ist der passendste Ort, die Schüler auch mit den römischen Ziffern bekannt zu machen.

Die Ziffern, welche die Schüler bisher kennen gelernt haben, nennen wir arabische, weil wir sie von den Arabern überkommen haben. An den Zifferblättern der Uhren, bei Aufschriften, bei den Abschnitten eines Buches sieht man häufig auch andere Zahlzeichen, welche man, da sie von den Römern herrühren, römische Ziffern nennt.

Die Römer hatten sieben Zahlzeichen

	I,	V,	X,	L,	C,	D,	M
für	1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Sie drückten damit durch gehörige Zusammenstellung alle übrigen Zahlen nach folgenden Gesetzen aus:

1) Stehen mehrere gleiche Buchstaben nebeneinander, so bedeuten sie so viel, als ihre Werte zusammengenommen betragen; z. B.

$$II = 1 + 1 = 2,$$
$$XXX = 10 + 10 + 10 = 30.$$

2) Steht ein niedrigeres Zahlzeichen nach einem höheren, so wird der Wert des letzteren um so viel vermehrt, als das niedrigere bedeutet; z. B.

$$VI = 5 + 1 = 6,$$
$$LX = 50 + 10 = 60,$$
$$CXV = 100 + 10 + 5 = 115.$$

3) Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermindert, als das niedrigere bedeutet; z. B.

$$IV = 5 - 1 = 4,$$
$$XC = 100 - 10 = 90,$$
$$MDCCCLXIX = 1800 + 60 + 10 - 1 = 1869.$$

Haben die Schüler diese Grundsätze richtig aufgefasst, so wird ihnen das Lesen und Anschreiben beliebiger römischer Zahlen keine Schwierigkeit machen.

Übungsaufgaben im III. Rechenbuche S. 54.

---

§. 75. Addieren.

Die Addizion in den höheren Zahlenräumen bietet nichts Neues. Die Posten werden so unter einander geschrieben, dass die gleichnamigen Stellen gerade unter einander zu stehen kommen; dann addiert man nach der Reihe die Einer, die Zehner, Hunderte u. s. w. und bringt dabei stets das Zahlengesetz in Anwendung, dass je 10 Einheiten einer niedrigeren Ordnung eine Einheit der nächsthöheren Ordnung ausmachen. Auch hier können anfänglich, wie beim schriftlichen Addieren der Zahlen unter 1000, die Benennungen, welche die Ordnungen der Ziffern bezeichnen, beibehalten werden; später aber fallen sie weg. Die kürzere Form des Rechnens bildet sich, sobald die Sache klar erfasst ist, von selbst heraus.

$$\begin{array}{r} 3417 \\ 1956 \\ \underline{2384} \\ 7757 \end{array}$$

Anfangs: 4 E. und 6 E. sind 10 E., und 7 E. sind 17 E. = 1 Z. und 7 E.; 7 E. werden angeschrieben, 1 Z. wird zu den Zehnern weiter gezählt. — 1 Z. und 8 Z. sind 9 Z., und 5 Z. sind 14 Z., und 1 Z. sind 15 Z. = 1 H. und 5 Z.; 5 Z. werden angeschrieben, 1 H. wird weiter gezählt; u. s. w.

Später mit Weglassung der Benennungen: 4 und 6 ist 10, und 7 ist 17; 7 wird angeschrieben, 1 weiter gezählt. 1 und 8 ist 9, und 5 ist 14, und 1 ist 15; 5 wird angeschrieben, 1 weiter gezählt; u. s. w.

Aufgaben über das reine Rechnen.

Im III. Rechenbuche S. 55—57.

Um sich von der Richtigkeit der Summe zu überzeugen, nehme man die Addizion noch einmal vor, und zwar von oben nach unten, wenn man zuerst von unten nach oben addiert hat; erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so kann man diese als richtig ansehen, weil wegen der veränderten Reihenfolge nicht leicht in beiden Fällen derselbe Fehler möglich ist. Ein solches Verfahren nennt man die Probe. Eine andere Probe für die Richtigkeit der Addizion wird bei der Subtrakzion angeführt werden.

Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 58 und 59.

Der Lehrer halte dabei unausgesetzt auf die Bildung richtiger Schlüsse; z. B.

Die Kaiserin Maria Theresia war im Jahre 1717 geboren und lebte 63 Jahre; in welchem Jahre starb sie?

Auflösung. Als diese Kaiserin geboren war, zählte man das Jahr 1717; als sie starb, zählte man 63 Jahre mehr, also 1717 und 63 d. i. 1780.

§. 76. Subtrahieren.

Das Verfahren ist dasselbe, wie beim schriftlichen Subtrahieren der Zahlen unter 1000. Man schreibt den Subtrahend so unter den Minuend, dass die gleichnamigen Stellen gerade unter einander zu stehen kommen, und subtrahiert dann nach der Reihe die Einer, die Zehner, Hunderte u. s. w. Wenn in einer Stelle der Minuend weniger Einheiten hat, als der Subtrahend, so muß von der nächsthöheren Stelle geborgt werden; dabei wird das Zehnergesetz angewendet, wornach jede Einheit einer höheren Ordnung 10 Einheiten der nächstniedrigeren Ordnung gibt. Die Benennung der Stellenwerte der Ziffern findet nur an den ersteren Aufgaben statt, später wird sie weggelassen.

5864	Anfangs: 3 E. von 4 E. bleibt 1 E. —
2793	9 Z. kann ich von 6 Z. nicht wegnehmen,
3071	ich borge 1 H.; dieses gibt 10 Z., und 6 Z.

sind 16 Z.; 9 Z. von 16 Z. bleiben 7 Z. — 7 H. von 7 H. bleibt kein (0) Hundert. — 2 T. von 5 T. bleiben 3 T.

Später: 3 von 4 bleibt 1; 9 von 16 bleibt 7; 7 von 7 bleibt 0; 2 von 5 bleibt 3.

Aufgaben über das reine Rechnen.

Im III. Rechenbuche S. 60—62.

Da der Rest anzeigt, um wie viel der Subtrahend kleiner ist, als der Minuend, so muß der Subtrahend, um den Rest vermehrt, gleich sein dem Minuend. Darauf gründet sich die Probe für die Richtigkeit der Subtrakzion; wenn man nämlich den Rest zum Subtrahend addiert, so muß, wenn die Rechnung richtig ist, der Minuend zum Vorschein kommen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 7164 \\ \left.\begin{array}{r} 2738 \\ \hline 4426 \end{array}\right\} \text{addiert} \\ \hline 7164 \end{array}$$

Hier gibt der Rest, zu dem Subtrahend addiert, den Minuend, also ist die Subtrakzion richtig.

Das Subtrahieren kann auch als Probe für die Richtigkeit der Addizion angewendet werden. Wenn nämlich beim Addieren einer der gegebenen Posten weggelassen wird, so muß die Summe gerade um den gegebenen Posten kleiner werden, als die Summe aller Posten gewesen wäre. Um daher die Richtigkeit der Addizion zu prüfen, streicht man einen Posten durch und zählt die übrigen noch einmal zusammen; zieht man dann die dadurch erhaltene Summe von der frühern Summe ab, so muß, wenn die Addizion richtig war, der weggelassene Posten herauskommen. Z. B.

13579	
8206	
7948	
275	
30008	
16429	
13579	

Die Summe aller vier Posten beträgt 30008, die Summe der letzten drei Posten nach Weglassung des ersten ist 16429; zieht man die zweite Summe von der ersten ab, so bleibt der weggelassene erste Posten 13579 als Rest übrig; somit ist die Addizionsrechnung richtig.

Eine andere Probe für das Addieren, die zugleich eine zweckmäßige Übung für das wiederholte Subtrahieren bildet, besteht darin, dass man von der gefundenen Summe den ersten Summand, von dem Reste den zweiten Summand, u. s. w. subtrahiert. Bleibt zuletzt nichts übrig, so war die Summe richtig.

Eine solche Probe enthalten die Aufgaben 14), 15), 23) und 24).

Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 62—64.

---

§. 77. Multiplizieren.

In den schriftlichen Übungen des Vervielfachens, bei denen wir dem Gedankengange des Kopfrechnens folgten, haben wir das Zeichen × als Abkürzungszeichen für das Wörtchen „mal“ gebraucht, so dass z. B. 8 × 2 so viel als 8mal 2 bedeutete. Dieser Vorgang, der von den Rechenlehrern allgemein beobachtet wird, erschien wegen der leichteren Auffassung für den Anfänger auch ganz zweckentsprechend. Bei dem eigentlichen Zifferrechnen aber muß das Zeichen × als Operazionszeichen aufgefaßt und gelesen werden „multipliziert mit“; z. B. 8 × 2 heißt: 8 multipliziert mit 2, also 2mal 8. Während früher der Multiplikator links vor dem Multiplikand stand, wird hier der Multiplikand links und der Multiplikator rechts gesetzt.

Wie das schriftliche Multiplizieren mit einem ein= oder zweistelligen Multiplikator ausgeführt wird, ist den Schülern aus den Übungen im Zahlenkreise bis 1000 bekannt. Das Verfahren bleibt sich auch hier gleich, nur der Zahlenumfang erweitert sich. Die Benennung der Stellenwerte, nämlich Einer, Zehner, u. s. w. tritt nur bei den ersten Aufgaben ein; sie unterbleibt später, sobald die Einsicht erreicht ist.

Wir wählen sogleich einen dreistelligen Multiplikator. Es sei z. B. 503 mit 267 zu multiplizieren.

503 267 ——— 3521 3018 1006 ——— 134301	Ich nehme den Multiplikand 503 zuerst 7mal, dann 60mal, endlich 200mal, und setze stets die gleichnamigen Stellen unter einander. Ich multipliziere also 503 zuerst mit 7; 7mal 503 ist 3521. Das Ergebnis wird so daruntergeschrieben, dass 1 E. unter 7 E. zu stehen kommt.

Nun multipliziere ich die Zahl 503 mit 60; ich nehme sie 6mal, und das 6fache 10mal. 6mal 503 ist 3018, das 10fache davon sind 3018 Zehner. Ich schreibe also 8 Z. genau unter die 6 Z. des Multiplikators.

Endlich multipliere ich die Zahl mit 200, indem ich sie 2mal, und das 2fache 100mal nehme. 2mal 503 ist 1006, das 100fache davon sind 1006 Hunderte. Ich setze daher die niedrigste Stelle 6 H. des Produktes unter die 2 H. des Multiplikators.

Man spricht dabei: 7mal 3 ist 21, 1 wird in die Einerstelle angeschrieben, 2 weiter gezählt; 7mal 0 ist 0, und 2 ist 2, wird angeschrieben; 7mal 5 ist 35, wird angeschrieben. — 6mal 3 ist 18, 8 wird unter die Zehner geschrieben, 1 weiter gezählt; 6mal 0 ist 0, und 1 ist 1, wird angeschrieben; 6mal 5 ist 30, wird angeschrieben. — 2mal 3 ist 6, 6 wird unter die Hunderte gesetzt; 2mal 0 ist 0; 2mal 5 ist 10.

Die Produkte 3521, 3018, 1006 heißen, weil sie nur Theile des ganzen Produktes sind, Theilprodukte.

Die Schüler sehen, daſs die niedrigste Ziffer eines jeden Theilproduktes, wenn man mit Zehnern multipliziert, um eine Stelle, und wenn man mit Hunderten multipliziert, um zwei Stellen nach links gerückt werden müße; daſs daher die niedrigste Ziffer eines jeden Theilproduktes genau unter die Ziffer des Multiplikators zu stehen komme, mit welcher man multipliziert.

Haben die Schüler das Bisherige gut verstanden, so wird ihnen das Multiplizieren mit einem vier- oder mehrstelligen Multiplikator keine Schwierigkeiten machen. Nur einige besondere Fälle müßen hier noch näher erläutert werden.

Es enthalte der Multiplikator in einer Zwischenstelle Nullen; z. B. 9756 × 502.

```
   9756
    502
  -----
  19512
 48780
 -------
 4897512
```

Wir multiplizieren 9756 zuerst mit 2. Wenn wir dann mit 0 Zehner multiplizieren, so erhalten wir im Theilprodukte lauter Nullen. Da diese wertlos sind, so übergehen wir die Null im Multiplikator und multiplizieren sogleich mit 5 H., schreiben aber die erste Ziffer des Theilproduktes in die Stelle der Hunderte.

Ebenso werden sich die Schüler leicht überzeugen, daſs man in den Fällen, wo die Faktoren am Ende Nullen haben, diese weglassen kann, und nur die übrigbleibenden Zahlen zu multiplizieren braucht, dann aber dem Produkte so viele Nullen anhängen muß, als ihrer in den Faktoren weggelassen wurden. Z. B.

```
  4800
   12
  ----
   96
  48
 -----
 57600
```

4800 sind 48 H. Werden diese 12mal genommen, so erhält man 576 H., welche durch Anhängung von 2 Nullen in Einer verwandelt werden.

731 140 ―――― 2924 731 ―――― 102340	14mal 731 ist 10234. Die Zahl 731 ist aber nicht 14mal, sondern 140mal, also 10mal so oft zu nehmen; man erhält daher auch 10mal 10234 d. h. man muß dem Produkte 10234 noch 1 Null anhängen.
2790 5400 ―――― 1116 1395 ―――― 15066000	54mal 279 ist 15066. Wird 2790 54mal genommen, so muß das Produkt 10mal so groß ausfallen; nimmt man aber 2790 nicht 54mal, sondern 5400, so wird das 10fache des Produktes 15066

noch 100mal zu nehmen sein, wodurch man das 1000fache von 15066 erhält, was durch Anhängung von 3 Nullen geschieht.

Aufgaben über das reine Rechnen.

Im III. Rechenbuche S. 65—67.

Dabei gestatte der Lehrer niemals, dass die Schüler während des Multiplizierens die Faktoren verwechseln und z. B. bei der Multiplikazion 318 × 4 sprechen: 4mal 8, 1mal 4, 3mal 4, wo sie sagen sollen: 4mal 8, 4mal 1, 4mal 3.

Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 68—70.

Hier treten zum erstenmale auch Körperberechnungen auf (Aufg. 96—98); diese bedürfen einer näheren Erläuterung, in welcher Beziehung wir auf die in der fünften Abtheilung enthaltene Lehre von der Raumgrößenrechnung verweisen.

§. 78. Dividieren.

Das Dividieren in den höheren Zahlenkreisen bietet nichts Neues; es wird das gleiche Verfahren angewendet, wie beim schriftlichen Dividieren der Zahlen unter 1000. Man schreibt den Divisor rechts nach dem Dividend und setzt zwischen beide zwei Punkte; dann werden die einzelnen Stellen des Dividends von der höchsten bis zur niedersten dividiert, wobei man die Reste der höheren Stellen stets mit der nächstniedrigeren Stelle vereinigt. Die Ziffern des Quozienten werden nach dem Gleichheitszeichen gesetzt. Z. B.

Wie viel ist 24867 : 81?

$$\begin{array}{l} 24867 : 81 = 307 \\ \underline{243} \\ \quad 567 \\ \quad \underline{567} \end{array}$$

1) Im Sinne des Messens: Wie oft ist 81 in 24867 enthalten?

81 ist in 2 nicht 1mal, also in 2 ZT. nicht 10000mal enthalten, auch nicht in 24 T. 1000mal; ich nehme daher sogleich die drei ersten Stellen des Dividends nämlich 248 Hunderte als ersten Theildividend an. 81 ist in 248 E. (versuchsweise 8 in 24) 3mal, in 248 H. also 300mal enthalten; in den Quozienten setzt man also 3 Hunderte. 300mal 81 gibt 3 × 81 H. = 243 H.; werden diese von 248 H. subtrahiert, so bleiben noch 5 H. übrig. 5 H. und 6 Z. herab sind 56 Z.; 81 ist in 56 nicht 1mal enthalten, also in 56 Z. nicht 10mal; an die Stelle der Zehner kommt also im Quozienten eine Null, und ich setze zu den 56 Z. sogleich die 7 E. herab, wodurch ich 567 E. erhalte. 81 ist in 567 (versuchsweise 8 in 56) 7mal enthalten; die 7 E. kommen in den Quozienten; 7mal 81 ist genau 567 und es bleibt nichts übrig.

2) Im Sinne des Theilens: Wie viel ist der 81ste Theil von 24867?

Der 81ste Theil von 2 ZT. kann kein Zehntausend, von 24 T. kein Tausend sein; ich bilde also Hunderte. 2 ZT. 4 T. 8 H. sind 248 H. Nun kann ich theilen: der 81ste Theil von 248 H. (der 8te Theil von 24) sind 3 H.; diese setze ich in den Quozienten. Vertheilt sind nun 81mal 3 H. = 243 H.; 243 H. von 248 H. bleiben noch 5 H. zur Vertheilung übrig. 5 H. und die vorhandenen 6 Z. dazu sind 56 Z.; der 81ste Theil von 56 Z. ist kein Zehner; ich setze daher an die Stelle der Zehner im Quozienten eine Null und schreibe zu den übrigbleibenden 56 Z. sogleich die 7 E. herab. Der 81ste Theil von 567 E. (der 8te Theil von 56) sind 7 E.; diese setze ich in den Quozienten. Getheilt sind nun 81mal 7 E. = 567 E.; 567 E. von 567 E. bleibt nichts. Der 81ste Theil von 24867 ist also 307.

Aus dieser umständlich gehaltenen Entwicklung ersehen die Schüler erstlich, dass man, wenn der Divisor zweiziffrig ist, sogleich die zwei höchsten Stellen des Dividends in Rechnung ziehen müße. Die Schüler überzeugen sich ferner, dass die Form des schriftlichen Dividierens dieselbe ist, mag dieses ein Messen oder ein Theilen sein, und dass es für das Resultat der Division gleichgiltig ist, ob man dabei die Schlussweise des Messens oder jene des Theilens in Anwendung bringt. Es wird ihnen nun bemerkt, dass man sich bei der Ausführung einer Divisionsrechnung, auch bei Theilungsaufgaben, gewöhnlich derjenigen Ausdrucksweise, welche sich auf das Messen bezieht, bedient, weil sie die einfachere und kürzere ist. Auch wird weiterhin beim Rechnen die Angabe der Stellenwerte weggelassen.

Die frühere Aufgabe wird demnach kürzer so gerechnet:

24867 : 81 = 307	81 in 248 (8 in 24)
243	ist 3mal enthalten; 3mal
567	1 ist 3, 3mal 8 ist 24;
567	243 von 248 bleibt 5;
	6 herab. 81 in 56 ist

0mal enthalten; 7 herab. 81 in 567 (8 in 56) ist 7mal enthalten; 7mal 1 ist 7, 7mal 8 ist 56; 567 von 567 bleibt nichts.

Die Vorschrift bleibt sich gleich, wenn der Divisor drei- oder mehrstellig ist.

Auch der Fall, wenn der Divisor rechts Nullen hat, wird keine Schwierigkeiten bieten. Z. B.

215,00 : 5,00 = 43
20
 15
 15

500 = 5 H., 21500 = 215 H.; 5 H. sind in 215 H. so oft enthalten, als 5 E. in 215 E., also 43mal.

Ebenso:

875,7 : 3,0 = 291$\frac{27}{30}$
5
27
27
 5
 3
 27

3 Z. sind in 875 Z. eben so oft enthalten, als 3 E. in 875 E., also 291mal, und es bleiben noch 27 zu theilen übrig, wodurch man $\frac{27}{30}$ erhält.

Wenn also der Divisor rechts Nullen hat, so läßt man dieselben weg, schneidet aber auch im Dividend eben so viele Ziffern rechts ab; zum letzten Reste setzt man dann diese Ziffern herab, wodurch man den Rest der ganzen Division erhält.

Aufgaben über das reine Rechnen.

Im III. Rechenbuche S. 71—73.

Die Aufgaben sind methodisch geordnet, daß der Divisor zunächst nur Einer enthält, dann zwei-, drei- und mehrstellig wird und schließlich am Ende Nullen hat.

Hier wird den Schülern auch die **Probe der Division** gezeigt werden. Wenn ein Ganzes in mehrere gleiche Theile getheilt wird, und man nimmt dann einen Theil so vielmal, als

Theile gemacht wurden, so muß wieder das Ganze herauskommen. Um daher die Probe für die Richtigkeit der Division aufzustellen, darf man nur den Quozienten mit dem Divisor multiplizieren; ist richtig dividiert worden, so muß dadurch der Dividend zum Vorschein kommen. Theilt man z. B. 1542 durch 3, so ist

1542 : 3 = 514	514
15	3
4	1542
3	
12	
12	

Es beträgt hier ein Theil 514. Wenn wir nun wieder alle drei Theile zusammensetzen, d. i. 514 3mal nehmen, also den Quozienten mit dem Divisor multiplizieren, so muß der Dividend 1542 als Produkt erscheinen, was hier wirklich der Fall ist; also ist richtig dividiert worden.

Bleibt beim Dividieren ein Rest, so muß zu dem Produkte aus dem Quozienten und dem Divisor noch jener Rest dazu addiert werden.

Der Lehrer bemerke, dass die Division auch als Probe für die Multiplikazion dient. Wenn man nämlich das Produkt durch den Multiplikator dividiert, so muß der Multiplikand herauskommen. Z. B.

904	Probe: 20792 : 23 = 904
23	207
2712	92
1808	92
20792	

Zur Wiederholung der Multiplikazion sowie zur besseren Übung im Dividieren kann man hier einzelne Multiplikazionen von Seite 66 und 67 des III. Rechenbuches wieder ausführen und für die Richtigkeit jedesmal auch die Probe machen lassen.

Angewandte Aufgaben.

Im III. Rechenbuche S. 74—77.

Die Lösung dieser Aufgaben führt auf eine einfache Division, oder auf eine Division in Verbindung mit der Addizion, Subtrakzion oder Multiplikazion. Auf leichtere Aufgaben folgen schwierigere und zusammengesetzte, darunter Dreisatz-, Durchschnitts-, Gesellschafts- und Raumrechnungen.

Die Schlüsse, die dabei in Anwendung kommen, sind bereits in den Aufgaben des Zahlenraumes unter 1000 so vielfach vorgekommen, dass es überflüssig wäre, sie hier wiederholt anzuführen. Nur die folgenden zwei Aufgaben wollen wir besonders erläutern:

Drei Pferdehändler übernehmen eine Pferdelieferung für 2760 fl.; A liefert 4, B 5, C 6 Pferde von gleichem Werte; wie viel erhält jeder von der obigen Summe?

Auflösung. 4 + 5 + 6 = 15

Für 15 Pferde . . 2760 fl.

„ 1 Pferd $\frac{1}{15}$ von 2760 fl. = 184 fl.

A	erhält	für 4 Pferde	4mal 184 fl.	=	736	fl.
B	„	„ 5 „	5mal 184 „	=	920	„
C	„	„ 6 „	6mal 184 „	=	1104	„
			alle drei erhalten		2760	fl.

Ein vierkantiges Gefäß von durchaus gleicher Weite enthält 3627 Kub.$^{\mathrm{dm}}$; wie groß ist die Bodenfläche, wenn die Höhe 9 $^{\mathrm{dm}}$ beträgt?

Auflösung. Theile ich das Gefäß in 9 gleiche Schichten, deren jede 1 $^{\mathrm{dm}}$ hoch ist, so kommen auf eine Schichte der 9. Theil von 3627 Kub.$^{\mathrm{dm}}$, d. i. 403 Kub.$^{\mathrm{dm}}$. Da jede solche Schichte 1 $^{\mathrm{dm}}$ hoch ist, so hat ihre Grundfläche so viel □$^{\mathrm{dm}}$, als auf ihr Kub.$^{\mathrm{dm}}$ Platz haben, also 403 □$^{\mathrm{dm}}$; folglich hat auch die eben so große Bodenfläche des Gefäßes 403 □$^{\mathrm{dm}}$.

Vierte Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **vierten** Rechenbuches für Volksschulen.)

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen, mehrnamigen Zahlen und gemeinen Brüchen.

Einleitung.

---

§. 79. Anordnung der Übungen des vierten Rechenbuches.

Durch die bisher ausgeführten Übungen ist das Rechnen mit reinen und einnamigen ganzen Zahlen abgeschlossen. Wir nahmen die bezüglichen Übungen zunächst in dem ersten Zehnerraume, dann folgeweise in dem bis 20, 100, 1000 erweiterten Zahlenkreise, endlich im unbegränzten Zahlenraume vor. Der Stufengang war durch die fortschreitende Entwicklung des Zahlengebietes selbst naturgemäß gegeben.

Nicht so bestimmt kann an und für sich der Gang des weiteren Rechenunterrichtes vorgezeichnet werden. Früher ließ man auf das Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen Zahlen gewöhnlich das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen folgen und widmete dann eine oft unverhältnismäßig lange Zeit der Behandlung der gemeinen Brüche, während die Dezimalbrüche in vielen Volksschulen gar nicht, in anderen erst am Schlusse des Rechenunterrichtes, und zwar als eine besondere Art der gemeinen Brüche an die Reihe kamen.

Durch die dezimale Eintheilung unserer Münzen, sowie der neuen metrischen Maße und Gewichte erhalten nun die eben angeführten Rechenstoffe eine wesentlich geänderte Bedeutung, die auch für ihre Anordnung maßgebend sein muß. Indem man künftighin im gewöhnlichen Leben nur selten mit gemeinen Brüchen, und selbst da nur mit kleineren Bruchzahlen rechnen wird, werden dagegen allgemein die Dezimalbrüche eine um so größere Wichtigkeit erlangen. Ohne Kenntnis des Dezimalrechnens ist der Bau des metrischen Maß- und Gewichtssystems nicht einmal gut verständlich, noch weniger kann ohne sie eine geschickte und vortheilhafte Anwendung desselben stattfinden. Die Vergleichung der neuen und der alten Maße und Gewichte und die gegenseitige Umwandlung derselben ist mit Genauigkeit nur mit Hilfe der Dezimalbrüche ausführbar. Der Volksschule erwächst daher die Aufgabe, ihre Schüler, damit sie mit den neuen Maßen und Gewichten mit Verständnis und leicht rechnen können, frühzeitig mit der Dezimalrechnung vertraut zu machen, und zwar sobald dieses durch die natürliche Gliederung des Rechenunterrichtes zulässig erscheint. Die geeignetste Stelle erhalten nun die Dezimalzahlen unmittelbar nach den ganzen Zahlen, da sie eben nur eine Erweiterung unseres dekadischen Zahlensystems sind und in den Operazionen denselben Gesetzen folgen, welche die Schüler für ganze Zahlen kennen gelernt haben.

Wir nehmen daher, nachdem das Rechnen mit ganzen Zahlen bereits vollständig abgeschlossen ist, sogleich das Rechnen mit Dezimalbrüchen vor. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen, welches wir dann folgen lassen, gestaltet sich, wenn man die Papier-, Zeit- und Bogenmaße ausnimmt, durchgängig als Dezimalrechnen und findet in diesem seine natürliche Begründung. Den Schluss sollen die gemeinen Brüche bilden, bei deren Behandlung wir jedoch stets die praktischen Bedürfnisse im Auge behalten werden.

Wir ordnen demnach den Übungsstoff des vierten Rechenbuches, wie folgt:

I. Das Rechnen mit Dezimalzahlen.

II. Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

III. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

Erster Abschnitt.

Das Rechnen mit Dezimalzahlen.

§. 80. Allgemeine Bemerkungen.

Für die Dezimalbrüche und ihre Behandlung gibt es eine zweifache Auffassungsweise. Man kann die Dezimalbrüche als eine Erweiterung des Zehnersystems darstellen und dann mit ihnen nach den gleichen Gesetzen, wie mit ganzen Zahlen, rechnen; man kann aber die Dezimalbrüche auch als eine besondere Art der gemeinen Brüche betrachten und die für diese entwickelten Gesetze auf das Rechnen mit Dezimalbrüchen anwenden. Wir gehen hier von der ersten Darstellungsweise aus; wir müßen dieselbe schon aus dem Grunde wählen, weil das Rechnen mit gemeinen Brüchen erst später vorgenommen werden soll; wir wählen sie aber auch darum, weil sie natürlicher ist und den innigen Zusammenhang zwischen den ganzen und den Dezimalzahlen schärfer hervortreten läßt, als dieß bei der Zugrundelegung der gemeinen Brüche möglich wäre. Indem die Schüler die Dezimalrechnung aus dem Rechnen mit ganzen Zahlen ableiten, lernen sie nicht nur einen neuen wichtigen Gegenstand kennen, sondern erhalten zugleich eine treffliche Gelegenheit, die Rechenübungen mit ganzen Zahlen nutzbringend zu wiederholen.

Die Auffassung der Dezimalzahlen setzt in jedem Falle die Begriffe von Zehnteln, Hunderteln u. s. w. voraus. Diese Begriffe sind unseren Schülern nicht mehr fremd; sie haben auf anschaulichem Wege (II. Abth. §. 47 und II. Rechenbuch S. 43) eine klare Vorstellung erlangt, dass der zehnte Theil von 1 Ganzen oder von 1 Einer 1 Zehntel, und dass 1 Einer = 10 Zehntel ist; sie haben sich auch (III. Abth. §. 62, c) überzeugt, dass der zehnte Theil von 1 Zehntel 1 Hundertel, der zehnte Theil von 1 Hundertel 1 Tausendtel ist, und dass daher 1 Zehntel 10 Hundertel, 1 Hundertel 10 Tausendtel hat. Diese Begriffe müßen hier wieder in das Bewusstsein der Schüler zurückgerufen und nach Bedürfnis vervollständiget werden.

Rücksichtlich der angewandten Aufgaben müßen wir auch hier wiederholt betonen, dass die Schüler dabei jederzeit zu verhalten sind, die den Aufgaben zu Grunde liegenden sachlichen Verhältnisse zu beurtheilen und daraus durch klar und bündig ausgesprochene Schlüsse abzuleiten, wie die gegebenen Zahlen zu verändern sind, damit die gesuchte Zahl erhalten werde.

I. Auffassung der Dezimalzahlen.

§. 81. Bildung und schriftliche Darstellung der Dezimalbrüche.

Wir haben auf den vorhergehenden Stufen allmählich das dekadische Zahlensystem aufgebaut. Jede Einheit einer nächsthöheren Ordnung ist zehnmal so groß als eine Einheit der nächstniedrigeren Ordnung. Ebenso beim Zahlenschreiben; eine Ziffer bedeutet an jeder Stelle links zehnmal so viel als an der vorhergehenden Stelle rechts. Wir haben daher bei jeder Ziffer einen doppelten Wert unterschieden, den bleibenden Wert der Ziffer selbst, und den veränderlichen, der sich nach der Stelle, an welcher die Ziffer steht, richtet.

Der Lehrer schreibe eine Zahl an, welche gleiche Ziffern enthält, z. B. 33333, und entwickle daran mit den Schülern folgende Gesetze:

Die Ziffer 3 in der ersten Stelle rechts bedeutet 3 Einer. Die 3 in der zweiten Stelle bedeutet 3 Zehner, also 10mal 3 Einer. Die 3 in der dritten Stelle bedeutet 3 Hunderte, also 10mal 3 Zehner; u. s. w. Eine Ziffer bedeutet also an jeder folgenden Stelle gegen die Linke zehnmal so viel als an der nächstvorhergehenden rechts.

Anders verhält es sich, wenn wir von der Linken zur Rechten fortschreiten. Die Ziffer 3 in der fünften Stelle links bedeutet 3 Zehntausende. Die 3 in der vierten Stelle bedeutet 3 Tausende, also nur den 10ten Theil von 3 Zehntausenden. Die 3 in der dritten Stelle gilt 3 Hunderte, also nur den 10ten Theil von 3 Tausenden. Ebenso bedeutet die 3 in der zweiten Stelle den 10ten Theil von der 3 in der dritten Stelle, d. i. 3 Zehner, und die 3 in der ersten Stelle den 10ten Theil von 3 Zehnern, nämlich 3 Einer. Eine Ziffer bedeutet daher an jeder folgenden Stelle gegen die Rechte nur den zehnten Theil von dem, was sie an der nächstvorhergehenden Stelle links gilt.

Schreiten wir von den Einern aufwärts zu den Zehnern, Hunderten, u. s. w., so können wir die Zifferreihe ohne Ende fortsetzen. Gehen wir aber z. B. von den Zehntausenden abwärts zu den Tausenden, Hunderten, . . . zurück, so glaubten wir bisher bei den Einern, welche den ersten Platz rechts einnahmen, auf der niedrigsten Stelle angelangt zu sein. Und doch können wir noch tiefer unter die Einer hinabsteigen. Wenn wir der Zahl 33333 rechts noch eine 3 hinzufügen, was müßte diese Ziffer nach dem Gesetze unseres Zehnersystems bedeuten? Wie viel ist der 10te Theil von einem Einer, d. i. von einem Ganzen? Der 10te Theil von 3 Einern sind also 3 Zehntel. Da wir aber bis jetzt gewohnt waren, die erste Ziffer rechts immer als Einer anzusehen, so müßen wir, wenn die Zifferreihe unter die Einer hinab noch weiter rechts fortgesetzt wird, durch ein bestimmtes Zeichen andeuten, wo sich die Stelle der Einer befindet. Man hat dazu einen Punkt gewählt, welchen man nach den Einern rechts oben setzt. Leset nun die Zahl 33333·3. Würde man dieser Zahl rechts noch mehrere Ziffern anhängen, z. B. 33333·33333, so würde die zweite 3 nach dem Punkte den 10ten Theil von 3 Zehnteln bedeuten. Wie viel ist der 10te Theil von einem Zehntel? Die 3 an der zweiten Stelle nach dem Punkte bedeutet also 3 Hundertel. Wie viel ist der 10te Theil von einem Hundertel? An der dritten Stelle nach dem Punkte bedeutet also eine Ziffer so viele Tausendtel, als sie für sich Einer anzeigt. Ebenso kommen an der vierten Stelle nach dem Punkte Zehntausendtel, an der fünften Hunderttausendtel u. s. w. vor.

Sowie man also die Zahlenreihe von den Einern an aufwärts (gegen die Linke) bis in's Unendliche fortführen kann, so läſst sich dieselbe von den Einern an auch abwärts (gegen die Rechte) bis in's Unendliche fortbilden.

Da Zehntel, Hundertel, Tausendtel, . . . nicht ganze Einheiten vorstellen, sondern nur Theile, die man erhält, wenn man das Ganze und seine auf einander folgenden niedrigeren Theile immer wieder in zehn gleiche Theile theilt; so nennt man dieselben Zehntheilchen oder Dezimalen, und eine Zahl, worin Dezimalen vorkommen, eine Dezimalzahl oder einen Dezimalbruch.

Der Punkt, welcher zwischen der Stelle der Einer und jener der Zehntel steht, heiſst der Dezimalpunkt; er bildet die Scheidegränze zwischen den Ganzen und den Dezimalen; links vor demselben befinden sich die Ganzen, rechts nach demselben die Dezimalen; und zwar bedeutet die erste Dezimale nach dem Punkte Zehntel, die zweite Hundertel, u. s. w. Die Bedeutung der obigen Zahl 33333·33333 läſst sich daher durch folgende Darstellung veranschaulichen:

Ganze						Dezimalen				
3	3	3	3	3	.	3	3	3	3	3
Zehntausende	Tausende	Hunderte	Zehner	Einer		Zehntel	Hundertel	Tausendtel	Zehntausendtel	Hunderttausendtel

Die Dezimalzahlen sind demnach eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems in der Art, dass die Reihe der Zahlenordnungen . . . Tausende, Hunderte, Zehner, Einer nicht mehr mit den Einern abbricht, sondern sich nach demselben Gesetze, indem jede niedrigere Einheit als der zehnte Theil einer Einheit der nächsthöheren Ordnung angenommen wird, noch unter den Einern hinab in Zehnteln, Hunderteln, Tausendteln, . . . fortsetzt.

Nun folgen Übungen im Anschreiben und Lesen der Dezimalzahlen.

Man schreibt zuerst die Ganzen an, setzt nach denselben den Dezimalpunkt, und nach diesem folgeweise die Zehntel, Hundertel, u. s. w.

Enthält ein Dezimalbruch bloß Dezimalen, also keine Ganzen, so schreibt man links vor den Dezimalpunkt eine Null. Z. B. 3 Zehntel wird angeschrieben 0·3.

Fehlen in einem Dezimalbruche die Zehntel, Hundertel, u. s. w., so werden diese Stellen mit Nullen ausgefüllt. Z. B. 3 Tausendtel 5 Zehntausendtel schreibt man 0·0035.

Man bemerke auch den Schülern, dass einige anstatt des Dezimalpunktes einen Beistrich setzen, so dass z. B. 35,729 so viel als 35·729 bedeutet.

Beim Lesen eines Dezimalbruches spricht man zuerst die Ganzen aus, und dann jede Dezimale einzeln, mit oder ohne Hinzufügung der Benennung, oder auch alle Dezimalen als

Zahl mit Hinzufügung der letzten Benennung. Z. B. 86·705 wird gelesen:

86 Ganze, 7 Zehntel, keine Hundertel, 5 Tausendtel; oder
86 Ganze mit den Dezimalen 7, 0, 5; oder
86 Ganze, 705 Tausendtel.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 3 und 4.

---

§. 82. Stellenwert der Dezimalzahlen.

IV. Rechenbuch S. 5.

Damit das Wesen der Dezimalbrüche besser erfasst werde, soll hier auch der Einfluss, den die Stelle des Dezimalpunktes auf den Wert eines Dezimalbruches ausübt, näher betrachtet werden.

a) Man lasse einem gegebenen Dezimalbruche z. B. 9·26 rechts eine oder mehrere Nullen anhängen, und in den dadurch entstehenden Dezimalbrüchen

9·26, 9·260, 9·2600, 9·26000

den Wert der einzelnen Ziffern angeben; die Schüler werden sich überzeugen, dass alle diese Zahlen, da der Dezimalpunkt dieselbe Stelle behält, gleichen Wert haben.

Der Wert eines Dezimalbruches wird nicht geändert, wenn man ihm rechts eine, zwei oder mehrere Nullen anhängt.

b) Man lasse die Werte der nachstehenden Dezimalzahlen mit einander vergleichen:

4·567, 45·67, 456·7, 4567.

Aus der Zahl 4·567 ist 45·67 entstanden, indem man den Dezimalpunkt um eine Stelle nach rechts rückte. Welche Veränderung ist dadurch mit dem Werte der Dezimalzahl vorgegangen? Aus 4 Einern sind 4 Zehner, aus 5 Zehnteln 5 Einer, aus 6 Hunderteln 6 Zehntel, aus 7 Tausendteln 7 Hundertel geworden, d. h. jede Ziffer bedeutet nun 10mal so viel als vorher, oder die ganze Dezimalzahl ist 10mal so groß geworden. Setzt man den Dezimalpunkt um 2 Stellen weiter nach rechts, so bedeutet ebenso jede Ziffer der neuen Dezimalzahl 456·7, also auch diese selbst, 100mal so viel als früher; u. s. w. Wenn man daher in einer Dezimalzahl den Punkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Rechte rückt, so wird ihr Wert 10mal, 100mal, 1000mal, . . . so groß. Daraus folgt:

Eine Dezimalzahl wird mit 10, 100, 1000, . . . multipliziert, indem man den Dezimalpunkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach rechts rückt.

Dieses Verfahren ist auch dann anwendbar, wenn der Multiplikand nicht so viele Dezimalstellen hat, als zur Verrückung des Dezimalpunktes erforderlich sind, da man durch Anhängung von Nullen dem Dezimalbruche jede beliebige Anzahl von Dezimalstellen geben kann. Z. B.

$$375{\cdot}2 \times 1000 = 375{\cdot}200 \times 1000 = 375200.$$

c) Man lasse nun auch die folgenden Dezimalzahlen vergleichen:

$$46{\cdot}29,\quad 4{\cdot}629,\quad 0{\cdot}4629,\quad 0{\cdot}04629.$$

Aus 46·29 wird 4·629, indem man den Dezimalpunkt um eine Stelle weiter nach links rückt. Dabei werden aus 4 Zehnern 4 Einer, aus 6 Einern 6 Zehntel, aus 2 Zehnteln 2 Hundertel, aus 9 Hunderteln 9 Tausendtel; jede Ziffer der zweiten Zahl bedeutet also nur den 10ten Theil von dem, was sie in der ersten Zahl bedeutet, d. i. die Zahl 4·629 ist nur der 10te Theil von 46·29. Ebenso überzeugt man sich, dass 0·4629 den 100sten, 0·04629 den 1000sten Theil der gegebenen Zahl 46·29 bedeutet. Wenn man daher in einer Dezimalzahl den Punkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter gegen die Linke rückt, so sinkt der Wert derselben auf den 10ten, 100sten, 1000sten . . . Theil herab. Daraus folgt:

Eine Dezimalzahl wird durch 10, 100, 1000, . . . dividiert, indem man den Dezimalpunkt um 1, 2, 3, . . . Stellen weiter nach links rückt.

II. Die Rechnungsoperazionen mit Dezimalzahlen.

§. 83. Addieren der Dezimalzahlen.

Da die Dezimalbrüche nach denselben Gesetzen, wie die ganzen Zahlen, gebildet sind, so weicht das Rechnen mit denselben von dem Rechnen mit ganzen Zahlen nur darin ab, dass während der Rechnung oder nach Vollendung derselben dem Punkte, wodurch die Ganzen von den Dezimalen getrennt werden, die richtige Stelle gegeben werde. Es stellt sich daher am angemessensten heraus, bei jeder Rechnungsart zunächst Übungen im Rechnen mit ganzen Zahlen, theils zur Wiederholung und Erweiterung des bereits Gelernten, theils zur Vorbereitung und Begründung des analogen Verfahrens bei den Dezimalbrüchen, vorauszuschicken.

a) Wiederholungsübungen über die Addizion ganzer Zahlen.

Im IV. Rechenbuche S. 6, a.

---

b) Addieren von Dezimalzahlen.

Sowie man bei den ganzen Zahlen nur gleichnamige Stellen, Einer und Einer, Zehner und Zehner, u. s. w., addieren kann, ebenso können auch bei Dezimalzahlen nur gleichnamige Dezimalstellen, Zehntel und Zehntel, Hundertel und Hundertel . . . zusammengezählt werden. Man muß daher darauf sehen, dass schon beim Anschreiben der Summanden nicht nur die gleichnamigen Stellen der Ganzen, sondern auch jene der Dezimalen unter einander zu stehen kommen, nämlich Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel, u. s. w. Dieses wird dadurch bewirkt, dass die Dezimalpunkte gerade unter einander gesetzt werden. Die Addizion wird dann so wie bei ganzen Zahlen vollzogen.

Zuerst werden solche Dezimalzahlen addiert, welche gleich viele Dezimalstellen haben. Dabei kann man anfangs die Summanden in ihre dekadischen Bestandtheile zerlegen lassen.

3·789	= 3	Einer	7	Zehntel	8	Hundertel	9	Tausendtel
5·446	= 5	„	4	„	4	„	6	„
1·792	= 1	„	7	„	9	„	2	„
8·068	= 8	„	0	„	6	„	8	„
19·095	= 19	„	0	„	9	„	5	„

Als Summe der Tausendtel erhält man 25 Tausendtel = 2 Hundertel + 5 Tausendtel; die 5 Tausendtel werden unter die Tausendtel geschrieben, die 2 Hundertel zu den Hunderteln weitergezählt. Man erhält dann 29 Hundertel = 2 Zehntel + 9 Hundertel; 9 Hundertel schreibt man an, 2 Zehntel werden weitergezählt; u. s. f.

Hieraus ist ersichtlich, dass in der Summe der Dezimalpunkt genau unter die Dezimalpunkte der Summanden zu stehen kommt.

Werden später Zahlen angegeben, welche nicht gleich viele Dezimalstellen haben, so bemerke der Lehrer, dass man hier den Summanden durch Anhängung von Nullen eine gleiche Anzahl von Dezimalstellen geben, und dann die Addizion, wie früher, verrichten könnte, dass man es aber vorzieht, diese Nullen nicht wirklich anzuschreiben, da sie ohnehin auf die Summe keinen Einfluss ausüben. Sind z. B. die Zahlen 0·72, 0·9, 0·43, 0·842 zu addieren, so hat man

0·720	oder 0·72	2 Tausendtel schreibt man sogleich
0·900	0·9	in die Summe, da in den übrigen
0·430	0·43	Summanden keine Tausendtel vorkommen.
0·842	0·842	4 Hundertel und 3 Hundertel sind
2·892	2·892	7 Hundertel, und 2 Hundertel sind

9 Hundertel, welche man an die Stelle der Hundertel setzt. 8 Zehntel und 4 Zehntel sind 12 Zehntel, und 9 Zehntel sind 21 Zehntel, und 7 Zehntel sind 28 Zehntel, d. i. 2 Ganze und 8 Zehntel; man schreibt daher 8 an die Stelle der Zehntel,

bringt den Dezimalpunkt an, und setzt 2 an die Stelle der Ganzen.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 6 u. 7, b.

---

c) Anwendungen.

Im IV. Rechenbuche S. 7 u. 8, c.

---

§. 84. Subtrahieren der Dezimalzahlen.

a) Wiederholungsübungen über die Subtrakzion ganzer Zahlen.

Im IV. Rechenbuche S. 9, a.

Wir haben schon auf den früheren Stufen (III. Abthlg. §. 58) bemerkt, dass das Subtrahieren auf zweifache Art vollzogen werden könne: entweder durch das wirkliche Wegzählen des Subtrahends vom Minuend, oder durch Auffindung einer Zahl, welche zu dem Subtrahend hinzugezählt, den Minuend gibt. Für jene Stufen haben wir das Subtrahieren mittels des Wegzählens als zweckentsprechender bezeichnet und auch die Gründe dafür angeführt. Da diese Gründe bei dem nunmehr vorgeschrittenen Unterrichte entfallen und sich die zweite Art des Subtrahierens für das praktische Rechnen jedenfalls bequemer herausstellt, so wird es eben hier am Platze sein, die Schüler mit dem Subtrahieren mittels des Zuzählens vertraut zu machen.

Bei dieser Art des Subtrahierens wird vorausgesetzt, dass man sogleich anzugeben wisse, wie viel zu einer Zahl addiert werden muß, um eine andere Zahl zu erhalten, die höchstens um 9 größer ist als die erstere Zahl. Der Lehrer wird daher zunächst folgende und ähnliche Übungen, wie sie schon im ersten Schuljahre vorkamen, mündlich wiederholen lassen.

3 +. = 8	8 +. = 15
7 +. = 9	9 +. = 13
5 +. = 5	6 +. = 12 u. s. w.

Es sei nun der Unterschied zwischen 5839 und 2715 zu bestimmen.

$$\begin{array}{r} 5839 \\ 2715 \\ \hline 3124 \end{array}$$

Wie viel E. muß man zu 5 E. zuzählen, um 9 E. zu bekommen? Der Unterschied zwischen 5 E. und 9 E. ist daher 4 E. Wie viel Z. muß man zu 1 Z. zuzählen, um 3 Z. zu erhalten? Diese 2 Z. sind also der Unterschied zwischen 1 Z. und 3 Z. Wie viel H. müßen zu 7 H. dazugezählt werden, damit man 8 H. bekomme? 1 H. ist also der Unterschied zwischen 7 H. und 8 H. Zu 2 T. muß man endlich 3 T. zuzählen, um 5 T. zu erhalten. Der ganze Unterschied ist daher 3124.

Wie man sieht, wurde hier zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazugezählt, dass man die darüberstehende Ziffer des Minuends erhalten hat, und die hinzugezählte Zahl als Rest angeschrieben.

Man kann dabei kürzer so sprechen: 5 und **4** ist 9; 1 und **2** ist 3; 7 und **1** ist 8; 2 und **3** ist 5. Die Zahl, welche man jedesmal dazuzählen muß, und welche hier mit fetter Ziffer dargestellt ist, wird sogleich während des Aussprechens in den Rest geschrieben.

Es sei ferner 4926—2351 zu bestimmen.

$$\begin{array}{r} 4926 \\ 2351 \\ \hline 2575 \end{array}$$

Zu 1 E. muß man 5 E. zuzählen, um 6 E. zu erhalten; der Unterschied der Einer ist also 5; 5 wird in den Rest geschrieben. Hierauf subtrahiert man die Zehner: da 5 Z. größer sind als 2 Z., so kann man durch Hinzuzählen zu 5 Z. nicht 2 Z. erhalten, wohl aber kann man dadurch auf 12 Z. kommen; da nun der Unterschied zweier Zahlen nicht geändert wird, wenn man beide um gleichviel vermehrt, so kann man die 2 Z. des Minuends um 10 Z. vermehren; zu 5 Z. muß man nun 7 Z. addieren, um 12 Zehner zu erhalten; der Unterschied in den Zehnern ist also 7. Da aber der Minuend um 10 Z. vermehrt wurde, so muß man, damit der ganze Unterschied nicht geändert werde, auch den Subtrahend um 10 Z. oder um 1 H. vergrößern; man vermehrt also die 3 H. desselben um 1 H., wodurch man 4 H. bekommt, und subtrahiert hierauf die Hunderte; zu 4 H. muß man 5 H. zuzählen, um 9 H. zu erhalten; u. s. w.

Man spricht hier:

1 und **5** ist 6;
5 und **7** ist 12 (bleibt 1);
1 und 3 ist 4 und **5** ist 9;
2 und **2** ist 4.

Um daher die Subtrakzion mittels des Zuzählens zu verrichten, zählt man, bei den Einern anfangend, nach der Reihe zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazu, dass man die darüberstehende Ziffer des Minuends erhält, und setzt die jedesmal dazugezählte Zahl in den Rest. Ist eine Ziffer des Subtrahends größer als die darüberstehende des Minuends, so vermehre man diese letztere um 10, und subtrahiere; dagegen muß dann zugleich die Zahl in der nächsthöheren Stelle des Subtrahends um 1 vermehrt werden.

b) Subtrahieren von Dezimalzahlen.

Man lasse zuerst Dezimalbrüche von gleich vielen Dezimalstellen, z. B. 41·62 von 96·35 subtrahieren. Dabei muß der Subtrahend so unter den Minuend gesetzt werden, dass die Ganzen unter die Ganzen, Zehntel unter Zehntel, Hundertel unter Hundertel zu stehen kommen.

96·35
41·62
54·73

2 Hundertel und **3** Hundertel sind 5 Hundertel. — 6 Zehntel und **7** Zehntel sind 13 Zehntel, bleibt 1 Einer. — Da man jetzt

zum Subtrahieren der Ganzen fortschreiten und daher auch im Reste Ganze erhalten wird, so muß im Reste der Dezimalpunkt gesetzt werden. 1 Einer (welcher übrig geblieben ist) und 1 Einer sind 2 Einer, und **4** Einer sind 6 Einer. — 4 Zehner und **5** Zehner sind 9 Zehner. — Der Rest ist also 54·73.

Haben die Dezimalbrüche nicht gleich viele Dezimalstellen, so muß man Minuend und Subtrahend auf eine gleiche Anzahl von Dezimalstellen bringen, indem man die rechts fehlenden Stellen durch Nullen ausfüllt, oder, was meistens geschieht, sich diese Nullen bloß vorstellt, ohne sie wirklich anzuschreiben. Es sei z. B. 2·565 von 5·92 zu subtrahieren.

5·920	oder	5·92
2·565		2·565
3·355		3·355

5 Tausendtel und **5** Tausendtel sind 10 Tausendtel, bleibt 1 Hundertel; 1 Hundertel und 6 Hundertel sind 7 Hundertel, und **5** Hundertel sind 12 Hundertel, bleibt 1 Zehntel; 1 Zehntel und 5 Zehntel sind 6 Zehntel, und **3** Zehntel sind 9 Zehntel; 2 Einer und **3** Einer sind 5 Einer.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 9 u. 10, c.

Die Aufgaben 33—37 haben den Zweck, die Schüler mit dem Abkürzen der Dezimalbrüche vertraut zu machen.

Da es in den meisten Fällen nur auf die ersten Dezimalstellen ankommt, so können die überflüssigen Stellen weggelassen werden. Bei dieser Abkürzung entsteht aber jederzeit ein Fehler, zu dessen möglichster Verminderung nicht selten eine Korrektur der letzten beibehaltenen Dezimale eintreten muß. Setzt man statt 2·3462 den Dezimalbruch 2·346, so hat man 2·3462—2·346 = 0·0002 zu wenig. Wird ferner statt 8·3268 das einemal 8·326 und das andere Mal 8·327 gesetzt, so erhält man im ersten Falle 0·0008 zu wenig, im zweiten 0·0002 zu viel; man begeht also im zweiten Falle, wo die letzte beibehaltene Dezimale um 1 vergrößert wurde, einen kleineren Fehler, als im ersten Falle.

Die Schüler werden daraus leicht ersehen, dass bei der Abkürzung eines Dezimalbruches die letzte beibehaltene Dezimale um 1 vermehrt, — korrigiert — werden müße, wenn die nächstfolgende Dezimale 5 oder größer als 5 ist; dass dagegen die überflüssigen Dezimalen einfach weggelassen werden, wenn die höchste wegzulassende Dezimale kleiner als 5 ist.

c) Angewandte Aufgaben.

Im IV. Rechenbuche S. 11, c.

---

§. 85. Multiplizieren der Dezimalzahlen.

a) Wiederholungsübungen über die Multiplikazion mit ganzen Zahlen.

Im IV. Rechenbuche S. 12, a.

---

b) Multiplizieren von Dezimalzahlen.

Der Lehrer beobachte hier folgenden Stufengang:

1. Wenn eine Dezimalzahl mit 10, 100, 1000, . . zu multiplizieren ist.

Dieser Fall wurde schon oben (§. 82, b) betrachtet und ist hier an mehreren Übungen wiederholt vorzuführen.

2. Wenn eine Dezimalzahl mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren ist.

$$\begin{array}{r} 7{\cdot}83 \times 9 \\ \hline 70{\cdot}47 \end{array}$$

9mal 3 Hundertel sind 27 Hundertel = 2 Zehntel und 7 Hundertel; 7 Hundertel schreibt man an, 2 Zehntel werden im Gedächtnisse behalten und dann zu dem Produkte der Zehntel addiert. 9mal 8 Zehntel sind 72 Zehntel, und die früher gebliebenen 2 Zehntel sind 74 Zehntel d. i. 7 Einer und 4 Zehntel; 4 Zehntel werden angeschrieben, 7 Einer weitergezählt. 9mal 7 Einer sind 63 Einer, und 7 Einer sind 70 Einer.

Oder: wenn man anstatt 7·83 das 100fache davon, nämlich 783, nimmt, und dieses mit 9 multipliziert, so wird auch das Produkt 7047 das 100fache des gesuchten wahren Produktes sein; man findet also dieses, wenn man von 7047 den 100sten Theil nimmt, wodurch man 7047 Hundertel = 70·47 erhält.

Die Schüler folgern daraus die Regel:

Ein Dezimalbruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man ihn wie eine ganze Zahl damit multipliziert, und im Produkte so viele Dezimalstellen abschneidet, als ihrer der Multiplikand enthält.

3. Wenn eine Dezimalzahl mit einer Dezimalzahl zu multiplizieren ist.

Es soll z. B. 28·237 mit 4·53 multipliziert werden. — Wie wird 28·237 mit der ganzen Zahl 453 multipliziert? Man erhält dadurch 12791·361, die Dezimalzahl 4·53 ist aber nur der 100ste Theil von 453; wenn man nun 28·237 nur mit dem 100sten Theile von 453 multipliziert, so wird man auch nur den 100sten Theil von 12791·361 erhalten. Wie findet man den 100sten Theil von 12791·361? Es ist also

$$28{\cdot}237 \times 4{\cdot}53 = 127{\cdot}91361.$$

Wie wurden die Ziffern, mit welchen der Dezimalbruch 127·91361 geschrieben wird, gefunden? Wie viele Dezimalen enthalten die beiden Faktoren zusammen? Und wie viele enthält das Produkt?

Ein Dezimalbruch wird daher mit einem Dezimalbruche multipliziert, indem man die Multiplikazion mit Weglassung der Dezimalpunkte, wie bei ganzen Zahlen verrichtet, und dann im Produkte so viele Dezimalstellen abschneidet, als ihrer beide Faktoren zusammen haben.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 12 u. 13, b.

c) Anwendungen.

Im IV. Rechenbuche S. 14 und 15.

Zuerst werden einige Aufgaben über die Verwandlung der Münzen, Maße und Gewichte vorgenommen; in ausgedehnterem Umfange kommen solche Aufgaben in dem nächsten Abschnitte vor, in welchem wir auch über die Behandlung derselben ausführlicher sprechen werden.

Unter den angewandten Aufgaben tritt hier zum erstenmale die Berechnung des Kreisumfanges auf (Aufg. 56—58), die daher einer Erläuterung bedarf, worüber der achte Abschnitt der V. Abtheilung über die Raumgrößenrechnung näheren Aufschluss gibt.

---

§. 86. Dividieren der Dezimalzahlen.

a) Wiederholungsübungen über die Division ganzer Zahlen.

Auf den früheren Stufen haben wir bei der schriftlichen Ausführung der Division (III. Abth. §§. 63 und 78) alle Theilprodukte anschreiben und die Subtrakzion derselben immer schriftlich ausführen lassen. An dieser vollständigen Form mußte dort festgehalten werden, weil es im Anfange weniger auf Kürze und Anwendung von Vortheilen, als vielmehr auf Einsicht und Sicherheit ankommt. Nachdem nun aber die Schüler im Divisionsverfahren bereits Verständnis und Gewandtheit erlangt haben, können sie hier auch mit den einfacheren und kürzeren Darstellungen desselben vertraut gemacht werden.

Eine allgemein anwendbare Abkürzung besteht darin, dass man die Theilprodukte nicht anschreibt, sondern sogleich während des Multiplizierens subtrahiert und nur die Reste

16 *

ansetzt. Da hiebei die Subtrakzion mittels des Hinzuzählens verrichtet wird, so werden hier als Vorübung zunächst folgende und ähnliche Aufgaben mündlich auszuführen sein.

14 +. = 17	2 × 4 +. = 13
63 +. = 69	5 × 7 +. = 40
25 +. = 25	9 × 5 +. = 49
36 +. = 41	6 × 8 +. = 52
54 +. = 62	3 × 9 +. = 34 u. s. w.

1. Wenn der Divisor einziffrig ist.

Ist z. B. 6846 durch 7 zu dividieren, so hat man:

vollständig	abgekürzt	noch kürzer
6846 : 7 = 978	6846 : 7 = 978	6846 : 7
63	54	978
54	56	
49	"	
56		
56		
" "		

Die erste vollständige Form wurde auf den früheren Stufen in Anwendung gebracht.

Bei der zweiten Form werden die Theilprodukte gleich im Kopfe subtrahiert und nur die Reste angeschrieben. Man spricht dabei:

7 in 68 9mal; 9mal 7 ist 63, und **5** ist 68; 4 herab;
7 in 54 7mal; 7mal 7 ist 49, und **5** ist 54; 6 herab;
7 in 56 8mal; 8mal 7 ist 56, und **0** ist 56.

Die dritte Form ist die einfachste; man schreibt auch den jedesmaligen Rest nicht an, sondern behält denselben im Kopfe und denkt sich ihm die nächste Dividendziffer angehängt. Man spricht dabei:

7 in 68 9mal, bleibt 5;
7 in 54 7mal, bleibt 5;
7 in 56 8mal;

und schreibt die Ziffern des Quozienten unter die entsprechenden Stellen des Dividends.

Diese letztere Form soll hier vorzugsweise geübt werden.

2. Wenn der Divisor mehrziffrig ist, so kann auch da die Form der Division bedeutend vereinfacht werden, wenn man das Produkt aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quozienten sogleich während des Multiplizierens subtrahiert und bloß den Rest anschreibt.

Es sei z. B. 34461 durch 63 zu dividieren.

Vollständige Form.	Abgekürzte Form.
34461 : 63 = 547	34461 : 63 = 547
315	296
296	441
252	= = =
441	
441	
= = =	

Erklärung der abgekürzten Form:

63 in 344, oder 6 in 34, ist 5mal enthalten. Nun wird der Divisor 63 mit 5 multipliziert. 5mal 3 ist 15, welche man sogleich an der Stelle der Hunderte von dem Theildividende mittels des Hinzuzählens subtrahiert; da man 15 von 4 nicht subtrahieren kann, so denkt man sich die 4 um 2 Zehner vermehrt, wodurch 24 entsteht, und sucht nun die Zahl, welche zu 15 zugezählt werden muß, um 24 zu erhalten; man spricht: 15 und **9** ist 24, und schreibt die 9 an jener Stelle als Rest an. Weil aber hier die Ziffer 4 des Dividends um 2 Zehner vermehrt wurde, so muß man, um den wahren Rest zu erhalten auch den Subtrahend an jener Stelle um 2 Zehner, oder was

einerlei ist, in der nächst höheren Stelle um 2 Einheiten vermehren, d. i. man muß diese 2 zu dem Produkte aus dem Theilquozienten und der nächstfolgenden Ziffer des Divisors addieren. 5mal 6 ist 30, und jene 2 dazu, ist 32. Um diese von den gleichnamigen Stellen des Dividends, nämlich von 34, zu subtrahieren, sagt man: 32 und **2** ist 34, und schreibt die dazugezählte 2 in den Rest. — Zu dem Reste 29 wird die folgende Ziffer 6 des Dividends herabgesetzt. 63 in 296, oder 6 in 29, ist 4mal enthalten. 4mal 3 ist 12; in der Stelle des Theildividends, von welcher 12 zu subtrahieren ist, steht 6; man sucht daher, wie viel zu 12 addiert werden muß, um die nächste höhere Zahl, welche 6 Einer hat, d. i. um die Zahl 16 zu erhalten: 12 und **4** ist 16; die addierte 4 schreibt man sogleich als Rest an. Weil hier der Minuend um 1 Zehner vermehrt wurde, so muß man auch den Subtrahend um 1 Zehner vermehren; man wird also zu der nächst höheren Stelle des Produktes 1 addieren; 4mal 6 ist 24 und die von 16 im Sinne behaltene 1 dazu, ist 25, und **4** ist 29; die 4, welche man zu 25 addieren mußte, um die darüberstehenden 29 zu erhalten, kommen in den Rest; u. s. w.

Man spricht oder denkt während der Rechnung: 6 in 34 5mal; 5mal 3 ist 15, und **9** ist 24, bleibt 2; 5mal 6 ist 30, und 2 ist 32, und **2** ist 34; 6 herab; 6 in 29 4mal; 4mal 3 ist 12, und **4** ist 16, bleibt 1; 4mal 6 ist 24, und 1 ist 25, und **4** ist 29; u. s. w. Die mit fetter Letter dargestellte Ziffer wird jedesmal sogleich während des Aussprechens in den Rest geschrieben.

Das hier entwickelte kürzere Divisionsverfahren besteht demnach in folgendem:

Nachdem man die jedesmalige Ziffer des Quozienten auf die gewöhnliche Art bestimmt hat, multipliziert man damit nach der Ordnung die einzelnen Ziffern des Divisors, und zählt zu jedem einzelnen Produkte so viel dazu, dass man die nächste höhere Zahl bekommt, welche in der Stelle der Einer die entsprechende Ziffer des Theildividends hat; die Zahl, welche man zu dem Produkte addiert hat, wird sogleich in die gehörige Stelle des Restes angeschrieben. Enthält die Zahl, welche durch die Addizion herauskommt, wie dieses meistens eintritt, auch Zehner, so werden diese zu dem Produkte aus dem Theilquozienten und aus der nächst höhern Ziffer des Divisors dazugezählt.

3. Hier kann den Schülern auch gezeigt werden, dass man in dem Falle, wo bei der Division zweier ganzer Zahlen ein Rest bleibt, den Quozienten in Dezimalen entwickeln könne, indem man nach den Ganzen des Quozienten den Dezimalpunkt anbringt, zu dem letzten wie auch zu jedem folgenden Reste eine 0 anhängt und die Division fortsetzt.

357 : 25 = 14·28
107
70
200
=

Ist z. B. 357 durch 25 zu dividieren, so erhält man zunächst 14 Ganze zum Quozienten, und 7 zum Reste. 7 Ganze sind 70 Zehntel; diese durch 25 dividiert geben 2 Zehntel, welche man in den Quozienten schreibt, nachdem man nach den 14 Ganzen den Dezimalpunkt angebracht hat; es bleiben dann noch 20 Zehntel übrig, die durch 25 zu dividieren sind. 20 Zehntel sind 200 Hundertel, welche durch 25 dividiert 4 Hundertel zum Quozienten geben und keinen Rest übrig lassen.

Wenn bei fortgesetzter Division immer ein Rest übrig bleibt, so entwickelt man im Quozienten nur so viele Dezimalen, als man ihrer braucht.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 16, a.

b) Dividieren von Dezimalzahlen.

Der Stufengang entspricht demjenigen beim Multiplizieren von Dezimalzahlen (§. 85, b).

1. Wenn eine Dezimalzahl durch 10, 100, 1000, ... zu dividieren ist.

Über diesen Fall, welcher schon oben (§. 82, c) behandelt wurde, sind hier wiederholte Übungen vorzunehmen.

2. Wenn eine Dezimalzahl durch eine ganze Zahl zu dividieren ist.

Es sei 847·85 durch 31 zu dividieren.

847·85 : 31 = 27·35
227
 108
  155
   =

84 Zehner durch 31 dividiert geben 2 Zehner, und es bleiben noch 22 Zehner. 22 Zehner sind 220 Einer, und 7 Einer dazu, sind 227 Einer; diese durch 31 dividiert geben 7 Einer zum Quozienten und 10 Einer zum Reste. 10 Einer kann man als solche durch 31 nicht dividieren; man verwandelt sie in Zehntel; 10 Einer = 100 Zehntel, dazu die schon vorhandenen 8 Zehntel, sind 108 Zehntel; werden diese durch 31 dividiert, so beträgt ein Theil 3 Zehntel. Bevor aber diese in den Quozienten geschrieben werden, setzt man nach den Ganzen den Dezimalpunkt. 31mal 3 Zehntel, oder 3mal 31 Zehntel sind 93 Zehntel, von 108 Zehnteln weg, bleiben noch 15 Zehntel. Diese enthalten 150 Hundertel, und 5 Hundertel dazu, sind 155 Hundertel, welche durch 31 dividiert genau 5 Hundertel geben.

Die Schüler sehen, dass man, um einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, denselben so wie eine ganze

Zahl dividiert; nur wird im Quozienten der Dezimalpunkt gesetzt, bevor man die erste Dezimale des Dividends in Rechnung zieht.

Wenn bei der Division ein Rest übrig bleibt, so kann man demselben eine Null anhängen, und dann die Division fortsetzen; z. B.

$$\begin{array}{l} 2{\cdot}03 : 28 = 0{\cdot}0725 \\ \quad 70 \\ \quad 140 \\ \end{array}$$

Da 28 weder in 2 Einern noch in 20 Zehnteln enthalten ist, so setzt man in die Stelle der Ganzen und der Zehntel Nullen. 203 Hundertel durch 28 dividiert geben 7 Hundertel, und es bleiben noch 7 Hundertel. Diese kann man durch Anhängung einer Null in Tausendtel verwandeln; 70 Tausendtel durch 28 dividiert geben 2 Tausendtel, und es bleiben 14 Tausendtel übrig, u. s. w.

Ist der Divisor eine *einziffrige* Zahl, so schreibt man auch hier die Reste nicht an und setzt die Ziffern des Quozienten unmittelbar unter die gleichnamigen Stellen des Dividends. Der Dezimalpunkt im Quozienten kommt dabei genau unter den im Dividend. Z. B.

$$\begin{array}{l} \underline{13{\cdot}71_{00} : 4} \\ \;3{\cdot}4275 \end{array}$$

3. *Wenn eine Dezimalzahl durch eine Dezimalzahl zu dividieren ist.*

Der Lehrer lasse zunächst in irgend einer Division, z. B. 96 : 4, den Dividend und den Divisor mit 10, 100, 1000, . . . multiplizieren, um die Schüler zur Überzeugung zu führen, dass *der Quozient ungeändert bleibt, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliziert.*

Es sei nun 5·696 durch 0·32 zu dividieren.

$$5{\cdot}696 : 0{\cdot}32 = 569{\cdot}6 : 32 = 17{\cdot}8$$

249
256

Wie ein Dezimalbruch durch eine ganze Zahl dividiert wird, ist den Schülern bekannt; allein hier ist auch der Divisor ein Dezimalbruch. Kann man nicht diesen Divisor in eine ganze Zahl verwandeln? Womit muß man 0·32 multiplizieren, um eine ganze Zahl zu erhalten? Was muß aber dann auch mit dem Dividend 5·696 geschehen, damit der Quozient ungeändert bleibe? Anstatt 5·696 durch 0·32, wird man daher 569·6 durch 32 dividieren, da der Quozient in beiden Fällen derselbe ist.

Wenn also ein Dezimalbruch durch einen Dezimalbruch zu dividieren ist, so multipliziert man Dividend und Divisor mit 10, 100, 1000, je nachdem der Divisor 1, 2, 3 Dezimalstellen enthält; dann hat man einen Dezimalbruch durch eine ganze Zahl zu dividieren.

Man könnte in diesem Falle auch den beiden Dezimalbrüchen gleich viele Dezimalstellen geben, und sie dann mit Weglassung der Dezimalpunkte als ganze Zahlen durch einander dividieren. Denn dadurch, dass man in dem Dividend und Divisor, welche gleich viele Dezimalstellen haben, die Punkte weglässt, geschieht dasselbe, als wenn man beide mit 10, 100, 1000, . . . multipliziert hätte; dadurch aber wird der Quozient nicht geändert, und die Rechnung in eine Division ganzer Zahlen verwandelt. Z. B.

$$5{\cdot}696 : 0{\cdot}320 = 5{\cdot}696 \times 1000 : 0{\cdot}320 \times 1000$$
$$= 5696 : 320 = 17{\cdot}8.$$

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 17 und 18, b.

c) Anwendungen.

Zuerst Reduktionen der Münzen, Maße und Gewichte, dann angewandte Aufgaben.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 18—20, c.

---

§. 87. Zinsrechnungen.

Einfache Zinsrechnungen wurden schon im Zahlenraume bis 1000 (III. Abth. §. 71 und III. Rechenb. S. 50) vorgenommen; sie konnten dort nur in beschränktem Umfange und vorzugsweise als Kopfrechnungen geübt werden. Diese Übungen werden hier wiederholt und angemessen erweitert; sie lassen nun, nachdem wir die Dezimalrechnung kennen gelernt haben, eine viel einfachere und übersichtlichere Ausführung zu, durch welche zugleich der erste Grund für die allgemeinen Prozentrechnungen gelegt wird. Wir beschränken uns auch hier noch auf den praktisch wichtigsten Fall, wo der Zins gesucht wird, und behalten die vollständige Behandlung der Zinsrechnung einer späteren Stufe vor.

Die einfachste Aufgabe, in welcher die Anwendung der Dezimalrechnung auftritt, ist hier die Berechnung des Jahreszinses zu 1%.

Z. B. Wie viel jährlichen Zins geben 381 fl. Kapital à 1%?

100 fl. Kapital geben 1 fl. Zins,
1 „ „ gibt nur $\frac{1}{100}$ fl. Zins,
381 „ „ geben $\frac{381}{100}$ fl. $=$ 3·81 fl. Zins.

Die Schüler ersehen daraus, dass der Jahreszins zu 1% der 100ste Theil des Kapitals ist und daher gefunden wird, indem man den Dezimalpunkt um 2 Stellen nach links setzt.

Es sei nun der jährliche Zins von 761 fl. zu 6 % zu berechnen.

Im Kopfe:

700 fl. geben 7mal 6 fl. = 42 fl., 61 fl. geben 61mal 6 Kr. = 366 Kr. = 3 fl. 66 Kr.; 42 fl. und 3 fl. 66 Kr. sind 45 fl. 66 Kr.

Schriftlich:

a) 700 fl. geben 7mal 6 fl. = 42 fl.
50 „ „ $\frac{1}{2}$ von 6 fl. = 3 „
10 „ „ $\frac{1}{10}$ von 6 fl. = — „ 60 Kr.
1 „ gibt $\frac{1}{10}$ von 60 Kr. = — „ 6 „
761 fl. geben also . . . . . 45 fl. 66 Kr.

Oder:

b) 100 fl. geben 6 fl.
1 „ gibt $\frac{1}{100}$ von 6 fl.
761 „ geben also $\frac{1}{100}$ von 761mal 6 fl.
= $\frac{1}{100}$ v. 4566 fl. = 45·66 fl. = 45 fl. 66 Kr.

Oder:

c) 761 fl. geben à 1 % $\frac{1}{100}$ von 761 fl. = 7·61 fl.
à 6 % . . . 6mal 7·61 fl. = 45·66 „
= 45 fl. 66 Kr.

Die Lösung im Kopfe ist dieselbe, die schon auf den früheren Stufen geübt wurde.

Von den schriftlichen Lösungen beruht die Ausführung a) auf der Zerfällungsmethode; sie ist weitläufiger, enthält jedoch leichte und durchsichtige Schlüsse.

Der Lösung b) liegt das Normalverfahren der Dreisatzrechnung zu Grunde; sie läßt sich allgemein und mit Sicherheit, aber nicht immer bequem ausführen.

In der Ausführung c) wird zuerst der Zins à 1 % gesucht, indem man von dem Kapitale den 100sten Theil nimmt; aus dem Zins à 1 % wird dann der Zins à 6 % durch die Multiplikazion gefunden. Diese Art der Lösung ist im allgemeinen die einfachste und bequemste und soll weiterhin ganz besonders geübt werden.

Aufgaben, welche, wie die vorhergehende, verschiedenartige Auflösungen zulassen, sind sehr geistbildend. Wird eine solche Aufgabe von mehreren Schülern auf verschiedene Art ausgerechnet, so lasse man jedesmal auch beurtheilen, welche von den verschiedenen Verfahrungsweisen im gegebenen Falle die einfachste und kürzeste sei. So erlangen die Schüler die Fertigkeit, bei jeder vorkommenden Aufgabe sogleich zu entscheiden, welcher Weg am vortheilhaftesten zur Auflösung führt.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 21 und 22.

Zweiter Abschnitt.

Das Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

---

§. 88. Allgemeine Vorbemerkungen.

Eine Zahl, welche Einheiten einer bestimmten Art angibt, heißt eine benannte Zahl, im Gegensatze zu einer unbenannten oder reinen Zahl, welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt. 4 Gulden ist eine benannte, 4 eine unbenannte Zahl.

Eine benannte Zahl, welche nur Einheiten derselben Benennung angibt, heißt einnamig oder einfach benannt;

eine benannte Zahl dagegen, welche zwar Einheiten von derselben Art, aber von verschiedener Benennung ausdrückt, mehrnamig oder mehrfach benannt. 4 Gulden ist eine einnamige, 4 Gulden 30 Kreuzer eine mehrnamige Zahl; in der letzteren ist Gulden die höhere, Kreuzer die niedrigere Benennung.

Beim Rechnen mit mehrnamigen Zahlen tritt sehr häufig die Nothwendigkeit ein, Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigeren Benennung, oder umgekehrt Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung zu verwandeln. Ersteres nennt man das Resolvieren (Auflösen), letzteres das Reduzieren (Zurückführen). Die Zahl, welche anzeigt, wie viele Einheiten der niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt die Verwandlungszahl zwischen den beiden Benennungen.

Die Schüler sind auf allen früheren Stufen im Verwandeln der Münzen, Maße und Gewichte vielfältig geübt worden, auch haben sie schon einzelne Rechnungen mit mehrnamigen Zahlen ausgeführt. Alles das soll hier erweitert und im Zusammenhange vorgenommen werden.

Da die Vielfachen und Untertheilungen der neuen Maße und Gewichte nach dem Dezimalsystem gebildet sind, so gestaltet sich das Resolvieren und Reduzieren, überhaupt das Rechnen mit denselben, vollständig als Dezimalrechnen. Dasselbe gilt von unseren Münzen. Eine Ausnahme bilden nur die Zeit-, Bogen- und Zählmaße, da dieselben nicht nach dem Dezimalsystem eingetheilt sind.

Vor allem ist hier eine genaue Kenntnis der Maße, Gewichte und Münzen und der zwischen ihnen bestehenden Verwandlungszahlen erforderlich. Was hierüber den Schülern bisher gelegentlich beigebracht wurde, muß hier übersichtlich zusammengefaßt und dem Gedächtnisse derselben fest eingeprägt werden.

§. 89. Übersicht der Maße, Gewichte und Münzen.

a) Maße mit nichtdezimaler Eintheilung.

1. Zeitmaße.

1 Jahr	hat 12 Monate,	1 Tag	hat 24 Stunden,
1 Monat	„ 30 Tage,	1 Stunde	„ 60 Minuten,
1 Woche	„ 7 Tage,	1 Minute	„ 60 Sekunden.

In der Zinsrechnung wird gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen und daher das Jahr zu 360 Tagen angenommen; nach dem Kalender aber hat ein gemeines Jahr 365, ein Schaltjahr 366 Tage; ebenso haben die Monate eine ungleiche Anzahl von Tagen, und zwar:

Jänner	31	Tage	Juli	31	Tage
Februar . . .	28	„	August	31	„
(im Schaltjahre	29	„)			
März . . .	31	„	September . . .	30	„
April	30	„	Oktober . . .	31	„
Mai	31	„	November . . .	30	„
Juni	30	„	Dezember . . .	31	„

2. Bogen- und Winkelmaße.

Der Umfang eines Kreises wird in 360 gleiche Bogen, Grade, eingetheilt. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad (Winkelgrad) heißt. Sowohl bei den Bogen, als bei den Winkeln wird 1 Grad ($^{\circ}$) in 60 Minuten ($'$), 1 Minute in 60 Sekunden ($''$) eingetheilt.

3. Zählmaße.

1 Schock hat 60 Stück, 1 Dutzend 12 Stück.

1 Ballen Papier hat 10 Rieß, 1 Rieß 20 Buch.

1 Buch Schreibpapier hat 24 Bogen,

1 Buch Druckpapier hat 25 Bogen.

b) Die neuen metrischen Maße und Gewichte.

In dem metrischen Maß- und Gewichtssysteme, das zuerst in Frankreich eingeführt wurde, bildet die Grundlage für alle Maße und Gewichte das Meter, welches französische Gelehrte als den zehnmillionsten Theil der Länge eines Erdmeridian-Quadranten annahmen.

1. Längenmaße.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter.

Die Vielfachen und Untertheilungen nicht nur der Längen-, sondern auch der daraus abgeleiteten Flächen-, Körper- und Gewichtsmaße werden nach dem Dezimalsystem gebildet; alle Vielfachen sind 10fache, 100fache, 1000fache oder 10000fache, alle Untertheilungen 10tel, 100stel oder 1000stel der Grundeinheiten. Diese Vielfachen und Theile bekommen jedoch nicht, wie in den alten Systemen, besondere Eigennamen, sondern sie behalten den Namen der Grundeinheit, welchem zur näheren Bestimmung gewisse Wörter vorgesetzt werden, die man, damit sie für alle Völker gleich bleiben, aus der griechischen und lateinischen Sprache entlehnt hat.

Die Vielfachen werden durch Vorsetzung griechischer Zahlwörter bezeichnet, und zwar wird das 10fache der Einheit durch das vorgesetzte Wort Deka, das 100fache durch Hekto, das 1000fache durch Kilo und das 10000fache durch Myria ausgedrückt.

Die Untertheilungen bezeichnet man durch Vorsetzung lateinischer Zahlwörter, und zwar den 10ten Theil der Einheit durch Deci, den 100sten Theil durch Centi und den 1000sten Theil durch Milli.

Hiernach hat man für die metrischen Längenmaße:

10000	Meter	=	1 Myriameter,
1000	„	=	1 Kilometer,
100	„	=	1 Hektometer,
10	„	=	1 Dekameter,

1 „ = 1 Meter (Einheit),
$^1/_{10}$ „ = 1 Decimeter,
$^1/_{100}$ „ = 1 Centimeter,
$^1/_{1000}$ „ = 1 Millimeter.

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der Längenmaße enthält 10 Einheiten der nächstniedrigeren Maßgröße.

Diese Gliederung der Längenmaße kann man, um ihren innigen Zusammenhang mit unserem Zahlensysteme besser zu ersehen, auch so darstellen:

Vielfache				Einheit	Untertheilungen		
Myria	**Kilo**	**Hekto**	**Deka**	**Meter**	**Deci**	**Centi**	**Milli**
10000	1000	100	10	1	$^1/_{10}$	$^1/_{100}$	$^1/_{1000}$

Von diesen Maßgliedern sind jedoch das Hektometer und das Dekameter, da sie für das praktische Leben entbehrlich erscheinen, in die österreichische Maß- und Gewichtsordnung nicht aufgenommen worden; für diese besteht daher folgende Eintheilung der Längenmaße:

1 Myriameter (^{Mm}) = 10 Kilometer (^{Km}) = 10000 Meter (^{m}),
1 Kilometer = 1000 Meter.
1 Meter = 10 Decimeter (^{dm}) = 100 Centim. (^{cm}) = 1000 Millim. (^{mm}),
1 Decimeter = 10 Centimeter = 100 Millimeter,
1 Centimeter = 10 Millimeter.

2. Flächenmaße.

Die allgemeinen Flächenmaße sind die Quadrate der Längenmaße.

Ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein Quadratmeter ($\square^m$). Theilt man jede Seite eines Quadratmeters in 10 gleiche Theile und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch gerade Linien, so entstehen 100 Quadrate, deren jedes ein Decimeter zur Seite hat, also ein Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) ist; 1 $\square^m$ hat demnach 100 $\square^{dm}$. Verfährt man auf ähnliche Art mit dem Quadratdecimeter, so erhält man 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$); und ebenso ergibt sich 1 $\square^{cm}$ = 100 $\square^{mm}$, ferner 1 $\square^{Mm}$ = 100 $\square^{Km}$.

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der **Flächenmaße** hat also 100 Einheiten der nächstniedrigeren Maßgröße.

Für die neuen österreichischen Flächenmaße, welche das □ Hektometer und das □ Dekameter nicht enthalten, hat man demnach:

$$1 \square^{Mm} = 100 \square^{Km} = 100000000 \square^{m},$$
$$1 \square^{Km} = 1000000 \square^{m}.$$
$$1 \square^{m} = 100 \square^{dm} = 10000 \square^{cm} = 1000000 \square^{mm},$$
$$1 \square^{dm} = 100 \square^{cm} = 10000 \square^{mm},$$
$$1 \square^{cm} = 100 \square^{mm}.$$

Die Einheit des **Bodenflächenmaßes** bildet das **Ar** (a), d. i. ein Quadrat, dessen Seite 10 Meter lang ist. Vielfaches: das **Hektar** (Ha) = 100 Ar. Es ist demnach:

$$1 \text{ Hektar} = 100 \text{ Ar} = 10000 \square^{m},$$
$$1 \text{ Ar} = 100 \square^{m}.$$

3. **Körpermaße.**

Die **allgemeinen Körpermaße** sind die **Würfel** der Längenmaße.

Ein Würfel, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein **Kubikmeter** (Kb^{m}). Jede Fläche des Kubikmeters ist ein Quadratmeter und enthält 100 Quadratdecimeter. Denkt man sich das Kubikmeter hohl, die Grundfläche desselben in 100 $\square^{dm}$, und die Höhe in 10^{dm} getheilt, so kann man zunächst auf der Grundfläche 100 Würfel auflegen, deren jeder 1^{dm} zur Seite hat und daher ein **Kubikdecimeter** (Kb^{dm}) heißt. Diese 100 Kubikdecimeter bilden eine Schichte von 1^{dm} Höhe. Da aber das Kubikmeter 10^{dm} hoch ist, so fasst es 10 solche Schichten von je 100 Kubikdecimeter, daher im ganzen 1000 Kubikdecimeter; also $1\ Kb^{m} = 1000\ Kb^{dm}$. Ebenso folgt, dass $1\ Kb^{dm} = 1000\ Kb^{cm}$, $1\ Kb^{cm} = 1000\ Kb^{mm}$, dass ferner $1\ Kb^{Mm} = 1000\ Kb^{Km}$ ist.

Jede Maßgröße aus der Stufenleiter der **allgemeinen Körpermaße** enthält also 1000 Einheiten der nächstniedrigeren Maßgröße.

In der österreichischen Maß- und Gewichtsordnung, welche das Kubikhektometer und Kubikdekameter nicht enthält, ist:

$$1\ Kb^{Mm} = 1000\ Kb^{Km} = 1000000000000\ Kb^{m},$$
$$1\ Kb^{Km} = 1000000000\ Kb^{m}.$$

$$1\ Kb^{m} = 1000\ Kb^{dm} = 1000000\ Kb^{cm} = 1000000000\ Kb^{mm},$$
$$1\ Kb^{dm} = 1000\ Kb^{cm} = 1000000\ Kb^{mm},$$
$$1\ Kb^{cm} = 1000\ Kb^{mm}.$$

Die Grundeinheit des Hohlmaßes bildet ein Maßglied der allgemeinen Körpermaße selbst, das Kubikdecimeter, unter dem besondern Namen Liter (l). Das Liter ist also gleich dem Inhalte eines Würfels, dessen Seitenlänge ein Decimeter ist. Vielfaches: Das Hektoliter (Hl) = 100 Liter; Untertheilungen: das Deciliter (dl) = $\frac{1}{10}$ Liter, das Centiliter (cl) = $\frac{1}{100}$ Liter. Es ist demnach:

1 Hektoliter = 100 Liter = 1000 Deciliter = 10000 Centiliter,
1 Liter = 10 Deciliter = 100 Centiliter,
1 Deciliter = 10 Centiliter.

Da das Liter unmittelbar aus dem Körpermaße abgeleitet ist, so ist es sehr einfach, das Hohlmaß in Körpermaß, und umgekehrt, zu verwandeln. Hat man z. B. den Kubikinhalt eines Gefäßes in Kubikdecimeter berechnet, so drückt die Anzahl derselben zugleich den Inhalt in Liter aus.

4. Gewichte.

Die Gewichte werden aus den Körpermaßen hergeleitet. Die Grundeinheit der Gewichte ist in dem französischen metrischen Systeme das Gramm (g), d. i. das Gewicht eines Kubikcentimeters destillierten Wassers im Zustande der größten Dichtigkeit. Da jedoch eine so kleine Wassermenge, wie sie ein Kubikcentimeter fasst, nicht leicht genau gemessen und gewogen werden kann, füllte man, um das Urgewicht zu bestimmen, das 1000fache dieses Rauminhaltes d. i. ein Kubikdecimeter mit reinem Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit, welche bei 4 Grad Wärme des 100theiligen Thermometers vorhanden ist, und wog dasselbe im luftleeren Raume ab. Das so gefundene Gewicht war das 1000fache eines Gramms, also ein Kilogramm.

Die österreichische Maß- und Gewichtsordnung nimmt das Kilogramm (Kg) selbst, also das Gewicht eines Kubikdecimeters Wasser, als Einheit der Gewichte an, legt jedoch bei der Bildung der Benennungen das Gramm zu Grunde.

Vielfaches: die Tonne = 1000 Kilogramm.
Untertheilungen: das Dekagramm (Dg) = $^1/_{100}$ Kilogramm,
das Gramm = $^1/_{1000}$ Kilogramm,
das Decigramm (dg) = $^1/_{10}$ Gramm,
das Centigramm (cg) = $^1/_{100}$ Gramm,
das Milligramm (mg) = $^1/_{1000}$ Gramm.

Es ist demnach:

1 Kilogramm = 100 Dekagr. = 1000 Gramm,
1 Dekagr. = 10 Gramm.
1 Gramm = 10 Decigr. = 100 Centigr. = 1000 Milligr.,
1 Decigr. = 10 Centigr. = 100 Milligr.,
1 Centigr. = 10 Milligr.

Aus allen diesen Bestimmungen geht hervor, dass die neue österreichische Maß- und Gewichtsordnung, welche aus der Grundeinheit des Längenmaßes das Flächen- und Körpermaß, und aus letzterem das Gewicht herleitet, ein in allen seinen Theilen nach einfachen Verhältnissen zusammenhängendes und in sich selbst abgeschlossenes Ganzes bildet. Vier Grundbenennungen — Meter, Ar, Liter, Gramm — und sieben Zahlwörter als Vorsatzwörter genügen, um durch entsprechende Zusammensetzungen alle Maßglieder des metrischen Systems unzweideutig zu bestimmen.

c) Münzen.

1. In Österreich-Ungarn rechnet man in österreichischer Währung, wornach aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt werden. 1 Gulden ö. W. hat 100 Kreuzer.

Vor dem Jahre 1858 rechnete man in Konvenzionsmünze. 1 Gulden K. M. hatte 60 Kreuzer à 4 Pfennige. 100 fl. K. M. = 105 fl. ö. W.

2. Geprägte Münzen:

Aus Gold: Achtguldenstücke, Vierguldenstücke und Dukaten. Diese dienen nur als Handelsmünzen und haben keinen festgesetzten Wert. Bei den k. k. Kassen werden die Achtguldenstücke zu 8 fl. 10 Kr. in Silber, die Vierguldenstücke zu 4 fl. 5 Kr. in Silber angenommen; darnach gilt ein Dukaten 4 fl. 80 Kr. in Silber.

Aus Silber: $1\frac{1}{2}$-, 1- und $\frac{1}{4}$-Guldenstücke.

Als Silber-Scheidemünze werden Stücke zu 20, 10 und 5 Kreuzer geprägt.

Aus Kupfer: Stücke zu 4, 1 und $\frac{1}{2}$ Kreuzer.

3. Papiergeld:

Banknoten zu 10, 100 und 1000 Gulden und Staatsnoten zu 1, 5 und 50 Gulden.

Die Schüler finden die Übersicht der Maße, Gewichte und Münzen im Anhange zu dem IV. Rechenbuche S. 79—84.

---

§. 90. Verwandeln höherer Einheiten in niedrigere. (Resolvieren.)

Wir behandeln hier, wie auch in den folgenden Rechnungen, überall zuerst die nichtdezimalen Maße und entwickeln an denselben das allgemeine Verfahren, dann erst lassen wir die Maße, Gewichte und Münzen mit dezimaler Eintheilung folgen, für welche das allgemeine Verfahren eine kürzere und ganz einfache Form annimmt.

Man lasse die Schüler zuerst im Kopfe höhere Benennungen in niedrigere verwandeln. Sehr gut ist es, wenn diese Verwandlungen anfänglich in Reihenfolgen vorgenommen werden, z. B.

1 Jahr = 12 Monate,
2 Jahre = 2mal 12 Mon. = 24 Mon.
3 „ = 3mal 12 „ = 36 „
u. s. w.

Dadurch werden die Schüler auf den Begriff des Resolvierens geleitet und überzeugen sich, dass dabei die Multiplikazion angewendet werden müße.

Dieselben Schlüsse können auch beim schriftlichen Resolvieren gebildet werden. Häufig ist es jedoch für das schriftliche Rechnen vortheilhafter, die Schlussfolgerungen in einer andern Fassung zu bilden. Z. B. Wie viel Kr. sind 38 fl.? Man kann schließen: 1 fl. hat 100 Kr.; 38 fl. sind daher 38mal 100 Kr. Man könnte aber auch so folgern: 1 fl. ist 100mal 1 Kr.; 38 fl. sind also 100mal 38 Kr. In beiden Fällen erhält man 3800 Kr. Dort hat man 100 Kr. mit 38, hier 38 Kr. mit 100 multipliziert. Die erste Schlussweise ist natürlicher und beim Kopfrechnen vorzugsweise anzuwenden; die zweite gestattet dagegen eine bequemere schriftliche Ausrechnung. Wir werden weiterhin von beiden Arten der angedeuteten Schlüsse Gebrauch machen. Bei den hier vorzunehmenden Übungen lasse der Lehrer

a) eine einnamige Zahl in Einheiten einer niedrigeren Benennung,

b) eine mehrnamige Zahl in die niedrigste darin vorkommende Benennung,

c) die Dezimalen einer Benennung in Ganze der niedrigeren Benennungen auflösen.

a) Wie viel Stunden sind 8 Tage?

$$\begin{array}{r} 8 \times \underline{24} \\ 192 \end{array}$$ Stunden

1 Tag hat 24 Stunden, 8 Tage sind 8mal 24 Stunden, d. i. 192 Stunden.

b) Wie viel Monate sind 9 Jahre 8 Monate?

$$9 \times 12 = 108 \text{ Mon.};\quad +8 \text{ „}\quad = 116 \text{ Mon.}$$

oder: 9 J. 8 Mon.
116 M.

Bei der zweiten Berechnungsweise werden, was in der Regel geschehen soll, die gegebenen niedrigeren Einheiten zu den gleichnamigen Einheiten, welche durch die Auflösung der höheren Benennung herauskommen, sogleich während der Multiplikazion selbst im Kopfe dazugezählt.

c) Verwandle 5·45 Tage in Tage, Stunden und Minuten.

5·45 Tage
× 24
180
90
10·80 Stund.
× 60
48 Min.

5·45 Tage = 5 T. 10 St. 48 Min.

Hier verwandelt man zuerst 0·45 Tage in Stunden, man erhält nebst 10 ganzen Stunden noch 0·8 Stunden; die letzteren werden weiter in Minuten verwandelt.

Ganz einfach gestaltet sich das Resolvieren einer mehrnamigen Zahl in die niedrigste Benennung, wenn die Benennungen dem Dezimalsysteme angehören. Z. B.

Verwandle 5^{m} 3^{dm} 8^{cm} in Centimeter.

5^{m} sind 50^{dm} und 3^{dm} sind 53^{dm}; 53^{dm} sind 530^{cm}, und 8^{cm} sind 538^{cm}; also

$$5^{m}\ 3^{dm}\ 8^{cm} = 538^{cm}.$$

Verwandle 4 fl. 9 Kr. in Kreuzer.

4 fl. sind 400 Kr., und 9 Kr. sind 409 Kr.; also

4 fl. 9 Kr. = 409 Kr.

Wie viel Kub.^{cm} sind 8 Kub.^{m} 237 Kub.^{dm} 49 Kub.^{cm}?

8 Kub.^{m} = 8000 Kub.^{dm}, und 237 Kub.^{dm} sind

8237 Kub.^{dm}; 8237 Kub.^{dm} = 8237000 Kub.^{cm} und 49 Kub.^{cm} sind 8237049 Kub.^{cm}; also

8 Kub.^{m} 237 Kub.^{dm} 49 Kub.^{cm} = 8237049 Kub.^{cm}.

Die Schüler ersehen daraus, dass man die Einheiten der verschiedenen dezimalen Benennungen nur in ihrer natürlichen Reihenfolge neben einander zu stellen, die etwa fehlenden Ziffern durch Nullen zu ersetzen und der dadurch gebildeten Zahl die niedrigste Benennung zu geben braucht.

Eben so einfach ist für die dezimalen Maße, Gewichte und Münzen das Verfahren, die Dezimalen einer Benennung in Ganze der niedrigeren Benennungen zu verwandeln. Z. B.

Verwandle 0·378^{m} in Decimeter, Centim. und Millim.

$^{3}/_{10}{}^{m}$ sind 3^{dm}, $^{7}/_{100}{}^{m}$ sind 7^{cm}, $^{8}/_{1000}{}^{m}$ sind 8^{mm}; also

0·378^{m} = 3^{dm} 7^{cm} 8^{mm}.

Verwandle 3·986 Hektoliter in eine mehrnamige Zahl.

$^{98}/_{100}$ Hektol. sind 98 Liter; $^{6}/_{1000}$ Hektol. sind $^{1}/_{10}$ von $^{6}/_{100}$ Hektol., also $^{1}/_{10}$ von 6 Liter, d. i. 6 Deciliter; folglich

3·986 Hektoliter = 3 Hektol. 98 Liter 6 Decil.

Aus diesen und ähnlichen Beispielen ersehen die Schüler, dass hier immer eine, zwei oder drei Dezimalziffern nach rechts die Ganzen der nächstniedrigeren Benennung bilden, je nachdem die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000 ist.

Die Aufgaben dieser letzteren Art, welche eigentlich das Lesen der in Dezimalbruchform geschriebenen Münzen und neuen Maße und Gewichte enthalten, sind bis zur größten Gewandtheit zu üben, anfangs mit Beifügung der Schlüsse, später mit unmittelbarer Angabe des Resultates.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 23 und 24.

§. 91. Verwandeln niedrigerer Einheiten in höhere. (Reduzieren.)

Auch hier läſst der Lehrer zunächst im Kopfe niedrigere Benennungen in höhere verwandeln, und dann erst das schriftliche Reduzieren eintreten.

Schon bei den mündlichen Übungen überzeugen sich die Schüler, daſs man beim Reduzieren die Zahl der niedrigeren Einheiten durch die entsprechende Verwandlungszahl dividieren müße, und daſs der Rest, wenn ein solcher bei der Division übrig bleibt, Einheiten derjenigen Benennung bedeutet, welche man reduziert hat.

Beim Reduzieren kommen zwei Hauptfälle vor; es werden

a) Einheiten einer niedrigeren Benennung in eine mehrnamige Zahl, worin auch höhere Benennungen vorkommen, oder es wird

b) eine mehrnamige Zahl in einen Dezimalbruch der höchsten Benennung verwandelt.

Man lasse z. B. 897 Bogen Schreibpapier in Buch und Bogen verwandeln.

1 Buch hat 24 Bogen, 1 Bogen ist also der 24ste Theil von 1 Buch; 897 Bogen sind daher der 24ste Theil von 897 Buch.

897 : 24 = 37 Buch 9 Bogen.
177
  9 Bogen.

Es seien ferner 7 Tage 11 Stunden 24 Minuten in einen Dezimalbruch von Tagen zu verwandeln.

24 (Min.) : 60 = 0·4 Stunden,
11·4 (Stund.) : 24 = 0·475 Tage;
also 7 Tage 11 Stunden 24 Minuten = 7·475 Tage.

Sehr einfach ist die Verwandlung niedrigerer Einheiten in Ganze der höheren Benennungen, wenn diese nach dem Dezimalsystem eingetheilt sind, indem sie mittels der Division durch 10, 100 oder 1000, also durch Abschneiden von einer, zwei oder drei niedrigsten Stellen erfolgt; jede solche Abtheilung bildet eine Benennung für sich. z. B.

$7368^{mm} = 7^{m}\ 3^{dm}\ 6^{cm}\ 8^{mm}$;
1906 Liter = 19 Hektoliter 6 Liter;
73255 Kr. = 732 fl. 55 Kr.;
3125468 Kub.^{cm} = 3 Kub.^{m} 125 Kub.^{dm} 468 Kub.^{cm}

Eben so leicht ist in diesem Falle das Verwandeln einer mehrnamigen Zahl in einen Dezimalbruch der höchsten Benennung, indem ihre Bestandtheile in der durch das System gebotenen Aufeinanderfolge unmittelbar die verlangten Dezimalen geben; nur müßen dabei die etwa fehlenden Benennungen oder Ziffern durch Nullen ersetzt werden. Z. B.

Verwandle $4^{m}\ 3^{dm}\ 7^{cm}$ in einen Meter-Dezimalbruch.

3^{dm} sind $^{3}/_{10}{}^{m}$, 7^{cm} sind $^{7}/_{100}{}^{m}$; folglich
$4^{m}\ 3^{dm}\ 7^{cm} = 4{\cdot}37^{m}$.

Wie viel Hektar sind 9 Hektar 7 Ar $36\square^{m}$?

7 Ar sind $^{7}/_{100}$ Hektar, $36\square^{m}$ sind $^{36}/_{10000}$ Hektar; also
9 Hektar 7 Ar $36\square^{m} = 9{\cdot}0736$ Hektar.

Wie viel Kilogramm sind 13 Kilogramm 38 Dekagramm 4 Gramm?

38 Dekagr. sind $^{38}/_{100}$ Kilogr., 4 Gr. sind $^{4}/_{1000}$ Kilogr.; folglich
13 Kilogr. 38 Dekagr. 4 Gr. = $13{\cdot}384$ Kilogr.

Die letzten Aufgaben sind zugleich Übungen für das Schreiben unserer Rechnungsmünzen, sowie der neuen Maße und Gewichte in Form von Dezimalbrüchen; sie sind als solche für das Rechnen mit mehrnamigen

Zahlen von besonderer Wichtigkeit und müßen darum sehr tüchtig durchgearbeitet werden.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 25 u. 26.

§. 92. Addieren mehrnamiger Zahlen.

Zuerst Kopfrechnen in Reihenfolgen und außer der Reihe, z. B.

5 fl. 64 Kr. + 58 Kr. = 6 fl. 22 Kr.,
6 „ 22 „ + 58 „ = 6 „ 80 „
6 „ 80 „ + 58 „ = 7 „ 38 „
u. s. w.

8 Hektar 23 Ar + 2 Hektar 35 Ar = 10 Hektar 58 Ar,
10 „ 58 „ + 2 „ 35 „ = 12 „ 93 „
u. s. w.

Da nur gleichnamige Bestandtheile zusammengezählt werden können, ist es beim schriftlichen Addieren am zweckmäßigsten, die gleichnamigen Zahlen sogleich im Ansatze unter einander zu schreiben. z. B.

37 Rieß	19 Buch		19 Buch + 14 Buch = 33 Buch
21 „	14 „		= 1 Rieß 13 Buch.
59 Rieß	13 Buch		

Man addiert also zuerst die Zahlen der niedrigsten Benennung und verwandelt ihre Summe in die nächsthöhere; bleibt ein Rest, so schreibt man ihn unter die addierte Reihe, die erhaltene Zahl der höheren Benennung aber addiert man zu den Zahlen dieser höheren Benennung; u. s. w.

Die Redukzionen sollen dabei in der Regel im Kopfe ausgeführt werden.

Die Addizion solcher mehrnamiger Zahlen, die nach dem Dezimalsysteme gebildet sind, geschieht am einfachsten, indem man die mehrnamigen Zahlen auf dieselbe höchste oder niedrigste Benennung bringt und die dadurch erhaltenen einnamigen Zahlen addiert. Z. B.

$7^{m}\ 5^{dm}\ 5^{cm}$	oder 755^{cm}	oder $7{\cdot}55^{m}$
$6^{m}\ 7^{dm}\ 2^{cm}$	672^{cm}	$6{\cdot}72^{m}$
$8^{m}\ 9^{dm}\ 7^{cm}$	897^{cm}	$8{\cdot}97^{m}$
$23^{m}\ 2^{dm}\ 4^{cm}$	2324^{cm}	$23{\cdot}24^{m}$
	$= 23^{m}\ 2^{dm}\ 4^{cm}$	$= 23^{m}\ 2^{dm}\ 4^{cm}$

Am vortheilhaftesten ist es, die mehrnamigen Zahlen als Dezimalbrüche der höchsten Benennung darzustellen und sie als solche zu addieren.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 26—29.

---

§. 93. Subtrahieren mehrnamiger Zahlen.

Der Stufengang entspricht demjenigen beim Addieren mehrnamiger Zahlen. Zuerst Kopfrechnen, dann schriftliches Rechnen; letzteres zuerst mit mehrnamigen Zahlen, die keine dezimale Eintheilung haben, dann mit solchen, welche dem Dezimalsystem angehören.

Aufgaben, bei denen keine Zahl des Subtrahends größer ist als die gleichnamige Zahl des Minuends, bieten dem Schüler keine Schwierigkeit dar.

Nach einigen Aufgaben dieser Art gehe der Lehrer zu Beispielen über, bei denen sich eine Zahl des Subtrahends von der gleichnamigen Zahl des Minuends nicht subtrahieren läßt. Z. B.

13 Ball. 4 Rieß 18 Buch	oder			13 Ball. 14 Rieß 18 Buch
5 „ 7 „ 9 „				6 „ 7 „ 9 „
7 Ball. 7 Rieß 9 Buch				7 Ball. 7 Rieß 9 Buch

Damit man hier die Rieß subtrahieren könne, zählt man, wie in der zweiten Hilfsrechnung angedeutet wird, zu den Rieß im Minuend so viel Einheiten dazu, als deren eine nächsthöhere Einheit enthält, also 10 Rieß, und subtrahiert dann 7 Rieß von 14 Rieß; damit aber der Unterschied nicht geändert werde, muß man auch die Zahl des Subtrahends in der nächsthöheren Benennung um 1 Einheit vermehren.

Die Hilfsrechnung wird übrigens nicht schriftlich ausgeführt, indem die erforderlichen Veränderungen nur in Gedanken vollzogen werden.

Bei mehrnamigen Zahlen, welche nach dem Dezimalsysteme eingetheilt sind, wird die Subtrakzion am bequemsten ausgeführt, indem man dieselben als Dezimalbrüche derselben Benennung darstellt und als solche subtrahiert.

$26^{m}\ 5^{dm}\ 8^{cm}\ 2^{mm}$	oder 26582^{mm}	oder $26{\cdot}582^{m}$
$18\ \ 6\ \ 4\ \ 7$	18647	$18{\cdot}647$
$7^{m}\ 9^{dm}\ 3^{cm}\ 5^{mm}$	7935^{mm}	$7{\cdot}935^{m}$

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 30—32.

---

§. 94. Die Zeitrechnung.

Die Aufgaben 34 bis 38 Seite 29 des IV. Rechenbuches sowie die Aufgaben 36 bis 40 Seite 32 beziehen sich auf die Zeitrechnung. Ihre Lösung bietet dem Anfänger mehrfache Schwierigkeit. Bevor wir daher die hieher gehörigen Aufgaben näher besprechen, wird es nöthig sein, einige Bemerkungen über unsere Zeitrechnung vorauszuschicken.

Die Zeit wird nach Jahren, Monaten und Tagen bestimmt. Diese Maße hat uns die Natur selbst in der Bewegung der für uns wichtigsten Weltkörper an die Hand gegeben. Ein Jahr ist nämlich die Zeit, in welcher unsere Erde ihre Bahn um die Sonne durchläuft; ein Tag die Zeit, in welcher sich die Erde um ihre Achse dreht; und ein Monat der Zeitraum, welcher ungefähr mit der Zeit des Umlaufes des Mondes um die Erde übereinstimmt.

Die Christen zählen die Jahre von der Geburt Jesu Christi an. Von dieser Zeit angefangen, schrieb man zunächst das Jahr 1, nach Ablauf dieses ersten Jahres das Jahr 2, u. s. w. Das Jahr, welches durch die Jahreszahl bezeichnet wird, ist daher erst im Laufe begriffen, und noch nicht verflossen. Wenn wir z. B. das Jahr 1874 schreiben, so sind seit der Geburt Christi erst 1873 Jahre vollständig verflossen.

Dieses ist auch der Fall, wenn wir von Monaten und Tagen reden. Wenn wir z. B. den 15. April schreiben, so bezeichnen wir zwar dadurch den 15ten Tag des 4ten Monates; allein es ist weder der 4te Monat dieses Jahres, noch der 15te Tag jenes Monates abgelaufen; es sind von diesem Jahre erst 3 Monate und 14 Tage verflossen. Am 27. Juli 1873 waren 1872 Jahre 6 Monate 26 Tage nach Chr. G. verflossen.

Der Tag hat 24 Stunden, welche von Mitternacht an gerechnet werden. Um 1 Uhr morgens ist die erste, um 5 Uhr morgens die 5te, um 10 Uhr vormittags die 10te, um 12 Uhr mittags die 12te, um 1 Uhr nachmittags die 13te, um 8 Uhr abends die 20ste, um 11 Uhr nachts die 23ste Stunde des Tages verflossen. Wenn wir daher schreiben: 1874 den 4. Februar 3 Uhr nachmittags, so sind bis zu diesem Augenblicke von Chr. G. an verflossen: 1873 Jahre 1 Monat 3 Tage 15 Stunden.

Die Zeit (Jahreszahl, Monat und Tag), wann etwas geschieht, oder geschehen ist, pflegt man das Datum zu nennen.

Nach den vorhergehenden Erklärungen kann jedes Datum in verflossene Zeit verwandelt werden, indem man die Jahreszahl, die Ordnungszahl des Monats und Tages je um 1 vermindert.

Umgekehrt kann man, wenn für eine Begebenheit der seit Chr. G. verflossene Zeitraum als eine durch Jahre, Monate, Tage, . . . ausgedrückte benannte Zahl gegeben ist, daraus ohne Schwierigkeit das Datum dieser Begebenheit bestimmen. Z. B.

Als eine gewisse Begebenheit eintrat, waren 1864 Jahre 7 Monate 20 Tage seit Chr. G. verflossen; wann fand diese Begebenheit statt? — Als 1864 Jahre nach Chr. G. verflossen waren, schrieb man 1865; nach Ablauf von 7 Monaten war man im 8ten Monate, also im August; und nach Verlauf von 20 Tagen in diesem Monate schrieb man den 21sten. Die Begebenheit fand also statt im Jahre 1865 am 21sten August.

Welches Datum schrieb man 1873 Jahre 2 Monate 8 Tage 9 Stunden nach Chr. G.? — 1873 Jahre nach Chr. G. schrieb man die Jahreszahl 1874; als von diesem Jahre 2 Monate verflossen waren, befand man sich im dritten Monate, also im März; mit dem Verlauf von 8 Tagen im März begann der 9te März. Man schrieb also 1874 den 9ten März 9 Uhr vormittags.

Bei den Aufgaben über die Zeitrechnung ist auch noch der Umstand, dass nicht alle Monate gleich viele Tage haben, und dass einige Jahre gemeine, andere Schaltjahre sind, gehörig zu beachten. Ein gemeines Jahr wird zu 365 Tagen gerechnet. Die wirkliche Zeit des Umlaufes der Erde um die Sonne beträgt aber 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Sekunden. Wenn daher ein Jahr zu 365 Tagen angenommen wird, so begeht man jährlich einen Fehler von 5 Stunden 48 Minuten 48 Sekunden, also von beinahe 6 Stunden, folglich in 4 Jahren ungefähr einen Fehler von 24 Stunden oder von einem ganzen Tage. Um dieses wieder auszugleichen, rechnet man jedes vierte Jahr zu 366 Tagen, und nennt ein solches Jahr ein Schaltjahr. Den Schalttag fügt man dem Monate Februar ein. Um zu erfahren, ob ein Jahr ein gemeines oder ein Schaltjahr ist, untersuche man, ob die Jahreszahl durch 4 ohne Rest dividiert werden könne; ist dieses der Fall, so ist das Jahr ein Schaltjahr; bleibt ein Rest, so ist dasselbe ein gemeines Jahr. Die Jahre 1876, 1880, 1884 werden Schaltjahre sein. Wenn man übrigens jedes vierte Jahr als ein Schaltjahr ansieht, so wird zu viel eingeschaltet, da der jährliche Überschuss nicht ganze 6 Stunden beträgt. Um auch diesen Fehler möglichst auszugleichen, werden alle 400 Jahre 3 Jahre, welche nach der gewöhnlichen Berechnung Schaltjahre sein sollten, als gemeine Jahre angenommen. Man hat dazu die Jahre bestimmt, mit welchen die Jahrhunderte endigen. So sollten die Jahre 1700, 1800, 1900 eigentlich Schaltjahre sein; sie werden aber als gemeine Jahre angenommen.

Bei der Zeitrechnung kommen dreierlei Hauptaufgaben vor; es ist entweder das Ende eines Zeitraumes, oder die Dauer, oder der Anfang desselben zu berechnen.

a. Das Ende eines Zeitraumes wird aus dem Anfange und der Dauer desselben berechnet, indem man zur Zeit des Anfanges die Dauer des Zeitraumes addiert.

Man kann die Rechnung auch dadurch ausführen, dass man, ohne die verflossene Zeit zu suchen, sogleich das Anfangsdatum der Reihe nach um die Jahre, Monate, Tage, ... der Dauer des Zeitraumes vermehrt. Z. B.

Ein Mann, der am 5. Jänner 1829 geboren wurde, starb in einem Alter von 35 Jahren 6 Monaten und 12 Tagen; an welchem Tage war dieses?

Erstes Verfahren:

1828	J.	—	M.	4	T.
35	„	6	„	12	„
1863	J.	6	M.	16	T.

Am 5. Jänner 1829, als dieser Mann geboren wurde, waren von Chr. G. an 1828 Jahre und 4 Tage verflossen. Als er starb, war mehr Zeit verflossen, und zwar um so viel mehr, als das Alter des Verstorbenen beträgt, man muß also

noch dieses zu 1828 Jahren 4 Tagen addieren. Man bekommt dadurch 1863 Jahre 6 Monate und 16 Tage als die bei seinem Tode nach Chr. G. verflossene Zeit; somit starb er am 17. Juli 1864.

Zweites Verfahren:

35 Jahre nach dem 5. Jänner 1829 war der 5. Jänner 1864,
6 Mon. „ „ 5. Jänner 1864 „ „ 5. Juli 1864,
12 Tage „ „ 5. Juli 1864 „ „ 17. Juli 1864.

Dieses zweite Verfahren ist einfacher und eignet sich besonders für das Kopfrechnen, während das erste Verfahren meistens beim Zifferrechnen angewendet wird.

Aufgabe 37 Seite 29 im IV. Rechenbuche:

Kaiser Franz I. war am 12. Februar 1768 geboren, und starb in einem Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann starb er?

1767	J.	1	M.	11	T.
67	„	—	„	18	„
1834	J.	1	M.	29	T.
1834	J.	2	M.	1	T.

Man setzt auch hier die Zahl der Jahre, Monate und Tage an, welche bei der Geburt verflossen waren, und addiert dazu das Alter dieses gerechten Monarchen; die Summe gibt uns die Zeit an, welche bei dessen Tode verflossen ist, und welche hierauf so zu übertragen ist, wie man das Datum gewöhnlich schreibt. Hier kommen 29 Tage heraus; diese kann man nicht eher in Rechnung ziehen, bis man weiß, welchem Monate sie angehören, da die Monate verschiedene Dauer haben. Bei der Addizion der Monate erhält man 1 Monat; jene 29 Tage sind also nach Verlauf von 1 Monat eingetreten, also gehören sie dem Februar an. Da aber dieser Monat bald 28 bald 29 Tage hat, so muß man noch die Jahre addieren, um zu sehen, ob man es mit einem gemeinen oder mit einem

Schaltjahre zu thun hat; man bekommt 1834 Jahre; Kaiser Franz I. starb also im Jahre 1835, dieses war ein gemeines Jahr und hatte im Monate Februar 28 Tage; wir zählen also von obigen 29 Tagen 28 Tage zu einem Monate, wornach wir 2 Monate haben, den übrigbleibenden Tag aber schreiben wir unter die Tage. Als Kaiser Franz I. starb, waren also 1834 Jahre 2 Monate 1 Tag seit Chr. G. verflossen; somit starb er im Jahre 1835 am 2. März.

Kürzer stellt sich die Lösung dieser Aufgabe nach dem zweiten oben angeführten Verfahren heraus:

67 Jahre nach dem 12. Februar 1768 war der 12. Februar 1835,
18 Tage „ „ 12. Februar 1835 „ „ 2. März 1835.

b. Um die Dauer eines Zeitraumes zu erhalten, muß man die am Anfang desselben verflossene Zeit von der am Ende verflossenen Zeit subtrahieren. Man kann übrigens auch vom Anfangsdatum schrittweise zum Datum des Endes übergehend, nach der Reihe die Jahre, Monate und Tage der Zeitdauer bestimmen. Z. B.

Jemand war am 2. April 1787 geboren, und starb am 3. Oktober 1865; wie alt ist er geworden?

Hier ist eigentlich die Frage: wie viel Jahre, Monate und Tage liegen zwischen dem 2. April 1787 und dem 3. Oktober 1865?

1864	J.	9	M.	2	T.
1786	„	3	„	1	„
78	J.	6	M.	1	T.

Am 3. Oktober 1865 waren seit Chr. G. 1864 Jahre 9 Monate 2 Tage verflossen, am 2. April 1787 aber 1786 Jahre 3 Monate 1 Tag. So viel Zeit also am ersten Tage mehr verflossen war als am letzten, so alt war der Verstorbene; man muß daher die zweite Zahl von der ersten abziehen; der Rest 78 Jahre 6 Monate 1 Tag zeigt die Dauer des Lebens jener Person an.

Zweites Verfahren:

Vom 2. April 1787	bis	2. April. 1865	sind	78 Jahre,
„ 2. April 1865	„	2. Oktob. 1865	„	6 Mon.,
„ 2. Okt. 1865	„	3. Oktob. 1865	ist	1 Tag,

also gesuchte Lebensdauer = 78 Jahre 6 Mon. 1 Tag.

c. Um den Anfang eines Zeitraumes zu finden, wird die Zeitdauer von dem Ende desselben subtrahiert. Man kann auch von Datum zu Datum zurückgehend, der Reihe nach die Tage, Monate und Jahre des Zeitraumes von dem Datum des Endes in Abrechnung bringen. Z. B.

Aufgabe 37 Seite 32 im IV. Rechenbuche.

Unser Kaiser Franz Josef I. trat am 2. Dezember 1848 die Regierung an und war damals 18 Jahre 3 Monate 14 Tage alt; wann wurde er geboren?

Regierungsantritt:	1847 J.	11 M.	1 T.	nach Chr. G.
Damaliges Alter:	18 „	3 „	14 „	„ „
Zeit der Geburt:	1829 J.	7 M.	17 T.	nach Chr. G.;

also Datum der Geburt: 18. August 1830.

Oder:

14 Tage	vor dem	2. Dezember 1848	war	der	18. November	1848,
3 Mon.	„ „	18. Novemb. 1848	„	„	18. August	1848,
18 Jahre	„ „	18. August 1848	„	„	18. August	1830.

---

§. 95. Multiplizieren mehrnamiger Zahlen.

Ist z. B. die mehrnamige Zahl 5 Stunden 14 Minuten 4mal zu nehmen, so ist es klar, dass man sowohl 5 Stunden als auch 14 Minuten 4mal nehmen müße; man wird daher rechnen:

Mündlich: 4mal 5 Stunden sind 20 Stunden, 4mal 14 Minuten sind 56 Minuten; zusammen 20 Stunden 56 Minuten.

18 *

Schriftlich: 5 St. 14 Min. × 4
20 St. 56 Min.

Wie viel ist 6mal 9 Jahre 7 Monate?

Mündlich: 6mal 9 Jahre sind 54 Jahre; 6mal 7 Monate sind 42 Monate, d. i. 3 Jahre 6 Monate, und die früheren 54 Jahre dazu, sind 57 Jahre 6 Monate.

Beim schriftlichen Multiplizieren muß man, weil in dem Produkte der Monate Jahre enthalten sind, und diese zu dem Produkte der Jahre gezählt werden müßen, bei den Monaten zu rechnen anfangen, damit man nicht nöthig habe, die im Produkte schon angeschriebene Zahl der Jahre wieder auszubessern.

9 J. 7 Mon. × 6   7 Mon. × 6 = 42 Mon.
57 J. 6 Mon.   = 3 J. 6 Mon.

Hier erhält man zuerst 42 Monate d. i. 3 Jahre 6 Monate; 6 Monate schreibt man an, 3 Jahre zählt man zu dem Produkte der Jahre.

Die Redukzionen werden möglichst im Kopfe ausgeführt.

Ist eine mehrnamige Zahl mit dezimaler Eintheilung zu multiplizieren, so verwandelt man sie in die niedrigste Benennung, oder, was im allgemeinen vortheilhafter ist, in einen Dezimalbruch der höchsten Benennung. Z. B.

Multipliziere 38 fl. 62 Kr. mit 27.

3862 Kr. × 27   oder   38·62 fl. × 27
27034   270 34
7724   772 4
104274 Kr. = 1042 fl. 74 Kr.   1042·74 fl.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 33—38.

Zu den angewandten Aufgaben des Rechenbuches sei folgendes bemerkt:

Die Aufgaben 7) bis 59) enthalten Preisberechnungen, wobei aus dem Preise der Einheit auf den Preis der Mehrheit geschlossen wird. Solche Aufgaben sind schon auf den früheren Stufen vielfältig geübt worden; das wird hier die Arbeit wesentlich fördern, darf aber nicht Anlaſs sein, es mit der Sache weniger genau zu nehmen. Wie diese Aufgaben zu behandeln sind, ist bereits oben (II. Abth. §. 48, a und III. Abth. §. 65, b, c und d) wiederholt und ausführlich gezeigt worden. Die Lösung soll auch hier möglichst im Kopfe stattfinden.

Die Aufgaben 75) bis 79) sind Preisrechnungen, in denen aus dem Preise einer Mehrheit auf den Preis eines Vielfachen dieser Mehrheit geschlossen wird. Über die Behandlung solcher Aufgaben lese man II. Abth. §. 48, c und III. Abth. §. 67, a.

Die Aufgaben 90) bis 97) enthalten Raumberechnungen, welche mit einnamigen ganzen und Dezimalzahlen gleichfalls schon auf den früheren Stufen geübt worden sind. Bei Raumberechnungen müßen die Faktoren auf die höchste oder niedrigste Benennung gebracht werden.

---

§. 96. Dividieren mehrnamiger Zahlen.

Bei der Division sind zwei Fälle zu unterscheiden (III. Abth. §§. 61—63).

a) Wenn die Division als **Messen** angewendet wird.

In diesem Falle sind Dividend und Divisor benannte Zahlen; der Quozient ist eine unbenannte Zahl.

Wie oft sind 8 Kr. in 6 fl. enthalten?

Mündlich: 6 fl. sind 600 Kr.; 8 Kr. sind in 6 fl. eben so oft enthalten als in 600 Kr.; 600 Kr. sind 560 Kr. + 40 Kr.; 8 Kr. sind in 560 Kr. 70mal, in 40 Kr. 5mal, in 600 Kr. also 75mal enthalten.

Schriftlich: 600 Kr. : 8 Kr. = 75.
40

Man bringt also Dividend und Divisor auf gleiche, am besten auf die niedrigste Benennung und vollzieht dann die Division.

Wie oft sind $2^{m}\ 9^{dm}\ 1^{cm}$ in $151^{m}\ 3^{dm}\ 2^{cm}$ enthalten?

$2^{m}\ 9^{dm}\ 1^{cm} = 291^{\ cm}$ $\quad$ $15132 : 291 = 52$

$151^{m}\ 3^{dm}\ 2^{cm} = 15132^{cm}$

b) Wenn die Division als **Theilen** angewendet wird.

Hier ist nur der Dividend benannt, der Divisor aber muß eine unbenannte Zahl sein; der Quozient erhält denselben Namen, den der Dividend hat.

Es seien 41 fl. 22 Kr. unter 9 Personen zu gleichen Theilen zu theilen; wie viel erhält 1 Person?

Man muß hier sowohl 41 fl. als 22 Kr. durch 9 dividieren.

Mündlich: Der 9te Theil von 41 fl. sind 4 fl., und es bleiben noch 5 fl. zur Vertheilung übrig; diese werden in Kreuzer aufgelöst, 5 fl. = 500 Kr., und die bereits vorhandenen 22 Kr. dazu, sind 522 Kr. = 450 Kr. + 72 Kr.; $\frac{1}{9}$ von 450 Kr. sind 50 Kr., $\frac{1}{9}$ von 72 Kr. sind 8 Kr., von 522 Kr. also 58 Kr.; 1 Person erhält also 4 fl. 58 Kr.

Schriftlich: Entweder in gleicher Weise wie mündlich:

41 fl. 22 Kr. : 9 = 4 fl. 58 Kr.
5 „ 500 „
522 Kr.
72
⸗

Oder:

41 fl. 22 Kr. = 41·22 fl.   41·22 fl. : 9
4·58 fl. = 4 fl. 58 Kr.

Man dividiert also zuerst die Zahl der höchsten Benennung, verwandelt den etwa bleibenden Rest in die nächstniedrigere Benennung, addiert dazu die im Dividend bereits vorhandenen Einheiten dieser Benennung und dividiert die dadurch erhaltene Summe; oder, was im allgemeinen bequemer ist: man verwandelt den mehrnamigen Dividend in eine einnamige Zahl und dividiert diese.

Wie groß ist der 54ste Theil von 25 $\square^{m}$ 45 $\square^{dm}$ $\square^{cm}$?

25 $\square^{m}$ 45 $\square^{dm}$ 2 $\square^{cm}$ = 25·4502 $\square^{m}$.
25·4502 $\square^{m}$: 54 = 0·4713 $\square^{m}$
385 = 47 $\square^{dm}$ 13 $\square^{cm}$
70
162
⸗

Obwohl bei mehrnamigen Zahlen das Divisionsverfahren, je nachdem man eine Aufgabe des Theilens oder des Enthaltenseins zu lösen hat, wesentlich verschieden ausfällt; so erscheint es doch rathsam, dass die angewandten Aufgaben nicht nach diesen beiden Arten gesondert, sondern unter einander abwechselnd vorgenommen werden, weil es dem Schüler mehr Übung bringt, wenn er nicht schon vorhinein weiß, zu welcher Art eine Aufgabe gehört, sondern dieses bei jeder einzelnen Aufgabe erst durch Nachdenken zu untersuchen genöthigt ist.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 39—44.

In Beziehung auf die angewandten Aufgaben des Rechenbuches mögen hier folgende Bemerkungen ihren Platz finden:

Die Aufgaben 19) bis 37), ferner 53) bis 70) enthalten Preis- und Dreisatzrechnungen; ihre Behandlung wurde schon (II. Abth. §. 48, b, d, e und III. Abth. §§. 66, 68—70) wiederholt erklärt. Auf die Lösung im Kopfe ist auch hier besonderes Gewicht zu legen.

Zur 78. Aufgabe:

A und B erhalten für ihre Arbeit 22 fl. 36 Kr.; A hat 5 Tage, B 8 Tage gearbeitet; wie viel erhält jeder? — Wie viel Tage haben A und B im ganzen gearbeitet? Wie viel kommt daher auf 1 Tag?

5	A hat 5 Tage gearbeitet,
8	er bekommt also 1·72 fl. × 5 = 8·60 fl.
22·36 fl. : 13 = 1·72 fl.	B hat 8 Tage gearbeitet,
93	er bekommt also 1·72 fl. × 8 = 13·76 fl.
26	

Diese, sowie die 79. Aufgabe, welche auf ähnliche Art aufgelöst wird, sind Gesellschaftsrechnungen.

Die 82. Aufgabe ist eine zusammengesetzte Durchschnittsrechnung. Der Gang der Rechnung erhellet aus folgender Zusammenstellung:

4 Hektoliter	à 30·40 fl.	kosten	121·60 fl.	
2 „	à 24·28 „	„	48·56 „	
3 „	à 22— „	„	66— „	
9 Hektoliter	zusammen	kosten	236·16 fl.	: 9
1 Hektol. kostet also im Durchschn.			26·24 fl.	

Auf ähnliche Art wird die 83. Aufgabe gerechnet.

Die Aufgaben 84) bis 91) beziehen sich auf die Flächen- und Körperberechnung. Dass und inwiefern dabei die Division anzuwenden sei, muß von den Schülern jedesmal durch richtige Schlüsse gefolgert werden.

Dritter Abschnitt.

Das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

§. 97. Allgemeine Bemerkungen.

Gemeine Brüche sind schon auf den früheren Stufen wiederholt vorgekommen. Das war auch methodisch richtig; was sich auf einer Stufe des Unterrichtes naturgemäß ergibt und folgerichtig darbietet, soll nicht unberücksichtigt bleiben. Wir mußten Einheiten theilen und führten dafür die Bruchbezeichnung ein, wodurch auch das Theilen vom Messen schon äußerlich unterschieden wurde; wir ließen daher die Schüler schon bisher Halbe, Drittel, Viertel, . . . kennen lernen und mitunter auch einfache Bruchrechnungen vornehmen, ohne sie noch mit dem Namen eines Bruches bekannt zu machen

Gleichwohl wäre es nicht gut, nun sogleich zur allgemeinen Behandlung der Brüche überzugehen. Soll der Unterricht im Bruchrechnen einen bildenden und nachhaltigen Erfolg haben, so muß ihm noch ein Vorbereitungskurs vorausgeschickt werden, in welchem die Schüler zunächst im Rechnen mit einfacheren gemeinen Brüchen, deren Entstehung sich unmittelbar veranschaulichen läßt, und die auch im praktischen Leben am häufigsten vorkommen, tüchtig geübt werden. Wir wählen für diesen anschaulichen Kursus denselben Vorgang, den wir bei den ganzen Zahlen der unteren Zahlräume befolgt haben. Dort stiegen wir in der Zahlenreihe allmählich aufwärts und brachten bei den einzelnen Zahlen sogleich alle Operazionen zur Anschauung. Auch hier werden wir die auf einander folgenden Bruchzahlen einzeln, anschaulich und allseitig behandeln, indem wir mit denselben sogleich auch die entsprechenden Rechnungsfälle in Verbindung bringen. Auch hier soll den Eintheilungsgrund der Übungen nicht die Operazion, sondern die allseitig behandelte Bruchzahl bilden.

Wir beginnen mit den Halben und schließen daran die Viertel und die Achtel, die sich daraus durch weitere Halbierungen ergeben; dann gehen wir über zu Dritteln, Sechsteln und Zwölfteln; endlich behandeln wir noch die Fünftel und die Zehntel. Die Siebentel, Neuntel und Eilftel lassen wir dabei unberücksichtigt, da dieselben im praktischen Rechnen nicht vorkommen und daher füglich dem allgemeinen Rechnen mit Brüchen, wo die praktische Verwendbarkeit der Brüche nicht in Betracht kommt, vorbehalten werden können.

Abgesehen davon, dass durch die hier angedeuteten Vorübungen die sicherste Grundlage für die allgemeine Bruchrechnung gewonnen wird, sprechen für dieselben auch andere sehr gewichtige Gründe.

Durch die allseitige und wiederholte äußere und innere Anschauung der einzelnen Bruchzahlen prägen sich Sache und Zeichen, Begriff und Ausdruck so tief und fest ein, dass sie unverlierbares Eigenthum des Schülers werden. Ferner lernt der Schüler mit den einzelnen Brüchen sogleich auch rechnen, und zwar zunächst nur bei unmittelbarer Anschauung, wodurch das richtige Verständnis gesichert wird; das Zifferrechnen ist dabei nichts anderes als ein durch Ziffern dargestelltes Kopfrechnen. Ein weiterer nicht zu unterschätzender Vortheil ergibt sich im Hinblick auf die neuen Maße und Gewichte, nach deren Einführung im gewöhnlichen Leben vorzugsweise nur noch Brüche mit kleinen Nennern vorkommen werden. Indem nun die Schüler durch einige Wochen ausschließlich Übungen mit einfachen Bruchzahlen vornehmen, erlangen sie gerade im Rechnen mit denjenigen Brüchen, welche im praktischen Leben am häufigsten auftreten, die vollste Geläufigkeit.

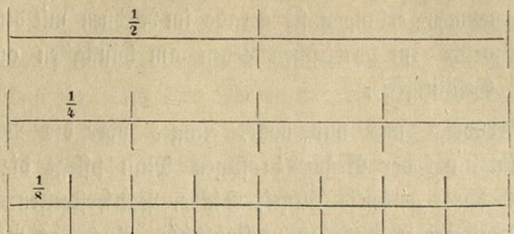
Es erübrigt uns nur noch, einiges über die Veranschaulichung der Brüche zu sagen. Man pflegt die Brüche gewöhnlich durch getheilte Äpfel, Stäbe, Papierstreifen, Linien, Kreise, Quadrate u. dgl. zu versinnlichen. Auch hat man dazu eigene Apparate, unter denen wohl derjenige den Vorzug verdient, der mit der russischen Rechenmaschine Ähnlichkeit hat und am obersten Stabe das ungetheilte Ganze, am zweiten Stabe das Ganze in 2, am dritten in 3, . . . am zehnten Stabe in 10 gleiche Theile getheilt zur Anschauung bringt. Irrig ist übrigens die Ansicht, dass dem Schüler die Sache nur durch vielerlei Versinnlichungsmittel leicht und deutlich gemacht werden könne. Das einfachste und auch vollkommen ausreichende Veranschaulichungsmittel bieten hier jedenfalls gleich lange gerade Linien, welche von dem Lehrer an der Schultafel gezogen und vor den Augen der Schüler in gleiche Theile getheilt, später auch von den Schülern selbst zur anschaulichen Darstellung der einzelnen Rechnungsfälle gezeichnet werden.

I. Vorübungen im Rechnen mit einfacheren Brüchen.

§. 98. Halbe, Viertel und Achtel.

Die Übungen sind zuerst mündlich, dann schriftlich vorzunehmen; das schriftliche Rechnen fällt der Ausführung nach genau mit dem mündlichen zusammen.

1. Anschauliche Auffassung der Bruchzahlen.



Ein Ganzes, z. B. eine Linie, kann man in beliebig viele gleiche Theile theilen und einen solchen Theil einmal oder mehrmal nehmen.

Der Lehrer zieht an der Schultafel eine gerade Linie, theilt sie in 2 gleiche Theile und spricht: Theile ich eine Linie in 2 gleiche Theile, so heißt ein Theil ein Halbes oder die Hälfte der ganzen Linie. 1 Halbes erhalte ich also, wenn ich 1 Ganzes in 2 gleiche Theile theile und 1 solchen Theil nehme. Wie viel Halbe hat 1 Ganzes? 2 Halbe geben zusammen wieder 1 Ganzes. — 1 Halbes bezeichnet man durch $\frac{1}{2}$, 2 Halbe durch $\frac{2}{2}$.

Der Lehrer theilt sodann eine gleich lange Linie in 4 gleiche Theile und spricht: Theile ich 1 Ganzes in 4 gleiche Theile, so heißt ein Theil ein Viertel; 2 solche Theile sind 2 Viertel, 3 solche Theile 3 Viertel, 4 solche Theile 4 Viertel. Ich erhalte also 1 Viertel, wenn ich 1 Ganzes in 4 gleiche Theile theile und 1 solchen Theil nehme. Wie erhalte ich 2 Viertel, 3 Viertel? — 1 Viertel bezeichnet man durch $\frac{1}{4}$, 2 Viertel durch $\frac{2}{4}$, 3 Viertel durch $\frac{3}{4}$, u. s. w.

Die dritte Linie theile ich in 8 gleiche Theile. Ein solcher Theil heißt ein Achtel; 2 solche Theile sind 2 Achtel, 3 solche Theile 3 Achtel, . . . 8 solche Theile sind 8 Achtel und geben wieder die ganze Linie. Wie erhalte ich also 1 Achtel; wie 2 Achtel, 3 Achtel, . . .? — 1 Achtel bezeichnet man durch $\frac{1}{8}$, 2 Achtel durch $\frac{2}{8}$, u. s. w.

Der Lehrer kann die Schüler schon hier mit den Ausdrücken „Bruch, Zähler, Nenner“ bekannt machen; er kann aber dieß auch erst später bei der allgemeinen Behandlung der Brüche thun.

2. Resolvieren.

a) Wie viel Halbe sind 7 Ganze? — 1 Ganzes hat 2 Halbe; 7 Ganze sind also 7mal 2 Halbe = 14 Halbe.

Wie viel Viertel sind 3 Ganze? — 1 Ganzes = 4 Viertel; 3 Ganze sind also 3mal 4 Viertel = 12 Viertel.

Wie viel Achtel sind 5 Ganze? — 1 Ganzes = 8 Achtel; 5 Ganze sind also 5mal 8 Achtel = 40 Achtel.

Ebenso schriftlich:

$1 = \frac{2}{2}$	$1 = \frac{4}{4}$	$1 = \frac{8}{8}$
$2 = 2 \times \frac{2}{2} = \frac{4}{2}$	$2 = 2 \times \frac{4}{4} = \frac{8}{4}$	$2 = 2 \times \frac{8}{8} = \frac{16}{8}$
$3 = 3 \times \frac{2}{2} = \frac{6}{2}$	$3 = 3 \times \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$	$3 = 3 \times \frac{8}{8} = \frac{24}{8}$
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

b) Wie viel Viertel sind 9 Halbe? — Theile ich 1 Ganzes n 4 gleiche Theile, so erhalte ich 4 Viertel; theile ich zuerst 1 Ganzes in 2 Halbe, und dann jedes Halbe wieder in 2 gleiche Theile, so erhalte ich auch 4 Viertel. Wie viele Viertel entstehen dadurch aus 1 Halben? Aus 2 gleichen Theilen lassen sich also 4 gleiche Theile machen; Halbe lassen sich in Viertel verwandeln. 1 Halbes ist = 2 Viertel; 9 Halbe sind 9mal 2 Viertel = 18 Viertel. — Oder unmittelbar durch Schlüsse: 1 Ganzes = 4 Viertel; 1 Halbes ist nur die Hälfte davon, also 2 Viertel; 9 Halbe sind 9mal 2 Viertel = 18 Viertel.

Wie viel Achtel sind 7 Halbe? — Achtel erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 8 gleiche Theile theile; Achtel erhalte ich aber auch, wenn ich 1 Ganzes zuerst in 2 Halbe, und dann jedes Halbe wieder in 4 gleiche Theile theile. Wie viele Achtel erhalte ich dadurch aus 1 Halben? Halbe lassen sich also in Achtel verwandeln. 1 Halbes = 4 Achtel; 7 Halbe sind also 7mal 4 Achtel = 28 Achtel. — Oder durch unmittelbare Schlüsse:

1 Ganzes hat 8 Achtel; 1 Halbes ist nur die Hälfte davon, also 4 Achtel; 7 Halbe sind dann 7mal 4 Achtel = 28 Achtel.

Wie viel Achtel sind 3 Viertel? — Ich theile 1 Ganzes in 4 Viertel; wie erhalte ich daraus 8 gleiche Theile? Viertel lassen sich also in Achtel verwandeln. 1 Viertel = 2 Achtel; 3 Viertel sind also 3mal 2 Achtel = 6 Achtel. — Oder unmittelbar: 1 Ganzes ist 8 Achtel; 1 Viertel ist nur der 4te Theil davon, also 2 Achtel; 3 Viertel sind daher 3mal 2 Achtel = 6 Achtel.

c) Wie viel Viertel sind 8 Ganze und 3 Viertel? — 1 Ganzes = 4 Viertel, 8 Ganze sind 8mal 4 Viertel = 32 Viertel, und 3 Viertel dazu, sind 35 Viertel.

Wie viel Halbe sind $1\frac{1}{2}$, $9\frac{1}{2}$, $17\frac{1}{2}$?

Wie viel Achtel sind $1\frac{1}{8}$, $2\frac{3}{8}$, $11\frac{5}{8}$?

Alle diese Übungen lasse man auch schriftlich darstellen.

3. Reduzieren.

a) Wie viel Ganze sind 10 Halbe? — 2 Halbe sind 1 Ganzes. Nehme ich daher $\frac{2}{2}$ von $\frac{10}{2}$ weg, so habe ich 1 G.; nehme ich vom Reste wieder $\frac{2}{2}$, so habe ich wieder 1 G., u. s. w.; $\frac{10}{2}$ sind daher so vielmal 1 G., als $\frac{2}{2}$ in $\frac{10}{2}$ enthalten sind; $\frac{2}{2}$ sind in $\frac{10}{2}$ so oft enthalten, als 2 in 10, also 5mal; $\frac{10}{2}$ sind also 5mal 1 G. oder 5 Ganze.

Wir sehen also hier den Nenner als einen Namen an und rechnen dann wie mit benannten ganzen Zahlen. Diese Auffassung ist sehr geeignet, dem Anfänger das Rechnen mit Bruchzahlen zu erleichtern.

Wie viel Ganze sind 12 Viertel? — $\frac{4}{4} = 1$ Ganzes; $\frac{12}{4}$ sind daher so vielmal 1 Ganzes, als $\frac{4}{4}$ in $\frac{12}{4}$, oder 4 in 12 enthalten ist, also 3mal 1 Ganzes oder 3 Ganze.

Wie viel Ganze sind 48, 64, 96 Achtel?

Schriftlich. $\frac{48}{8} = ?$ Ganze.

Anfangs: $\frac{8}{8} = 1$ G.; $\frac{48}{8} : \frac{8}{8} = 48 : 8 = 6$ G.;

später sogleich $\frac{48}{8} = 6$ G.

b) Wie viel Halbe sind 14 Viertel? — $\frac{2}{4}$ = 1 Halbes; $\frac{14}{4}$ sind daher so viel Halbe, als $\frac{2}{4}$ in $\frac{14}{4}$, oder 2 in 14, enthalten sind, also 7mal 1 Halbes oder 7 Halbe.

Schriftlich. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{14}{4} : \frac{2}{4} = 14 : 2 = 7$;
also $\frac{14}{4} = \frac{7}{2}$.

Wie viel Halbe sind 8, 20, 36 Achtel?
Wie viel Viertel sind 10, 22, 46 Achtel?

c) Wie viel Ganze sind 23 Viertel? — $\frac{4}{4}$ = 1 Ganzes; $\frac{23}{4}$ sind $\frac{20}{4}$ und $\frac{3}{4}$; $\frac{20}{4}$ sind 5 Ganze, und $\frac{3}{4}$ dazu, sind 5 Ganze und 3 Viertel.

Schriftlich. $\frac{23}{4} = \frac{20}{4} + \frac{3}{4} = 5\frac{3}{4}$.

Wie viel Ganze sind $\frac{5}{2}$, $\frac{27}{2}$, $\frac{65}{2}$?
Wie viel Ganze sind $\frac{9}{8}$, $\frac{21}{8}$, $\frac{46}{8}$?

4. Addieren.

Nachdem die Schüler gewöhnt worden sind, die Bruchzahlen als benannte Zahlen aufzufassen, deren Name durch den Nenner ausgedrückt wird, nachdem sie ferner im Resolvieren und Reduzieren der Halben, Viertel und Achtel Geläufigkeit erlangt haben, werden ihnen die Rechnungsoperazionen mit diesen Bruchzahlen, die mündlich und schriftlich vorzunehmen sind, keine Schwierigkeit bereiten.

Ganz einfach ist das Addieren gleichnamiger Bruchzahlen. Z. B.:

Wie viel ist $\frac{5}{8}$ und $\frac{1}{8}$? — 5 Achtel und 1 Achtel sind 6 Achtel. Wie viel sind das Viertel?

Wie viel ist $5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$? 5 und 3 ist 8, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ ist 1, 8 und 1 ist 9; also $5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 9$.

Dann lasse man ungleichnamige Brüche addieren. Z. B.:

Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$? — Kann ich z. B. 1 Zehner und 3 Fünfer als solche zusammenzählen? Sie geben weder 4 Zehner, noch 4 Fünfer. Was muß mit diesen Münzsorten geschehen?

Ich verwandle sie auf die gemeinschaftliche Benennung Kreuzer und habe dann 10 Kr. + 15 Kr. = 25 Kr. Ebenso muß muß ich $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{4}$, um sie zusammenzählen zu können, auf einen gleichen Namen bringen. Ich verwandle also $\frac{1}{2}$ in $\frac{2}{4}$, und habe dann $\frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

Wie viel ist $6\frac{1}{2} + 2\frac{7}{8}$? — $6\frac{1}{2} = 6\frac{4}{8}$; $6\frac{4}{8} + 2\frac{7}{8} = 8\frac{11}{8} = 9\frac{3}{8}$.

Wie viel ist $735\frac{1}{2} + 609\frac{3}{4} + 481\frac{5}{8}$?

$$\begin{array}{r|l} 735\frac{1}{2} & \frac{4}{8} \\ 609\frac{3}{4} & \frac{6}{8} \\ 481\frac{5}{8} & \frac{5}{8} \\ \hline 1826\frac{7}{8} & \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \end{array}$$

Für das schriftliche Rechnen empfehlen sich auch hier Reihenfolgen (II. Abth. §. 43); z. B.

$$8\tfrac{3}{4} + 5\tfrac{1}{4} = 13\tfrac{4}{4} = 14,$$
$$14 + 5\tfrac{1}{4} = 19\tfrac{1}{4},$$
$$19\tfrac{1}{4} + 5\tfrac{1}{4} = 24\tfrac{2}{4}, \text{ u. s. w.}$$

5. Subtrahieren.

Wie viel ist $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$? — 7 Achtel weniger 1 Achtel sind 6 Achtel oder 3 Viertel; also $\frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Wie viel ist $9 - \frac{3}{4}$? Statt 9 kann ich $8\frac{4}{4}$ setzen; dann habe ich $8\frac{4}{4} - \frac{3}{4} = 8\frac{1}{4}$.

Wie viel muß ich zu $4\frac{3}{8}$ zuzählen, um 10 zu erhalten?

Wie viel ist $28\frac{1}{4} - 8\frac{3}{4}$. Da ich $\frac{3}{4}$ von $\frac{1}{4}$ nicht subtrahieren kann, so löse ich 28 in $27\frac{4}{4}$ auf; dann habe ich $27\frac{5}{4}$ weniger $8\frac{3}{4} = 19\frac{2}{4} = 19\frac{1}{2}$.

Hierauf werden ungleichnamige Brüche subtrahiert.

Was ist mehr: $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$, und um wie viel? $\frac{1}{2}$ ist $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$ ist also mehr als $\frac{1}{2}$, und zwar um $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$.

Was ist mehr: $\frac{7}{8}$ oder $\frac{3}{4}$, und um wie viel?

Wie viel ist $25\frac{1}{2} - 9\frac{1}{4}$? Statt $25\frac{1}{2}$ kann ich $25\frac{2}{4}$ setzen; dann habe ich $25\frac{2}{4} - 9\frac{1}{4} = 16\frac{1}{4}$.

Wie viel ist $41\frac{1}{4} - 9\frac{5}{8}$. Statt $41\frac{1}{4}$ setze ich zuerst $41\frac{2}{8}$; da ich aber $\frac{5}{8}$ von $\frac{2}{8}$ nicht subtrahieren kann, löse ich 41 in $40\frac{8}{8}$ auf; dann habe ich $40\frac{10}{8} - 9\frac{5}{8} = 31\frac{5}{8}$.

Auch hier sind Reihenfolgen zu rechnen; z. B.

$100 - 6\frac{3}{4} = 99\frac{4}{4} - 6\frac{3}{4} = 93\frac{1}{4}$,
$93\frac{1}{4} - 6\frac{3}{4} = 92\frac{5}{4} - 6\frac{3}{4} = 86\frac{2}{4}$,
$86\frac{2}{4} - 6\frac{3}{4} = 85\frac{6}{4} - 6\frac{3}{4} = 79\frac{3}{4}$, u. s. w.

6. Multiplizieren.

Wie viel ist 7mal $\frac{3}{4}$? — 7mal 3 Viertel sind 21 Viertel; also $\frac{3}{4} \times 7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$.

Wie viel ist 6mal $37\frac{3}{8}$? 6mal 30 ist 180, 6mal 7 ist 42, zu 180 dazu, ist 222; 6mal $\frac{3}{8}$ ist $\frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$; 222 und $2\frac{1}{4}$ ist $224\frac{1}{4}$.

7. Dividieren als Messen.

Wie oft ist $\frac{3}{4}$ in $\frac{15}{4}$ enthalten? — 3 Viertel sind in 15 Viertel so oft enthalten, als 3 in 15, also 5mal; folglich $\frac{15}{4} : \frac{3}{4} = 5$.

Wie oft ist $\frac{3}{8}$ in 6 enthalten? Hier muß 6 in Achtel verwandelt werden; $1 = \frac{8}{8}$, also $6 = \frac{48}{8}$; daher $\frac{48}{8} : \frac{3}{8} = 48 : 3 = 16$; $\frac{3}{8}$ ist also in 6 16mal enthalten.

Wie oft ist $1\frac{1}{4}$ in $7\frac{1}{2}$ enthalten? Die Bruchzahlen müßen gleichnamig gemacht werden, indem man die Halben in Viertel verwandelt. $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; $7\frac{1}{2} = 7\frac{2}{4} = \frac{30}{4}$; $\frac{30}{4} : \frac{5}{4} = 30 : 5 = 6$.

8. Dividieren als Theilen.

Wie viel ist der 7te Theil von $\frac{35}{2}$? Der 7te Theil von 35 Halben sind 5 Halbe; also $\frac{35}{2} : 7 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$.

Wie viel ist $\frac{1}{2} : 4$? — Wenn ich 1 Halbes in 4 gleiche Theile theile, so ist ein Theil 1 Achtel; also $\frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$.

Ebenso ist $\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$; $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$.

Wie viel ist $\frac{1}{2}$ von $47\frac{3}{4}$?

$47\frac{3}{4} = 46\frac{7}{4}$; $46\frac{7}{4} : 2 = 23\frac{7}{8}$.

Wie viel ist $3\frac{1}{2}$mal $8\frac{1}{2}$?

3mal $8\frac{1}{2} = 25\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$mal $8\frac{1}{2} = 4\frac{1}{4}$;

$25\frac{1}{2} + 4\frac{1}{4} = 25\frac{2}{4} + 4\frac{1}{4} = 29\frac{3}{4}$.

9. Anwendungen.

Hier ist zunächst das Resolvieren und Reduzieren benannter Zahlen zu üben.

Wie viel Kreuzer sind $\frac{3}{4}$ fl.; 1 fl. = 100 Kr.; $\frac{1}{4}$ fl. ist der 4te Theil von 100 Kr. = 25 Kr.; $\frac{3}{4}$ fl. sind 3mal 25 Kr. = 75 Kr.

Wie viel ist $\frac{1}{8}$ Kilogramm? — 1 Kilogr. = 100 Dekagr.; $\frac{1}{8}$ Kilogr. = $\frac{1}{8}$ von 100 Dekagr. = $12\frac{4}{8}$ Dekagr. = $12\frac{1}{2}$ Dekagramm. Nun ist 1 Dekagr. = 10 Gramm, daher $\frac{1}{2}$ Dekagr. = $\frac{1}{2}$ von 10 Gramm = 5 Gramm; folglich $\frac{1}{8}$ Kilogr. = 12 Dekagr. 5 Gramm.

Welcher Theil eines Tages sind 6 Stunden? — 24 Stunden sind 1 Tag; 6 Stunden sind der 4te Theil von 24 Stunden, also $\frac{1}{4}$ Tag.

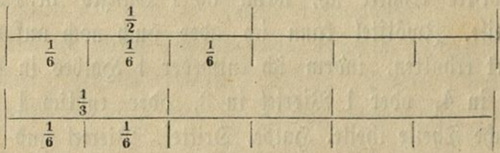
Welcher Theil eines Guldens sind 45 Kr.? — 100 Kr. sind 1 fl.; 5 Kr. sind der 20ste Theil von 100 Kr., daher $\frac{1}{20}$ fl.; 45 Kr. sind 9mal 5 Kr., also 9mal $\frac{1}{20}$ fl. = $\frac{9}{20}$ fl

Nun folgen angewandte Aufgaben über die Rechnungsoperazionen mit Halben, Vierteln und Achteln, bei deren Lösung auch hier auf richtige und bündige Schlüsse unnachsichtlich zu dringen ist.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 45—47.

§. 99. Drittel, Sechstel und Zwölftel.

Die Übungen stimmen mit denen überein, die wir mit den früheren Bruchzahlen vorgenommen haben; auch das unterrichtliche Verfahren bleibt sich gleich. Eine Erweiterung tritt übrigens hier dadurch ein, dass wir nicht ausschließlich mit Dritteln, Sechsteln und Zwölfteln rechnen, sondern mit denselben auch die schon behandelten Halben und Viertel in Verbindung bringen. Nur über diese erweiterten Übungen sollen hier einige Erläuterungen folgen.

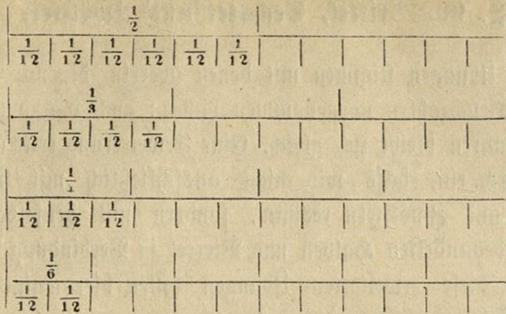


Sechstel erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 6 gleiche Theile theile. Sechstel kann ich aber auch noch auf zweierlei andere Art erhalten: ich kann 1 Ganzes zuerst in 2 Halbe, und dann jedes Halbe wieder in 3 gleiche Theile theilen; ich erhalte ferner auch Sechstel, wenn ich 1 Ganzes zuerst in 3 Drittel, und dann jedes Drittel wieder in 2 gleiche Theile theile. Sechstel kann ich also auch aus Halben und aus Dritteln machen; Halbe und Drittel lassen sich in Sechstel verwandeln.

1 Halbes = 3 Sechstel, 1 Sechstel = $\frac{1}{3}$ von 1 Halben;
1 Drittel = 2 Sechstel, 1 Sechstel = $\frac{1}{2}$ von 1 Drittel.

Kann ich aus Halben auch Drittel machen? Halbe lassen sich nicht in Drittel verwandeln. — Kann ich aus Vierteln Sechstel machen? Viertel lassen sich nicht in Sechstel verwandeln.

Wie viel ist $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$? Halbe und Drittel kann ich als solche nicht zusammenzählen, weil sie verschiedene Namen haben. Ich kann aber Halbe und Drittel in Sechstel verwandeln; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$; $\frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.



Zwölftel erhalte ich, wenn ich 1 Ganzes in 12 gleiche Theile theile. Zwölftel kann ich aber auch noch auf viererlei andere Art erhalten, indem ich entweder 1 Halbes in 6, oder 1 Drittel in 4, oder 1 Viertel in 3, oder endlich 1 Sechstel in 2 gleiche Theile theile. Halbe, Drittel, Viertel und Sechstel lassen sich also in Zwölftel verwandeln.

1 Halbes = 6 Zwölftel, 1 Zwölftel = $\frac{1}{6}$ von 1 Halben;
1 Drittel = 4 Zwölftel, 1 Zwölftel = $\frac{1}{4}$ von 1 Drittel;
1 Viertel = 3 Zwölftel, 1 Zwölftel = $\frac{1}{3}$ von 1 Viertel;
1 Sechstel = 2 Zwölftel, 1 Zwölftel = $\frac{1}{2}$ von 1 Sechstel.

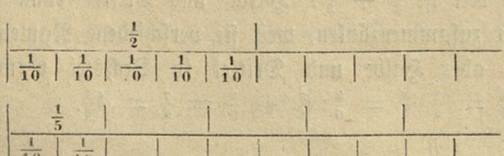
Wie viel ist $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$? Drittel und Viertel lassen sich in Zwölftel verwandeln; $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$; $\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 48—50.

---

§. 100. Fünftel und Zehntel.

Die Behandlung ist die gleiche, wie bei den Halben, Vierteln und Achteln. Nur über die Verbindung der Fünftel und Zehntel mit den Halben bleibt uns hier einiges zu bemerken übrig.



Wenn ich 1 Ganzes in 10 gleiche Theile theile, so erhalte ich Zehntel. Zehntel kann ich aber auch mittelbar aus Halben erhalten, wenn ich jedes Halbe in 5 gleiche Theile theile; Zehntel erhalte ich ferner aus Fünfteln, wenn ich jedes Fünftel wieder in 2 gleiche Theile theile. Halbe und Fünftel lassen sich also in Zehntel verwandeln.

1 Halbes = 5 Zehntel, 1 Zehntel = $\frac{1}{5}$ von 1 Halben;
1 Fünftel = 2 Zehntel, 1 Zehntel = $\frac{1}{2}$ von 1 Fünftel.

Kann ich aus Halben auch Fünftel machen? Kann ich aus Dritteln und Vierteln Fünftel machen? Halbe, Drittel und Viertel lassen sich nicht in Fünftel verwandeln.

Kann ich durch Theilung von Dritteln, Vierteln, Sechsteln oder Achteln Zehntel erhalten? Drittel, Viertel, Sechstel und Achtel lassen sich also nicht in Zehntel verwandeln.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 50—52.

II. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen überhaupt.

§. 101. Allgemeine Bemerkungen.

Durch die angeführten Vorübungen ist eine feste Grundlage für die nun folgende allgemeine Behandlung der gemeinen Brüche geschaffen worden. Die Schüler haben durch unmittelbare Anschauung die Bedeutung der gewöhnlichsten Brüche erkannt und mit denselben rechnen gelernt. Die Gesetze, die sie dort für einfachere Brüche aus der Anschauung abgeleitet haben, sollen nun auf alle möglichen Brüche übertragen werden. Die Beschränkung in den Nennern fällt weg, die Anschauung tritt mehr in den Hintergrund. Auch wird den Eintheilungsgrund der Übungen nicht der Nenner, sondern die Operazion bilden.

Wenn auch hier alle möglichen Nenner zulässig sind, werden wir im allgemeinen dennoch kleinere Nenner wählen, weil Brüche mit sehr großen Nennern keinen praktischen Wert haben. Überhaupt soll sich der Lehrer in Beziehung auf die Ausdehnung dieser Unterrichtsstufe stets gegenwärtig halten, daſs durch die Einführung der metrischen Maße und Gewichte die gemeinen Brüche, wiewohl sie ein vorzügliches formales Bildungsmittel bleiben, von geringerer praktischer Bedeutung erscheinen, daſs dagegen an ihrer Stelle die Dezimalbrüche an Wichtigkeit gewinnen. Es wird sich darum empfehlen, bei der Behandlung der gemeinen Brüche überall auch die Beziehungen derselben zu den Dezimalbrüchen entsprechend hervorzuheben, weil dadurch das deutlichere Verständnis beider gefördert wird, und in vielen praktischen Rechnungen gemeine und Dezimalbrüche gleichzeitig zur Anwendung kommen.

Beim schriftlichen Rechnen halte der Lehrer auf feststehende Formen, um die Rechnungen übersichtlich zu machen und die Schüler an Ordnung in der Darstellung zu gewöhnen.

---

§. 102. Wesen und Arten der Brüche.

Nachdem die Schüler auf dem Wege der äußeren Anschauung die Bedeutung der einfachsten Brüche kennen gelernt haben, sind sie nun befähigt, sich auch ohne äußere Versinnlichung durch ihre innere Anschauungskraft von jedem beliebigen Bruche eine klare Vorstellung zu machen. Wie erhältst du $\frac{1}{15}$? Wie erhältst du $\frac{7}{15}$? Was bedeutet $\frac{13}{24}$?

Nehme ich die ganze Einheit einmal oder mehrmal, so erhalte ich eine ganze Zahl. Nehme ich nur einen Theil der Einheit einmal oder mehrmal, so erhalte ich eine gebrochene Zahl oder einen Bruch.

Mit jeder ganzen Zahl läſst sich jeder Bruch verbinden. Eine Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruche besteht, heißt eine gemischte Zahl, z. B. $3\frac{5}{8}$.

Um sich von einem Bruche eine richtige Vorstellung zu machen, muß man erstlich wissen, in wie viele gleiche Theile

1 Ganzes getheilt wurde, und dann, wie viele solche Theile zu nehmen sind; man muß also wissen, was für Theile der Bruch enthält, und wie viele solche Theile er enthält. Zur Bestimmung eines Bruches sind also zwei Zahlen erforderlich; die eine zeigt an, in wie viele gleiche Theile das Ganze getheilt ist, sie gibt somit die Art der Theile an, d. h. sie nennt oder benennt die Theile und heißt darum der Nenner; die andere zeigt an, wie viele solche Theile zu nehmen sind, sie zählt die Theile und heißt darum der Zähler. Der Nenner eines Bruches ist also der Name der Theile, der Zähler die Anzahl derselben. Man schreibt den Nenner unter den Zähler und setzt zwischen beide einen Strich.

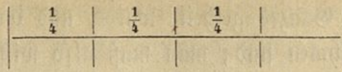
Der Lehrer lasse verschiedene ausgesprochene Brüche anschreiben, und umgekehrt angeschriebene Brüche aussprechen, bei jedem solchen Bruche aber auch die Entstehung und Bedeutung desselben angeben.

Bei der bisherigen Auffassung des Bruches sind wir immer von einem Ganzen ausgegangen, indem wir dasselbe in mehrere gleiche Theile theilten und einen oder mehrere solche Theile nahmen. Die Brüche lassen jedoch auch noch eine andere Auffassung zu, indem man sie unmittelbar aus mehreren Ganzen durch Theilung entstehen läßt. Bisher haben wir uns z. B. unter dem Bruche $\frac{3}{4}$ 3mal den 4ten Theil von 1 Ganzen vorgestellt; $\frac{3}{4}$ kann aber auch als der 4te Theil von 3 Ganzen, oder als der angezeigte Quozient 3 : 4 angesehen werden.

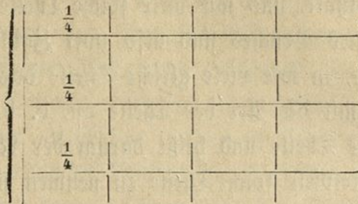
Diese zweite Auffassung, welche für viele Fälle von Wichtigkeit ist, ergibt sich durch ganz einfache Schlüsse unmittelbar aus der ersten Vorstellungsweise. Wie viel ist der 4te Theil von 3 Ganzen? Der 4te Theil von 1 Ganzen ist $\frac{1}{4}$; der 4te Theil von 3 Ganzen ist 3mal so viel, also 3mal $\frac{1}{4}$ d. i. $\frac{3}{4}$; es ist somit $\frac{3}{4} = 3 : 4$.

Die doppelte Auffassung eines Bruches kann den Schülern auch durch getheilte Linien anschaulich gemacht werden.

$^3/_4$ = 3mal der 4te Theil von 1



$^3/_4$ = der 4te Theil von 3



Ich erhalte den Bruch $\frac{3}{4}$, wenn ich von 1 Ganzen den 4ten Theil 3mal nehme; ich erhalte aber $\frac{3}{4}$ auch dadurch, daſs ich von 3 Ganzen den 4ten Theil einmal nehme.

Jeder Bruch kann demnach als eine angezeigte Division angesehen werden, worin der Zähler als Dividend, der Nenner als Divisor erscheint.

Nun werden die Schüler auch den Grund einsehen, warum man bei der Division ganzer Zahlen, wenn ein Rest übrig bleibt, unter diesen den Divisor schreibt, und den dadurch gebildeten Bruch dem ganzen Quozienten anhängt.

Wird ein Ganzes in mehrere gleiche Theile getheilt und nimmt man weniger Theile, als zum Ganzen gehören, so ist der Bruch, der dadurch entsteht, kleiner als ein Ganzes; enthält der Bruch gerade so viele Theile, als zum Ganzen gehören, so ist er dem Werte nach dem Ganzen gleich; enthält der Bruch mehr Theile, als zum Ganzen gehören, so ist er größer als ein Ganzes. Hierauf beruhet die Eintheilung der Brüche in echte und unechte.

Brüche, welche weniger als ein Ganzes betragen, heißen echte Brüche. Der Zähler eines echten Bruches ist kleiner als der Nenner.

Brüche, welche ein Ganzes oder mehr als ein Ganzes betragen, heißen unechte Brüche. Der Zähler eines unechten Bruches ist eben so groß oder größer als der Nenner.

Zum besseren Verständnisse kann der Lehrer auch echte und unechte Guldenbrüche durch Kreuzer ausdrücken und untersuchen lassen, ob sie kleiner, gleich oder größer als ein ganzer Gulden sind. Z. B. $\frac{3}{4}$ fl. = 75 Kr.; $\frac{4}{4}$ fl. = 100 Kr.; $\frac{5}{4}$ fl. = 125 Kr.

Schließlich wird den Schülern noch gesagt, welche Brüche gleichnamig, und welche ungleichnamig heißen.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 52 und 53.

---

§. 103. Verwandlung unechter Brüche in ganze oder gemischte Zahlen, und umgekehrt.

a. Unechte Brüche in ganze oder gemischte Zahlen zu verwandeln.

Nachdem die Schüler eingesehen haben, dass jeder unechte Bruch ein oder mehrere Ganze in sich enthält, liegt die Frage nahe, wie man bei jedem vorgelegten unechten Bruche sogleich bestimmen könne, wie viele Ganze in demselben vorkommen.

Dass Brüche, worin Zähler und Nenner gleich sind, z. B. $\frac{4}{4}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{15}$ u. s. w., gerade ein Ganzes enthalten, geht unmittelbar aus dem Begriffe eines Bruches hervor.

Man lasse nun untersuchen, wie viel Ganze z. B. in $\frac{38}{5}$ enthalten sind.

Im Kopfe: 5 Fünftel sind 1 Ganzes; $\frac{38}{5}$ sind daher so vielmal 1 Ganzes als $\frac{5}{5}$ in $\frac{38}{5}$ enthalten sind; $\frac{5}{5}$ sind in $\frac{38}{5}$, wie 5 in 38, 7mal enthalten und $\frac{3}{5}$ bleiben übrig; also sind $\frac{38}{5}$ = 7mal 1 Ganzes d. i. 7 Ganze und noch $\frac{3}{5}$.

Schriftlich: Entweder mittels derselben Schlüsse, wie beim mündlichen Rechnen, oder aus der Auffassung des Bruches als angezeigter Quozient, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.

$$\frac{38}{5} = 38 : 5 = 7\tfrac{3}{5}.$$

Wie viel Ganze sind $\frac{137}{11}$?

$\frac{11}{11} = 1$; $\frac{11}{11}$ in $\frac{137}{11} = 12$mal, Rest $\frac{5}{11}$; $\frac{137}{11} = 12\frac{5}{11}$.

Oder:

$$\frac{137}{11} = 137 : 11 = 12\tfrac{5}{11}.$$
$$\begin{array}{l} 27 \\ \;\,5 \end{array}$$

---

b. Ganze und gemischte Zahlen in unechte Brüche zu verwandeln.

Mündlich:

Verwandle 5 Ganze in Viertel. — 1 Ganzes = 4 Viertel, 5 Ganze sind also 5mal 4 Viertel = 20 Viertel; also $5 = \frac{20}{4}$.

Ist eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch zu verwandeln, so verwandelt man zuerst die Ganzen in solche Bruchtheile, wie sie der gegebene Bruch enthält, und addiert dazu die schon vorhandenen Bruchtheile.

Es sei z. B. $7\frac{3}{8}$ in einen unechten Bruch zu verwandeln. — 1 Ganzes = 8 Achtel, 7 Ganze sind also 7mal 8 Achtel = 56 Achtel, und 3 Achtel dazu, sind 59 Achtel; folglich $7\frac{3}{8} = \frac{59}{8}$.

Schriftlich:

Verwandle 237 in 54tel.

$$\begin{array}{r} 237 \\ 54 \\ \hline 948 \\ 1185 \\ \hline 12798 \end{array} \qquad 237 = \frac{12798}{54}.$$

Verwandle $71\frac{17}{32}$ in einen unechten Bruch.

$$\begin{array}{r} 71 \\ 32 \\ \hline 142 \\ 213 \\ \hline 2272 \\ +17 \\ \hline 2289 \end{array} \qquad 71\tfrac{17}{32} = \tfrac{2289}{32}.$$

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 53 und 54.

---

§. 104. Vergleichung des Wertes der Brüche von gleichem Nenner oder von gleichem Zähler.

Die hier folgenden Übungen sind für die ganze Bruchrechnung von der größten Wichtigkeit, und daher mit besonderer Sorgfalt durchzuarbeiten.

---

a. Vergleichung von Brüchen mit gleichem Nenner.

Der Lehrer lege zuerst gleichnamige Brüche von beliebigem Zähler vor und lasse ihre Bedeutung angeben; z. B. $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{11}$.

Von zwei Brüchen, welche gleichen Nenner haben, ist derjenige der größere, welcher den größeren Zähler hat.

Hierauf lasse man an einem gegebenen Bruche, z. B. $\frac{2}{5}$, den Zähler mit 2, 3, 4, 5, 6, . . . multiplizieren und die Werte der dadurch gebildeten Brüche näher untersuchen:

$$\tfrac{2}{5},\ \tfrac{4}{5},\ \tfrac{6}{5},\ \tfrac{8}{5},\ \tfrac{10}{5},\ \tfrac{12}{5},\ \ldots$$

In $\frac{4}{5}$ ist der Zähler 2mal so groß als in $\frac{2}{5}$; der Wert des Bruches $\frac{4}{5}$ ist auch 2mal so groß als der Wert von $\frac{2}{5}$. In $\frac{6}{5}$ ist der Zähler 3mal so groß als in $\frac{2}{5}$; der Bruch $\frac{6}{5}$ hat ebenfalls den 3fachen Wert von $\frac{2}{5}$; u. s. w. Multipliziert man also den Zähler eines Bruches mit 2, 3, 4, . . ., so wird auch der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliziert. Um daher einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren, darf man nur seinen Zähler mit dieser Zahl multiplizieren.

Umgekehrt lasse man den Zähler eines Bruches, z. B. $\frac{60}{7}$, durch 2, 3, 4, 5, . . . dividieren und die erhaltenen Brüche vergleichen:

$$\frac{60}{7}, \frac{30}{7}, \frac{20}{7}, \frac{15}{7}, \frac{12}{7}, \ldots$$

In $\frac{30}{7}$ ist der Zähler die Hälfte des Zählers in $\frac{60}{7}$; der Wert des Bruches $\frac{30}{7}$ ist auch nur die Hälfte von $\frac{60}{7}$. In $\frac{20}{7}$ ist der Zähler der dritte Theil des Zählers in $\frac{60}{7}$; der Bruch $\frac{20}{7}$ hat auch nur den dritten Theil des Wertes von $\frac{60}{7}$, u. s. w.

Dividiert man daher den Zähler eines Bruches durch 2, 3, 4, . . ., so wird auch der Wert des Bruches durch dieselbe Zahl dividiert. Um also einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, braucht man nur den Zähler dadurch zu dividieren.

Diese Art der Division ist jedoch nicht immer anwendbar.

---

b. Vergleichung von Brüchen mit gleichem Zähler.

Was ist mehr: $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ oder $\frac{3}{5}$?

Je weniger Theile wir aus einem Ganzen machen, desto größer werden die Theile; in je mehr Theile wir das Ganze theilen, desto kleiner werden die Theile. $\frac{1}{4}$ ist also mehr als $\frac{1}{5}$, darum sind auch $\frac{3}{4}$ mehr als $\frac{3}{5}$.

Von zwei Brüchen, welche gleiche Zähler haben, ist derjenige der größere, welcher den kleineren Nenner hat.

Der Lehrer lasse nun an einem Bruche, z. B. $\frac{5}{6}$, den

Nenner mit 2, 3, 4, 5, 6, . . . multiplizieren, und die Bedeutung der entstehenden neuen Brüche näher betrachten:

$$\frac{5}{6}, \frac{5}{12}, \frac{5}{18}, \frac{5}{24}, \frac{5}{30}, \frac{5}{36}, \ldots$$

In $\frac{5}{12}$ ist der Nenner 2mal so groß als in $\frac{5}{6}$; der Bruch $\frac{1}{12}$ ist aber nur die Hälfte von $\frac{1}{6}$, daher auch $\frac{5}{12}$ die Hälfte von $\frac{5}{6}$. In $\frac{5}{18}$ ist der Nenner 3mal so groß als in $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{18}$ ist jedoch nur der dritte Theil von $\frac{1}{6}$, daher auch $\frac{5}{18}$ der dritte Theil von $\frac{5}{6}$ u. s. w. Multipliziert man also den Nenner eines Bruches mit 2, 3, 4, . . . so wird der Wert des Bruches durch dieselbe Zahl dividiert. Um daher einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren, braucht man nur den Nenner mit dieser Zahl zu multiplizieren.

Läſst man endlich an einem Bruche, z. B. $\frac{13}{60}$, den Nenner durch 2, 3, 4, 5, . . . dividieren, und den Wert der Brüche

$$\frac{13}{60}, \frac{13}{30}, \frac{13}{20}, \frac{13}{15}, \frac{13}{12}, \frac{13}{10}, \ldots$$

näher untersuchen, so ergibt sich durch ähnliche Schlüsse folgendes:

Dividiert man den Nenner eines Bruches durch 2, 3, 4, . . . so wird der Wert des Bruches mit derselben Zahl multipliziert. Um daher einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren, darf man nur den Nenner durch diese Zahl dividieren.

Diese Art der Multiplikazion kann übrigens nur in selteneren Fällen angewendet werden.

Nachdem die voranstehenden Ergebnisse wiederholt werden, faſst man dieselben in folgende, dem Gedächtnisse leicht einzuprägende zwei Sätze zusammen:

Multiplikazion oder Division des Zählers ist dieselbe Rechnung an dem Bruche.

Multiplikazion oder Division des Nenners ist die entgegengesetzte Rechnung an dem Bruche.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 54 und 55.

§. 105. Erweitern der Brüche.

In dem Vorstehenden wurde gezeigt, welche Wertveränderung ein Bruch durch die Änderung seines Zählers oder Nenners erleidet; nun soll auch die Formveränderung, welche mit einem Bruche ohne Änderung seines Wertes vorgenommen werden kann, in Betrachtung gezogen werden. Hieher gehört das Erweitern und Gleichnamigmachen, das Abkürzen der Brüche, endlich das Verwandeln gemeiner Brüche in Dezimalbrüche, und umgekehrt.

Wir beginnen mit dem Erweitern der Brüche.

Die Schüler haben schon bei den Vorübungen an den getheilten Linien gesehen, dass z. B.

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{2}{4} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{4}{8} = \tfrac{5}{10} = \tfrac{6}{12},$$
$$\tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{6} = \tfrac{8}{12},$$
$$\tfrac{3}{4} = \tfrac{6}{8} = \tfrac{9}{12}$$

ist. Diese Ergebnisse wird man hier wiederholen und aus denselben folgern lassen, dass der Wert der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$ nicht geändert wird, wenn man Zähler und Nenner mit 2, oder mit 3, oder mit 4, u. s. w. multipliziert, dass ferner die Nenner der gleichwertigen Brüche immer Vielfache der ursprünglichen Nenner sind.

Um z. B. $\frac{2}{3}$ in Zwölftel zu verwandeln, mache ich aus jedem Drittel 4 Zwölftel; da aber die neuen Theile 4mal kleiner sind, muß ich, um $\frac{2}{3}$ in den neuen Theilen darzustellen, 4mal so viele Theile, also $\frac{8}{12}$ nehmen.

Dieselben Schlüsse lassen sich auf Brüche von beliebigen Nennern ausdehnen. Z. B. $\frac{7}{12}$ enthält 7mal den 12. Theil eines Ganzen. Zerlege ich nun jedes Zwölftel in 5 gleiche Theile, so zerfällt das Ganze in 60 gleiche Theile und ist daher jeder derselben $\frac{1}{60}$. Da aber die neuen Theile nur $\frac{1}{5}$ der früheren Theile sind, so muß ich, um den Wert von $\frac{7}{12}$ zu erhalten, 5mal so viele neue Theile nehmen, als deren $\frac{7}{12}$ hat, also 5mal 7 = 35 Sechzigstel; folglich $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$. Die Vergleichung dieser Brüche zeigt, dass der zweite den 5fachen Zähler und den 5fachen Nenner des ersten hat. Der Wert eines Bruches wird daher nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.

Dieser Satz kann auch so begründet werden: Multipliziere ich in $\frac{7}{12}$ den Zähler mit 5, so erhalte ich den 5fachen Wert des Bruches; multipliziere ich den Nenner mit 5, so erhalte ich nur den 5ten Theil des Wertes des Bruches; multipliziere ich nun Zähler und Nenner mit 5, so erhalte ich vom 5fachen Werte den 5ten Theil, d. i. den einfachen Wert des Bruches selbst.

Zur noch größeren Überzeugung kann man auch folgende Guldenbrüche

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{5}{10}, \frac{10}{20}, \frac{25}{50}$$

betrachten lassen, die alle aus dem ersten entstehen, indem man darin Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Drückt man jeden dieser Brüche durch Kreuzer aus, so findet man, dass sie alle gleichviel bedeuten.

Durch die Multiplikazion des Zählers und des Nenners eines Bruches wird der Bruch mit größeren Zahlen ausgedrückt; er ändert seine Form, der Wert desselben aber bleibt unverändert. Diese Formveränderung nennt man das Erweitern des Bruches.

Nachdem die Schüler mehrere Brüche mit beliebigen gegebenen Zahlen erweitert, und die Überzeugung erlangt haben, dass man dadurch jeden Bruch ohne Veränderung seines Wertes mit sehr verschiedenen Nennern darstellen könne, welche jedoch alle ein Vielfaches ihres ursprünglichen Nenners sind; werden sie nun angeleitet, jeden vorgelegten Bruch in einen andern mit einem bestimmten Nenner zu verwandeln, und zu diesem Zwecke erst die Erweiterungszahl zu suchen.

Es soll z. B. der Bruch $\frac{5}{8}$ in einen Bruch, dessen Nenner 72 ist, verwandelt werden.

Mündlich: 1 Ganzes $= \frac{72}{72}$, 1 Achtel hat nur den 8ten Theil von 72, also 9 Zweiundsiebzigstel, 5 Achtel sind 5mal 9 = 45 Zweiundsiebzigstel; folglich $\frac{5}{8} = \frac{45}{72}$.

Schriftlich: Entweder durch gleiche Schlüsse, wie beim mündlichen Rechnen. Oder:

Mit welcher Zahl muß man den Nenner des Bruches $\frac{5}{8}$ multiplizieren, damit man im Nenner 72 bekomme? Wie vielmal 8 ist 72, oder, wie oft ist 8 in 72 enthalten? Damit man also den Nenner 72 bekomme, muß der frühere Nenner 8 mit 9 multipliziert werden; was muß dann auch mit dem Zähler geschehen, damit der Wert des Bruches nicht geändert werde? Man hat also

$$1 = \frac{72}{72}. \qquad \text{Oder: } 72 : 8 = 9$$
$$\frac{1}{8} = \frac{9}{72}; \qquad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 9}{8 \times 9} = \frac{45}{72}$$
$$\frac{5}{8} = \frac{45}{72}.$$

Der erste Ansatz schließt sich an den Gedankengang des mündlichen Rechnens an.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 56.

---

§. 106. Gleichnamigmachen der Brüche.

Um Brüche rücksichtlich ihres Wertes vergleichen, um sie addieren und subtrahieren zu können, müßen sie gleiche Nenner haben. Ist dieses noch nicht der Fall, so müßen sie gleichnamig gemacht werden.

Das Gleichnamigmachen der Brüche ist eine Anwendung des Erweiterns derselben; schon bei diesem wurde den Schülern gezeigt, wie ein Bruch mit einem andern gegebenen Nenner, der ein Vielfaches des früheren ist, dargestellt werden könne. Der Lehrer schicke daher auch hier zunächst einige Aufgaben voraus, in denen er selbst den gemeinschaftlichen Nenner angibt, auf den zwei oder mehrere Brüche gebracht werden sollen.

Hierauf erst lasse er von den Schülern selbst den gemeinschaftlichen Nenner, d. i. eine Zahl suchen, welche ein gemeinschaftliches Vielfaches aller gegebenen Nenner, welche also durch alle gegebenen Nenner ohne Rest theilbar ist.

Wenn die Schüler mehrere Zahlen mit einander multiplizieren und dann das Produkt durch jede dieser Zahlen dividieren, so gelangen sie zu der Überzeugung, dass das Produkt mehrerer Zahlen durch jede derselben theilbar ist. Das Produkt zweier oder mehrerer Zahlen ist jedoch nicht immer das kleinste gemeinschaftliche Vielfache derselben. Sind z. B. die Brüche $\frac{3}{8}$ und $\frac{5}{12}$ gegeben, so ist sicher das Produkt $8 \times 12 = 96$ durch 8 und durch 12 theilbar; allein es haben auch die kleineren Zahlen 72, 48 und 24 die Eigenschaft, dass sie sowohl durch 8 als durch 12 theilbar sind. 24 ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner für die Nenner 8 und 12.

Um mit möglichst kleinen Zahlen zu rechnen, pflegt man die Brüche immer mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner darzustellen. Bei der Aufsuchung desselben sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Wenn alle kleineren Nenner in dem größten ohne Rest enthalten sind.

In diesem Falle ist der größte Nenner selbst der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Es seien z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{12}$ gleichnamig zu machen.

Mündlich: Drittel und Viertel lassen sich in Zwölftel verwandeln. $\frac{1}{3} = \frac{4}{12}$, also $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$; $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$, also $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$.

Statt der Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{12}$ haben wir daher $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ und $\frac{5}{12}$.

Schriftlich:

$$1 = \tfrac{12}{12}.$$
$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{4}{12}, \quad \tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{12};$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{12}, \quad \tfrac{3}{4} = \tfrac{9}{12};$$
$$\tfrac{5}{12} = \tfrac{5}{12}.$$

Oder:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 12 & & \\ \hline \frac{2}{3} & 4 & 8 & \frac{8}{12} \\ \frac{3}{4} & 3 & 9 & \frac{9}{12} \\ \frac{5}{12} & 1 & 5 & \frac{5}{12} \end{array}$$

Die erste Darstellungsweise entspricht dem Gedankengange des mündlichen Rechnens.

2. Wenn die Nenner durch keine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind.

Dann ist das Produkt der Nenner zugleich der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{5}$.

Viertel und Fünftel lassen sich in Zwanzigstel verwandeln; $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$, also $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$; $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

Schriftlich: $4 \times 5 = 20$.

$$1 = \tfrac{20}{20}.$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{20}, \quad \tfrac{3}{4} = \tfrac{15}{20};$$
$$\tfrac{1}{5} = \tfrac{4}{20}, \quad \tfrac{2}{5} = \tfrac{8}{20}.$$

Oder:

$$\begin{array}{c|c|c|c} & 20 & & \\ \hline \frac{3}{4} & 5 & 15 & \frac{15}{20} \\ \frac{2}{5} & 4 & 8 & \frac{8}{20} \end{array}$$

3. Wenn alle oder einige Nenner durch eine gemeinschaftliche Zahl theilbar sind.

Es seien z. B. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{13}{20}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Multiplizieren wir alle Nenner mit einander, so ist das Produkt $3 \times 6 \times 15 \times 20$ gewiss ein gemeinschaftlicher Nenner aller Brüche, aber nicht der kleinste. 3 ist in 6 ohne Rest enthalten; die Zahl, welche durch 6 theilbar ist, ist auch durch 3 theilbar. Wir können also aus dem obigen Produkte den Faktor 3, da er schon in 6 vertreten ist, weglassen, und haben dann noch $6 \times 15 \times 20$, was aber auch noch nicht der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist. 6 und 20 sind durch 2 theilbar; wir zerlegen die beiden Zahlen in Faktoren, indem wir sie durch 2 dividieren:

2 in 6 3mal ($6 = 3 \times 2$),
2 in 20 10mal ($20 = 10 \times 2$).

Der Divisor 2 vertritt den Faktor 2 in 6 und in 20, wir brauchen ihn daher neben den Quozienten 3 und 10 statt 2mal nur einmal als Faktor zu setzen, und haben dann noch das Produkt $3 \times 15 \times 10$ mit 2 zu multiplizieren. In diesem Produkte kann wieder der Faktor 3, weil er in 15 enthalten ist, weggelassen werden; dann bleibt noch 15×10 mit 2 zu multiplizieren. Da endlich auch 15 und 10 durch 5 theilbar sind, und dadurch dividiert 3 und 2 zu Quozienten geben, so brauchen wir statt der beiden Zahlen 15 und 10 den Divisor 5 nur einmal und die Quozienten 3 und 2 als Faktoren zu setzen. Es bleiben uns also nur die Quozienten 3 und 2 mit den Divisoren 2 und 5 zu multiplizieren übrig; der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist daher $3 \times 2 \times 5 \times 2 = 60$.

Werden auf diese Art mehrere Beispiele ausführlich behandelt, so abstrahieren daraus die Schüler folgendes Verfahren:

Wenn zwei oder mehrere Nenner der gegebenen Brüche durch dieselbe Zahl theilbar sind, findet man den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, indem man die Nenner neben einander schreibt, diejenigen, die in anderen größeren ohne Rest enthalten sind, sogleich wegläßt, die übrigen so lange durch ihre gemeinschaftlichen Divisoren dividiert, als noch zwei derselben durch die gleiche Zahl theilbar sind, und endlich die zuletzt gebliebenen Zahlen und alle rechts angeschriebenen Divisoren mit einander multipliziert; das Produkt ist der kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Die schriftliche Ausrechnung für das obige Beispiel stellt sich, wie folgt:

$$\begin{array}{r|l} 3,\ 6,\ 15,\ 20 & \\ \hline 3,\ 15,\ 10 & 2 \\ \hline 3,\ \ 2 & 5 \end{array}$$

der kl. g. Nenner ist $3 \times 2 \times 2 \times 5 = 60$.

$$1 = \tfrac{60}{60}.$$
$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{20}{60},\quad \tfrac{2}{3} = \tfrac{40}{60};$$
$$\tfrac{1}{6} = \tfrac{10}{60},\quad \tfrac{5}{6} = \tfrac{50}{60};$$
$$\tfrac{1}{15} = \tfrac{4}{60},\quad \tfrac{7}{15} = \tfrac{28}{60};$$
$$\tfrac{1}{20} = \tfrac{3}{60},\quad \tfrac{13}{20} = \tfrac{39}{60}.$$

Oder:

	60		
$\frac{2}{3}$	20	40	$\frac{40}{60}$
$\frac{5}{6}$	10	50	$\frac{50}{60}$
$\frac{7}{15}$	4	28	$\frac{28}{60}$
$\frac{13}{20}$	3	39	$\frac{39}{60}$

Nachdem die Schüler mit dem Verfahren zur Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners bekannt gemacht wurden, sollen sie diese Kenntnis sofort verwerten, indem man sie die Werte von Brüchen, welche verschiedene Nenner haben und daher gleichnamig gemacht werden müßen, vergleichen läßt.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 56—58.

Die Aufgabe 16 läßt aus dem Bruche $\frac{5}{8}$ die Brüche $\frac{9}{12}$ und $\frac{1}{4}$ bilden; diese drei Brüche, mit einem gleichen Nenner dargestellt, geben $\frac{15}{24}$, $\frac{18}{24}$ und $\frac{6}{24}$, woraus hervorgeht, daß $\frac{9}{12}$ größer, $\frac{1}{4}$ aber kleiner als $\frac{5}{8}$ ist. Diese Aufgabe wird also dem Lehrer zu der Bemerkung Anlaß geben, daß der Wert eines Bruches nicht ungeändert bleibt, wenn man zum Zähler und zum Nenner desselben gleichviel addiert, oder von beiden gleichviel subtrahiert.

---

§. 107. Abkürzen der Brüche.

Daß der Wert eines Bruches ungeändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert, daß z. B. $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ist, wird den Schülern an

Linien und Guldentheilen eben so anschaulich gemacht, wie dieß bei der Erweiterung der Brüche in Bezug auf die Multiplikazion angedeutet wurde.

Die Formveränderung eines Bruches mittels der Division des Zählers und des Nenners durch dieselbe Zahl wird das Abkürzen des Bruches genannt. Durch das Abkürzen wird ein Bruch in kleineren Zahlen dargestellt.

Die Form eines Bruches kann demnach, mit Beibehaltung seines Wertes, auf zweifache Art verändert werden, indem man entweder Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert, oder indem man beide durch dieselbe Zahl dividiert, also durch die Erweiterung oder durch das Abkürzen. Dabei ändern sich zwar die Zahlen, durch welche Zähler und Nenner ausgedrückt sind; der Wert des Bruches bleibt jedoch ungeändert, der Bruch erhält nur eine andere Form. Es kann dadurch der Wert eines jeden Bruches auf unendlich vielfache Art dargestellt werden. Wozu dient das Erweitern der Brüche? Wozu das Abkürzen?

Man bemerke noch, dass zwar ein Bruch mit jeder beliebigen Zahl erweitert, aber nicht durch jede beliebige Zahl abgekürzt werden könne, da der dadurch entstehende Bruch ganze Zahlen zum Zähler und zum Nenner haben soll. Das Abkürzen kann nur durch solche Zahlen vorgenommen werden, durch welche Zähler und Nenner theilbar sind.

Bei kleineren Zahlen werden die Schüler sogleich anzugeben wissen, durch welche Zahlen sie theilbar sind. Für größere Zahlen gibt es besondere Kennzeichen, an denen man erkennen kann, ob sich dieselben durch eine bestimmte andere Zahl ohne Rest theilen lassen.

Wir lassen diese Kennzeichen, mit denen die Schüler hier bekannt gemacht werden sollen, nachstehend folgen und fügen denselben auch eine kurze Begründung bei.

1. 2 ist in 10 ohne Rest enthalten, daher auch in allen Vielfachen von 10, also in 20, 30, 40, . . ., in 100, 200, 300, . . ., in 1000, 2000, 3000, u. s. w. Wenn also eine

Zahl bloß aus Zehnern, Hunderten, Tausenden, . . . zusammengesetzt ist, so ist sie gewiss durch 2 theilbar. Wenn nun von einer Zahl, welche man durch 2 dividiert, etwas übrig bleibt, so kann dieses nur von den Einern herkommen. Daher darf man, um zu erfahren, ob eine Zahl durch 2 theilbar sei, nur die Ziffer der Einer berücksichtigen; steht an der Stelle der Einer 0 oder eine durch 2 theilbare Zahl, nämlich 2, 4, 6 oder 8, so muß auch die ganze Zahl durch 2 theilbar sein.

2. Durch 3 ist eine Zahl theilbar, wenn die Summe ihrer Ziffern durch 3 theilbar ist. Jede Zahl ist nämlich ein Vielfaches von 9, also auch von 3, vermehrt um die Ziffersumme dieser Zahl. Die Zahl 2475 z. B. besteht aus folgenden Theilen:

$$\begin{aligned} 2000 &= 2 \times 1000 = 2 \times 999 + 2 \\ 400 &= 4 \times 100 = 4 \times 99 + 4 \\ 70 &= 7 \times 10 = 7 \times 9 + 7 \\ 5 &= \ldots\ldots\ldots\ 5 \end{aligned}$$

In 999 ist nun 3 ohne Rest enthalten, daher auch in 2 × 999; ebenso geht 3 in 99, folglich auch in 4 × 99 ohne Rest auf; ferner ist 9 durch 3 theilbar, daher auch 7 × 9. Es bleibt daher noch die Ziffernsumme 2 + 4 + 7 + 5 = 18 übrig, und da diese durch 3 theilbar ist, so ist es auch die ganze Zahl 2475.

Man bemerke noch den Schülern, dass sie bei der Addizion der Ziffern die Ziffern 3, 6, 9 ganz übergehen können.

3. 4 ist in 100 ohne Rest enthalten, daher auch in den Vielfachen von 100, also in 200, . . ., in 1000, 2000, 3000 u. s. f. Es sind also die Hunderte, Tausende, . . . einer Zahl jedesmal durch 4 theilbar. Sind nun auch die Zehner und Einer, d. i. die zwei niedrigsten Stellen, als Zahl betrachtet, durch 4 theilbar, so muß auch die ganze Zahl durch 4 theilbar sein.

4. Durch 5 sind die Zehner, Hunderte, Tausende, . . . einer jeden Zahl theilbar. Es kommt also nur noch auf die Einer an; sind entweder 0 Einer da, oder 5 Einer, so ist die ganze Zahl durch 5 theilbar; sonst nicht.

5. Wenn eine Zahl nicht nur durch 2, sondern auch durch 3 theilbar ist, so muß sie auch durch 2×3 d. i. durch 6 theilbar sein. Welche Zahlen sind aber durch 2, und welche durch 3 theilbar? Durch 6 sind also alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

6. Durch 9 ist jede Zahl theilbar, deren Ziffernsumme durch 9 theilbar ist. Denn jede Zahl ist ein Vielfaches von 9, vermehrt um die Ziffernsumme dieser Zahl. So besteht die Zahl 3527 aus folgenden Theilen:

$$
\begin{aligned}
3000 &= 3 \times 1000 = 3 \times 999 + 3 \\
500 &= 5 \times 100 = 5 \times 99 + 5 \\
20 &= 2 \times 10 = 2 \times 9 + 2 \\
7 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7
\end{aligned}
$$

Nun ist 9 in 999, 99, 9 ohne Rest enthalten, daher auch in 3×999, 5×99, 2×9; und folglich auch in der Summe dieser Zahlen. Es bleibt also nur noch die Ziffernsumme $3 + 5 + 2 + 7 = 17$ übrig; da nun diese durch 9 nicht theilbar ist, so ist auch die ganze Zahl 3527 durch 9 nicht theilbar.

7. 10 ist in allen Zehnern, Hunderten, Tausenden . . . ohne Rest enthalten. Sind nun in einer Zahl keine Einheiten vorhanden, so ist dieselbe durch 10 theilbar.

Die Kennzeichen für die Theilbarkeit durch andere, als die bisher betrachteten Zahlen sind minder einfach, und erfordern mehr Zeit zum Erklären, als sie deren in der praktischen Anwendung ersparen.

Die in dem Vorstehenden begründeten Kennzeichen für die Theilbarkeit der Zahlen werden an Beispielen bis zur Geläufigkeit eingeübt, und sodann auf das Abkürzen der Brüche angewendet.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 58—60.

---

§. 108. Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und umgekehrt.

Hier werden die Schüler zunächst auf den Unterschied und die Beziehung zwischen den Dezimal- und gemeinen Brüchen aufmerksam gemacht. Die gemeinen Brüche können was immer für eine ganze Zahl zum Nenner haben, der Nenner der Dezimalbrüche kann nur 10, 100, 1000, . . . überhaupt 1 mit darauf folgenden Nullen sein. Bei den gemeinen Brüchen wird der Nenner unter den Zähler angeschrieben, und zwischen beide ein Strich gesetzt; bei den Dezimalbrüchen fällt dieser Strich, sowie der Nenner weg, es wird nur der Zähler angeschrieben, und der Nenner bloß dadurch angezeigt, daſs man in dem Zähler von der Rechten angefangen durch einen Punkt so viele Ziffern als Dezimalen abschneidet, als im Nenner Nullen neben der Einheit vorkommen.

a) Gemeine Brüche in Dezimalbrüche zu verwandeln.

Jeder gemeine Bruch kann in einen Dezimalbruch verwandelt, d. h. durch Ganze, Zehntel, Hundertel, Tausendtel u. s. w. ausgedrückt werden.

Bei einigen Brüchen ist diese Verwandlung ganz einfach. Es sei z. B. $\frac{1}{2}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln. Wie viel Zehntel hat ein Ganzes? Wie viel Zehntel hat daher ein Halbes? Es ist also

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{10} = 0{\cdot}5.$$

Verwandle $\frac{3}{4}$ in Hundertel. Ein Ganzes hat 100 Hundertel, $\frac{1}{4}$ hat 25 Hundertel, $\frac{3}{4}$ sind 75 Hundertel; folglich $\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{\cdot}75$.

Bei anderen Brüchen, welche sich nicht so einfach in Dezimalbrüche verwandeln lassen, darf man nur das ausführen, was der Bruch in der Auffassung als Quozient anzeigt, nämlich den Zähler durch den Nenner wirklich dividieren; dadurch erhält man nebst den Ganzen folgeweise die Zehntel, Hundertel, . . ., wenn man nur den jedesmaligen Rest entsprechend resolviert, was beim schriftlichen Rechnen durch Anhängen einer Null geschieht. Um z. B. $\frac{5}{8}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln, verfährt man, wie folgt:

$$
\begin{array}{l}
\frac{5}{8} = 5_0 : 8 = 0{\cdot}625 \\
\qquad\quad 20 \\
\qquad\quad\;\; 40 \\
\qquad\quad\;\;\; ⸗
\end{array}
$$

Der 8te Theil von 5 Ganzen sind 0 Ganze; man schreibt in den Quozienten die 0 und setzt den Dezimalpunkt dazu. 5 Ganze = 50 Zehntel; der 8te Theil von 50 Zehnteln sind 6 Zehntel, Rest 2 Zehntel. 2 Zehntel = 20 Hundertel; der 8te Theil von 20 Hunderteln sind 2 Hundertel, Rest 4 Hundertel. 4 Hundertel = 40 Tausendtel; der 8te Theil von 40 Tausendteln sind genau 5 Tausendtel. Der 8te Theil von 5 ist also = $0{\cdot}625$.

Es soll nun der unechte Bruch $\frac{357}{25}$ in einen Dezimalbruch verwandelt werden. Dividiert man 357 durch 25, so erhält man zunächst 14 Ganze zum Quozienten und 7 Ganze zum Reste.

$$
\begin{array}{l}
\frac{357}{25} = 357 : 25 = 14{\cdot}28 \\
\qquad\quad 107 \\
\qquad\qquad 70 \\
\qquad\qquad 200 \\
\qquad\qquad\quad ⸗
\end{array}
$$

7 Ganze sind 70 Zehntel; diese durch 25 dividiert geben 2 Zehntel, welche man in den Quozienten schreibt, nachdem man nach den 14 Ganzen den Dezimalpunkt angebracht hat, und es bleiben noch 20 Zehntel durch 25 zu dividieren übrig. 20 Zehntel sind 200 Hundertel, welche

durch 25 dividiert 8 Hundertel zum Quozienten geben und keinen Rest zurücklassen. Es ist daher $\frac{357}{25} = 14{\cdot}28$.

Bisher sind solche Beispiele gewählt worden, wo die Division zuletzt ohne Rest aufgeht, was nur dann eintritt, wenn der Nenner des gemeinen Bruches 2 oder 5 oder ein Produkt ist, das keinen von 2 und 5 verschiedenen Faktor enthält. Nun lege man auch Brüche vor, bei denen dieses nicht stattfindet, und die sich daher nicht ganz genau in Dezimalbrüche verwandeln lassen. Die Schüler werden bald bemerken, dass in diesem Falle bei fortgesetzter Division in dem daraus hervorgehenden Dezimalbruche dieselben Ziffern wiederkehren. Es wird ihnen auch gesagt, dass solche Dezimalbrüche periodische Dezimalbrüche heißen, und dass die Periode entweder gleich mit der ersten oder auch erst mit einer späteren Dezimalstelle beginnt.

Eine nähere Untersuchung über die Beschaffenheit der periodischen Dezimalbrüche erscheint übrigens weder der Bildungsstufe, noch dem Bedürfnisse der Schüler angemessen; es genügt zu bemerken, dass wenn auch solche Dezimalbrüche den Wert der gemeinen Brüche nur annäherungsweise bestimmen, sie darum doch nicht minder brauchbar sind, indem für die gewöhnlichen praktischen Aufgaben meistens schon einige wenige Dezimalstellen hinreichen, und die weiter folgenden, da sie auf das Ergebnis der Rechnung von keinem bedeutenden Einflusse sind, weggelassen werden können; nur müße man in solchen abgekürzten Dezimalbrüchen die niedrigste noch beibehaltene Dezimale um 1 vergrößern, wenn die nächstfolgende Dezimale, die man weglässt, 5 oder größer als 5 ist (§. 84, b, Schlussbemerkung).

---

b) Dezimalbrüche in gemeine Brüche zu verwandeln.

Wir unterscheiden zwei Hauptfälle.

1. Wenn der Dezimalbruch ein geschlossener, also kein periodischer ist.

Die Verwandlung in einen gemeinen Bruch ist hier ganz einfach. Man braucht nur den Dezimalbruch mit Angabe der Benennung seiner letzten Dezimalstelle auszusprechen und den so ausgesprochenen Dezimalbruch in Form eines gemeinen Bruches anzuschreiben, welcher dann, wenn es möglich ist, abgekürzt wird. Z. B.

Der Dezimalbruch 0·48 wird ausgesprochen: 48 Hundertel; wird dieses angeschrieben, so hat man

$$0{\cdot}48 = \tfrac{48}{100} = \tfrac{12}{25}.$$

$$4{\cdot}325 = 4\tfrac{325}{1000} = 4\tfrac{65}{200} = 4\tfrac{13}{40}.$$

2. Wenn der Dezimalbruch ein periodischer ist.

Ist der Dezimalbruch rein periodisch, d. h. beginnt die Periode mit der ersten Dezimalstelle, so multipliziert man den Dezimalbruch mit 10, 100, 1000, . . ., je nachdem die Periode 1, 2, 3, . . . Ziffern hat, und subtrahiert von dem Produkte den gegebenen Dezimalbruch; dadurch erhält man den 9fachen, 99fachen, 999fachen, . . . Wert des Dezimalbruches, und daraus durch die Division den einfachen Wert, d. i. den gesuchten gemeinen Bruch.

Ist z. B. 0·696969 . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so hat man

$$\begin{array}{rcl} \text{100facher Wert} & = & 69{\cdot}6969\ldots \\ \text{davon 1facher ,,} & = & 0{\cdot}6969\ldots \\ \hline \text{bleibt 99facher Wert} & = & 69 \\ \text{also 1facher Wert} & = & \tfrac{69}{99} = \tfrac{23}{33}. \end{array}$$

Aus mehreren solchen Beispielen ersehen die Schüler, daß der Zähler des gemeinen Bruches die Periode ist, der Nenner aber aus so vielen 9 besteht, als die Periode Ziffern hat.

Ist dagegen der Dezimalbruch gemischt periodisch, d. h. gehen der Periode noch andere Dezimalen voran, so multipliziert man den Dezimalbruch zuerst mit 100, 1000, 10000, je nachdem die Periode und die ihr vorangehenden Dezimalen zusammen 2, 3, 4, . . . Ziffern enthalten, dann noch mit 10, 100, 1000, . . ., je nachdem der Periode 1, 2, 3, . . . Ziffern vorangehen, und subtrahiert das zweite Produkt von dem ersten; dadurch erhält man ein Vielfaches von dem Werte des Dezimalbruches, und daraus durch die Division den einfachen Wert.

Es sei z. B. 0·3545454 . . in einen gemeinen Bruch zu verwandeln.

1000facher Wert	=	354·54 . .
davon 10facher „	=	3·54 . .
bleibt 990facher Wert	=	351
also 1facher Wert	=	$\frac{351}{990} = \frac{39}{110}$.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 60—62.

§. 109. Addieren der Brüche.

Ist das Bisherige gründlich aufgefasst worden, so bieten nun die vier Rechnungsarten mit Brüchen keine Schwierigkeit mehr.

a) Bei der Addizion wählt man zuerst solche Brüche, welche gleiche Nenner haben. Der Nenner ist der Name der Bruchtheile. Sowie 3 Gulden und 2 Gulden zusammen 5 Gulden betragen, so geben auch 3 Siebentel und 2 Siebentel zusammengenommen 5 Siebentel, oder schriftlich $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Gleichnamige Brüche werden also addiert, indem man ihre Zähler addiert und die erhaltene Summe als Zähler annimmt, als Nenner aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

Wenn die Summe ein unechter Bruch ist, verwandelt man ihn in eine gemischte Zahl.

Sind gemischte Zahlen zu addieren, so wird man im Kopfe zuerst die Ganzen und dann die Brüche zusammenzählen, beim Zifferrechnen aber früher die Addizion der Brüche verrichten, und dann erst die Ganzen addieren, zu denen auch die in der Summe der Brüche etwa erhaltenen Ganzen dazuzuzählen sind.

---

b) Um ungleichnamige Brüche addieren zu können, muß man sie früher auf einen gemeinschaftlichen Nenner bringen. Z. B.

Wie viel ist $\frac{3}{5}$ und $\frac{7}{8}$?

Mündlich: Fünftel und Achtel kann man als solche nicht zusammenzählen; man muß sie in gleiche Bruchtheile verwandeln. Fünftel und Achtel lassen sich in Vierzigstel verwandeln. $\frac{1}{5} = \frac{8}{40}$, $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$; $\frac{1}{8} = \frac{5}{40}$, $\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$; $\frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$.

Schriftlich:

$\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$,
$\frac{7}{8} = \frac{35}{40}$,
$\frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40} = 1\frac{19}{40}$.

Oder:

$$\begin{array}{r|r|l} & 40 & \\ \frac{3}{5} & 8 & 24 \\ \frac{7}{8} & 5 & 35 \\ \hline & & 59 : 40 = 1\frac{19}{40}. \\ & & 19 \end{array}$$

Man kann auch die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche verwandeln und dann diese addieren.

$\frac{3}{5} = 0{\cdot}6$, $\frac{7}{8} = 0{\cdot}875$; $0{\cdot}6 + 0{\cdot}875 = 1{\cdot}475$.

Addiere die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$ und $\frac{9}{10}$.

$$\begin{array}{l} 3,\ 8,\ 10 \\ \hline 3,\ 4,\ \ 5 \mid 2 \end{array}$$

Der kl. g. Nenner ist
$3 \times 4 \times 5 \times 2 = 120$

$$\begin{array}{r|r|l} & 120 & \\ \frac{2}{3} & 40 & 80 \\ \frac{5}{8} & 15 & 75 \\ \frac{9}{10} & 12 & 108 \\ \hline 2\frac{23}{120} & & 263 : 120 = 2 \\ & & 23 \end{array}$$

Hier kann man die Schüler auch aufmerksam machen, dass in der Vorschrift für das Addieren der gemeinen Brüche auch das oben (IV. Abth. §. 83) für die Dezimalbrüche entwickelte Addizionsverfahren enthalten ist. Um gemeine Brüche zu addieren, bringt man sie zuerst auf einen gemeinschaftlichen Nenner, addiert dann die Zähler, und setzt unter die Summe derselben den gemeinschaftlichen Nenner. Dasselbe geschieht bei den Dezimalbrüchen. Durch Anhängung von Nullen werden diese mit gleich vielen Dezimalstellen, also mit einem gemeinschaftlichen Nenner dargestellt; denkt man sich dann die Dezimalpunkte weg, so stellen diese Zahlen die Zähler der Dezimalbrüche vor; werden nun dieselben als ganze Zahlen addiert, so muß die Summe wieder den gemeinschaftlichen Nenner erhalten, d. h. man muß von ihr so viele Ziffern als Dezimalen abschneiden, als ihrer leder einzelne Dezimalbruch enthält.

Sind gemeine und Dezimalbrüche zu addieren, so verwandelt man entweder die Dezimalbrüche in gemeine, oder, was meistens zweckmäßiger ist, die gemeinen Brüche in Dezimalbrüche, und verrichtet dann die Addizion.

Das Zusammenzählen von mehrnamigen Zahlen, in denen die niedrigste Benennung auch Brüche enthält, bietet nichts Neues.

Zuletzt folgen angewandte Aufgaben.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 62—64.

---

§. 110. Subtrahieren der Brüche.

Auch beim Subtrahieren wird nur das, was die Schüler an den gewöhnlichsten Brüchen schon im Vorbereitungskursus geübt haben, wiederholt und auf Brüche mit beliebigen Nennern ausgedehnt.

a) Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert, und den Rest als Zähler annimmt, als Nenner aber den gemeinschaftlichen Nenner beibehält.

$$\frac{6}{7} - \frac{4}{7} = \frac{2}{7}.$$

Ist ein Bruch oder eine gemischte Zahl von einer ganzen Zahl zu subtrahieren, so nimmt man von der letzteren ein Ganzes und löst es in einen Bruch von dem im Subtrahend gegebenen Nenner auf, worauf die Subtrakzion vollzogen werden kann.

Z. B. Wie viel ist $8 - \frac{13}{20}$?

$8 = 7\frac{20}{20}$
$7\frac{20}{20} - \frac{13}{20} = 7\frac{7}{20}$

Oder:
$$\begin{array}{r|r} 8 & 20 \\ \frac{13}{20} & 13 \\ \hline 7\frac{7}{20} & 7 \end{array}$$

Es kann auch folgendes Verfahren angewendet werden: Man ergänzt den Bruch des Subtrahends zu 1 Ganzen, setzt die hinzugefügte Ergänzung in den Rest und vermehrt den Subtrahend um 1 Ganzes, worauf die Ganzen subtrahiert werden.

Z. B. Wie viel ist $15 - 6\frac{11}{16}$?

$$\begin{array}{r} 15 \\ 6\frac{11}{16} \\ \hline 8\frac{5}{16} \end{array}$$

$\frac{11}{16}$ und $\frac{5}{16}$ ist 1 Ganzes, $\frac{5}{16}$ wird in den Rest geschrieben; 1 und 6 ist 7, und 8 ist 15. Der Unterschied bleibt nämlich ungeändert, wenn man den Minuend und den Subtrahend um dieselbe Zahl (hier $\frac{5}{16}$) vermehrt; $15 - 6\frac{11}{16} = 15\frac{5}{16} - 7 = 8\frac{5}{16}$.

Sind Minuend und Subtrahend gemischte Zahlen, so subtrahiert man im Kopfe zuerst die Ganzen, dann den Bruch des Subtrahends; beim schriftlichen Rechnen werden früher die Brüche und dann erst die ganzen Zahlen subtrahiert.

Z. B. Wie viel ist $70\frac{5}{16} - 25\frac{11}{16}$?

Im Kopfe: Von $70\frac{5}{16}$ zuerst 25 weg, bleiben $45\frac{5}{16}$, oder $44\frac{21}{16}$; davon $\frac{11}{16}$ weg, bleiben $44\frac{10}{16} = 44\frac{5}{8}$.

Schriftlich:
$$\begin{array}{r|l}
 & \overset{16}{5} \\
70\frac{5}{16} & \overline{\ \ 21} \\
25\frac{11}{16} & 11 \\
\hline
44\ \frac{5}{8} & \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.
\end{array}$$

---

b) Ungleichnamige Brüche müßen, um sie subtrahieren zu können, früher gleichnamig gemacht werden. Z. B.

1. $\frac{17}{24} - \frac{11}{18} = ?$
$$\begin{array}{r}
24,\ 18 \\
\hline
4,\ \ 3 \mid 6
\end{array}$$
$$4 \times 3 \times 6 = 72$$
$$\begin{array}{c|c|c}
 & 72 & \\
\frac{17}{24} & 3 & 51 \\
\frac{11}{18} & 4 & 44 \\
\hline
\frac{7}{72} & & 7
\end{array}$$

2. $125\frac{13}{20} - 31\frac{5}{6} = ?$
$$\begin{array}{r}
20,\ 6 \\
\hline
10,\ 3 \mid 2
\end{array}$$
$$10 \times 3 \times 2 = 60$$
$$\begin{array}{r|r|r}
 & 60 & \\
125\frac{13}{20} & 3 & \overset{60}{39} \\
 & & \overline{\ 99} \\
31\ \frac{5}{6} & 10 & 50 \\
\hline
93\frac{49}{60} & & 49
\end{array}$$

Hier kann den Schülern bemerkt werden, dass mit dem Verfahren, welches bei der Subtrakzion der gemeinen Brüche angewendet wird, auch das Subtrahieren der Dezimalbrüche vollkommen übereinstimmt.

Nun folgen noch mehrseitige praktische Anwendungen dieser Rechnungsart mit ein- und mehrnamigen Zahlen.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 65—67.

---

§. 111. Multiplizieren der Brüche.

a) Multiplikazion eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Den Schülern ist schon oben (§. 104) gezeigt worden, daſs ein Bruch mit einer ganzen Zahl multipliziert wird, indem man entweder den Zähler mit derselben multipliziert, oder den Nenner durch dieselbe dividiert, und daſs das zweite Verfahren nur in seltenen Fällen anwendbar ist. Hier sind darüber Wiederholungsübungen vorzunehmen, in denen auch hervorzuheben ist, daſs ein Bruch mit seinem Nenner multipliziert den Zähler zum Produkte gibt.

Ist eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren, so multipliziert man im Kopfe zuerst die Ganzen, dann den Bruch der gemischten Zahl, und zählt, wenn bei der Multiplikazion des Bruches auch Ganze herauskommen, diese zu dem Produkte der Ganzen dazu. Beim Zifferrechnen multipliziert man früher den Bruch und dann die Ganzen, oder man verwandelt die gemischte Zahl in einen unechten Bruch und multipliziert diesen mit der ganzen Zahl. Z. B.

Mündlich: Wie viel ist 9mal $8\frac{3}{4}$?

9mal 8 ist 72, 9mal $\frac{3}{4}$ ist $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$; 72 und $6\frac{3}{4}$ ist $78\frac{3}{4}$.

Schriftlich: Wie viel ist 39mal $23\frac{13}{22}$?

$23\frac{13}{22} \times 39$	
23	13
39	39
207	117
69	39
897	$507 : 22 = 23\frac{1}{22}$
$23\frac{1}{22}$	67
$920\frac{1}{22}$	1

Oder: $23\frac{13}{22} = \frac{519}{22}$

22	519
46	39
46	4671
506	1557
13	$20241 : 22 = 920\frac{1}{22}$
519	44
	1

b) Multiplikazion einer Zahl mit einem Bruche.

Viele Lehrer pflegen über diesen Fall ganz leicht hinwegzugehen, indem sie z. B. bei der Bestimmung des Produktes $4 \times \frac{2}{3}$, auf die Vertauschbarkeit der Faktoren hinweisend, ihren Schülern sagen: ihr wisset, wie der Bruch $\frac{2}{3}$ mit der ganzen Zahl 4 multipliziert wird; nun ist aber $4 \times \frac{2}{3}$ eben so viel als $\frac{2}{3} \times 4$; also könnet ihr nun auch eine ganze Zahl mit einem Bruche multiplizieren. Dagegen wäre nichts einzuwenden, wenn die Schüler wirklich überzeugt wären, dass $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4$ ist; allein eben um diese Gleichheit einzusehen, müßen die Schüler nicht nur die Beschaffenheit des Produktes $\frac{2}{3} \times 4$, sondern auch jene des Produktes $4 \times \frac{2}{3}$ bereits kennen. Es ist also nothwendig, dass auch dieser letztere Fall der Multiplikazion besonders betrachtet werde.

Die richtige Bedeutung der Multiplikazion mit einem Bruche läßt sich am besten an Aufgaben mit benannten Zahlen auffassen.

1 Meter kostet 48 Kr.; wie viel kostet $\frac{1}{2}$ Meter? — Wenn ihr erfahren wolltet, wie viel 3 Meter kosten, wie oft müßtet ihr 48 Kr. nehmen? Ihr müßtet also 48 Kr. mit 3 multiplizieren. Um nun den Preis für $\frac{1}{2}$ Meter zu erhalten, müßet ihr 48 Kr. mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren. Was bedeutet aber das Produkt 48 Kr. $\times \frac{1}{2}$? Das ersehet ihr sogleich aus der wirklichen Lösung der Aufgabe. $\frac{1}{2}$ Meter ist die Hälfte von 1 Meter; $\frac{1}{2}$ Meter kostet daher nur die Hälfte von 48 Kr. Wie findet ihr aber die Hälfte von 48 Kr.? Es ist also

$$48 \text{ Kr.} \times \tfrac{1}{2} = 48 \text{ Kr.} : 2 = 24 \text{ Kr.}$$

Eine Zahl mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren bedeutet also so viel, als diese Zahl durch 2 dividieren.

An ähnlichen Aufgaben wird ersichtlich gemacht, dass eine Zahl mit $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, . . . multiplizieren so viel heißt, als dieselbe durch 3, 4, 5, . . . dividieren.

1 Kilogramm kostet 72 Kr.; wie viel kosten $\frac{3}{4}$ Kilogramm? — Wenn 1 Kilogramm 72 Kr. kostet, so kosten $\frac{3}{4}$ Kilogramm 72 Kr. $\times$ $\frac{3}{4}$. Was dieses Produkt bedeutet, ersieht man, wenn man die Aufgabe auf die gewöhnliche Weise auflöst, nämlich:

$\frac{1}{4}$ Kil. kostet den 4ten Theil von 72 Kr., also $\frac{72}{4}$ Kr.; $\frac{3}{4}$ Kil. kosten 3mal so viel als $\frac{1}{4}$ Kil., also $\frac{72}{4}$ Kr. $\times$ 3; folglich ist 72 Kr. $\times \frac{3}{4} = \frac{72}{4}$ Kr. $\times 3 = 18$ Kr. $\times 3 = 54$ Kr.

Eine Zahl mit $\frac{3}{4}$ multiplizieren heißt also, den 4ten Theil dieser Zahl 3mal nehmen.

Nach einigen derartigen Beispielen sehen die Schüler ein, dass eine Zahl mit einem Bruche multipliziert wird, indem man sie durch seinen Nenner dividiert und mit seinem Zähler multipliziert.

Anfängern, die sich unter dem Multiplizieren immer ein Vermehren vorstellen, kommt es befremdend vor, dass eine Zahl durch das Multiplizieren mit einem echten Bruche verkleinert wird. Der Grund davon ist jedoch sehr einfach. Wenn man eine Zahl 1mal, d. i. ganz nimmt, so erhält man die Zahl selbst. Wird aber eine Zahl mit einem echten Bruche z. B. mit $^3/_4$ multipliziert, so hat man nur den 4ten Theil derselben 3mal zu nehmen. Wie vielmal den 4ten Theil einer Zahl müßte man nehmen, um die Zahl ganz zu erhalten? Wenn man aber den 4ten Theil nur 3mal nimmt, wird man auch da die Zahl ganz erhalten? Offenbar nicht, sondern weniger.

Es soll ferner ein Bruch mit einem Bruche, z. B. $\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{8}$ multipliziert, d. h. es soll von $\frac{3}{4}$ der achte Theil 5mal genommen werden. Man muß hier zuerst den 8ten Theil von $\frac{3}{4}$ suchen. Der 8te Theil von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{32}$, von $\frac{3}{4}$ also $\frac{3}{32}$. $\frac{3}{32}$ 5mal genommen gibt $\frac{15}{32}$; also ist $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}$. Vergleicht man dieses Produkt mit den beiden gegebenen Brüchen, so sieht man, dass der Zähler des ersten mit dem Zähler des zweiten multipliziert wurde, und dieses Produkt als Zähler des gesuchten Produktes erscheint; und dass ebenso das Produkt aus den Nennern der beiden Brüche den Nenner des Bruches, welcher das Produkt vorstellt, bildet.

Ein Bruch wird daher mit einem Bruche multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert; das Produkt der Zähler wird als Zähler, das Produkt der Nenner als Nenner des gesuchten Produktes angenommen.

Da in vielen Fällen die Zähler und die Nenner der beiden Brüche sich gegenseitig abkürzen lassen, so ist es gut, das Produkt aus den Zählern und jenes aus den Nennern zuerst bloß anzuzeigen, und dann die Abkürzungen noch vor der Multiplikazion vorzunehmen; z. B.

$$\tfrac{4}{9} \times \tfrac{15}{42} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \times \overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{3}{\cancel{9}} \times \underset{21}{\cancel{42}}} = \tfrac{10}{63}.$$

Solche Abkürzungen stellen sich besonders vortheilhaft heraus, wenn mehr als zwei Brüche miteinander zu multiplizieren sind; z. B.

$$\tfrac{3}{4} \times \tfrac{10}{27} \times \tfrac{12}{25} = \frac{\cancel{3} \times \overset{2}{\cancel{10}} \times \overset{3}{\cancel{12}}}{\cancel{4} \times \underset{\underset{3}{9}}{\cancel{27}} \times \underset{5}{\cancel{25}}} = \tfrac{2}{15}.$$

Der Lehrer wird hier zugleich bemerken, dass auch die Regel für die Multiplikazion der Dezimalen nichts anderes als eine Anwendung des Verfahrens enthält, welches bei der Multiplikazion der gemeinen Brüche vorkommt. Indem man nämlich die Dezimalbrüche nach Weglassung der Dezimalpunkte als ganze Zahlen multipliziert, bewerkstelliget man eigentlich die Multiplikazion der Zähler der Dezimalbrüche; und indem man von diesem

Produkte so viele Dezimalen abschneidet, als ihrer die beiden Faktoren enthalten, wird dem Produkte der Zähler ein Nenner gegeben, welcher das Produkt der Nenner der beiden Dezimalbrüche ist. Es wird also auch hier Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multipliziert. Z. B.

$$3{\cdot}521 \times 0{\cdot}93 = \tfrac{3621}{1000} \times \tfrac{93}{100} = \frac{3521 \times 93}{100000} = \tfrac{327453}{100000}$$
$$= 3{\cdot}27453.$$

Ist endlich *eine gemischte Zahl mit einem Bruche oder einer gemischten Zahl zu multiplizieren*, so lasse man die Schüler zuerst die gemischte Zahl zu einem unechten Bruche einrichten, und dann die Multiplikazion verrichten.

Jeder der hier angeführten Fälle ist an mehreren Aufgaben zur Anwendung zu bringen.

Übungsaufgaben im IV. Rechenbuche S. 67—72.

§. 112. Dividieren der Brüche.

a) *Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.*

Dieser Fall wurde schon oben (§. 104) betrachtet; die Schüler wissen bereits, dass *ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert* wird, indem man entweder den Zähler durch dieselbe dividiert, oder den Nenner mit derselben multipliziert; dass jedoch das erste Verfahren nur selten zur Anwendung kommt.

Indem dieser Fall hier an mehreren Beispielen wiederholt zu üben ist, wird den Schülern auch bemerkt, dass man bei der Division einer gemischten Zahl durch eine ganze Zahl entweder die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann die Division vollzieht, oder unmittelbar zuerst die Ganzen und dann den Bruch der gemischten Zahl dividiert; der Rest, der sich etwa bei der Division der Ganzen ergibt, wird mit dem angehängten Bruche als eine gemischte Zahl zu einem unechten Bruche eingerichtet, den man dann durch die ganze Zahl dividiert.

Ist z. B. $89\frac{5}{6}$ durch 12 zu dividieren, so hat man:

$$89\frac{5}{6} : 12 = \frac{539}{6} : 12 = \frac{539}{72} = 539 : 72 = 7\frac{35}{72};$$

Oder:

$$\begin{array}{l} 89\frac{5}{6} : 12 = 7\frac{35}{72}. \\ \underline{5\frac{5}{6}} \\ \frac{35}{6} : 12 = \frac{35}{72} \end{array}$$

---

b) Division einer Zahl durch einen Bruch.

Ganz einfach und leicht verständlich ist in diesem Falle die Division im Sinne des Messens. Dividend und Divisor müßen, wenn sie nicht schon gleichnamige Brüche sind, mit einem gemeinschaftlichen Nenner dargestellt werden. Z. B.

Wie oft ist $\frac{2}{3}$ in 8 enthalten? — Man bringt hier die ganze Zahl 8 auf Drittel, dadurch erhält man $\frac{24}{3}$; 2 Drittel sind nun in 24 Dritteln so oft enthalten, als 2 in 24, also 12mal, folglich

$$8 : \frac{2}{3} = \frac{24}{3} : \frac{2}{3} = 24 : 2 = 12.$$

Wie oft sind $\frac{7}{9}$ in $32\frac{2}{3}$ enthalten? — Werden die Brüche gleichnamig gemacht, so erhält man $\frac{7}{9}$ und $\frac{294}{9}$; 7 Neuntel sind in 294 Neunteln so oft, als 7 in 294, also 42mal enthalten; somit

$$32\frac{2}{3} : \frac{7}{9} = \frac{98}{3} : \frac{7}{9} = \frac{294}{9} : \frac{7}{9} = 42.$$

Man darf also nur Dividend und Divisor zuerst gleichnamig machen und dann die Zähler dividieren, indem gleichnamige Brüche so oft in einander enthalten sind als ihre Zähler.

Schwieriger ist die Auffassung der Division durch einen Bruch im Sinne des Theilens. Die Bedeutung einer solchen Division kann am besten aus der Lösung angewandter Aufgaben hergeleitet werden. Z. B.

$\frac{1}{4}$ Meter kostet 16 Kr.; wie viel kostet 1 Meter? — Wenn 4 Meter 16 Kr. kosteten, so würde 1 Meter den 4ten Theil von 16 Kr. kosten, man müßte also 16 Kr. durch 4 dividieren; kostet nun $\frac{1}{4}$ Meter 16 Kr., so wird man, um den Preis für 1 Meter zu erhalten, 16 Kr. durch $\frac{1}{4}$ dividieren; 1 Meter kostet also 16 Kr. : $\frac{1}{4}$.

Was diese Division bedeutet, ergibt sich sogleich, wenn man die Aufgabe auf die gewöhnliche Weise auflöst. Kostet $\frac{1}{4}$ Meter 16 Kr., so kostet 1 Meter 4mal so viel, man muß daher 16 Kr. mit 4 multiplizieren; also ist

$$16 \text{ Kr.} : \tfrac{1}{4} = 16 \text{ Kr.} \times 4 = 64 \text{ Kr.}$$

Aus ähnlichen Aufgaben folgern die Schüler, dass eine Zahl durch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, . . . dividieren so viel bedeutet, als sie mit 2, 3, 4, . . . multiplizieren.

$\frac{5}{8}$ Kilogramm kosten 45 Kr.; wie hoch kommt 1 Kilogramm? — Man muß 45 Kr. durch $\frac{5}{8}$ dividieren, also kostet 1 Kilogramm 45 Kr. : $\frac{5}{8}$. Andererseits rechnet man:

$\frac{1}{8}$ Kilogr. kostet den 5ten Theil von 45 Kr. $= \frac{45}{5}$ Kr.
1 Kilogr. kostet 8mal so viel, daher $\frac{45}{5}$ Kr. $\times$ 8; also ist
$45 \text{ Kr.} : \frac{5}{8} = \frac{45}{5} \text{ Kr.} \times 8 = 9 \text{ Kr.} \times 8 = 72 \text{ Kr.}$

Aus mehreren solchen Aufgaben werden die Schüler ersehen, dass von dem Dividende der sovielte Theil, als der Zähler des Divisors anzeigt, so vielmal genommen werden müße, als der Nenner angibt; dass man also den Dividend durch den

Zähler des Divisors zu dividieren, und den Quozienten mit dem Nenner zu multiplizieren habe.

Die eben begründete Regel führt nun auf ein ganz einfaches mechanisches Verfahren, eine Zahl durch einen Bruch zu dividieren. Durch einen Bruch dividieren heißt durch seinen Zähler dividieren, und den Quozienten mit seinem Nenner multiplizieren. Mit einem Bruche multiplizieren heißt aber, durch den Nenner dividieren, und den Quozienten mit dem Zähler multiplizieren. Wird daher bei der Division der Divisor umgekehrt d. i. der Zähler zum Nenner und der Nenner zum Zähler gemacht, und dann die Regel des Multiplizierens befolgt, so wird mit jeder von diesen beiden Zahlen das gethan, was man zu thun hat, um durch den Bruch zu dividieren. Eine Zahl wird daher durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem umgekehrten Divisor multipliziert.

Um dieses an Beispielen ersichtlich zu machen, hat man:

$$7 : \tfrac{3}{4} = \tfrac{7}{3} \times 4,$$

$$\tfrac{5}{7} : \tfrac{3}{4} = \frac{5}{7 \times 3} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}.$$

Nach den Regeln für die Multiplikazion der Brüche findet man aber auch

$$7 \times \tfrac{4}{3} = \tfrac{7}{3} \times 4,$$

$$\tfrac{5}{7} \times \tfrac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3}.$$

Es ist also

$$7 : \tfrac{3}{4} = 7 \times \tfrac{4}{3},$$

$$\tfrac{5}{7} : \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{7} \times \tfrac{4}{3}.$$

Die Division durch einen Bruch kann daher in eine Multiplikazion mit dem umgekehrten Bruche verwandelt werden.

Von diesem mechanischen Divisionsverfahren lasse man übrigens nur ausnahmsweise Gebrauch machen, damit sich die Schüler nicht ein gedankenloses Rechnen angewöhnen; es ist weit geistbildender, wenn man die bei der Division der Brüche vorzunehmende Operazion jedesmal ausführlich erläutern und genau nachweisen läſst, und die Schüler ununterbrochen zum klaren Denken und Begründen nöthigt.

Da sich die Schüler beim Rechnen mit ganzen Zahlen unter dem Dividieren immer ein Verkleinern dachten, so wird es ihnen hier anfänglich auffallen, daſs eine Zahl, welche man durch einen echten Bruch dividiert, dadurch vergrößert wird. Der Grund ist jedoch leicht einzusehen. 1 ist in einer Zahl so oft enthalten, als die Zahl selbst es anzeigt; ein echter Bruch ist aber kleiner als 1, also wird er in jener Zahl öfters enthalten sein, als 1, somit öfters als die Zahl es anzeigt. Oder: beim Dividieren durch einen Bruch hat man den Dividend zuerst in so viele Theile zu theilen, als der Zähler angibt, und einen solchen Theil so vielmal zu nehmen, als der Nenner anzeigt; da man nun auf diese Art bei der Division durch einen echten Bruch einen Theil öfters nehmen muß, als die Zahl der vorher gemachten Theile angibt, so muß man dadurch mehr bekommen, als anfangs da war.

Kommt im Dividend, oder im Divisor, oder in beiden eine gemischte Zahl vor, so verwandelt man sie in einen unechten Bruch und verrichtet sodann die Division.

Auch hier wird der Lehrer nicht unterlassen, die Übereinstimmung zwischen der Division der Dezimalbrüche und der Division gemeiner Brüche hervorzuheben. Indem man bei der Division der Dezimalbrüche im Divisor den Dezimalpunkt wegläſst, dagegen den Dividend bezüglich mit 10, 100, 1000, . . . multipliziert und dann die Division verrichtet, wird der Dividend mit dem Nenner des Divisors multipliziert und durch den Zähler desselben dividiert. Es ist z. B.

$$5·696 : 0·32 = \tfrac{5696}{1000} : \tfrac{32}{100} = \tfrac{5696}{1000} \times 100 : 32$$
$$= \tfrac{5696}{10} : 32 = \tfrac{178}{10} = 17·8.$$

Übungsaufgaben über die reine und angewandte Division der Brüche im IV. Rechenbuche S. 73—78.

Anhang.

Umrechnung der Maße und Gewichte und ihrer Preise.

Die Münzen, Maße und Gewichte sind nach der vorliegenden Anleitung einzeln bereits wiederholt auf den verschiedenen Stufen, und im Zusammenhange erst in dem vorletzten Abschnitte beim Rechnen mit mehrnamigen Zahlen wieder vorgeführt worden; die Schüler haben dieselben resolvieren und reduzieren und mit ihnen die verschiedenen Rechnungsoperazionen vorzunehmen gelernt. Insofern bietet sich hierüber kein Anlass zu weiteren Bemerkungen. Da wir jedoch in dem Vorhergehenden ausschließlich nur die neuen Maße und Gewichte zu Grunde legten, die größeren Schüler aber in den früheren Jahren noch mit den alten Maßen rechneten, so erscheint es nothwendig, dieselben hier auch mit den Verhältnissen zwischen den alten und neuen Maßen bekannt zu machen, nicht nur, damit sie selbst die neue Maß- und Gewichtsordnung um so gründlicher auffassen, sondern damit sie auch in den Familien das Verständnis dafür fördern helfen. Auch wird im praktischen Leben, insbesondere während der Zeit des Überganges von den bisherigen Maßen und Gewichten zu den neuen sehr häufig die Nothwendigkeit eintreten, gegenseitige Umwandlungen derselben vorzunehmen. Die täglichen Lebensbedürfnisse werden nach anderem Maß und Gewicht verkauft werden; der Kaufmann muß die Preise seiner Waren, der Gewerbsmann die Preise seiner Erzeugnisse nach den neuen Maß- und Gewichtseinheiten festsetzen; der Landmann, der bisher die Aussaat und den Ertrag der Äcker nach Joch und Metzen berechnet hat, soll das künftig nach Hektar und Hektoliter thun. Man wird also während der Übergangszeit besonders häufig genöthigt sein, die alten Maßangaben in neues Maß zu verwandeln, und ebenso die Preise der bisherigen Maßeinheiten in die verhältnismäßigen Preise für die neuen Maße umzurechnen.

Zu allen derlei Berechnungen müßen die Zahlen bekannt sein, welche das Verhältnis der neuen Maße und Gewichte zu den alten angeben. Wir lassen diese **Verhältniszahlen** nachstehend folgen.

a) Längenmaße.

1 Wiener Fuß = 0·316081^{m}, angenähert $\frac{6}{19}$^{m};
1 W. Elle = 0·777558^{m}, „ $\frac{7}{9}$^{m};
1 österr. Meile = 0·7585936^{Mm}, „ $\frac{22}{29}$^{Mm}.

---

1 Meter = 3·1637496 W. Fuß, angenähert $3\frac{1}{6}$ Fuß;
1 Meter = 1·286077 W. Ellen, „ $1\frac{2}{7}$ Ellen;
1 Myriam. = 1·318229 ö. Meilen, „ $1\frac{7}{22}$ Meilen.

b) Flächenmaße.

1 W. □Fuß = 0·099907 □^{m}, angenähert $\frac{1}{10}$ □^{m};
1 n. ö. Joch = 0·5754642 Hektar, „ $\frac{4}{7}$ Hektar;
1 ö. □Meile = 0·5754642 □^{Mm}, „ $\frac{4}{7}$ ($\frac{61}{106}$) □^{Mm}.

---

1 □^{m} = 10·00931 □Fuß, angenähert 10 □Fuß;
1 Hektar = 1·737727 Joch, „ $1\frac{3}{4}$ Joch;
1 □^{Mm} = 1·737727 □Meil., „ $1\frac{3}{4}$ ($1\frac{45}{61}$) □Meil.

c) Körpermaße.

1 W. Kub.′ = 0·03157867 Kub.^{m}, angenähert $\frac{1}{32}$ Kub.^{m};
1 W. Metzen = 0·6148682 Hektoliter, „ $\frac{8}{13}$ Hektol.;
1 W. Eimer = 0·565890 Hektoliter, „ $\frac{9}{16}$ Hektol.;
1 W. Maß = 1·414724 Liter, „ $1\frac{2}{5}$ Liter.

---

1 Kub.m	= 31·66695 Kub.',	angenähert	32 Kub.';
1 Hektoliter	= 1·626365 Metzen,	„	$1\frac{5}{8}$ Metzen;
1 Hektoliter	= 1·767129 Eimer,	„	$1\frac{7}{9}$ Eimer;
1 Liter	= 0·7068515 Maß,	„	$\frac{5}{7}$ Maß.

d) Gewichte.

1 W. Pfund	= 0·56006 Kilogr.,	angenähert	$\frac{5}{9}$ Kilogr.;
1 W. Loth	= 1·750187 Dekagr.,	„	$1\frac{3}{4}$ Dekagr.;
1 W. Mark	= 0·280668 Kilogr.,	„	$\frac{7}{25}$ Kilogr.

---

1 Kilogramm	= 1·785523 W. Pfund,	angenähert	$1\frac{4}{5}$ Pfund;
1 Dekagramm	= 0·571367 Loth,	„	$\frac{4}{7}$ Loth;
1 Kilogramm	= 3·562928 W. Mark,	„	$3\frac{4}{7}$ Mark.

Wir haben hier zweierlei Verhältniszahlen angeführt; die in Dezimalbrüchen ausgedrückten sind ganz genau, wie sie das Gesetz bestimmt; die anderen sind nur angenähert und zwar in einfachen gemeinen Brüchen angegeben. Für die genaue Umwandlung der bisherigen Maße und Gewichte in die neuen, und umgekehrt, bestehen umfassende Redukzionstabellen; diese hat man jedoch nicht immer bei der Hand; auch handelt es sich im gewöhnlichen Leben in vielen Fällen nicht um die volle Genauigkeit, sondern nur um eine angenäherte Vergleichung, für welche die oben rechts stehenden Verhältniszahlen einen hinreichenden Grad der Genauigkeit gewähren. Z. B. Jemand wünscht schnell einen Überschlag zu machen, wie viel eine bestimmte Anzahl Ellen im Metermaße beträgt, um darnach seinem Bedürfnisse gemäß kaufen zu können; ebenso wünscht er, schnell und ohne lange Berechnung den Preis einer Elle ungefähr in den Preis eines Meters umzuwandeln. In beiden Fällen genügt eine bloß angenäherte Rechnung. Die angenäherten Verhältniszahlen werden daher beim Übergange von den bisherigen Maßen zu den neuen wesentliche Dienste leisten. Allerdings wird dabei ein Fehler begangen, der jedoch bei den meisten Berechnungen des bürgerlichen Verkehrs gar nicht in Betracht kommt. Der Fehler wird nur dann erheblich, wenn eine größere Zahl von Maßeinheiten umzuwandeln ist; in solchen Fällen muß man sich dann der genaueren Angaben bedienen, wobei man je nach dem gewünschten Grade der Genauigkeit mehr oder weniger Dezimalstellen in Rechnung zieht.

Noch bemerken wir, dass für das gewöhnliche Leben einzelne Maße und Gewichte von geringer Bedeutung, dass vorzugsweise nur die Kenntnis folgender 10 Angaben allgemein nothwendig erscheint:

1 **Fuß** = $\frac{6}{19}$ **Meter**, 1 **Elle** = $\frac{7}{9}$ **Meter**.
1 □ **Fuß** = $\frac{1}{10}$ □ **Meter**, 1 **Joch** = $\frac{4}{7}$ **Hektar**.
1 **Kubikfuß** = $\frac{1}{32}$ **Kubikmeter**, 1 **Metzen** = $\frac{8}{13}$ **Hektoliter**,
1 **Eimer** = $\frac{9}{16}$ **Hektoliter**, 1 **Maß** = $1\frac{2}{5}$ **Liter**.
1 **Pfund** = $\frac{5}{9}$ **Kilogramm**, 1 **Loth** = $1\frac{3}{4}$ **Dekagramm**.

Diese Angaben müßen die Schüler dem Gedächtnisse einprägen; zugleich werden sie geübt, aus denselben sofort auch die umgekehrten Verhältniszahlen abzuleiten. Z. B. Die Schüler wissen, dass 1 Elle = $\frac{7}{9}$ Meter ist; sie sollen nun rasch folgende Schlüsse bilden können: $\frac{7}{9}$ Meter = 1 Elle, $\frac{1}{9}$ Meter = $\frac{1}{7}$ Elle, 1 Meter = $\frac{9}{7}$ Ellen = $1\frac{2}{7}$ Ellen.

Die Verwandlungsaufgaben, die gewöhnlich und sehr häufig vorkommen werden, lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen:

a) Aufgaben, in denen eine alte Maß- oder Gewichtszahl in das neue Maß zu verwandeln ist;

b) Aufgaben, in denen der Preis einer alten Maß- oder Gewichtseinheit in den entsprechenden Preis der neuen umzurechnen ist.

Die meisten dieser Aufgaben werden mittels der Multiplikazion aufgelöst.

a) Eine Frau brauchte zu einem Kleide 15 Ellen; wie viel muß sie nun nach Metermaß kaufen?

Mündlich: 1 Elle = $\frac{7}{9}$ Meter oder $\frac{7}{9}$mal 1 Meter, 15 Ellen sind also $\frac{7}{9}$mal 15 Meter; $\frac{1}{9}$ von 15 Meter = $1\frac{6}{9}$ = $1\frac{2}{3}$ Meter, $\frac{7}{9}$ von 15 Meter sind daher 7mal $1\frac{2}{3}$ Meter = $7\frac{14}{3}$ = $11\frac{2}{3}$ Meter.

Schriftlich:

$$\begin{array}{l} 15 \times \frac{7}{9} \\ \hline 105 : 9 \\ \hline 11\frac{6}{9} = 11{\cdot}666 \text{ Meter} \end{array} \qquad \text{genauer } 15 \times \begin{array}{r} 0{\cdot}77756 \\ \hline 3\,88780 \\ 7\,7756 \\ \hline 11{\cdot}66340 \end{array} \text{ Meter.}$$

Der Unterschied beider Resultate ist kleiner als 1 Centimeter.

Ähnliche Aufgaben:

Ein Gärtner braucht eine Gartenschnur von 65 Fuß Länge; wie viel Meter muß er kaufen?

Welche Scheitlänge in Centimeter hat 30zölliges Brennholz?

Eine Leinwand ist nach Ellenmaß $1\frac{1}{4}$ breit; wie viel Centimeter beträgt die Breite?

Ein Bauplatz hat 168 □ Klafter; wie viel □ Meter ist das?

Ein Garten ist 42° 3′ lang und 27° 2′ breit; wie viel □ᵐ beträgt der Flächeninhalt?

Wie viel Hektar mißt eine Wiese von $3\frac{5}{8}$ Joch?

Ein Baumstamm hat $39\frac{1}{2}$ Kubikfuß; wie viel sind es Kubikmeter?

Wie viel Hektoliter Getraide faßt ein Kasten, welcher 4' lang, 3' breit und $2\frac{1}{2}$' hoch ist?

Wie viel Liter gehen in ein Faß, das 228 Maß hält?

Eine Fuhr Heu wiegt 15 Zentner; wie viel Kilogramm sind es?

In einer Haushaltung braucht man jede Woche 12 Loth Kaffee; wie viel Dekagramm in 4 Wochen?

Ein Weingarten liefert von 1 Joch 16 Eimer Wein; wie viel Hektoliter kommen hiernach auf 1 Hektar?

Mündlich (angenähert): 1 Joch = $^4/_7$ Hektar; 1 Eimer = $^9/_{16}$ Hektoliter; 16 Eimer sind also 9 Hektoliter. Wenn nun $^4/_7$ Hektar Weinland 9 Hektoliter Wein liefern, so liefert $^1/_7$ Hektar $2^1/_4$ Hektoliter, und somit 1 Hektar $15^3/_4$ Hektoliter.

Schriftlich (genau):

1 Joch = 0·57546 Hektar
16 Eimer = 0·56589 × 16
3 39534
5 6589
9·05424 Hektoliter.

Wenn 0·57546 Hektar 9·05424 Hektoliter Wein liefern, so liefert 1 Hektar

9·05424 : 0·57546 = 15·73 Hektoliter.
3 29964
421340
185180

Wie viel Liter Aussaat erfordert 1 Ar, wenn 1 Joch $2\frac{1}{4}$ Metzen erfordert?

1 Metzen Weizen wiegt 84 Pfund; wie viel Kilogramm wiegt 1 Hektoliter Weizen?

---

b) Für den Kurrentfuß (laufenden Fuß) Dachrinne verlangt der Spängler 1 fl. 20 Kr.; wie hoch stellt sich der Preis für das Kurrentmeter?

Mündlich: 1 Fuß = $\frac{6}{19}$ Meter; wenn $\frac{6}{19}$ Meter 1 Fuß sind, so ist $\frac{1}{19}$ Meter = $\frac{1}{6}$ Fuß, und 1 Meter = $\frac{19}{6}$ = $3\frac{1}{6}$ Fuß. 1 Meter kostet also $3\frac{1}{6}$mal den Preis, der für 1 Fuß gezahlt wird; 3mal 1 fl. 20 Kr. sind 3 fl. 60 Kr., $\frac{1}{6}$ von 1 fl. 20 Kr. sind 20 Kr.; 1 Meter kostet also 3 fl. 60 Kr. + 20 Kr. = 3 fl. 80 Kr.

Schriftlich:

1 fl. 20 Kr. × $3\frac{1}{6}$, oder	1·2 × 3·16375
3 fl. 60 Kr.	6 32750
— „ 20 „	31 6375
3 fl. 80 Kr.	3·796500 fl.
	= 3 fl. 80 Kr.

Eine Elle Tuch wird für 4 fl. 34 Kr. verkauft; wie theuer muß ein Meter verkauft werden?

Ein □ Fuß Steinplattenpflaster kostet 72 Kr.; wie hoch kommt das □ Meter zu stehen?

Ein Joch Ackergrund kostet 525 fl.; wie viel beträgt der Preis für ein Hektar?

Wie hoch kommt ein Kubikmeter Bauholz, wenn der Kubikfuß mit 45 Kr. bezahlt wird?

Ein Metzen Korn kostet 5 fl. 20 Kr.; wie viel kostet ein Hektoliter?

Wie hoch muß der Literpreis gestellt werden, wenn die Maß 48 Kr. kostet?

Ein Krügel ($1\frac{1}{2}$ Seidel) Bier kostet 10 Kr.; wie hoch wird sich $\frac{1}{2}$ Liter stellen?

Ein Pfund Kaffee kostet 72 Kr.; welches ist der entsprechende Preis für 1 Kilogramm?

Wie viel kostet 1 Dekagramm Nähseide, wenn das Loth mit 1 fl. 30 Kr. bezahlt wird?

Umrechnungen der neuen Maße und Gewichte in die alten werden im praktischen Leben seltener vorkommen. Man verfährt dabei so wie bei der Lösung der umgekehrten Aufgabe. Z. B.

Ein Wald hat $10\frac{2}{5}$ Hektar; wie viel Joch beträgt seine Fläche?

$10\frac{2}{5} \times 1\frac{3}{4}$, oder genauer	$10{\cdot}4 \times 1{\cdot}73773$
$5\frac{1}{5}$ . . $\frac{1}{2}$	6 95092
$2\frac{3}{5}$ . . $\frac{1}{4}$	173 773
$18\frac{1}{5}$ Joch	18·072392 Joch.

Das Hektoliter Wein kostet 32 fl.; wie theuer wird der Eimer gerechnet?

1 Hektol. = $\frac{16}{9}$ Eimer;	genauer:
$\frac{16}{9}$ Eimer kostet 32 fl.	1 Hektol. = 1·76713 Eimer.
$\frac{1}{9}$ „ „ 2 fl.	32 fl. : 1·76713 = 18·108 fl.
1 „ „ 18 fl.	

Fünfte Abtheilung.

(Anleitung zum Gebrauche des **fünften** Rechenbuches für Volksschulen.)

Rechnungsübungen für die oberen Schulklassen.

Einleitung.

---

§. 113. Übungsstoffe des fünften Rechenbuches.

Die ersten vier Rechenbücher für Volksschulen enthalten die Grundoperazionen mit ganzen Zahlen, Dezimal- und gemeinen Brüchen, mit einnamigen und mehrfach benannten Zahlen und bieten mit diesen Übungsstoffen ein abgeschlossenes Ganzes, das den Schülern auch schon hinreichende Mittel an die Hand gibt, um bei sorgfältiger Beurtheilung alle Rechnungsaufgaben des gewöhnlichen Lebens, so mannigfaltig sie auch sein mögen, mit Einsicht und Sicherheit lösen zu können. In dem weiteren Rechenunterrichte kann es sich nur darum handeln, die gewonnene Fertigkeit zu befestigen und insbesondere die Überleitung von dem eigentlichen Schulrechnen zum Rechnen, wie es im Leben geübt wird, zu bewerkstelligen, indem die verschiedenen Verhältnisse des bürgerlichen Lebens, welche sich der Rechnung unterziehen lassen, nach und nach vorgeführt, und die bekannten Operazionen auf diese Verhältnisse recht vielseitig zur Anwendung gebracht werden.

Wiederholungsübungen über das Rechnen mit ganzen Zahlen, mit Dezimal- und gemeinen Brüchen, Dreisatz- und Umrechnungsaufgaben werden unter angemessener Erweiterung des früher Gelernten den Ausgangspunkt bilden. Sodann folgen Prozent- und Zinsrechnungen, bei denen möglichst der Charakter von Schlussrechnungen festgehalten wird. Von den Verhältnisrechnungen sind die Gesellschafts- und Mischungsrechnung unter allen Umständen, in besseren Schulen auch die Kettenrechnung zu üben. Einige Kenntnis über die Rechnung mit Münzen, Wechseln, Staatspapieren und Akzien erscheint bei dem gegenwärtigen Aufschwunge des Verkehrs für keine Klasse von Menschen mehr ganz entbehrlich; darum sollen auch die dießbezüglichen Rechnungsübungen, wenn auch in beschränktem Umfange, in keiner gehobenen Volksschule unberücksichtigt bleiben. Den Übungsstoff des letzten Schuljahres, als Abschluss des Schulunterrichtes im Rechnen, bilden Aufgaben, welche aus den verschiedenen Berufszweigen hergenommen und nach ihrem sachlichen Inhalte zusammengestellt sind; für Mädchen sind insbesondere hauswirtschaftliche Rechenaufgaben am Platze, in Dorfschulen werden landwirtschaftliche, in Stadt- und Marktschulen vorwiegend gewerbliche und einfache kaufmännische Rechnungen ihre angemessene Berücksichtigung finden. Die Berechtigung des Auftretens einzelner Abschnitte wird, wo es nöthig erscheint, an den betreffenden Orten ausführlicher nachgewiesen.

Eine genaue Abgränzung und Austheilung der eben angedeuteten Übungsstoffe für jede einzelne der oberen Schulklassen, wie sie in den ersten vier Rechenbüchern für die unteren Klassen stattfindet, erscheint bei der großen Verschiedenheit der Volksschulen in Beziehung auf die Klassenanzahl und auf den künftigen Beruf ihrer Schüler nicht wohl möglich; es wurden daher sämmtliche für die oberen Klassen bestimmten Rechnungsübungen in ein einziges — das fünfte — Rechenbuch zusammengestellt, dessen Inhalt einerseits für jede noch so vollständig gegliederte Volksschule ausreicht, andererseits aber auch an Schulen mit einer geringeren Zahl von Klassen dem Lehrer die Möglichkeit bietet, aus den Übungsaufgaben durch verständiges Abwägen der größeren oder geringeren Wichtigkeit derselben und mit Rücksichtnahme auf die besonderen Bedürfnisse der Schüler die rechte Auswahl zu treffen.

Die in das fünfte Rechenbuch aufgenommenen Aufgaben über die Raumgrößenrechnung sind mit der geometrischen Formenlehre an den geeigneten Orten und in den dafür bestimmten Schuljahren in Verbindung zu setzen.

Der Anhang enthält eine Übersicht der österreichisch-ungarischen und der wichtigsten ausländischen Maße, Gewichte und Münzen. Die Verlegung dieser Übersicht auf das Ende des Buches ist jedoch nicht dahin zu deuten, als wäre die Maß- und Gewichtskunde auf den Schluss des Rechenunterrichtes hinauszuschieben. Aufgaben über Maße, Gewichte und Münzen sind vielmehr, wie dieß nicht anders sein kann, durch das ganze Buch eingeflochten; bei der Lösung derselben werden dann, wo es nöthig erscheint, jedesmal auch die einschlägigen Belehrungen aus dem Anhange vorzuführen sein.

Erster Abschnitt.

Wiederholungsübungen.

(V. Rechenbuch S. 3—20.)

---

§. 114.

Wir haben bisher auf jeder neuen Stufe des Unterrichtes zunächst eine passende Wiederholung der bereits vorgenommenen Übungen vorausgeschickt, weil nur dadurch erreicht werden kann, daſs die Grundlagen des Rechnens schließlich ein unverlierbares Eigenthum aller Schüler werden. Wir bleiben auch hier diesem Grundsatze treu und nehmen, ehe wir an die Behandlung neuer Stoffe gehen, zuerst Wiederholungsübungen I. über das Rechnen mit ganzen und Dezimalzahlen, II. über das Rechnen mit gemeinen Brüchen vor.

Eine Erweiterung erhalten diese Wiederholungsübungen in den Multiplikazions- und Divisionsvortheilen, mit denen hier die Schüler bekannt gemacht werden können. Dabei beschränken wir uns jedoch auf jene wenigen Rechnungsvortheile, die sich sehr leicht ausführen und auch leicht im Gedächtnisse behalten lassen, während wir Vortheile, die eine große Gewandtheit im Rechnen voraussetzen, und bei deren Anwendung schwächere Schüler Irrungen ausgesetzt wären, unberücksichtigt lassen.

Multiplikazionsvortheile. (V. Rechenbuch S. 8.)

1. Wenn der Multiplikator 11 ist.

$$\begin{array}{r} 75216 \times 11 \\ 75216 \\ \hline 827376 \end{array} \qquad \text{kürzer: } \begin{array}{r} 75216 \times 11 \\ \hline 827376 \end{array}$$

Man sieht, daſs sich bei der Multiplikazion mit 11 das Produkt unmittelbar aus dem Multiplikand ableiten läſst, indem man nämlich die erste Ziffer rechts unverändert anschreibt, dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte, und überhaupt zu jeder Stelle die nächst höhere addiert.

Man spricht oder denkt dabei: 6 ist 6; 6 und 1 ist 7; 1 und 2 ist 3; 2 und 5 ist 7; 5 und 7 ist 12, 2 angeschrieben, bleibt 1; 1 und 7 ist 8.

2. Wenn im Multiplikator die Ziffer 1 vorkommt.

$$\text{Statt: } \begin{array}{r} 46037 \times 31 \\ \hline 46037 \\ 138111 \\ \hline 1427147 \end{array} \qquad \text{und } \begin{array}{r} 195807 \times 148 \\ \hline 195807 \\ 783228 \\ 1566456 \\ \hline 28979436 \end{array}$$

kann man mit Vermeidung alles unnöthigen Wiederholens auch schreiben

$$\begin{array}{r} 46037 \times 31 \\ \underline{138111} \\ 1427147 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{r} 195807 \times 148 \\ 783228 \\ \underline{1566456} \\ 28979436 \end{array}$$

Wenn daher der Multiplikator die Ziffer 1 enthält, so läßt man den Multiplikand ungeändert als das erste Theilprodukt stehen, multipliziert ihn dann mit den übrigen geltenden Ziffern des Multiplikators, und schreibt die dadurch erhaltenen Theilprodukte richtig darunter.

3. Wenn sich der Multiplikator in zwei Faktoren zerlegen läßt, mit denen man leicht multiplizieren kann, so multipliziert man den Multiplikand zuerst mit dem einen Faktor des Multiplikators, und dann das Produkt noch mit dem andern Faktor.

Z. B. Es sei 49172 mit 32 zu multiplizieren. Da $32 = 8 \times 4$ ist, so erhält man das 32fache einer Zahl, wenn man von ihr zuerst das 8fache, und von diesem das 4fache sucht, d. h. wenn man die gegebene Zahl zuerst mit 8, und das Produkt noch mit 4 multipliziert; man hat daher

$$\begin{array}{rl} 49172 & \times\ 32 \\ \hline 393376 & \times 8 \\ \hline 1573504 & \times 4 \end{array}$$

Durch die Anwendung dieses Vortheils wird eine Addizion erspart.

Divisions- und nachträgliche Multiplikazionsvortheile. (V. Rechenbuch S. 11.)

1. Wenn sich der Divisor in zwei Faktoren zerlegen läßt, durch welche man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend durch den einen Faktor des Divisors und den erhaltenen Quozienten noch durch den andern Faktor.

Es sei z. B. 2688 durch 32 zu dividieren. $32 = 8 \times 4$; theilt man eine Zahl in 8 gleiche Theile, und jeden solchen

Theil wieder in 4 gleiche Theile, so erhält man 32 gleiche Theile; um daher die Zahl 2688 durch 32 zu dividieren, dividiert man sie durch 8, und den Quozienten durch 4; also

$$\begin{array}{r l} 2688 & : 32 \\ \hline 336 & :8 \\ \hline 84 & :4 \end{array}$$

2. Division durch 25.

25 × 4 = 100; der 4fache Divisor ist also 100; damit der Quozient ungeändert bleibe, muß man auch den Dividend 4mal nehmen.

Eine Zahl wird demnach durch 25 dividiert, indem man sie mit 4 multipliziert und das Produkt durch 100 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{r l} 9325 & : 25 \\ \hline & \times\ 4 \\ 37300 & : 100 = 373 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r l} 9325 & : 25 \\ \hline 373{\cdot}00 & (\times\ 4,\ :100) \end{array}$$

3. Division durch 125.

125 × 8 = 1000. Eine Zahl wird also durch 125 dividiert, indem man sie mit 8 multipliziert und das Produkt durch 1000 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{r l} 72375 & : 125 \\ \hline & \times\ 8 \\ 579000 & : 1000 = 579 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r l} 72375 & : 125 \\ \hline 579{\cdot}000 & (\times\ 8,\ :1000) \end{array}$$

4. Multiplikazion mit 25.

25 = 100 : 4. Wenn man also von dem 100fachen einer Zahl den 4ten Theil nimmt, so erhält man das 25fache dieser Zahl. Eine Zahl wird demnach mit 25 multipliziert, indem man sie mit 100 multipliziert und das Produkt durch 4 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{r l} 7214_{00} & \times\ 25 \\ \hline 180350 & :4 \end{array}$$

5. Multiplikazion mit 125.

125 = 1000 : 8. Eine Zahl wird also mit 125 multipliziert, indem man sie mit 1000 multipliziert und das Produkt durch 8 dividiert; z. B.

$$\begin{array}{l} 5938_{000} \times 125 \\ \underline{\hspace{6em}} : 8 \\ 742250 \end{array}$$

Zweiter Abschnitt.

Dreisatzrechnungen.

(V. Rechenbuch S. 21—40.)

---

§. 115.

Die Dreisatzaufgaben, unter denen die Preisberechnungen den hervorragendsten Platz einnehmen, kamen schon auf den früheren Stufen wiederholt vor; ihre Wichtigkeit für das praktische Leben verlangt, dass sie auch in den letzteren Schuljahren fortgeübt und entsprechend vervollständigt werden. Wenn auch im Leben solche Aufgaben bunt durcheinander auftreten, so darf dieß nicht auch in der Schule geschehen. Das Lösungsverfahren ist dabei die Schlussrechnung. Die Schlussreihen aber müßen sich zuletzt dem Gedächtnisse, das auch eine Geisteskraft ist, unverlierbar einprägen, was nur möglich ist, wenn die Schüler, nachdem sie vom Lehrer angeleitet worden sind, an einigen gleichartigen Aufgaben die richtigen Schlüsse zur Auflösung zu bilden, sofort Gelegenheit erhalten, diese Schlüsse auf viele ähnliche Aufgaben anzuwenden. Die hieher gehörigen Aufgaben müßen daher nach Verschiedenheit der erforderlichen Schlüsse in Gruppen geordnet und in dieser Anordnung tüchtig durchgeübt werden. Es ist jedoch nicht nöthig, dass diese Gruppen in ununterbrochener

Aufeinanderfolge vorgenommen werden; vielmehr empfiehlt es sich, dieselben einzeln und zu verschiedenen Zeiten bei den schriftlichen Übungen in den weiteren Rechenstoffen nebenher und zwar vorwiegend als Kopfrechnungsaufgaben vorzuführen.

Im V. Rechenbuche erscheinen die Dreisatzrechnungen nach folgenden Gruppen zusammengestellt:

I. Schluss von der Einheit auf die Mehrheit.

a) Der Schluss führt auf eine einfache Multiplikazion.

b) Die Lösung erfolgt durch Rechnungsvortheile, die auf dem Zusammenhange beruhen, welcher zwischen den Eintheilungszahlen unserer Münzen, Maße und Gewichte besteht.

c) Die Lösung erfolgt durch Zerlegung des Preises in Gulden, Zehner und Kreuzer.

d) Die Mehrheit ist durch einen gemeinen Bruch ausgedrückt.

e) Der Schluss führt auf eine Division (verkehrte Verhältnisse).

II. Schluss von der Mehrheit auf die Einheit.

a) Der Schluss führt auf eine einfache Division.

b) Die Lösung erfolgt durch Rechnungsvortheile.

c) Die Mehrheit ist ein gemeiner Bruch.

d) Der Schluss führt auf eine Multiplikazion (verkehrte Verhältnisse).

III. Schluss von der Mehrheit auf eine andere Mehrheit.

a) Schluss von der Mehrheit auf ein Vielfaches derselben.

b) Schluss von der Mehrheit auf einen Theil derselben.

c) Zerfällung der neuen Mehrheit.

d) Schluss von der Mehrheit durch einen Theil derselben auf ein Vielfaches dieses Theiles.

e) Schluss von der Mehrheit durch die Einheit auf eine andere Mehrheit.

f) Die Mehrheit, deren Betrag man kennt, sowie die Mehrheit, deren Betrag gesucht wird, sind gemeine Brüche.

g) Schluss von der Mehrheit auf eine andere Mehrheit bei verkehrten Verhältnissen.

IV. Verwandlungsaufgaben.

a) Umrechnung der Längenmaße.
b) Umrechnung der Flächenmaße.
c) Umrechnung der Körpermaße.
d) Umrechnung der Gewichte.
e) Umrechnung der Münzen.

V. Zusammengesetzter Dreisatz (Vielsatz).

Die Schlüsse, die bei den einzelnen vorangeführten Gruppen zu machen sind, werden im V. Rechenbuche jedesmal an einer oder an mehreren Aufgaben ersichtlich gemacht. Nur bezüglich des zusammengesetzten Dreisatzes sei hier noch besonders bemerkt, dass man dabei, um die Schlüsse leichter bilden zu können, in dem Ansatze diejenige Art von Zahlen, zu welcher die unbekannte Zahl gehört, auf die letzte Stelle bringt.

Dritter Abschnitt.

Die Prozentrechnung.

§. 116. Prozentrechnung von Hundert.

Sowie man den Wert der Schnittwaren per Meter, den Wert der Flüssigkeiten per Liter oder Hektoliter angibt, ebenso wird bei der Bestimmung vieler anderer Dinge, z. B. der Zinsen, des Gewinnes oder Verlustes u. dgl. der Betrag von Hundert, das Prozent, als Maßstab zu Grunde gelegt. Unter Prozent versteht man im allgemeinen eine Zahl, welche sich auf 100 Einheiten derselben Art bezieht. Z. B. 5 Prozent (5%) bedeutet, dass von je 100 Einheiten einer Art 5 Einheiten derselben Art, von 100 fl. also 5 fl., von 100 Kilogramm 5 Kilogr., zu nehmen sind. Die Zahl 100 erscheint für verschiedene Wertbestimmungen darum als besonders geeignete Grundlage, weil mit ihr sehr leicht zu rechnen ist.

Das Prozent läſst noch eine zweite Auffassungsweise zu, die übrigens aus dem obigen ursprünglichen Begriffe als unmittelbare Folgerung abgeleitet werden kann. Hat man z. B. von 543 fl. 1% zu nehmen, so heißt dieß nach der obigen Erklärung des Prozentes so viel als: von je 100 fl., die in 543 fl. enthalten sind, 1 fl. nehmen, somit von 1 fl. immer nur den 100sten Theil von 1 fl., von 543 fl. also den 100sten Theil von 543 fl. nehmen. 1 % von 543 fl. bedeutet demnach $\frac{1}{100}$ von 543 fl. Ebenso folgt, dass 2 % einer Zahl $\frac{2}{100}$ derselben, 3 % einer Zahl $\frac{3}{100}$ derselben, 4 % $\frac{4}{100}$ der Zahl, u. s. w. bedeutet. Diese zweite Auffassung des Prozentbegriffes ist für das Rechnen selbst meistens vortheilhafter, als die ursprüngliche Erklärung.

Bei jeder Prozentrechnung kommen außer der Grundzahl 100 drei Größen vor: 1) das Prozent d. i. der Betrag, der sich auf 100 bezieht; 2) die Summe, von welcher die Prozente berechnet werden; 3) der Ertrag dieser Summe nach den gegebenen Prozenten. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte bestimmt werden.

Die Prozentrechnungen gehören zu den Dreisatzaufgaben und werden, wie diese, durch die Schlussrechnung ausgeführt.

a) Berechnung des Prozent-Ertrages.

Die Einrichtungsstücke eines Hauses kosten 448 fl.; man rechnet für die Abnützung derselben jährlich $8\frac{1}{2}$ %; wie viel beträgt dieses?

100 fl. geben $8\frac{1}{2} = 8\cdot5$ fl.

1 „ gibt den 100sten Theil $= \frac{8\cdot5}{100}$ fl.

448 „ geben 448mal so viel $= \frac{448 \times 8\cdot5}{100}$

$= 38\cdot08$ fl.

Oder:

1 % d. i. $\frac{1}{100}$ von 448 fl. sind 4·48 fl.

$8\frac{1}{2}$ % sind $8\frac{1}{2}$mal so viel $= 4\cdot48 \times 8\frac{1}{2} = 38\cdot08$ fl.

Der Ertrag einer Summe nach Prozenten wird demnach berechnet, indem man den 100sten Theil dieser Summe mit dem Prozent multipliziert.

Die Rechnung würde hiernach kurz so stehen:

$$\begin{array}{rl} 4\cdot48 & \times\ 8\frac{1}{2} \\ \hline 35\cdot84 & \ldots 8 \\ 2\cdot24 & \ldots \frac{1}{2} \\ \hline 38\cdot08 & \text{fl.} \end{array}$$

Um Prozentangaben in kleinen Brüchen zu vermeiden, wird für manche Größen der Ertrag nach Tausend, das Promille (‰) berechnet. Z. B. 1 ‰ heißt, von je 1000 einer Zahl ist 1, oder es ist der 1000ste Theil einer Zahl zu berechnen.

Wie viel beträgt $\frac{1}{2}$ ‰ von 3580 fl.?

$$\begin{array}{rl} 3\cdot580 & \times\ \frac{1}{2} \\ \hline 1\cdot79 & \text{fl.} \end{array}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 41 u. 42, a.

---

b) Berechnung des Prozentes.

Ein Haus, das 18300 fl. gekostet hat, trägt jährlich 732 fl. reinen Zins; zu wie viel % verzinset es sich?

18300 fl. geben jährlich 732 fl. Zins,

$$100 \;\text{„}\;\;\text{„}\;\;\text{„}\;\; \frac{732}{183} = 4 \text{ fl. Zins;}$$

das Haus verzinset sich also zu 4 %.

Oder:

1 % von 18300 fl. sind 183 fl.; 732 fl. sind daher so viel % von 18300 fl., als wie oft 183 fl. in 732 fl. enthalten sind;

$$732 : 183 = 4\ \%.$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 42 u. 43, b.

---

c) Berechnung der Summe, von welcher die Prozente bestimmt werden.

In einer Stadt starben in einem Jahre 324 Personen, es sind dieß 2 % von der ganzen Einwohnerzahl; wie groß ist diese?

2 Sterbefälle auf 100 Einwohner
1 Sterbefall „ 50 „
324 Sterbefälle „ $324 \times 50 = 16200$ Einw.

Oder:

2 % d. i. $^2/_{100}$ von der Einwohnerzahl $= 324$
$^1/_{100}$ „ „ „ $= 162$
daher die Einwohnerzahl selbst $= 162 \times 100$
$= 16200.$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 43, c.

---

d) Tara und Gutgewicht.

Das Gewicht einer Ware mit Inbegriff des Behältnisses, worin sie verpackt ist, nennt man das **Bruttogewicht**, das

Gewicht des Behältnisses die Tara, und das Gewicht der Ware an und für sich d. i. ohne Verpackung das Nettogewicht. Die Tara wird entweder stückweise pr. Sack, Ballen, Fass, Kiste, u. s. w., oder nach Prozenten vom Bruttogewichte bestimmt.

Der Abzug vom Gewichte, welcher dem Käufer bei gewissen Waren wegen des Eintrocknens oder Verwägens beim Kleinverkaufe gewährt wird, heißt Gutgewicht und wird, wie die Tara, entweder pr. Frachtstück oder nach Prozenten angegeben; im zweiten Falle wird es meistens von dem nach Abzug der Tara übrigbleibenden Nettogewichte berechnet.

Sowohl Tara als Gutgewicht werden, außer bei sehr theueren Waren, in ganzen Kilogrammen berechnet.

Wenn man vom Bruttogewichte die Tara und das Gutgewicht subtrahiert, so bleibt als Rest jenes Gewicht übrig, nach welchem die Zahlung zu berechnen kommt, und das im weiteren Sinne auch Nettogewicht genannt wird.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 44, d.

---

e) Warendiskont oder Skonto.

Beim Warenverkaufe im großen wird dem Käufer gewöhnlich eine bestimmte Zahlungsfrist gewährt, und darum der Preis etwas höher gestellt. Zieht nun der Käufer die bare Zahlung vor, so muß ihm wegen der baren Bezahlung vom Warenpreise ein Abzug, welcher Warendiskont, Skonto, auch Rabatt heißt und nach Prozenten berechnet wird, bewilligt werden.

Unter Rabatt versteht man häufig auch den Abzug, welcher vom Preise solcher Waren, bei denen der Erzeuger den Preis für den Einzelnverkauf festgestellt hat, dem Kleinhändler als Ersatz für die Bezugskosten und zur Ermöglichung eines Gewinnes gewährt wird. Von dieser Art ist der Buchhändlerrabatt.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 44, e.

f) Assekuranz.

Gesellschaften, welche gegen eine bestimmte Gebür den Schadenersatz für eingetretene Unfälle und Verluste übernehmen, heißen Versicherungs- oder Assekuranz-Gesellschaften. Es gibt Lebens-, Feuer-, Hagel-, Seeschaden-Versicherungs-Anstalten. Die Gebür, welche für die Übernahme der Schadenvergütung an die Gesellschaft bezahlt wird, heißt Prämie und wird nach Prozenten oder Promille gerechnet.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 45, f

---

g) Sensarie und Provision.

Zur Abschließung von Geschäften desselben Handelsplatzes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe heißt Sensarie; sie wird nach Prozenten oder Promille bestimmt.

Wenn jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waren, einem andern aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Kommissionär, und die Vergütung, welche dieser für seine Bemühung erhält, Provision. Die Provision wird nach Prozenten berechnet und beim Einkaufe zu dem Warenpreise addiert, beim Verkaufe von demselben subtrahiert.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 45, g.

---

h) Gewinn und Verlust.

Wenn man für eine Ware beim Verkaufe mehr einnimmt, als man dafür beim Einkaufe ausgelegt hat, so hat man Gewinn; wenn man dagegen beim Verkaufe weniger einnehmen würde, als man beim Einkaufe ausgelegt hat, so hätte man Verlust. Gewinn und Verlust sind demnach der

Unterschied zwischen der Ausgabe beim Einkaufe und der Einnahme beim Verkaufe.

Geschäftsleute geben den Gewinn oder Verlust gewöhnlich in Prozenten an. Z. B. 8 % gewinnen heißt, statt je 100 fl., die man beim Einkaufe ausgelegt hat, beim Verkauf 8 fl. mehr als 100 fl., also 108 fl. einnehmen; und 8 % verlieren bedeutet, statt 100 fl., die man beim Einkaufe ausgegeben hat, beim Verkaufe 8 fl. weniger als 100 fl., also nur 92 fl. einnehmen.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 46, h.

---

§. 117. Prozentrechnung auf und in Hundert.

In den vorhergehenden Aufgaben war die Summe, von welcher die Prozente berechnet wurden, durchgängig *mit der Grundzahl* 100 *selbst* gleichartig. Die Prozentrechnung ist in diesem Falle eine Rechnung *von* Hundert, zum Unterschiede von der Rechnung *auf* Hundert und *in* Hundert, welche angewendet wird, wenn die Summe, von welcher das Prozent berechnet wird, nicht mit der Grundzahl 100 selbst, sondern bezüglich *mit der um das Prozent vermehrten* oder *verminderten Grundzahl* 100 gleichartig ist.

Z. B. Eine Ware kostet mit Einrechnung von 2 % Provision 500 fl.; wie viel beträgt die Provision?

Die Summe 500 fl. enthält den reinen Warenpreis bereits um die Provision vermehrt; sie ist entstanden, indem man je 100 fl. des reinen Warenpreises um die Provision von 2 fl. vermehrt, aus je 100 fl. also 102 fl. gebildet hat. Man hat daher:

In 102 fl.	Warenpreis	2 fl. Provision
„ 1 „	mit Provision	$\frac{2}{102}$ „ „
„ 500 „	sind enthalten	$\frac{500 \times 2}{102}$ „
		$= 9{\cdot}8$ fl. Provision.

Hier ist die Summe 500 nicht mit 100, sondern mit 100 + 2 = 102 gleichartig; die 2 % werden nicht von je 100, sondern von je 102, die in 500 enthalten sind, gerechnet. Dieß ist also eine Prozentrechnung auf Hundert.

Es sei dagegen folgende Aufgabe zu lösen:

Der Verkaufspreis einer Ware nach Abzug von 2 % Provision ist 500 fl.; wie viel beträgt die Provision?

Die Summe 500 fl., in welcher von dem reinen Warenpreise die Provision bereits abgezogen ist, wurde erhalten, indem man von je 100 fl. Waarenpreis 2 fl. Provision in Abzug gebracht, also statt je 100 fl. nur 98 fl. angenommen hat. Man hat demnach:

Zu 98 fl.	Warenpreis nach Abzug der Provision gehören	2 fl. Provision
„ 1 „		$\frac{2}{98}$ „ „
„ 500 „		$\frac{500 \times 2}{98}$ „

$= 10{\cdot}2$ fl. Provision.

Dieß ist eine Prozentrechnung in Hundert, da die gegebene Summe 500 mit 100 — 2 = 98 gleichartig ist, und die 2 % nicht von je 100, sondern von je 98, die in 500 vorkommen, zu rechnen sind.

Vierter Abschnitt.

Die Zins- und Terminrechnung.

I. Einfache Zinsen.

§. 118. Berechnung der Zinsen.

Wenn A dem B Geld leihet, so ist A der Gläubiger, B der Schuldner; die geliehene Geldsumme heißt Kapital und die Vergütung, welche der Schuldner dem Gläubiger für die Benützung des Kapitals zahlen muß, Zins oder Interesse. Der Zins wird nach Prozenten bestimmt, welche sich gewöhnlich auf 1 Jahr beziehen und der Zinsfuß genannt werden. Bei der Zinsrechnung nimmt man den Monat zu 30 Tagen an.

In der Zinsrechnung kommen vier Größen vor: 1) das Kapital, 2) das Prozent oder der Zinsfuß, 3) die Zeit, durch welche das Kapital ausgeliehen bleibt, und 4) der Zins. Wenn drei von diesen Größen gegeben sind, so kann aus denselben die vierte bestimmt werden.

Die Zinsrechnung kann als eine Prozentrechnung angesehen werden, in welcher das Kapital der Summe, der Zinsfuß dem Prozent und der Zins dem Prozent-Ertrage entspricht, zu welchen Größen jedoch noch eine vierte Größe, die Zeit, hinzutritt.

---

a. Zinsen für ein Jahr.

Wie viel Zins geben jährlich 485 fl. Kapital à 6 %?

100 fl. Kap. . . 6 fl. Zins

1 „ „ . . $\frac{6}{100}$ „ „

485 „ „ . . $\frac{485 \times 6}{100} = 29{\cdot}1$ fl. Zins

Oder:

1 % d. i. $^1/_{100}$ von 485 . . 4·85 fl. Zins

6 % von 485 . . . . . . 4·85 × 6 = 29·1 fl. Zins.

Der Zins für ein Jahr wird daher berechnet, indem man den 100sten Theil des Kapitals mit dem Prozent multipliziert.

Leichtere derlei Aufgaben sollen von den Schülern im Kopfe aufgelöst werden. Dabei berechnet man den Zins für die Hunderte des Kapitals durch eine einfache Multiplikazion, für die Zehner und Einer durch Anwendung des Schlusses: So viele Gulden jährlichen Zins 100 fl. Kapital geben, eben so viele Kreuzer gibt 1 fl. Kapital. Für das obige Beispiel hätte man: 400 fl. Kapital geben 4mal 6 fl. d. i. 24 fl. Zins; 85 fl. Kapital geben 85mal 6 Kr. = 5 fl. 10 Kr.; zusammen 29 fl. 10 Kr.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 47, a.

---

b. Zinsen für Jahre, Monate und Tage.

Bei der Berechnung der Zinsen für irgend eine gegebene Zeit verfährt man auf folgende Art:

1. Die Zinsen für mehrere Jahre findet man, indem man zuerst die Zinsen für ein Jahr berechnet und diese mit der Anzahl der Jahre multipliziert.

2. Sind auch Monate und Tage gegeben, so bedient man sich der Zerfällungsmethode; man zerlegt die Monate in bequeme Theile eines Jahres, und nimmt von den einjährigen Zinsen eben solche Theile; die Tage zerlegt man in Theile eines Monates und nimmt eben solche Theile von den monatlichen Zinsen. Alle diese Beträge werden sodann zu den Zinsen für Jahre addiert.

Z. B. Wie viel Zinsen geben 3060 fl. Kapital zu $5\frac{1}{2}$ % in 3 Jahren 2 Mon. 22 Tagen?

```
  30·60 × 5½
 ───────
 153·00
  15·30
 ───────
 168·30 fl. für 1 Jahr
 ───────
 504·90 fl. für 3 Jahre
  28·05 „  „  2 Mon.  = 1/6 Jahr
  4·678 „  „ 10 Tage  = 1/6 v. 2 Mon.
  4·678 „  „ 10  „
  0·936 „  „  2  „    = 1/5 v. 10 Tagen
 ───────
543·242 fl. Zins.
```

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 48, b.

---

c. Zinsen für eine bestimmte Anzahl Tage.

Im Geschäftsleben kommt es sehr häufig vor, dass die Zinsen für eine gegebene Anzahl von Tagen zu bestimmen sind. Z. B.

Wie viel beträgt der Zins von 2518 fl. zu 6 % in 45 Tagen?

100 fl.	Kap.	geben	in	1 Jahr	6	fl. Zins
100 „	„	„	„	1 Mon.	$\frac{1}{2}$	„ „
100 „	„	„	„	1 Tage	$\frac{1}{60}$	„ „
1 „	„	gibt	„	1 „	$\frac{1}{6000}$	„ „
2518 „	„	geben	„	1 „	$\frac{2518}{6000}$	„ „
2518 „	„	„	„	45 Tag.	$\frac{2518 \times 45}{6000}$	fl. Zins

$= 23{\cdot}885$ fl. Zins.

Der Zins für eine bestimmte Anzahl von Tagen zu 6 % wird daher berechnet, indem man das Kapital mit der Anzahl der Tage multipliziert und das Produkt durch 6000 dividiert.

Sind die Zinsen zu mehr oder weniger als 6 % zu berechnen, so sucht man zuerst die Zinsen zu 6 % und leitet daraus mittels Zerfällung die Zinsen für das gegebene Prozent ab. Z. B.

Wie viel beträgt der Zins von 1820 fl. zu 5 % vom 1. Mai bis 16. September?

Vom 1. Mai bis 1. Sept. sind 4 Mon. = 120 Tage
„ 1. Sept. „ 16. Sept. „ 15 „
135 Tage

```
  1820 × 135
   5460
    9100
  245700 : 6000
   40·950 fl. à 6 %
ab  6·825 „ à 1 % = 1/6 von 6 %
   34·125 fl. à 5 %.
```

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 49, c.

§. 119. Berechnung der Prozente, des Kapitals oder der Zeit.

Für die Volksschule empfiehlt sich auch zur Lösung der hieher gehörigen Aufgaben am besten die Schlussrechnung.

1) 805 fl. Kapital geben in 3 Jahren 144·9 fl. Zins; zu wie viel % ist das Kapital angelegt, d. h. wie viel fl. Zins geben 100 fl. Kapital in 1 Jahre?

805 fl. Kap. in 3 Jahr. 144·9 fl. Zins

805 „ „ „ 1 Jahre $\frac{144 \cdot 9}{3}$ „ „

1 „ „ „ 1 „ $\frac{144 \cdot 9}{805 \times 3}$ fl. Zins

100 „ „ „ 1 „ $\frac{144 \cdot 9 \times 100}{805 \times 3}$ fl. Zins

$= 6$ fl. Zins.

Das Kapital ist also zu 6 % angelegt.

2) Welches Kapital gibt zu 4 % in 2 Jahren 70 fl. Zins?

4 % des Kapitals in 2 Jahren = 70 fl.
4 % „ „ „ 1 Jahr = 35 „
1 % „ „ „ 1 „ = 8·75 „
Daher das Kapital selbst 8·75 fl. × 100 = 875 „

3) Wie lange müßen 350 fl. anliegen, damit der Zins à 5 % dem Kapitale gleich werde?

350 fl. Kapital geben zu 5 % in 1 Jahre 3·5 × 5 = 17·5 fl.; 350 fl. Zinsen gibt also dasselbe Kapital in so viel Jahren, als wie oft 17·5 fl. in 350 fl. enthalten sind, somit in

350 : 17·5 = 20 Jahren.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 50 u. 51.

§. 120. Künftiger und gegenwärtiger Wert einer Geldsumme nach einfachen Zinsen.

a. Wert einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

(Vereinigung des Kapitals und der Zinsen in eine Summe.)

Wenn jemand einen Geldbetrag später zahlt, als er ihn zahlen sollte, so wird er nicht nur diesen Betrag, sondern auch die Zinsen davon für die Zeit, um welche er später zahlt, zu entrichten haben.

Um daher den künftigen Wert einer Geldsumme d. i. den Wert derselben nach einer bestimmten Zeit zu finden, berechnet man die Zinsen davon für diese Zeit und addiert sie zu der gegebenen Geldsumme. Z. B.

Welchen Wert haben 1250 fl. bei 6 % Zins nach 4 Jahren?

12·50 × 6		Kapital	1250 fl.
75·00 fl. für 1 Jahr		Zins für 4 Jahre	300 „
300 fl. für 4 Jahre		Wert nach 4 Jahren	1550 fl.

Oder:

100 fl. sammt Zinsen nach 4 Jahren $= 124$ fl.

1 „ „ „ „ 4 „ $= \frac{124}{100}$ „

1250 „ „ „ „ 4 „ $= \frac{1250 \times 124}{100}$ fl.

$= 1550$ fl.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 52.

---

b. Wert einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.

(Zerlegung einer Summe in Kapital und Zins; Diskont.)

Wenn jemand eine unverzinsliche Geldsumme früher zahlt, als er sie zahlen sollte, so wird er nicht die volle Geldsumme, sondern nur einen so großen Betrag zahlen, dass dieser vermehrt um die Zinsen, die er bis zum Zahlungstermine tragen würde, der Schuldsumme gleich wird. Dem Schuldner muß in diesem Falle ein bestimmter Abzug gewährt werden, welcher **Diskont** heißt und nach Prozenten berechnet wird. Wenn man den Diskont von dem Schuldkapitale subtrahiert, so heißt der Rest der **gegenwärtige** oder **bare** Wert des Kapitals.

Z. B. Jemand will eine unverzinsliche Schuld von 400 fl., die er nach 1 Jahre zu zahlen verpflichtet ist, sogleich bezahlen; wie viel beträgt der Diskont à 5 %, und wie groß ist die bare Bezahlung?

Eine bare Summe von 100 fl. beträgt bei 5 % Zins nach 1 Jahre 105 fl.; also sind 105 fl., nach 1 Jahre zahlbar, gegenwärtig nur 100 fl. wert, oder: von je 105 fl. werden, wenn man sie um 1 Jahr früher bezahlt, 5 fl. als Diskont in Abzug gebracht. Man hat daher

105 fl. Kap. 5 fl. Disk.
1 „ „ $\frac{5}{105}$ „ „
400 „ „ $\frac{400 \times 5}{105}$ fl. Disk.
= 19·05 fl. Diskont.

Schuldkap.	400	fl.
ab Diskont	19·05	„
Barzahlung	380·95	„

Probe:

380·95 fl. à 5 %
19·0475 fl. Zins

Barzahlung	380·95	fl.
Zins für 1 Jahr	19·05	„
Kap. nach 1 Jahre	400	fl.

Aus dieser Darstellung geht klar hervor, dass der Diskont **auf Hundert** (§. 117) gerechnet werden müße.

Würde man den Diskont **von Hundert** rechnen, so hätte man:

400 fl. à 5 %
20 fl. Diskont

Kapital	400	fl.
ab Diskont	20	„
Barzahlung	380	fl.

Eine Barzahlung von 380 fl. würde aber mit den Zinsen à 5 % nach 1 Jahre nicht das Schuldkapital 400 fl., sondern nur 399 fl. geben.

Da übrigens der Unterschied zwischen den Diskontbeträgen auf und von 100 für kleinere Zeitabschnitte nur unbedeutend, die Rechnung von 100 aber viel bequemer ist, so rechnen Geschäftsleute den Diskont bei Warenbeträgen und bei Wechseln, da es dabei gewöhnlich nur auf eine kurze Frist ankommt, allgemein von 100. Da, wo es sich um längere Zeiträume handelt, würde jedoch dieses Verfahren zu sonderbaren Konsequenzen führen. Gesetzt, jemand wünschte eine Schuld von 100 fl., die er nach 20 Jahren zu berichtigen hat, mit 5 % Diskont sogleich zu zahlen; der Diskont würde dann ebenfalls 100 fl. betragen, und der Schuldner hätte also gar nichts zu zahlen. Wären die 100 fl. erst nach 40 Jahren zahlbar gewesen, so betrüge der Diskont sogar 200 fl. und der Schuldner müßte noch 100 fl. herausbekommen. Richtig aber würde man die erstere Aufgabe so rechnen: 100 fl. geben in 20 Jahren zu 5 % 100 fl. Zinsen, wachsen also mit diesen auf 200 fl. an; wenn nun umgekehrt 200 fl. nach 20 Jahren zahlbar, gegenwärtig 100 fl. wert sind, so ist der gegenwärtige Wert von 100 fl. gleich $^{100}/_{2}$ fl. = 50 fl.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 53.

II. Zinseszinsen.

§. 121. Künftiger und gegenwärtiger Wert einer Geldsumme bei Berechnung von Zinseszinsen.

Bei Verzinsung von Kapitalien geschieht es häufig, dass die Zinsen am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Kapitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Kapital ist auf Zins von Zins oder auf Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen heißen auch zusammengesetzte Zinsen, zum Unterschiede von den einfachen, welche zu den gewöhnlichen Terminen bezahlt, oder, wenn sie rückständig bleiben, doch nicht wieder verzinst werden.

a. Berechnung des Wertes einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

Um den Wert eines Geldbetrages nach einer gegebenen Zeit, während welcher die Zinsen nach einer bestimmten Periode wieder zum Kapitale geschlagen und mit diesem verzinst werden, zu erhalten, könnte man das Interesse für jede einzelne Periode berechnen und jedesmal zu dem Anfangskapital jener Periode addieren.

Z. B. Wie hoch werden 2000 fl. Kapital nach 4 Jahren anwachsen, wenn man die Zinsen à 5 % am Ende eines jeden Jahres zum Kapitale schlägt und von neuem verzinset?

Anfangskapital	2000 fl.
Zins des 1. Jahres	100 „
Kapital zu Ende des 1. Jahres	2100 fl.
Zins des 2. Jahres	105 „
Kapital zu Ende des 2. Jahres	2205 fl.
Zins des 3. Jahres	110·25 fl.
Kapital zu Ende des 3. Jahres	2315·25 fl.
Zins des 4. Jahres	115·7625 fl.
Kapital zu Ende des 4. Jahres	2431·0125 fl.

Nach den einfachen Interessen wäre der Zins in 1 Jahre 100 fl., also in 4 Jahren 400 fl., während das Erträgnis nach Zinseszinsen 431 fl. 1 kr. ist; der Unterschied von 31 fl. 1 kr. geht also aus den Zinseszinsen hervor.

Da die vorhergehende Rechnung sehr weitläufig ist, so soll hier ein anderes kürzeres Verfahren entwickelt werden, nach welchem man das Anwachsen mittels Zinseszinsen berechnen kann.

100 fl. am Anfange eines Jahres sind zu 5 % verzinset am Ende desselben Jahres 105 fl., also 1 fl. den 100sten Theil von 105 fl., nämlich 1·05 fl. wert. Man hat daher für das frühere Beispiel folgende Rechnung:

2000 fl. am Anfange des 1. Jahres geben
am Ende des 1. Jahres $2000 \times 1{\cdot}05$ fl.;
$2000 \times 1{\cdot}05$ fl. am Anfange des 2. Jahres geben
am Ende des 2. Jahres $2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl.;
$2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl. am Anfange des 3. Jahres geben
am Ende des 3. Jahres $2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl.
$2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl. am Anfang des 4. Jahres geben
am Ende des 4. Jahres $2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl.
Das Endkapital nach 4 Jahren ist also
$2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$ fl.

$$\begin{array}{rl}
1{\cdot}05 & \times\ 1{\cdot}05 \\
525 & \\
\hline
1{\cdot}1025 & \times\ 1{\cdot}05 \\
55125 & \\
\hline
1{\cdot}157625 & \times\ 1{\cdot}05 \\
57881 & \\
\hline
1{\cdot}215506 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
2000 \times 1{\cdot}215506 \\
\hline
2431{\cdot}01 \text{ fl.}
\end{array}$$

Man muß also 1·05, d. i. die Zahl, welche gefunden wird, wenn man zu 100 das Prozent 5 addiert und diese Summe 105 durch 100 dividiert, 4mal, d. i. so oftmal als Jahre da sind, als Faktor setzen und dann das Anfangskapital damit multiplizieren.

Die Zahl $1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 = 1{\cdot}215506$, mit welcher das Anfangskapital multipliziert werden muß, um den nach Zinseszinsen angewachsenen Endwert zu erhalten, kann man die Zinseszinszahl (hier für 5 % und 4 Jahre) nennen.

Würde man die Interessen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Kapitale schlagen, so erhielte man, da 100 fl. nach einem Halbjahre 102·5 wert sind, 1 fl. also den Wert von 1·025 fl. bekommt, durch ähnliche Schlüsse, wie oben, als Endkapital nach 4 Jahren oder 8 Halbjahren.

$2000 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025 \times 1{\cdot}025$ fl. $= 2000 \times 1{\cdot}218403$ fl. $=$ 1436·81 fl.

Hier ist 1·218403 die Zinseszinszahl für $2\frac{1}{2}$ % und 8 Halbjahre.

Es gibt besondere Tabellen, welche die bereits ausgerechneten Zinseszinszahlen für verschiedene Prozente und Zeitperioden enthalten, deren Benützung daher die Rechnung sehr vereinfacht.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 54, 55 und 56, a.

---

b. Berechnung des Wertes einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.

Da der künftige Wert eines Kapitals gleich ist dem gegenwärtigen Anfangskapitale multipliziert mit der entsprechenden Zinseszinszahl, so folgt, dass umgekehrt das Anfangskapital gleich ist dem künftigen Werte dividiert durch dieselbe Zinseszinszahl.

Z. B. Wie viel sind 3000 fl., welche nach 4 Jahren zahlbar sind, bei 5 % Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 4 Jahre früher wert?

Die Zinseszinszahl für 5 % und 4 Jahre ist 1·215506; man hat daher

3000 fl. : 1·215506 = 2468·108 fl. gegenwärtiger Wert.

Statt 3000 fl. : 1·215506 kann man auch 3000 fl. $\times \frac{1}{1\cdot215506}$ setzen. Kennt man daher den Quozienten $\frac{1}{1\cdot215506}$, so darf man nur den Endwert des Kapitals damit multiplizieren. Man hat nun die Quozienten, die man erhält, wenn 1 durch die Zinseszinszahl dividiert wird, für verschiedene Prozente und Zeitperioden ausgerechnet und in Tabellen zusammengestellt, durch deren Benützung die Rechnung wesentlich erleichtert wird.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 56, b.

III. Terminrechnung.

§. 122. Berechnung des mittleren Zahlungstermins.

Häufig werden unverzinsliche Geldsummen, die nach und nach in bestimmten Zeitfristen (Terminen) gezahlt werden sollen, auf einmal, oder unverzinsliche Geldsummen, die zu bestimmten Terminen zahlbar sind, zu anderen als den festgesetzten Terminen abgetragen. Die Bestimmung der Zeitpunkte, zu denen dieß ohne Nachtheil sowohl des Schuldners als des Gläubigers geschehen kann, lehrt die Terminrechnung.

Bei dieser Rechnung werden einfache Zinsen vorausgesetzt, so dass man schließen kann: 300 fl. geben in 4 Jahren eben so viel Zins, als 4mal 300 fl. in 1 Jahre; oder: 500 fl. geben in 3 Monaten eben so viel Zins, als 3mal 500 fl. in 1 Monate.

Wenn mehrere Theilzahlungen, welche in verschiedenen Zeitfristen zahlbar sind, auf einmal gezahlt werden sollen, so heißt der Zeitpunkt, zu welchem die Gesammtzahlung zu leisten ist, der mittlere Zahlungstermin.

Wie der mittlere Termin gefunden wird, soll an folgendem Beispiele gezeigt werden:

A hat an B 400 fl. nach 4, und 800 fl. nach 8 Monaten zu zahlen; wenn nun die ganze Summe von 1200 fl. auf einmal abgetragen werden soll, wann muß dieses geschehen?

Bei der bedungenen Zahlungsweise genießt der Schuldner die Zinsen von 400 fl. durch 4, und von 800 fl. durch 8 Monate.

Der Schuldner erhält von	eben so viel Zinsen als von
400 fl. in 4 Mon.	1600 fl. in 1 Mon.
800 „ „ 8 „	6400 „ „ 1 „
1200 fl. in ? Mon.	8000 fl. in 1 Mon.

8000 fl. geben einen bestimmten Zins in 1 Mon.
1 „ gibt denselben „ „ 8000 „
1200 „ geben „ „ „ $\frac{8000}{1200} = 6\frac{2}{3}$ Mon.

Die Gesammtzahlung wird also nach $6\frac{2}{3}$ Mon. zu erfolgen haben.

Man erhält daher den mittleren Zahlungstermin, indem man jede Theilzahlung mit der dazu gehörigen Zeit multipliziert und die Summe dieser Produkte durch die Summe der Theilzahlungen dividiert.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 57 und 58 a.

---

§. 123. Verwandlung gegebener Zahlungstermine in andere.

A hat nach 3 Jahren 300 fl., nach 4 Jahren 500 fl. und nach 5 Jahren 600 fl. zu zahlen; er zahlt jedoch schon nach 2 Jahren 400 fl. und nach $2\frac{1}{2}$ Jahren 500 fl.; wann wird der Rest fällig sein?

A darf benutzen:	300	fl.	3	Jahre	=	900	fl.	1	Jahr
	500	„	4	„	=	2000	„	1	„
	600	„	5	„	=	3000	„	1	„
zusammen	1400	fl.				5900	fl.	1	Jahr
er benutzt:	400	fl.	2	Jahre	=	800	fl.	1	Jahr
	500	„	$2\frac{1}{2}$	„	=	1250	„	1	„
zusammen	900	fl.				2050	fl.	1	Jahr
hat noch zu benutzen:	500	fl.	?	Jahre	=	3850	fl.	1	Jahr

$$3850 : 500 = 7{\cdot}7 \text{ Jahre.}$$

Der Rest von 500 fl. wird also 7·7 Jahre, vom Beginne an gerechnet, zu zahlen sein.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 58, b.

Fünfter Abschnitt.

Verhältnisrechnungen.

I. Verhältnisse.

§. 124.

Die Dreisatz- oder Regeldetri-Aufgaben wurden in früherer Zeit allgemein nur mit Hilfe der Proporzionen aufgelöst, welche daher auch im Rechenunterrichte der Volksschulen eine sehr wichtige Rolle spielten. Nachdem jedoch die fortschreitende Entwicklung eines razionellen elementaren Unterrichtes dahin geführt hat, dass man die Regeldetri-Aufgaben durch kunstlose Schlüsse, und zwar vorzugsweise durch das sogenannte Zurückführen auf die Einheit, weit einfacher, mit mehr Einsicht und unmittelbarem Verständnis auflöst, als dieß durch Bildung eines Proporzionsansatzes möglich ist, haben sich die bedeutendsten Schulmänner für die gänzliche Ausscheidung der Proporzionslehre aus dem Unterrichtsstoffe der Volksschule ausgesprochen. Auch wir schließen uns dieser Ansicht an und haben darum der Lösung der Dreisatzaufgaben durchgängig die Schlussrechnung zu Grunde gelegt. Wenn wir dennoch einige Übungen über das Wesen der Verhältnisse und Proporzionen aufnehmen, so geschieht dieses nur, um die gründliche Auffassung der späteren Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, in denen es sich um Zahlenverhältnisse handelt, besser vorzubereiten, ohne dass jedoch die Lösung dieser Rechnungen selbst von der Proporzionslehre abhängig gemacht würde.

---

a) Um den Schülern von dem Wesen der Verhältnisse eine klare Vorstellung zu verschaffen, wird man sie sowohl reine als benannte Zahlen, und insbesondere auch Linien paarweise vergleichen und jedesmal beurtheilen lassen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, oder wie vielmal so groß die eine ist als die andere. Die Schüler werden dann folgende Erklärungen leicht und richtig auffassen:

Die Vergleichung zweier Zahlen oder zweier gleichartiger Größen, um zu sehen, wie oft die eine in der andern enthalten ist, heißt ein Verhältnis. Z. B. unter dem Verhältnisse von 12 zu 3 versteht man die Angabe, wie oft 3 in 12 enthalten ist, also den angezeigten Quozienten 12 : 3. Jedes Verhältnis enthält zwei Zahlen, welche Glieder heißen; das erste Glied (der Dividend) heißt das Vorderglied, das zweite Glied (der Divisor) das Hinterglied. Wenn man das Vorderglied durch das Hinterglied wirklich dividiert, so heißt der Quozient der Exponent des Verhältnisses; der Exponent des Verhältnisses 12 : 3 ist 4.

Sowie die Division als Theilung zur Entstehung der Brüche Anlass gibt, so führt die Division als Messung auf den Begriff des Verhältnisses.

Aus diesen Erklärungen folgt auch:

1. In jedem Verhältnisse ist das Vorderglied gleich dem Hintergliede multipliziert mit dem Exponenten.

2. Das Hinterglied ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 59, a.

---

b) Nachdem die Schüler an dem einzelnen Verhältnisse die beiden Glieder mit einander verglichen haben, lasse man sie auch zwei oder mehrere Verhältnisse hinsichtlich ihrer Größe, welche durch den Exponenten ausgedrückt wird, in Vergleichung ziehen.

Zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, heißen gleich; z. B. 12 : 3 und 8 : 2.

Man kann ein Verhältnis in größeren oder kleineren Zahlen ausdrücken, d. i. seine Form ändern; der Wert desselben wird nicht geändert, so lange der Exponent ungeändert bleibt.

Daraus folgt:

1. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl multipliziert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man ein Verhältnis, worin Brüche oder gemischte Zahlen vorkommen, durch ganze Zahlen darstellen, indem man beide Glieder mit dem wegzuschaffenden Nenner multipliziert.

Z. B. Aus dem Verhältnisse $5 : 2\frac{2}{3}$ erhält man, wenn man beide Glieder mit 3 multipliziert, das in ganzen Zahlen ausgedrückte Verhältnis $15 : 8$, das mit dem gegebenen denselben Exponenten $1\frac{7}{8}$, also auch denselben Wert hat.

2. Ein Verhältnis bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglied durch dieselbe Zahl dividiert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann jedes Verhältnis, dessen beide Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, abgekürzt werden, indem man beide Glieder durch jene Zahl dividiert.

Z. B. Statt des Verhältnisses $16 : 24$ kann man, wenn beide Glieder durch 8 dividiert werden, das einfachere Verhältnis $2 : 3$ setzen.

Durch die Verbindung der beiden vorhergehenden Übungen kann jedes Verhältnis auf die einfachste Form gebracht werden, indem man es, wenn darin Brüche vorkommen, zuerst in ganzen Zahlen darstellt, und dann, wenn es angeht, abkürzt.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 60, b.

---

c) Damit die von den Schülern gewonnenen Begriffe befestiget und zu noch größerer Klarheit erhoben werden, wendet man dieselben sogleich auf mannigfaltige praktische Beispiele an. Eine Schwierigkeit werden hiebei anfänglich nur die umgekehrten Verhältnisse bieten.

Sollte z. B. bei der Aufgabe: A geht in 3 Stunden so weit als B in 4 Stunden, wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten? der gedankenlose Schüler die Antwort geben: wie 3 : 4; so wird derselbe die Unrichtigkeit seiner Antwort sogleich einsehen, wenn man ihn fragt: wenn A schon in 3 Stunden einen Weg zurücklegt, welchen B erst in 4 Stunden macht; geht A geschwinder oder langsamer als B? Wenn aber die Geschwindigkeit des A größer ist als jene des B, kann sich die erste zu der zweiten so wie 3 : 4 verhalten? Nun ist der Schüler noch zu überzeugen, dass hier eben das umgekehrte Verhältnis 4 : 3 stattfindet. Wenn A einen Weg in 3 Stunden zurücklegt, den wievielten Theil dieses Weges legt er in 1 Stunde zurück? Wenn B denselben Weg erst in 4 Stunden zurücklegt, den wievielten Theil dieses Weges legt er in 1 Stunde zurück? Man kann daher die obige Aufgabe auch so ausdrücken: A legt in einer Stunde $^1/_3$ eines bestimmten Weges, B nur $^1/_4$ desselben Weges zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten? Offenbar wie $^1/_3$: $^1/_4$, oder wie 4 : 3.

Übungsbeispiele im V. Rechenbuche S. 60 und 61, c.

---

d) Wenn man von zwei zu vergleichenden Größen solche Theile zusammenstellt, welche an Wert, oder Größe, oder Gewicht u. s. w. gleich sind, so nennt man diese Gleichstellung eine Gleichung; z. B. 14 Kilogramm = 25 Wiener Pfund.

Jede Gleichung zwischen zwei benannten Zahlen läßt sich auf die Form eines Verhältnisses bringen. Es sei z. B. die Gleichung 14 Kilogr. = 25 W. Pfund gegeben und hieraus das Verhältnis zwischen dem Kilogramm und dem W. Pfund herzuleiten. Sind 14 Kilogr. = 25 W. Pfund, so ist 1 Kilogr. = $^{25}/_{14}$ W. Pfund; da nun 1 W. Pfund = $^{14}/_{14}$ W. Pfund, so verhält sich 1 Kilogramm zu 1 W. Pfund, wie $^{25}/_{14}$: $^{14}/_{14}$, d. i. wie 25 : 14.

Um daher eine Gleichung zwischen zwei benannten Größen in ein Verhältnis zu verwandeln, muß man die Zahlen der Gleichung so umstellen, dass sich die größere auf die mehrwertige Größe, die kleinere auf die geringere Größe bezieht.

Umgekehrt ergibt sich durch Umstellung der Zahlen, welche das Verhältnis zwischen zwei Größen ausdrücken, sofort eine Gleichung.

Verhält sich z. B. 1 Liter zu 1 W. Maß wie 5 : 7, so hat 1 Liter 5 Theile, wie 1 W. Maß deren 7 hat; also ist $^{1}/_{5}$ Liter = $^{1}/_{7}$ W. Maß, oder 1 Liter = $^{5}/_{7}$ W. Maß, und 7 Liter = 5 W. Maß.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 62, d.

II. Proporzionen.

§. 125.

Wenn man zwei Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, und somit gleich sind, durch das Gleichheitszeichen verbindet, so heißt ein solcher Ausdruck eine Proporzion. Z. B. 12 : 3 = 8 : 2 ist eine Proporzion, welche gelesen wird: 12 verhält sich zu 3, wie sich 8 zu 2 verhält, oder kürzer: 12 zu 3 wie 8 zu 2. Das erste und vierte Glied (12 und 2) werden äußere, das zweite und dritte (3 und 8) innere Glieder der Proporzion genannt.

Um die Schüler in der Bildung der Proporzionen zu üben, lege man ihnen irgend ein Verhältnis vor, lasse sie andere Verhältnisse aufsuchen, welche jenem gleich sind, und je zwei Verhältnisse zu einer Proporzion verbinden.

Setzt man in einer beliebigen Proporzion 12 : 3 = 8 : 2 statt eines jeden Vordergliedes das Produkt aus dem Hintergliede und dem Exponenten, so erhält man

$$3 \times 4 : 3 = 2 \times 4 : 2.$$

Daraus ist ersichtlich, dass sowohl die äußeren als die inneren Glieder mit einander multipliziert, dieselben drei Faktoren 3, 4 und 2 enthalten, daher auch dasselbe Produkt geben müßen.

In jeder Proporzion ist also das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Produkte der inneren Glieder.

Aus einer Proporzion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die Proporzion auflösen. Das unbekannte Glied wird gewöhnlich mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet.

Eine Proporzion kann aufgelöst werden, wenn man aus dem bekannten Verhältnisse den Exponenten sucht und mittelst desselben das unbekannte Glied des zweiten Verhältnisses bestimmt.

Es sei z. B. die Proporzion 27 : 9 = x : 2 aufzulösen. Da hier der Exponent, des ersten Verhältnisses 3 ist, so muß auch der Exponent des zweiten Verhältnisses 3, und daher das Vorderglied desselben $x = 2 \times 3 = 6$ sein. Die Proporzion ist daher 27 : 9 = 6 : 2.

Die Auflösung einer Proporiion kann auch nach einem der folgenden zwei Sätze geschehen:

1. Ein äußeres Glied der Proporzion wird gefunden, indem man die beiden inneren Glieder mit einander multipliziert und das Produkt durch das bekannte äußere dividiert.

Es sei z. B. die Proporzion 8 : 5 = 16 : x aufzulösen. Das Produkt der inneren Glieder ist $5 \times 16 = 80$, also muß auch das Produkt der äußeren Glieder 80 sein; eines dieser Glieder, also einer der beiden Faktoren, ist 8; um den anderen Faktor zu finden, darf man nur das Produkt 80 durch den einen Faktor, nämlich durch das bekannte äußere Glied 8 dividieren; folglich $x = \frac{5 \times 16}{8} = \frac{80}{8} = 10$. Die Proporzion ist also $8 : 5 = 16 : 10$.

2. Ein inneres Glied der Proporzion wird gefunden, indem man die beiden äußeren Glieder mit einander multipliziert und das Produkt durch das bekannte innere dividiert.

Ist z. B. die Proporzion $8 : x = 24 : 9$ aufzulösen, so erhält man daraus $8 \times 9 = 72$ als das Produkt der äußeren Glieder; es muß daher auch das Produkt der inneren Glieder 72 sein; hier ist also aus dem Produkte 72 zweier Zahlen und aus einer derselben, nämlich 24, die andere zu suchen, d. h. 72 durch 24 zu dividieren; folglich $x = \frac{8 \times 9}{24} = \frac{72}{24} = 3$, und die Proporzion heißt $8 : 3 = 24 : 9$.

Übungsaufgaben im V. Rechenbuche S. 63.

Da wir für die Volksschule die Schlussrechnung als ausschließliches Lösungsverfahren für die Dreisatzrechnungen annehmen, so liegt die nähere Betrachtung über die Eigenschaften der Proporzionen sowie über ihre Anwendung zur Auflösung der Regeldetri-Aufgaben außer dem Zwecke dieses Buches.

III. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 126.

Eine Zahl kann in gleiche oder ungleiche Theile zerlegt werden. Die Zerlegung einer Zahl in gleiche Theile lehret die Division. Soll eine Zahl in ungleiche Theile zerlegt werden, so muß außer der Zahl der Theile auch angegeben sein, wie groß die Theile im Vergleiche mit einander werden, oder wie sie sich zu einander verhalten sollen. Die Rechnung, durch welche eine Zahl nach einem gegebenen Verhältnisse d. h. so getheilt wird, dass sich die Theile wie gegebene Zahlen zu einander verhalten, heißt die **Gesellschaftsrechnung**. Die Zahlen, welche jenes Verhältnis ausdrücken, heißen die **Verhältniszahlen**.

Die Gesellschaftsrechnung findet Anwendung bei Kompagniegeschäften, Erbschaften, Konkursen, Steuervertheilungen, Schiffsantheilen und Seeschäden, bei Herstellung von Mischungen u. s. w.

Wenn in einer Aufgabe nur **eine** Reihe von Verhältniszahlen gegeben ist, von denen die Größe der Theile abhängt, so heißt die Gesellschaftsrechnung die **einfache**; dagegen die **zusammengesetzte**, wenn die Vertheilung von mehreren Bestimmungen abhängt, und daher **mehrere** Reihen von Verhältniszahlen gegeben sind.

---

a. Einfache Gesellschaftsrechnung.

Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen; A gibt 2800 fl., B 3600 fl. und C 4000 fl.; sie gewinnen damit 1300 fl.; wie viel vom Gewinn gebürt einem jeden?

Die Antheile am Gewinn müßen sich so wie die Einlagen verhalten, also wie die Zahlen 2800, 3600 und 4000, oder indem man durch 100 und 4 abkürzt, wie die Zahlen 7, 9 und 10. Der ganze Gewinn von 1300 fl. ist demnach so zu vertheilen, dass auf A 7, auf B 9, auf C 10, also auf alle zusammen $7 + 9 + 10 = 26$ Theile von gleicher Größe entfallen. Dividiert man daher die zu vertheilende Zahl 1300 fl. durch die Summe 26 der Verhältniszahlen, so zeigt der Quozient 50 fl. einen solchen Theil an. Da aber A 7, B 9, C 10 solche Theile erhalten soll, so muß man 50 fl. noch mit den einzelnen Verhältniszahlen multiplizieren. Die Rechnung steht:

A 2800	7	50 fl. × 7 = 350 fl.	gewinnt A
B 3600	9	50 „ × 9 = 450 „	„ B
C 4000	10	50 „ × 10 = 500 „	„ C
1300 fl. :	26 = 50 fl.	1300 fl.	zusammen.

Bei der **einfachen Gesellschaftsrechnung** dividiert man daher die zu theilende Zahl durch die Summe der auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen und multipliziert den Quozienten mit jeder Verhältniszahl.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 64, 65 und 66, a.

---

b. Zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

Drei Kaufleute sind mit einander in Gesellschaft getreten und haben zusammen 2300 fl. gewonnen; wenn nun A 2000 fl. durch 8 Monate, B 4000 fl. durch 6 Monate, C 5000 fl. durch 5 Monate in dem Geschäftsfonde liegen ließ, wie viel von dem Gewinne wird jeder erhalten?

Hier hängen die Antheile am Gewinne nicht bloß von der Einlage, sondern auch von der Zeit ab. Es ist jedoch gleichviel,

ob A	2000 fl.	8	Monate	oder	16000 fl.	1	Monat
„ B	4000 „	6	„	„	24000 „	1	„
„ C	8000 „	5	„	„	40000 „	1	„

in dem Fonde liegen läßt. Da nun im zweiten Falle die Zeit für alle drei Antheile gleich ist, so hängen dieselben nur von den zu dieser Zeit gehörigen Einlagen, nämlich den Produkten 16000 fl., 24000 fl. und 40000 fl. ab, welche daher als Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung betrachtet werden. Die Rechnung steht:

A 2000 fl. 8 Mon. = 16000 fl.	2	230 fl. × 2 =	460 fl.
B 4000 „ 6 „ = 24000 „	3	230 „ × 3 =	690 „
C 8000 „ 5 „ = 40000 „	5	230 „ × 5 =	1150 „
2300 fl. :	10 = 230 fl.		2300 fl.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung multipliziert man daher die Verhältniszahlen, welche auf denselben Theil Bezug haben, mit einander und betrachtet die Produkte als die Verhältniszahlen einer einfachen Gesellschaftsrechnung, nach welcher dann die weitere Rechnung ausgeführt wird.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 66, b.

IV. Die Alligazionsrechnung.

§. 127.

Häufig werden gleichartige Stoffe, die jedoch an Wert oder Gehalt verschieden sind, mit einander gemischt (gemengt), um eine Mischungssorte von mittlerem Werte zu erhalten. Dabei kommen folgende Größen zur Betrachtung: 1) die Menge der einzelnen Bestandtheile, 2) der Wert derselben, und 3) der Wert der Mischung.

Die Rechnung, welche diese Größen aus einander herleitet, wird im allgemeinen die Mischungsrechnung genannt. Sie enthält sehr mannigfache Aufgaben, von denen die zwei folgenden von besonderer praktischer Wichtigkeit sind:

1. Es ist der Wert der Einheit einer Mischung zu suchen, welche aus gleichartigen Stoffen von verschiedenem Werte hergestellt wird. Die Rechnung heißt die Durchschnittsrechnung.

2. Es ist das Verhältnis zu finden, in welchem zwei gleichartige Stoffe von verschiedenem Werte mit einander verbunden werden müßen, um eine Mischung von bestimmtem Mittelwerte zu erhalten. Die Mischungsrechnung heißt in diesem Falle eine Alligazionsrechnung.

Die Durchschnittsrechnung beruht auf ganz einfachen Schlüssen; sie wurde schon auf den früheren Unterrichtsstufen wiederholt angewendet (siehe III. Abtheilung §. 63, e. Angewandte Aufgaben).

Dagegen tritt bei der Alligazionsrechnung eine besondere Art von Schlüssen auf, die wir an der folgenden Aufgabe näher erläutern wollen.

Ein Wirt will zweierlei Weine, das Liter zu 50 Kr. und zu 36 Kr. so mischen, dass 1 Liter der Mischung 42 Kr. wert sei; in welchem Verhältnisse muß er die beiden Gattungen mischen?

1 Liter der besseren Sorte kostet 50 Kr. — 42 Kr. = 8 Kr. mehr, 1 Liter der geringeren Sorte 42 Kr. — 36 Kr. = 6 Kr. weniger, als 1 Liter der Mischung kosten soll. Es geben also 6 Liter der besseren Sorte einen Überschuss von 6mal 8 Kr. = 48 Kr., und 8 Liter der geringeren Sorte einen Abgang von 8mal 6 Kr. = 48 Kr.; damit sich also der Überschuss und der Abgang ausgleichen, muß man auf je 6 Liter der besseren Sorte 8 Liter der geringeren zur Mischung verwenden, d. h. die bessere und geringere Sorte müßen in dem Verhältnisse 6 : 8, wofür man auch 3 : 4 setzen kann, gemischt werden.

Daraus folgt, dass der Überschuss oder Abgang bei der einen Sorte die Zahl der gleichen Theile anzeigt, welche von der andern Sorte zu nehmen sind.

Die voranstehenden Schlüsse lassen sich übersichtlich so darstellen:

Bessere Sorte à Lit.	50 Kr.	Geringere Sorte à Lit.	36 Kr.
Mischung „ „	42 „	Mischung „ „	42 „
Überschuss an 1 Liter	8 Kr.	Abgang an 1 Liter	6 Kr.
„ „ 6 „	48 „	„ „ 8 „	48 „

Die Rechnung selbst stellt sich wie folgt:

	50	8 Übersch.	6 Theile	3
42	—			
	36	6 Abgang	8 Theile	4

In der Praxis kommt die Alligazionsrechnung meistens in Verbindung mit der Gesellschaftsrechnung vor. Z. B. Zwei Gattungen Kaffee, das Kilogramm zu 118 Kr. und zu 108 Kr., sollen so gemischt werden, dass man 100 Kilogr. à 112 Kr. erhalte; wie viel Kilogr. von jeder Gattung wird man zur Mischung verwenden?

Zuerst wird nach der Alligazionsrechnung das Mischungsverhältnis gesucht:

	118	6 Übersch.	4 Theile	2
112 —				
	108	4 Abgang	6 Theile	3

Die Menge von 100 Kilogr. ist also nach dem Verhältnisse 2 : 3 zu theilen; dieses geschieht nach der Gesellschaftsrechnung:

2	20 Kil. × 2 = 40 Kil. à 118 Kr.
3	20 Kil. × 3 = 60 Kil. à 108 Kr.
100 Kil. : 5 = 20 Kil.	

Die Probe wird nach der Durchschnittsrechnung verrichtet:

40 Kil. à 118 Kr.	kosten	4720 Kr.
60 „ à 108 „	„	6480 „
100 Kil. Mischung	kosten	11200 Kr.
1 „ „	kostet	112 „

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 67 und 68.

V. Die Kettenrechnung.

§. 128.

Die Kettenrechnung, auch Kettensatz genannt, hat ihren Namen von der eigenthümlichen Beschaffenheit des Ansatzes, dessen Zahlen wie die Glieder einer Kette mit einander verbunden werden. Sie wird angewendet, wenn aus einer bekannten Zahl einer Art die zugehörige unbekannte Zahl einer andern Art durch Hilfe mehrerer zusammenhängender Mittelbestimmungen gefunden werden soll.

Z. B. Wie viel Kreuzer ö. W. kosten 4 Dekagramm einer Ware, von welcher $7\frac{1}{2}$ Kilogramm auf 75 Franks kommen?

Um hier den zu 4 Dekagr. gehörigen Preis in Kr. ö. W. zu finden, muß man nebst der Angabe, dass $7\frac{1}{2}$ Kilogr. 75 Franks kosten, noch folgende Mittelbestimmungen zu Hilfe nehmen: 1 Kilogr. hat 100 Dekagr.. $2\frac{1}{2}$ Franks gelten 100 Kr. ö. W.; und die vollständige Aufgabe läßt sich dann in folgende Kettenverbindung bringen:

? Kr. ö. W. kosten	. . .	4 Dekagramm,
wenn 100 Dekagramm	. .	1 Kilogr. machen,
wenn $7\frac{1}{2}$ Kilogramm	. .	75 Franks kosten,
und wenn $2\frac{1}{2}$ Francs	. .	100 Kr. ö. W. gelten?

In diesem Ansatze hat jede Zahl auf der rechten Seite mit der links stehenden gleichen Wert; jede Zahl auf der linken Seite ist mit der nächstvorhergehenden auf der rechten Seite gleichnamig, und die letzte Zahl rechts ist mit der ersten Zahl links d. i. mit x gleichnamig. Auf diese Art hängen alle Zahlen des Ansatzes wie die Glieder einer Kette zusammen. Jede Kettenrechnung kann durch wiederholte Anwendung der Schlussrechnung ausgeführt werden. Für das frühere Beispiel hätte man folgenden Rechnungsgang:

a) Zuerst verwandelt man 4 Dekagr. in Kilogr.:

100 Dekagr.	. . .	1	Kilogr.
1 „	. . .	$\frac{1}{100}$	„
4 „	. . .	$\frac{4 \times 1}{100}$	„

b) Dann sucht man den Preis von $\frac{4 \times 1}{100}$ Kilogramm in Franks:

$$7\tfrac{1}{2} \text{ Kilogr.} \quad \ldots \quad 75 \text{ Franks}$$

$$1 \quad '' \quad \ldots \quad \frac{75}{7\frac{1}{2}} \quad ''$$

$$\frac{4 \times 1}{100} \quad '' \quad \ldots \quad \frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}} \quad ''$$

c) Endlich werden $\frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}}$ Franks in Kr. ö. W. verwandelt.

$$2\tfrac{1}{2} \text{ Francs} \quad . \quad . \quad 100 \text{ Kr. ö. W.}$$

$$1 \quad '' \quad . \quad . \quad \frac{100}{2\frac{1}{2}} \quad '' \quad '' \quad ''$$

$$\frac{4 \times 1 \times 75}{100 \times 7\frac{1}{2}} \quad '' \quad \frac{4 \times 1 \times 75 \times 100}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}} = 16 \text{ Kr. ö. W.}$$

Es ist nun nicht nöthig, bei solchen Aufgaben alle diese weitläufigen Schlussrechnungen durchzuführen. Vergleicht man nämlich den gefundenen Ausdruck $\frac{4 \times 1 \times 75 \times 100}{100 \times 7\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}}$ mit der oben in die Kettenverbindung gebrachten Aufgabe, so sieht man sogleich, dass die gesuchte Zahl gleich ist dem Produkte aller rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Produkt aller links erscheinenden Zahlen. Bei der Ausführung werden noch vor der Division, wenn es angeht, zu beiden Seiten Abkürzungen vorgenommen.

Bei der **Kettenrechnung** verfährt man daher auf folgende Art:

1. Man zieht einen senkrechten Strich und setzt links oben die gesuchte Zahl, rechts daneben aber die gegebene Größe, deren Wert gesucht wird.

2. Darunter setzt man alle Mittelbestimmungen, und zwar fängt man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden Größe rechts gleichnamig ist, und setzt rechts daneben diejenige Größe, welche mit ihr gleichen Wert hat. Das letzte Glied rechts in der Kette muß mit der Fragezahl links oben gleichnamig sein.

3. Die gemischten Zahlen werden zu unechten Brüchen eingerichtet, die Nenner auf die entgegengesetzte Seite als Faktoren übertragen, und dann die Zahlen zu beiden Seiten, wenn es möglich ist, abgekürzt.

4. Wird das Produkt aller rechts stehenden Zahlen durch das Produkt der links stehenden dividiert, so gibt der Quozient die gesuchte Zahl.

Es sei noch folgende Aufgabe zu lösen:

1000 Kilogramm Weizen kosten in Berlin 80 Thaler; wie hoch stellt sich hiernach der Preis von 1 Hektoliter Weizen im Gewichte von 77 Kilogr. in ö. W., wenn 100 Thlr. = 160 fl. ö. W. gerechnet werden?

? fl. ö. W.	1 Hektol.
1	77 Kilogr.
1000	$8\cancel{0}$ Thlr.
$10\cancel{0}$	$16\cancel{0}$ fl. ö. W.

$$\frac{77 \times 8 \times 16}{1000} = 9{\cdot}856 \text{ fl. ö. W.}$$

Man beginnt die Kette mit der Frage: wie viel fl. ö. W. kostet 1 Hektoliter? Da man mit Hektoliter aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmnng mit Hektoliter anfangen; dieß geschieht, indem man auf das Gewicht übergeht und sagt: wenn 1 Hektoliter 77 Kilogramm wiegt. Hier hört man rechts mit Kilogr. auf, daher muß man wieder links mit Kilogr. anfangen; man bildet den Übergang von der Ware zum Preise dadurch, dass man sagt: wenn 1000 Kilogr. 80 Thlr. kosten. Man hört hier mit Thlr. auf; da aber die gesuchte Zahl fl. ö. W. bedeutet, so muß man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe nehmen: wenn 100 Thlr. 160 fl. ö. W. geben. Der Ansatz ist nun fertig und folgt dann die Auflösung.

Sechster Abschnitt.

Berechnung der Münzen und Wertpapiere.

§. 129.

Die Übungsstoffe dieses Abschnittes umfassen die Münzrechnung, die Berechnung der Wechsel, Staatspapiere und Akzien. Wenn auch diese Gegenstände eigentlich in die kaufmännische

Arithmetik gehören, so muß doch einige Kenntnis derselben bei der gegenwärtigen Entwicklung des bürgerlichen Verkehrs als ein Gegenstand der allgemeinen Bildung auch für jene, die nicht dem kaufmännischen Stande angehören, angesehen werden. Selbstverständlich wird man sich hier auf das wesentlich Nothwendige beschränken müßen und den einzelnen Abtheilungen kurze theoretische Belehrungen vorausschicken, die den Schüler mit dem darin behandelten Stoffe so weit bekannt machen, als es zum Verständnis der Aufgaben nöthig ist. Nur in gewöhnlichen Landschulen, welche auch anderweitig eine weise Beschränkung des Lehrstoffes verlangen, kann dieser Abschnitt gänzlich weggelassen werden.

I. Die Münzrechnung.

§. 130.

Der allgemeine Wertmesser für die verschiedenen Güter ist das Geld. Dasselbe ist entweder gemünztes Metall oder Papiergeld, letzteres hat nur einen eingebildeten Wert, den es auch sofort verliert, wenn es nicht gegen gemünztes Metall eingewechselt werden kann. Münzen sind geprägte Metallstücke, die mit einer Schrift, dem Wappen oder einem Stämpel des Prägeherrn versehen sind. Die Metalle, aus denen man Münzen prägt, sind Gold, Silber und Kupfer; Gold und Silber werden jedoch, damit sie wegen ihrer Weichheit nicht zu schnell abgenützt werden, legiert, d. h. sie erhalten einen Zusatz von härteren Metallen, gewöhnlich von Kupfer.

An einer Münze unterscheidet man 1. das Schrot, d. i. das ganze Gewicht derselben, 2. das Korn, d. i. das Gewicht des in der Münze enthaltenen feinen Metalls, und 3. den Feingehalt, d. i. das Verhältnis des Kornes zum Schrot.

Die gesetzlichen Bestimmungen über das Gewicht und den Feingehalt der Münzen in einem Lande bilden den Münzfuß oder die Währung. Münzen, welche nach dem festgesetzten Münzfuße eines Staates ausgeprägt sind, heißen Kurantgeld; jene Münzen dagegen, welche die kleineren Unterschiede in Zahlungen auszugleichen bestimmt sind, nennt man Scheidemünzen.

Als Münzgewicht dient in Österreich-Ungarn, Frankreich, Italien, in der Schweiz und in noch anderen Staaten das Kilogramm, in Deutschland das Pfund = 500 Gramm, in England und Nordamerika das Troypfund = 373·246 Gramm, in Rußland das Handelspfund = 409·512 Gramm.

Früher wurde in Österreich und Deutschland die kölnische Mark, welche in Österreich = 233·87 Gramm, in Deutschland = 233·855 Gramm angenommen wurde, als Münzgewicht gebraucht.

Der Feingehalt einer Münze wird in den meisten Staaten in Tausendtheilen des Schrotgewichtes bestimmt. Z. B. die österreichischen Guldenstücke sind $^{900}/_{1000}$ fein, heißt: in 1000 Theilen eines Guldens sind 900 Theile feines Silber und 100 Theile Zusatz enthalten; man sagt auch kürzer: die Gulden sind $^{9}/_{10}$ fein. In England ist das Münzgold $^{11}/_{12}$ fein, d. h. in 12 Theilen Schrot sind 11 Theile Korn; das Münzsilber ist $^{37}/_{40}$ fein. In Rußland ist das Münzgold $^{11}/_{12}$, das Münzsilber $^{125}/_{144}$ fein.

Früher wurde in Österreich und Deutschland der Feingehalt bei Silbermünzen in Loth, bei Goldmünzen in Karat angegeben, wobei man die Mark bei Silber in 16 Loth à 18 Grän, beim Golde in 24 Karrat à 12 Grän eintheilte. Z. B. die alten österreichischen Zwanziger enthielten $9^1/_3$ löthiges Silber, d. i. in 16 Theilen derselben waren $9^1/_3$ Theile feinen Silbers und $6^2/_3$ Theile Kupfer. Die kais. Dukaten sind $23^2/_3$ Karat fein d. i. unter 24 Theilen derselben sind $23^2/_3$ Theile feinen Goldes.

Die vorzüglichsten Silbermünzfüße sind:

1. Der Fünfundvierzig Guldenfuß oder die österreichische Währung; aus dem halben Kilogramm feinen

Silbers werden 45 Gulden, $^{900}/_{1000}$ fein, geprägt. — Bis 1857 bestand in Österreich der Zwanzig Guldenfuß oder der Konvenzions-Münzfuß, nach welchem aus einer kölnischen Mark = 233·87 Gramm feinen Silbers 20 fl. Konvenzions-Münze à 60 Kreuzer geprägt wurden.

2. Der Dreißig Thalerfuß oder die Thalerwährung, in Norddeutschland, wornach 30 Thaler, $^{900}/_{1000}$ fein, ein Pfund = 500 Gramm feinen Silbers enthalten.

3. Der Zweiundfünfzig und ein halb Guldenfuß oder die süddeutsche Währung (in Baiern, Frankfurt a. M., Würtemberg, Baden), wornach $52^{1}/_{2}$ Gulden südd. Währung, $^{900}/_{1000}$ fein, ein Pfund = 500 Gramm feinen Silbers enthalten.

4. Der Hamburger Bankofuß, nach welchem $27^{3}/_{4}$ Mark Banko auf 1 kölnische Mark von 233·855 Gramm feinen Silbers gerechnet werden. Münzen werden nach demselben nicht ausgeprägt, sondern man zahlt mit Mark Kurant, von denen 34 Stück, $^{3}/_{4}$ fein, auf 1 köln. Mark fein Silber gehen.

5. Der Frankenfuß (in Frankreich, Belgien, Italien und in der Schweiz), nach welchem aus 1 Kilogramm Silber, das $^{835}/_{1000}$ fein ist, $185^{5}/_{9}$ Franks (Franken, Lire) geprägt werden.

6. Der Silberrubelfuß in Russland; der Feingehalt ist $^{125}/_{144}$, das Korn eines Stückes 17·9961 Gramm.

Die wichtigsten Goldmünzen sind:

1. Die österr.-ung. Achtguldenstücke, von denen aus dem Kilogramm $^{900}/_{1000}$ feinen Goldes 155 Stücke ausgeprägt werden. Nach Verhältnis werden auch Viertelguldenstücke geprägt.

2. Die Zwanzigfrankstücke in Frankreich, Belgien und in der Schweiz, und die Zwanziglirestücke in Italien; sie sind gleich den österr. Achtguldenstücken; ebenso stimmen

die Zehnfrankstücke und Zehnlirestücke mit den österr. Vierguldenstücken überein.

3. Die kais. österr. Dukaten; 67 Stück wiegen 1 kölnische Mark = 233·87 Gramm und enthalten $^{71}/_{72}$ feines Gold.

4. Die deutschen Reichsgoldmünzen, und zwar Zehn- und Zwanzigmarkstücke; von den ersteren werden aus dem Pfund = 500 Gramm feinen Goldes 139$^{1}/_{2}$, von den letzteren 69$^{3}/_{4}$ Stück ausgebracht. Der Feingehalt beider ist $^{900}/_{1000}$.

5. Die englischen Sovereigns (Pfund Sterling); 1 Sovereign ist $^{11}/_{12}$ fein und hat 7·3223 Gramm Korn.

6. Die russischen Halbimperialen mit $^{11}/_{12}$ Feingehalt und 5·9987 Gramm Korn.

Bei den Gold- und Silbermünzen wird ein dreifacher Wert unterschieden: der innere Wert, d. i. der Wert des in der Münze enthaltenen feinen Metalls; der gesetzliche, d. i. der von der Regierung bestimmte Wert, zu dem sie im Lande allgemein angenommen werden soll; der Handelswert, auch Kurswert, d. i. der veränderliche Preis, welchen eine Münze im Handelsverkehre hat. Steht dieser veränderliche Preis, der Kurs einer Münze höher, als der gesetzliche Wert derselben, so heißt der Mehrbetrag das Agio.

Unter besonderen Verhältnissen kann auch die Landesmünze einen Kurs herbeiführen, insbesondere dann, wenn sich neben dem Metallgelde auch Papiergeld im Umlaufe befindet und ein größerer Mangel an gemünztem Metall eingetreten ist. Dieses ist gegenwärtig in Österreich der Fall, wo das Silbergeld gegen Papiergeld ein größeres oder geringeres Agio hat. Der Kurs des Silbers ist z. B. mit 108 notiert, oder das Silber hat 8 % Agio heißt: 100 fl. Silbergeld werden mit 108 fl. in Bank- oder Staatsnoten bezahlt.

Der Kurszettel hat zur Aufzeichnung meistens zwei Kolonnen, von denen die eine mit Geld, die andere mit Ware überschrieben ist. Der in der Geldkolonne verzeichnete Kurs drückt aus, dass man die Münze um diesen Preis zu kaufen suchte oder auch kaufte (Nachfrage); der Kurs in der Waren-kolonne bedeutet, dass man die Münze zu diesem Preise zu *verkaufen* suchte (Angebot).

Sowie bei den Gold- und Silbermünzen wird der Feingehalt und der innere Wert auch bei *ungemünztem Golde* und *Silber* bestimmt; nur bedient man sich dabei statt der Ausdrücke „Schrot“ und „Korn“ der Bezeichnungen *Rauhgewicht* und *Feingewicht*.

---

§. 131. Berechnung des Feingehaltes, des Kornes oder Schrotes der Münzen.

1. Der *Feingehalt* wird durch einen Bruch ausgedrückt, dessen Zähler das Korn, dessen Nenner das Schrot ist. Soll der Feingehalt die Bezeichnung Tausendtheile erhalten, so bringt man jenen Bruch auf den Nenner 1000, indem man Zähler und Nenner mit 1000 multipliziert und dann durch den früheren Nenner dividiert. Z. B.

Die englischen Goldmünzen sind $^{11}/_{12}$ fein; wie viel beträgt ihr Feingehalt in Tausendtheilen?

$$\tfrac{11}{12} = \frac{11000}{12 \times 1000} = \frac{11000 : 12}{1000} = \frac{916\frac{2}{3}}{1000}.$$

Die englischen Goldmünzen sind also $916\frac{2}{3}$ Tausendtheile fein.

Der russische Silberrubel wiegt 20·7315 Gramm und enthält 17·9951 Gramm feinen Silbers; wie groß ist sein Feingehalt?

$$\text{Feingehalt} = \frac{17{\cdot}9951}{20{\cdot}7315} = \frac{17995{\cdot}1}{20{\cdot}7315 \times 1000} =$$

$$\frac{17995{\cdot}1 : 20{\cdot}7315}{1000} = \frac{868{\cdot}056}{1000}.$$

2. Das *Korn* ist gleich dem Produkte aus dem Schrot und dem Feingehalte. Z. B.

Ein neues Frankstück wiegt 5·38922 Gramm und ist $^{835}/_{1000}$ fein; wie viel Korn hat es?

$$5{\cdot}38922 \times 0{\cdot}835 = 4{\cdot}5 \text{ Gramm Korn.}$$

Aus 1 Kilogr. $^9/_{10}$ feinen Goldes werden 155 Achtguldenstücke geprägt; wie viel feines Gold enthält 1 Achtguldenstück?

$$\text{Schrot} = \tfrac{1000}{155} \text{ Gramm,}$$
$$\text{Feingehalt} = \tfrac{9}{10};$$
$$\text{Korn} = \tfrac{1000}{155} \times \tfrac{9}{10} = 5{\cdot}80645 \text{ Gramm.}$$

Wie viel Korn hat 1 kais. Dukaten, da 67 Dukaten 233·87 Gramm Gold, $23\frac{2}{3}$ Karat fein, enthält?

$$\text{Schrot} = \frac{233{\cdot}87}{67} \text{ Gramm,}$$
$$\text{Feingehalt} = \frac{23\frac{2}{3}}{24} = \frac{71}{72};$$
$$\text{Korn} = \frac{233{\cdot}87}{67} \times \frac{71}{72} = 3{\cdot}4421 \text{ Gramm.}$$

3. Das **Schrot** erhält man, indem man das Korn durch den Feingehalt dividiert. Z. B.

Ein neuer österr. Zwanziger enthält bei $\frac{5}{10}$ Feingehalt $1\frac{1}{3}$ Gramm feinen Silbers; wie viel wiegt 1 Zwanziger?

$$1\tfrac{1}{3} : \tfrac{5}{10} = \tfrac{40}{15} = 2\tfrac{2}{3} \text{ Gramm Schrot.}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 73 und 74, a.

---

§. 132. Berechnung der Münzen nach ihrem inneren Werte.

Nach Verschiedenheit der Angaben des Münzfußes gestaltet sich auch die Lösung der hieher gehörigen Aufgaben verschieden. Ist der Wert einer Münze in ö. W. zu bestimmen, so ist es am einfachsten, zunächst den Wert eines Grammes feinen Silbers oder Goldes in ö. W. zu suchen, und daraus den Wert der betreffenden Silber- oder Goldmünze, nachdem ihr Korn in

Gramm ausgedrückt wurde, durch die Multiplikazion zu berechnen. Z. B.

Wie viel ist 1 Gramm feinen Silbers wert, da 45 fl. ö. W. 500 Gramm feinen Silbers enthalten?

45 fl. : 500 = 0·09 fl. = 9 Kr.

1 Gramm feinen Silbers ist also 9 Kr. ö. W. wert.

Wie viel fl. ö. W. sind 100 Franken wert?

1 Frank hat 4·5 Gramm fein Silber
100 „ haben 450 „ „ „

9 Kr. × 450 = 4050 Kr. = 40·5 fl. ö. W.

Wie viel ist 1 Gramm feinen Goldes wert, wenn das Wertverhältnis zwischen Gold und Silber $15\frac{1}{2}$: 1 ist?

9 Kr. × $15\frac{1}{2}$ = $139\frac{1}{2}$ Kr. = 1·395 fl. ö. W. in Silber.

Welchen Wert in österr. Silbergulden hat 1 Achtguldenstück, dessen Korn 5·80645 Gramm beträgt?

1·395 fl. × 5·80645 = 8·1 fl. ö. W. in Silber.

Aufgaben im V. Rechenbuche Seite 75 und 76, b.

---

§. 133. Berechnung der Münzen nach dem Kurse.

Jemand kauft an der Wiener Börse 17 Stück kais. Dukaten zum Kurse à 5 fl. 21 Kr.; wie viel muß er dafür zahlen?

5·21 × 17
3 647
88·57 fl. Papiergeld.

Wie viel in Papiergeld sind 565 fl. Silber wert, wenn das Silber mit 108, also mit 8 % Agio notiert ist?

565 à 8 %
45·20 fl. Agio
565 „ Silber
610·20 fl. Papiergeld

oder unmittelbar:

565 à 108
4520
610·20 fl. Papiergeld.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 76, c.

II. Die Wechselrechnung.

§. 134.

Eine Urkunde, in welcher sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine bestimmte Geldsumme an eine bestimmte Person zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen, oder durch eine dritte Person zahlen zu lassen, heißt ein Wechsel.

Rücksichtlich des Zahlers unterscheidet man eigene und fremde Wechsel. Eigene Wechsel sind solche, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme selbst zu bezahlen. Z. B. A in Wien kauft am 7. August von B daselbst für 1000 fl. Waren, zahlbar nach 2 Monaten; er stellt ihm nun darüber folgenden Wechsel aus:

Wien am 7. August 1873. pr. fl. 1000 ö. W.

Zwei Monate von heute ab zahle ich gegen diesen meinen Wechsel an den Herrn B die Summe von eintausend Gulden ö. W. Den Wert habe ich in Waren erhalten.

An mich selbst
in Wien.
Josef A.

A ist dann nach Wechselstrenge verpflichtet, nach zwei Monate dem Inhaber dieses Wechsels die darin genannte Summe zu zahlen.

Bei einem eigenen Wechsel kommen wenigstens zwei Personen vor: 1. der Aussteller A, welcher sich zur Zahlung der Wechselsumme verpflichtet; 2. der Remittent B, d. i. der erste Inhaber des Wechsels, dem sich der Aussteller die Zahlung zu leisten verpflichtet.

Fremde, auch gezogene oder trassierte Wechsel sind solche, in welchen sich der Aussteller verpflichtet, die Wechselsumme durch eine dritte Person zahlen zu lassen. Z. B. A in Wien erhält Waren von B in Amsterdam im Betrage von 2400 fl. holländischer Währung, zahlbar nach 3 Monaten.

Es wäre nun unbequem, die Schuld mit barem Gelde zu begleichen; die nöthige Menge holländ. Geld kann man in Wien nicht leicht aufbringen; das österr. Geld hat wieder in Amsterdam nur den inneren Metallwert; überdieß würde die Versendung von barem Gelde mit Kosten verbunden sein und mancherlei Gefahren unterliegen. In Wien ist aber C, welcher mit dem Kaufmanne D in Amsterdam in Geschäftsverbindung und Rechnung steht. A in Wien begibt sich daher zu C, erlegt ihm eine Summe in österr. Währ., welche denselben Wert hat als 2400 fl. holländ. und erhält dafür von C folgenden Wechsel:

Wien am 18. Jänner 1874. pr. fl. 2400 holl.

Drei Monate a dato zahlen Sie gegen diesen Prima-Wechsel an den Herrn B die Summe von zweitausend vierhundert Gulden holländisch. Wert empfangen. Sie stellen solche auf Rechnung laut Bericht von

Prima. An Herrn D
in Amsterdam
Karl C.

Diesen Wechsel übersendet der Wiener A an B in Amsterdam, welcher denselben dem D dortselbst zur Zahlungserklärung vorweiset oder präsentiert. Wenn sich D auf dem Wechsel schriftlich zur Zahlung bereit erklärt, d. i. wenn er den Wechsel akzeptiert, und dann zu der bestimmten Zeit die Zahlung an B leistet, so hat A seine Zahlung nach Amsterdam auf eine sehr einfache Art berichtiget. Würde aber D den Wechsel nicht akzeptieren, so wäre der Aussteller C des Wechsels unter wechselrechtlicher Haftung gebunden, für die Wechselsumme und für die Auslagen Ersatz zu leisten.

Bei einem fremden Wechsel kommen im allgemeinen vier Personen in Beziehung: 1. der Aussteller C oder Trassant, welcher den Wechsel ausstellt, zieht oder trassiert; 2. der Bezogene D oder Trassat, welcher die Wechselsumme zu zahlen beauftragt wird; er heißt, wenn er den Wechsel akzeptiert hat, auch Akzeptant; 3. der Remittent A, welcher den

Wechsel kauft, um ihn an seinen Gläubiger B zu übermachen, zu remittieren; 4. der Präsentant B, welcher den Wechsel dem D zur Annahme und späteren Zahlung vorweiset, präsentiert.

Ein Wechsel heißt in Beziehung auf den Trassanten und Trassaten eine Tratte, in Beziehung auf den Remittenten und Präsentanten eine Rimesse.

Die im Wechsel bestimmte Zeit zur Zahlung der Wechselsumme, d. i. die Verfallzeit, kann auf vier Arten festgesetzt werden. 1. Auf einen bestimmten Tag, z. B. 18. Juni dieses Jahres, medio Mai d. J. (unter medio versteht man immer den 15. des Monates), ultimo Juni d. J. (30. Juni). 2. Nach Sicht, und zwar a) unmittelbar nach Sicht (auf Verlangen, a vista, a piacere), wenn der Wechsel noch am Tage der Vorweisung zu zahlen ist, und b) auf eine bestimmte Zeit (8 Tage, 3 Wochen, 31 Tage) nach Sicht, wenn die Zahlung in der angegebenen Zeit nach der Präsentazion zur Annahme zu leisten ist; bei den Sichtwechseln der zweiten Art wird von dem Akzeptanten der Akzeptazion auch das Datum derselben beigefügt. 3. Auf eine bestimmte Zeit nach dem Tage der Ausstellung, z. B. 2 Monate a dato, 3 Wochen nach heute. 4. Auf eine Messe oder einen Markt; Meßwechsel sind, wenn der Markt nur einen Tag dauert, an diesem Tage, wenn der Markt mehrere, jedoch nicht über 8 Tage dauert, am Tage vor dem gesetzlichen Schlusse des Marktes, und wenn der Markt mehr als 8 Tage dauert, am dritten Tage vor dem Schlusse des Marktes fällig.

Bei fremden Wechseln hat der Aussteller die Pflicht, auf Verlangen des Übernehmers mehrere gleichlautende Exemplare des Wechsels auszufolgen, welche darin als Prima, Secunda, Tertia, . . . bezeichnet werden. Von diesen wird zuerst die Prima versendet, und wenn diese verloren gienge, die Secunda u. s. w. Diese Vervielfältigung findet nicht statt bei eigenen Wechseln, welche darum auch Sola-Wechsel heißen.

Damit der Wechsel als kaufmännisches Zahlungsmittel im ausgedehnten Umfange verwendet werden könne, ist der Remittent berechtiget, den Wechsel sammt dem ihm daraus zustehenden Rechte einem anderen abzutreten. Das Übertragen der Rechte des Wechselinhabers an einen andern heißt indossieren oder girieren; es geschieht durch eine schriftliche Erklärung auf dem Wechsel, der Rückseite oder einer Kopie desselben, Indossament oder Giro genannt. Derjenige, welcher den Wechsel an einen andern überträgt, heißt Indossant oder Girant; derjenige, an welchen der Wechsel übertragen wird, Indossatar oder Giratar. Der Indossatar kann den Wechsel wieder an einen andern, selbst an den Aussteller, Bezogenen, oder einen früheren Giranten giltig girieren, bis zur Verfallzeit der letzte Eigenthümer die Wechselzahlung wirklich erhält. Früher mußte im Wechsel vor dem Namen des Remittenten, damit er das Recht habe, den Wechsel zu girieren, der Zusatz „an die Ordre" gesetzt werden; nach dem gegenwärtigen Wechselgesetze ist dieser Zusatz nicht mehr nothwendig. Nur dann, wenn im Wechsel dem Namen des Remittenten, oder in einem Indossament dem Namen des Indossatars der Ausdruck „nicht an dessen Ordre" beigefügt wird, kann der Wechsel nicht weiter giriert werden.

§. 135. Wechseldiskont.

Wechsel, welche auf die Währung des eigenen Handelsplatzes lauten und daselbst zahlbar sind, heißen Platzwechsel. Wenn ein Platzwechsel vor dem Verfalltage verkauft wird, so muß sich der Verkäufer wegen der früheren Zahlung einen Abzug gefallen lassen, welcher von der Zeit abhängt, die der Wechsel noch zu laufen hat. Dieser Abzug heißt Diskont oder Eskompt. Wenn man den Diskont von der Wechselsumme subtrahiert, so heißt der Rest der diskontierte Wert des Wechsels. Der Wechseldiskont wird in Prozenten für ein Jahr angegeben und sollte richtig auf Hundert gerechnet werden (§. 117); er wird jedoch thatsächlich immer nach der bequemeren Prozentrechnung von Hundert bestimmt, weil die sich ergebende Differenz mit Rücksicht auf die kurze Laufzeit der Wechsel sehr gering ist. Man berechnet daher den Diskont sowie die Zinsen auf Tage, und zwar vom Tage des Verkaufes bis zum Verfalltage, zählt jedoch den Kauftag oder den Verfalltag nicht und rechnet jeden Monat zu so viel Tagen, als er deren wirklich hat. Z. B.

Ein Wechsel von 3456 fl., am 15. August fällig, wird am 23. Juni mit 5 % Diskont verkauft; wie groß ist a) der Diskont, b) der diskontierte Wert?

Verkauftag 23. Juni	3456 × 53
Verfalltag 15. August	10368
Juni 7 Tage	17280
Juli 31 „	183168 : 6000
Aug. 15 „	30·528 à 6 %
53 Diskonttage	— 5·088 à 1 %
	25·44 fl. à 5 %

Wechselsumme 3456 fl.
ab 5 % Diskont für 53 Tage 25 „ 44 Kr.
diskontierter Wert 3430 fl. 56 Kr.

Ein Wechsel pr. 960 fl., zahlbar 31 Tage nach Sicht, akzeptiert am 18. Juni, wird am 27. Juni mit 4 % diskontiert; wie viel nimmt man dafür ein?

Akzepttag 18. Juni	Wechselsumme 960 fl.
Verfalltag 19. Juli	4 % Disk. für 22 T. 2 „ 35 kr.
Verkauftag 27. Juni	diskontierter Wert 957 fl. 65 kr.
Juni 3 Tage	
Juli 19 „	
22 Tage	

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 80, a.

§. 136. Wechselredukzion.

Wechsel, welche auf die Währung eines fremden Handelsplatzes lauten, heißen ausländische Wechsel oder Devisen. Beim Ein- oder Verkaufe von Devisen muß nach einem gegebenen Wechselkurse der Betrag des fremden Geldes (die Wechselvaluta) in die eigene Währung, oder umgekehrt umgerechnet werden. Diese Rechnung nennt man die Wechselredukzion.

Der Wechselkurs hängt von dem inneren Werte des fremden Geldbetrages, von der Laufzeit des Wechsels, sowie von der Nachfrage und dem Anbote solcher Wechsel ab und bezieht sich immer auf zwei Geldwährungen, die des eigenen und die des fremden Handelsplatzes; es wird nämlich angegeben, dass für eine unveränderliche oder feste Summe der einen Valuta eine veränderliche, bald größere, bald geringere Summe in der andern Valuta geleistet wird. An den österr. Börsen bilden immer 100 (für London 10) Einheiten des fremden Geldes die feste Valuta und gibt der notierte Kurs an, wie viel fl. ö. W. Bankvaluta dafür gezahlt oder empfangen werden. Wenn z. B. der Kurs auf Brüssel mit 43 notiert ist, so heißt dieß: für 100 Franks zahlt man 43 fl. ö. W. in Banknoten.

Der Kurszettel enthält für die Wechselkurse zwei Kolonnen; der Kurs in der mit Geld überschriebenen Kolonne bedeutet, dass man für Wechsel so viel bezahlt; der Kurs in der mit Ware oder Brief überschriebene Kolonne dagegen, dass man Wechsel zu diesem Preise anbietet.

Die Wechselredukzion wird meistens nach der Prozent- oder nach der Schlussrechnung ausgeführt. Z. B.

Ein Wiener hat in Amsterdam eine Zahlung von 2360 fl. holl. zu leisten; er will diese durch Übersendung eines Wechsels begleichen, den er zum Kurse 92·50 einkauft; wie viel muß er für diesen Wechsel bezahlen?

2360 à $92\frac{1}{2}$	oder 100 fl. holl.	92·50 fl. ö. W.
4720	2000 fl. holl.	1850·00 fl. ö. W.
21240	300 „ „	277·50 „ „ „
1180	60 „ „	55·50 „ „ „
2183·00 fl. ö. W.		2183·00 fl. ö. W.

Ein Wiener hat für seine Rechnung in Paris 2485 fl. ö. W. zu fordern; welchen Betrag in Franks wird der trassieren, wenn der Kurs auf Paris 42 steht?

42 fl. ö. W. . . . 100 Franks

1 „ „ „ . . . $\frac{100}{42}$ „

2485 „ „ „ . . . $\frac{2485 \times 100}{42} = 5916{\cdot}67$ Franks.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 81 und 82, b.

III. Berechnung der Staatspapiere und Akzien.

§. 137.

Wenn bei außergewöhnlichen Verhältnissen, z. B. in Kriegszeiten, bei großartigen Staatsbauten ꝛc. ein Staat größere Summen und in kurzer Zeit benöthiget, so dass sie durch die laufenden Einkünfte nicht gedeckt werden können, so muß er eine Anleihe machen. Dabei theilt er, um auch kleineren Kapitalisten die Betheiligung zu ermöglichen, die erforderliche Summe in viele kleinere Beträge à 100 fl., 500 fl., 1000 fl., und stellt darüber den Darleihern Schulverschreibungen aus. Diese heißen **Staatspapiere** oder **Staatsobligazionen** (öffentliche Fondspapiere). Im weiteren Sinne versteht man unter diesem Namen auch Schuldverschreibungen, welche mit Genehmigung des Staates von einzelnen Ländern und selbst von größeren Güterbesitzern ausgegeben wurden.

Der Kapitalswert, welcher in einem Staatspiere namhaft gemacht wird, heißt der Nominal- oder Nennwert desselben.

In Bezug auf das Erträgnis gibt es:

1. Verzinsliche Obligazionen, für welche in bestimmten Terminen die Zinsen nach einem bestimmten Zinsfuße ausgezahlt werden; die Zinsen werden gewöhnlich mittels gedruckter Zinsanweisungen, Koupons, erhoben, welche man von einem eigenen, der Obligazion beigelegten Bogen abschneidet.

2. Lose, deren Erträgnis in bestimmten Gewinsten besteht, die in festgesetzten Ziehungen entfallen; einige Lose gewähren außer der Möglichkeit, einen großen Gewinn zu machen, auch regelmäßige Zinsen.

Großartige Unternehmungen, z. B. Eisenbahnbauten, Einrichtungen von Berg- und Hüttenwerken, Assekuranzen, Kreditkassen, können von einzelnen nicht wohl unternommen werden, weil sie einen zu bedeutenden Fond erfordern. Es vereinigen sich deshalb zu ihrer Ausführung viele Personen zu einer Gesellschaft und legen das benöthigte Geld zusammen. Über die Einzahlungen werden Scheine ausgestellt, welche Akzien heißen. Man sagt dann: das Unternehmen ist auf Akzien gegründet, und die Gesellschaft heißt eine Akziengesellschaft.

Da die Akziengesellschaft beim Beginne des Unternehmens meistens nicht sofort das volle Kapital braucht, so werden in solchen Fällen die Beiträge der Akzionäre nicht gleich voll, sondern in einzelnen Raten eingezahlt; über die geleisteten Theilzahlungen werden Interims- oder Bezugsscheine ausgestellt.

Bei einer volleingezahlen Akzie ist der Betrag, auf den sie lautet, bei einer nicht volleingezahlten Akzie die bereits geleistete Einzahlung als deren Nominalwert anzusehen.

Das Erträgnis der Akzie besteht entweder in festen Zinsen oder in einer Dividende, d. i. in einem Antheile am Gewinne, oder meistens in beiden zugleich. Zur Erhebung der Zinsen und der Dividenden sind den Akzien Koupons wie bei den Staatspapieren beigegeben.

Außer den Akzien werden von den Akziengesellschaften häufig auch verzinsliche Schuldverschreibungen ausgegeben, welche Prioritäts-Obligazionen oder Prioritäten heißen, weil die Besitzer in Bezug auf Kapital und Zinsen den Akzionären vorgehen; am Gewinne haben die Prioritäten keinen Antheil.

Die Akzien und öffentlichen Fondspapiere werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Effekten bezeichnet.

Die Effekten sind Kapitalien, die jedoch gegen bares Geld einen veränderlichen Wert haben. Dieser Wert hängt im Handelsverkehre nicht bloß von dem Nominalwerte der Effekten, sondern auch von der Höhe des Zinsfußes oder der Gewinste, von dem Kredite des Schuldners, d. i. des Staates oder der Gesellschaft, sowie von der Nachfrage und dem Anbote ab. Der veränderliche Wert der Effekten wird der Kurs derselben genannt; er wird entweder pr. Stück oder in Prozenten d. i. für 100 fl. des Nominalwertes angegeben, und an den österreichischen Börsen in fl. ö. W. Bankvaluta ausgedrückt. Das Kursblatt enthält, wie für Münzen und Wechsel, auch für die Effekten zwei Kolonnen der Kurse, von denen die eine mit Geld, die andere mit Ware überschrieben ist.

Beim Kaufe zinstragender Effekten müßen dem Verkäufer nebst dem Kurswerte des Kapitals auch die noch nicht behobenen Zinsen vom letzten Zinstermine bis zum Kauftage vergütet werden; die Dividende der Akzien ist schon in dem Kurse mitbegriffen. Die Zinsen werden immer von dem Nominalwerte berechnet; dabei wird der Monat zu 30 Tagen angenommen und der Kauftag nicht mitgezählt. Bei den meisten Staatspapieren muß von den Zinsen noch die Einkommensteuer in Abzug gebracht werden; nur die Akzien, Pfandbriefe und einige Prioritäts-Obligazionen sind steuerfrei.

Wenn ein Effekt auf K. M. lautet, lauten auch die Zinsen auf K. M.; diese müßen daher, weil der Kurswert in ö. W. ausgedrückt ist, gleichfalls in ö. W. umgerechnet werden. In Bezug auf die in Silber verzinslichen Effekten besteht die Übung, dass beim Ein- oder Verkaufe die zu vergütenden laufenden Zinsen in Papiergeld ohne Zuschlag des Silberagio berechnet werden.

§. 138. Berechnung von Effekten, deren Kurs pr. Stück gegeben ist.

Für sämmtliche Akzien sowie für die Privatlose wird der Kurs pr. Stück notiert.

Um den Einkaufs- oder Verkaufswert solcher Effekten zu erhalten, bestimmt man den Kurswert, indem man den Kurs mit der Anzahl der Stücke multipliziert; bei verzinslichen Effekten berechnet man dann noch die Zinsen des Nominalkapitals vom letzten Zinstermine bis zum Kauftage und addiert diese zum Kurswerte. Z. B.

Wie viel muß man am 16. Mai für 7 Stück Rudolfsbahn-Akzien à 178 zahlen? (Nominalwert einer Akzie 200 fl., 5 % Zinsen seit 1. Jänner.)

7 Stück à 178	1246 fl.
Zinsen von 7 Stück à 200 fl. = 1400 fl.	
vom 1. Jänner, 136 Tage, à 5 % .	26 „ 44 Kr.
	1272 fl. 44 Kr.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 85, a.

§. 139. Berechnung von Effekten, deren Kurs in Prozenten gegeben ist.

Für alle Staatspapiere, Grundentlastungs-Obligazionen, Pfandbriefe und die meisten Prioritäts-Obligazionen wird der Kurs in Prozenten, d. i. für 100 des Nominalwertes notiert.

Auch hier werden bei zinstragenden Effekten die rückständigen Zinsen zum Kurswerte addiert; diesen aber erhält man, indem man den Nominalwert mit dem Kurse multipliziert und das Produkt durch 100 dividiert. Z. B.

Am 28. September werden 1400 fl. einheitliche Staatsschuld in Noten zum Kurse 70·80 gekauft; wie viel ist dafür zu zahlen? (Zinsen zu $4\frac{1}{5}$ % seit 1. August).

1400 fl. à 70·80	991·20 fl.
Zinsen seit 1. August, 57 Tage, à $4\frac{1}{5}$ % .	9.31 „
	1000·51 fl.

Jemand verkauft am 6. Dez. 9 Stück Lose vom Jahre 1854 à 96; wie viel nimmt er dafür ein? (Nominalwert à 250 fl. K. M., Zinsen 4 % mit 20 % Einkommensteuer seit 1. April.)

9 Stück à 250 fl. K. M. = 2250 fl. K. M.		
2250 fl. K. M. à 96		2160 fl. ö. W.
Zinsen von 2250 fl. K. M. 245 Tage, à 4 %		
61·25 fl. K. M.	= 64·31 fl. ö. W.	
ab Einkomm.-St. à 20 %	12·86 „ „ „	51·45 „ „ „
		2211·45 fl.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 86, b.

Siebenter Abschnitt.

Angewandte Rechnungen mit Rücksicht auf besondere Berufszweige.

§. 140.

Den Abschluſs des Rechenunterrichtes in der Volksschule bildet die Lösung von Aufgaben, welche sich auf besondere Berufszweige beziehen und daher nicht nach der Rechnungsmethode, sondern nach dem sachlichen Inhalte gruppenweise geordnet sind.

Wenn zugegeben werden muß, daſs bei der Wahl und Behandlung der Lehrstoffe in den oberen Klassen, welche die frühere Fortbildungsschule vertreten, auch der muthmaßliche Beruf der Schüler in die Wagschale zu fallen hat, so folgt von selbst, daſs auch der Rechenunterricht in diesen Klassen für die Schüler um so fruchtbarer sein werde, je mehr er sich an den künftigen Beruf derselben anlehnt. Je mehr die eigentliche Fertigkeit im Rechnen zunimmt, desto mehr soll der zu berechnende Stoff in den Vordergrund treten, und schließlich soll er unter Berücksichtigung des Lebenskreises der Schüler, der Faden sein, an welchem sich die einzelnen Aufgaben Schritt für Schritt anreihen. Es werden daher beim Rechnungsunterrichte des letzten Schuljahres in den Landschulen vorwiegend die ländlichen Verhältnisse, in den Stadtschulen gewerbliche und kaufmännische, in Mädchenschulen vorzüglich hauswirtschaftliche Aufgaben in's Auge zu fassen sein. Derartige Rechenübungen werden die Schüler zur Erkenntnis führen, wie vielseitig die Verhältnisse des Lebens sind, die sich in den Kreis der Berechnung ziehen lassen, und wie vortheilhaft und nothwendig sich solche Rechnungen für jeden Berufszweig herausstellen; sie werden den Anstoß geben, daſs künftig auch der Dorfbewohner und Handwerker Dinge der Rechnung unterziehen wird, über die er bisher aus Mangel an Einsicht zu seinem Nachtheile nicht rechnen konnte. Indem die Schüler bei solchen angewandten Rechnungen die Verhältnisse ihrer Umgebung denkend beobachten und beurtheilen müßen, üben und schärfen sie zugleich ihre Verstandeskraft und lernen, die gewonnene Kraft wieder im Leben anzuwenden. Die Rechenübungen über besondere Berufszweige haben daher einen materialen und formalen Wert, indem sie bewirken, daſs die Schüler nicht nur praktisch besser vorbereitet in's Leben treten, sondern auch in Bezug auf geistige Entwicklung einen höheren Standpunkt erreichen.

Die Behandlung solcher Aufgaben ist dieselbe, wie die den angewandten Aufgaben überhaupt; die Ausrechnung bietet nichts

Neues und bereitet keine Schwierigkeit, sobald die sachlichen Verhältnisse, auf deren Erklärung besondere Sorgfalt zu verwenden ist, richtig aufgefasst wurden.

Es kann nur zweckförderlich sein, wenn die Schüler bei den einzelnen sachlich gegliederten Abtheilungen dieser Stufe auch einige Andeutungen über die bezügliche Buchführung erhalten. Damit sich der Kaufmann oder der Gewerbsmann über sein Geschäftsvermögen und die darin vorgehenden Veränderungen zu jeder Zeit eine klare Übersicht verschaffen könne, ist es unbedingt nothwendig, dass er in dazu bestimmten Büchern genau aufzeichne, worin das anfängliche Vermögen bestand, wie theuer diese oder jene Ware eingekauft, zu welchem Preise dieselbe oder die daraus verfertigte Sache verkauft wurde, welche Kosten damit verbunden waren, wer ihm schuldig sei oder an ihn zu fordern habe, und wie viel und wann er die Zahlung zu empfangen oder zu leisten habe, u. dgl. Ebenso wichtig ist es für den Landwirt, dass alles, was auf den Betrieb seiner Wirtschaft, auf die Vorräthe, Arbeitskosten und Erzeugnisse Bezug hat, gehörig aufgeschrieben werde. Auch für jede Hausfrau empfiehlt sich die Führung eines Haushaltungsbuches, in das sie nicht nur die täglichen Ausgaben, sondern auch den Bestand der Einrichtung und Wäsche, den Abgang und Zuwachs derselben sorgfältig einträgt. Wenn es nun auch nicht Sache der Volksschule sein kann, ihren Schülern eine vollständige Lehre der Buchhaltung für jeden dieser Berufszweige vorzutragen, so geht es doch recht gut an, daraus einzelne Bruchstücke als Rechenbeispiele zu wählen und an dieselben kurze Andeutungen über die Buchführung zu knüpfen.

Es erübriget uns nur noch, zu den einzelnen hieher gehörigen Abtheilungen einige spezielle Bemerkungen beizufügen.

I. Hauswirtschaftliche Rechnungen.

(V. Rechenbuch S. 87—96.)

§. 141.

Die denkende, auf Ersparungen bedachte Hausfrau wird über alles, was im Haushalt erforderlich ist, vergleichende Berechnungen anstellen, um zu sehen, wie groß der Bedarf ist, und wie derselbe am billigsten gedeckt werden kann. Das V. Rechenbuch für Volksschulen enthält in dieser Richtung:

a) Allgemeine Aufgaben aus der Hauswirtschaft;

b) Aufgaben über die Nahrungsmittel;

c) Aufgaben über die Kleidung;

d) Aufgaben über die Beleuchtungs- und Brennmaterialien; und

e) Beispiele aus den Haushaltungsbüchern.

Nebenher sind hier auch einfache Preisberechnungen, wie sie in jeder Hauswirtschaft fast täglich vorkommen, als Kopfrechnen recht fleißig zu üben. Aufgaben hierüber enthält das V. Rechenbuch im zweiten Abschnitte „Dreisatzrechnungen".

II. Landwirtschaftliche Rechnungen.

(V. Rechenbuch S. 97—114.)

§. 142.

Die erweiterte Einsicht in das Wesen des Ackerbaues und der Viehzucht machen auch für den Landwirt eine Anwendung der Rechenkunst auf Gebiete nothwendig, die ihm früher ferne lagen. Soll die landwirtschaftliche Produkzion gehoben werden, so reicht dazu der regsame Körper, die starke und rührige Hand des Landmanns allein nicht aus; der Landwirt muß, damit seine Thätigkeit lohnend werde, die Wirtschaft mit klarer Durchschauung aller ihrer Verhältnisse denkend und rechnend betreiben. An der Hand der Berechnung muß er bezüglich der Viehzucht die Nahrhaftigkeit der Futterstoffe, die darzureichende Menge und deren Erfolg für Milcherzeugung und Mästung, bezüglich der Feldwirtschaft den Bedarf an Dünger und Aussaat, die Leistungsfähigkeit der Arbeiter und Zugthiere genau kennen; er muß sich an der Hand der Berechnung genau sagen können, wie hoch ihn 1 Liter Milch, 1 Kilogramm Rindfleisch, 1 Hektoliter Korn zu stehen kommt, welchen Reinertrag 1 Hektar des bebauten Bodens liefert, u. dgl. Die gewöhnliche Landschule kann es erreichen, dass derartige Berechnungen selbst von dem Landmanne, der keine weitere Bildungsanstalt besucht, angestellt werden können, wenn sie schon ihre Schüler darin übt.

Das V. Rechenbuch bietet dazu reichhaltigen Stoff; es bringt:

a) Allgemeine Aufgaben aus der Landwirtschaft;

b) Aufgaben über die verschiedenen Futterstoffe;

c) Aufgaben über den Futterbedarf und die Nutzbarkeit des Rindes;

d) Aufgaben über die Fütterung und Nutzbarkeit der Pferde, Schweine und Schafe;

e) Aufgaben über die Streu und Düngermenge;

f) Aufgaben über den Wiesen- und Ackerbau;

g) Beispiele aus der Buchführung des Landwirtes.

Diese Aufgaben werden dem Lehrer auch Anlass zu mancherlei lehrreichen Bemerkungen über den razionellen Betrieb der Landwirtschaft bieten.

III. Gewerbliche Rechnungen.

(V. Rechenbuch S. 115—132.)

§. 143.

Unsere Zeit, in welcher sich die industrielle Thätigkeit so großartig entfaltet, stellt an den Gewerbsmann, insbesondere auch in Beziehung auf das Rechnungswesen, viel höhere Anforderungen, als sie früher waren. Es genügt nicht mehr, dass derselbe nur Conti oder Rechnungen zu fertigen wisse. Will er den Preis seiner Erzeugnisse so bestimmen, dass er bei dem Verkaufe seinen bürgerlichen Gewinn und sein Auskommen findet, ohne die Abnehmer zu überhalten, so muß er gar vieles in den Kreis seiner Berechnung ziehen; er muß den Preis der Rohstoffe, die Frachtauslagen, die Zinsen des in den Waren und in der Einrichtung der Werkstätte steckenden Kapitals, die Ausgaben für die Beleuchtung und Beheizung, den Lohn für die Gesellen, wie auch seine eigene Arbeit in Anschlag bringen.

Einfachere derlei Kalkulazionen werden in der obersten Klasse der Volksschule für Schüler, die sich dem gewerblichen Berufe widmen wollen, einen sehr zweckmäßigen Übungsstoff bilden.

Im V. Rechenbuche kommen zuerst

a) allgemeine Aufgaben aus dem Gewerbsleben vor; dann bringt dasselbe Aufgaben aus dem Geschäftskreise nachbenannter Gewerbsleute:

b) Müller, Bäcker, Zuckerbäcker, Branntweinbrenner, Wirte;

c) Fleischhauer, Seifensieder, Gärber, Schuhmacher, Kürschner, Handschuhmacher, Bürstenbinder, Hutmacher;

d) Weber, Färber, Tuchmacher, Schneider, Kappenmacher, Seiler;

e) Buchbinder;

f) Drechsler, Tischler, Wagner, Glaser, Zimmermann, Maurermeister, Steinmetz;

g) Schlosser, Schmied, Kupferschmied, Messerschmied, Klempner, Gelbgießer und Silberarbeiter;

endlich enthält das Rechenbuch in dieser Richtung auch

h) einige Beispiele aus der gewerblichen Buchführung.

IV. Kaufmännische Rechnungen.

(V. Rechenbuch S. 133—152.)

§. 144.

Für die kaufmännischen Geschäfte haben sich unter dem Namen der „kaufmännischen Arithmetik“ besondere Rechnungsweisen herausgebildet, die sich mitunter ganz einfach, manchmal aber auch sehr zusammengesetzt gestalten. Dieses spezifisch kaufmännische Rechnen gehört selbstverständlich nicht in die Volksschule, sondern muß den Handelsschulen überlassen bleiben. In den Volksschulen der Städte und Märkte kann es sich nur darum handeln, den Schülern durch Lösung leichterer, hieher gehöriger Aufgaben zu zeigen, wie sie die gewonnene Rechenfertigkeit auch auf diesem Gebiete verwerten können, und sie dadurch für den späteren kaufmännischen Beruf anzuregen und vorzubereiten. Während dabei die Übungsstoffe aus dem kaufmännischen Leben hergenommen werden, gelangen bei der Auflösung nur bereits bekannte Rechnungen zur Wiederholung.

In dem V. Rechenbuche erscheinen die bezüglichen Übungen nach folgenden Gruppen geordnet:

a) Allgemeine Aufgaben aus dem kaufmännischen Leben;

b) Wiederholungsaufgaben über Tara und Gutgewicht, Skonto, Sensarie und Provision;

c) Aufgaben über Gewinn und Verlust;

d) einfache Aufgaben über Münzen, Wechsel, Staatspapiere und Akzien;

e) kaufmännische Anwendungen der Gesellschafts-, Mischungs- und Kettenrechnung;

f) leichtere Einkaufs- und Verkaufsrechnungen;

g) Conto-corrent; endlich

h) Beispiele aus der kaufmännischen Buchhaltung.

Achter Abschnitt.

Die Raumgrößenrechnung.

Vorerinnerung. Die im achten Abschnitte des V. Rechenbuches enthaltenen Aufgaben über die Berechnung der Raumgrößen haben sich an die geometrische Formenlehre anzuschließen. Indem wir daher die Bekanntschaft mit den betreffenden Lehren der Anschauungsgeometrie voraussetzen, sollen hier überall nur diejenigen Erklärungen, welche zum Verständnisse der Aufgaben nothwendig sind, in bündiger Fassung vorausgeschickt werden.

Aufgaben, zu deren Auflösung die Kenntnis des Wurzelausziehens erfordert wird, sind nicht aufgenommen worden.

I. Flächenberechnungen.

§. 145.

Um eine Linie zu messen, nimmt man eine andere Linie von bekannter Länge als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese in der ersten Linie enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft die Längeneinheit in einer Linie enthalten ist, heißt die Maßzahl dieser Linie.

Die Einheit des neuen österreichischen Längenmaßes ist das Meter. 1 Meter (^{m}) hat 10 Decimeter (^{dm})

à 10 Centimeter (^{cm}) à 10 Millimeter (^{mm}); 1000 Meter = 1 Kilometer (^{Km}), 10000 Meter = 1 Myriameter (^{Mm}).

Unter dem Umfange einer Figur versteht man die Summe aller Linien, welche die Figur begränzen. Der Umfang ist daher auch eine Linie und wird durch das Längenmaß gemessen.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Längen ihrer Seiten addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist ihr Umfang gleich der Länge einer Seite multipliziert mit der Anzahl der Seiten. Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt demnach keiner weiteren Schwierigkeit.

Unter dem Flächeninhalte einer Figur versteht man die Größe der von ihr begränzten Fläche. Um eine Fläche zu messen, nimmt man irgend eine bekannte Fläche als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese in der ersten Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft die Flächeneinheit in einer begränzten Fläche enthalten ist, nennt man die Maßzahl dieser Fläche.

Als Flächeneinheit nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite die Längeneinheit ist. Die Einheit des österreichischen Flächenmaßes ist das Quadratmeter, d. i. ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter ist. 1 Quadratmeter ($\square^{m}$) hat 100 Quadratdecimeter ($\square^{dm}$) à 100 Quadratcentimeter ($\square^{cm}$) à 100 Quadratmillimeter ($\square^{mm}$); 1 Quadratkilometer ($\square^{Km}$) = 1000000 $\square^{m}$, 1 Quadratmyriameter ($\square^{Mm}$) = 100 $\square^{Km}$. Die Einheit des Bodenflächenmaßes ist das Ar = 100 $\square$Meter; 100 Ar sind 1 Hektar.

In den meisten Fällen ist es wegen der Form der zu messenden Fläche unmöglich, immer aber unbequem, durch unmittelbares Auftragen der Flächenmaße zu bestimmen, wie oft die Flächeneinheit in der Figur enthalten ist. Man pflegt daher den Flächeninhalt der Figuren mittelbar zu bestimmen, indem man diejenigen Linien misst, von denen die Größe der Fläche abhängt, und aus diesen Längenmaßzahlen durch einfache Schlüsse den Flächeninhalt berechnet.

---

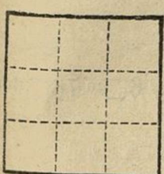
1. Das Quadrat.

§. 146.

Das Quadrat ist ein Viereck, welches gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. Das Quadrat hat also vier rechte Winkel.

Der Umfang eines Quadrates ist gleich der vierfachen Maßzahl einer Seite.

Um den Schülern die Bestimmung des Flächeninhaltes anschaulich zu erläutern, zeichnet man auf die Schultafel ein Quadrat, dessen Seite z. B. 3 Decimeter beträgt. Die Fläche



dieses Quadrates wird gemessen, indem man untersucht, wie oft 1 □ Decimeter in derselben enthalten ist. Der Lehrer legt daher das □ Decimeter (das aus steifem Papier ausgeschnitten wird) genau an zwei zusammenstoßende Seiten des Quadrates an und macht durch feine Linien ersichtlich, wie weit es die Quadratfläche deckt; dann trägt er das □ Decimeter ebenso auf die weiteren Theile des Quadrates derart auf, dass jedesmal eine andere Stelle bedeckt wird. Die Schüler sehen, dass sich 1 □ Decimeter auf der ganzen Fläche 9mal auftragen lässt, dass also die Quadratfläche 9 □ Decimeter enthält.

Nun bemerke der Lehrer, dass ein solches unmittelbares Auflegen des Flächenmaßes unbequem und bei manchen Figuren auch unausführbar, dass es übrigens auch nicht nothwendig sei, da sich ein ganz einfacher Satz aufstellen lässt, nach welchem man den Flächeninhalt des Quadrates sofort durch die Rechnung findet. Um diesen Satz abzuleiten, theile man jede Seite in 3 gleiche Theile, so dass jeder Theil 1 Decimeter ist. Zieht man durch die Theilungspunkte gerade Linien, welche mit der unteren Seite parallel sind, so wird die Quadratfläche in 3 gleiche Parallelstreifen zerlegt; zieht man ferner durch die Theilungspunkte gerade Linien, welche auf die untere Seite senkrecht stehen, so zerfällt jeder dieser Parallelstreifen in 3 Quadrate, deren jedes 1 Decimeter zur Seite hat, somit 1 □ Decimeter ist. Das Quadrat enthält also 3 Parallelstreifen und in jedem 3 □ Decimeter; folglich ist der Flächeninhalt des Quadrates gleich $3 \times 3 \,\square^{dm} = 9 \,\square^{dm}$.

Aus einigen solchen Beispielen leiten die Schüler von selbst den Satz ab:

Den Flächeninhalt eines Quadrates findet man, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliziert.

Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt eines Quadrates, dessen Seite $2^m\ 6^{dm}$ beträgt?

Umfang $= 4 \times 2^m\, 6^{dm} = 10^m\, 4^{dm}$.

Flächeninhalt $= 2{\cdot}6 \times 2{\cdot}6 = 6{\cdot}76 \,\square^m = 6\square^m\, 76\square^{dm}$.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 153.

---

2. Das Rechteck.

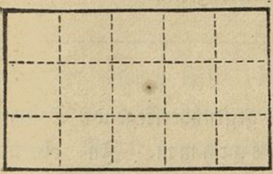
§. 147.

Das Rechteck ist ein Viereck, in welchem alle Winkel gleich, von den Seiten aber nur die gegenüberliegenden einander gleich und die zusammenstoßenden ungleich sind. Ein Rechteck hat demnach vier rechte Winkel.

Wenn man in einem Rechtecke eine Seite als Grundlinie annimmt, so stellt jede der anliegenden Seiten die Höhe des Rechteckes vor. Zwei zusammenstoßende Seiten bestimmen die beiden Ausdehnungen des Rechteckes: die **Länge** und die **Breite**.

Der **Umfang** eines Rechteckes ist gleich der doppelten Summe aus der Länge und der Breite.

Sind die Grundlinien und die Höhe eines Rechteckes durch dieselbe Längeneinheit gemessen, so kann aus den Maßzahlen der **Flächeninhalt** des Rechteckes berechnet werden.



Es sei z. B. die Grundlinie $= 5^m$, die Höhe $= 3^m$. Man theile die Grundlinie in 5, die Höhe in 3 gleiche Theile, so dass jeder Theil 1^m ist. Zieht man dann durch jeden Theilungspunkt der Höhe eine Gerade, welche mit der Grundlinie parallel ist, so zerfällt das Rechteck in 3 gleiche Parallelstreifen. Zieht man ferner durch jeden Theilungspunkt der Grundlinie eine Gerade, welche mit der Höhe parallel ist, so wird dadurch jeder Parallelstreifen in 5 Quadrate getheilt, deren jedes 1^m zur Seite hat, somit $1\,\square^m$ ist. Das Rechteck hat also 3 Parallelstreifen, und in jedem $5\,\square^m$, daher zusammen $5 \times 3 = 15\,\square^m$.

Aus mehreren ähnlichen Beispielen folgern die Schüler den Satz:

Den Flächeninhalt eines Rechteckes findet man, indem man die Maßzahl der Grundlinie (Länge) mit der Maßzahl der Höhe (Breite) multipliziert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie und der Höhe.

Wenn man das Produkt zweier Faktoren durch den einen Faktor dividiert, so erhält man den andern. Daraus folgt:

Die $\left\{\begin{matrix}\text{Grundlinie}\\ \text{Höhe}\end{matrix}\right\}$ eines Rechteckes findet man, indem man den Flächeninhalt durch die $\left\{\begin{matrix}\text{Höhe}\\ \text{Grundlinie}\end{matrix}\right\}$ dividiert.

3. B. Der Inhalt eines Rechteckes ist 17·28□^{m}, die Höhe 3·6^{m}; wie groß ist die Grundlinie?

$$17{\cdot}28 : 3{\cdot}6 = 4{\cdot}8^{m} \text{ Höhe.}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 154—157.

---

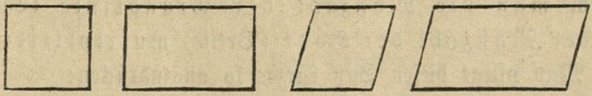
3. Das schiefwinklige Parallelogramm.

§. 148.

Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten auch einander gleich.

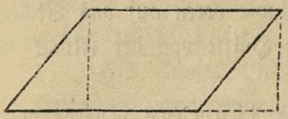
Wenn in einem Parallelogramm zwei anliegende Seiten gleich sind, so sind alle vier Seiten gleich. Ein solches Parallelogramm heißt gleichseitig, jedes andere ungleichseitig.

Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es auch die übrigen. Ein gleichwinkliges Parallelogramm heißt darum auch rechtwinklig. In einem ungleichwinkligen Parallelogramm kann kein rechter Winkel vorkommen; dasselbe heißt darum ein schiefwinkliges Parallelogramm.



Das Quadrat ist ein rechtwinklig-gleichseitiges, das Rechteck ein rechtwinklig-ungleichseitiges Parallelogramm. Das schiefwinklig-gleichseitige Parallelogramm heißt Rhombus oder Raute, das schiefwinklig-ungleichseitige heißt Rhomboid. Der Rhombus hat demnach vier gleiche Seiten und zwei gleiche spitze, sowie zwei gleiche stumpfe Winkel; das Rhomboid hat ebenfalls zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe Winkel, jedoch vier ungleiche Seiten, von denen nur die gegenüberliegenden gleich sind.

In einem schiefwinkligen Parallelogramm kann man irgend eine Seite als **Grundlinie** annehmen; die Senkrechte, die auf die Grundlinie oder ihre Verlängerung von einem Punkte der gegenüberliegenden Seite gezogen wird, ist dann die **Höhe**.



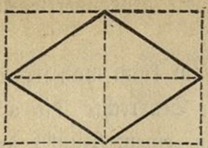
Wenn man in einem schiefwinkligen Parallelogramm die Höhe zieht und das dadurch auf der einen Seite abgeschnittene Dreieck auf der andern Seite hinzufügt, so bleibt die Fläche ungeändert, nur ihre Form geht von einem schiefwinkligen Parallelogramm in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe über. Der Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms ist daher gleich dem Flächeninhalte eines Rechteckes, das mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. Daraus folgt:

Den Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms findet man, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Ist z. B. die Grundlinie 6^m, die Höhe 3^m, so ist der Flächeninhalt $= 6 \times 3 = 18\square^m$.

Eine gerade Linie, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte einer Figur verbindet, heißt eine **Diagonale**. In einem Vierecke können zwei Diagonalen gezogen werden. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander. In einem Quadrat sind die beiden Diagonalen gleich und stehen senkrecht auf einander. In einem Rhombus sind die beiden Diagonalen ungleich und stehen auch senkrecht auf einander.

Der Flächeninhalt eines **Rhombus** kann so wie der Inhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms überhaupt bestimmt, er kann aber auch aus den beiden Diagonalen berechnet werden.



Zieht man nämlich in einem Rhombus die beiden Diagonalen und sodann durch die Eckpunkte gerade Linien, welche mit den Diagonalen parallel sind, so erhält man ein Rechteck, dessen Grundlinie und Höhe den Diagonalen des Rhombus gleich sind. Der Rhombus besteht nun aus 4 solchen Dreiecken, wie deren auf das Rechteck 8 kommen, er ist also genau die Hälfte von der Fläche des Rechteckes.

Den Flächeninhalt eines Rhombus findet man daher auch, indem man die Maßzahlen der beiden Diagonalen desselben multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Rhombus, dessen Diagonalen $6{\cdot}5^{dm}$ und $4{\cdot}4^{dm}$ lang sind?

$$\frac{6{\cdot}5 \times 4{\cdot}4}{2} = 14{\cdot}3\,\square^{dm}.$$

Ebenso folgt auch:

Der Flächeninhalt eines Quadrates ist gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der beiden Diagonalen.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 158 u. 159.

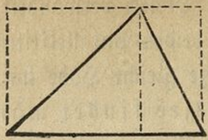
---

4. Das Dreieck.

§. 149.

Das Dreieck hat drei Seiten. Nimmt man irgend eine dieser Seiten als Grundlinie an, so heißt die Senkrechte, welche auf die Grundlinie von dem gegenüberliegenden Scheitel gezogen wird, die Höhe des Dreieckes.

Jedes Dreieck ist die Hälfte eines Rechteckes, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat.



Den Flächeninhalt eines Dreieckes findet man also, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert, oder, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der halben Maßzahl der Höhe multipliziert.

Ein Dreieck, in welchem ein rechter Winkel vorkommt, heißt ein *rechtwinkliges* Dreieck. Die zwei Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, nennt man *Katheten*, die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, *Hypotenuse*. In einem rechtwinkligen Dreiecke kann man die eine Kathete als Grundlinie, die andere als Höhe betrachten.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Produkte aus den Maßzahlen der beiden Katheten.

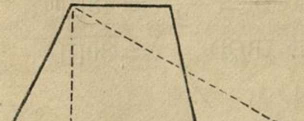
Aufgaben im V. Rechenbuche S. 159 u. 160.

---

5. Das Trapez.

§. 150.

Ein Viereck, in welchem zwei Seiten zu einander parallel, die beiden anderen Seiten aber nicht parallel sind, heißt ein *Trapez*. Der Abstand der beiden Parallelseiten des Trapezes ist die *Höhe* desselben.



Zieht man in einem Trapeze von der Mitte einer der nicht parallelen Seiten zu einem gegenüberliegenden Eckpunkte eine gerade Linie, so wird durch entsprechendes Übertragen des dadurch abgeschnittenen Dreieckes das gegebene Trapez in ein flächengleiches Dreieck verwandelt, dessen Grundlinie gleich ist der Summe der beiden Parallelseiten des Trapezes, und welches mit dem Trapeze gleiche Höhe hat.

Den Flächeninhalt eines Trapezes findet man also, indem man die Summe der Maßzahlen der beiden Parallelseiten mit der halben Maßzahl der Höhe multipliziert.

Sind z. B. die parallelen Seiten des Trapezes 12^m und 6^m und die Höhe 8^m, so ist der

$$\text{Flächeninhalt} = (12 + 6) \times \tfrac{8}{2} = 72 \square^m.$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 161.

---

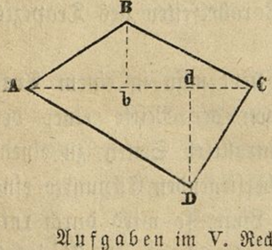
6. Das Trapezoid.

§. 151.

Ein Parallelogramm hat zwei parallele Seitenpaare, ein Trapez hat ein paralleles Seitenpaar. Ein Viereck, in welchem kein Seitenpaar parallel ist, heißt ein Trapezoid.

Um den Flächeninhalt eines Trapezoids zu finden, zerlege man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke, suche die Flächen dieser Dreiecke und addiere dieselben.

Z. B. Es sei in dem Trapezoide ABCD die Diagonale $AC = 16^m$, die darauf Senkrechte $Bb = 4^m$, und die ebenfalls darauf Senkrechte $Dd = 6^m$; so hat man



$$\text{Dreieck } ABC = \frac{16 \times 4}{2} = 32 \square^m$$

$$\text{„} \quad ACD = \frac{16 \times 6}{2} = 48 \square^m;$$

$$\text{Trapezoid } ABCD = 80 \square^m.$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 162.

---

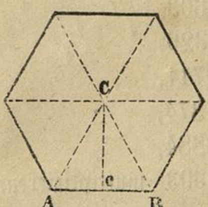
7. Das Vieleck.

§. 152.

Jede ebene Figur, welche von mehreren geraden Linien begränzt wird, nennt man ein Vieleck. Ein Vieleck, in welchem alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind, heißt regelmäßig; ein Vieleck, in welchem nicht alle Seiten und Winkel gleich sind, heißt unregelmäßig. In jedem regelmäßigen Vielecke befindet sich ein Punkt, welcher von allen Seiten, wie auch von allen Eckpunkten gleich weit absteht; er heißt darum der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes.

a. Regelmäßige Vielecke.

Der Umfang eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich der Maßzahl einer Seite multipliziert mit der Anzahl der Seiten.



Zieht man in einem regelmäßigen Vielecke von dem Mittelpunkte gerade Linien zu allen Eckpunkten, so zerfällt dasselbe in lauter gleiche Dreiecke, deren Grundlinien die Vielecksseiten sind, und deren Höhe der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite ist. Um daher die Fläche des Vieleckes zu erhalten, berechnet man alle Dreiecksflächen und faßt diese in eine Summe zusammen; man multipliziert zu diesem Ende jede Seite des Vieleckes mit der halben Höhe und addiert die Produkte, oder was einerlei ist, man addiert sogleich alle Vielecksseiten und multipliziert ihre Summe, d. i. den Umfang des Vieleckes mit der halben Höhe der Dreiecke, d. i. mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges mit der halben Maßzahl des Abstandes des Mittelpunktes von einer Seite multipliziert.

Beträgt z. B. die Seite eines regelmäßigen Sechseckes 5^m, und der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite $4{\cdot}33^m$, so ist

$$\text{Umfang} = 6\text{mal } 5^m = 30^m,$$

$$\text{Flächeninhalt} = 30 \times \frac{4{\cdot}33}{2} = 64{\cdot}95\,\square^m.$$

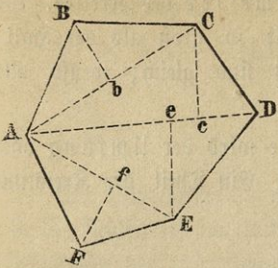
Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, muß man die gegebene Seite

in	einem	gleichseitigen	Dreiecke	mit	0·28868,
"	"	"	Quadrate	"	0·50000,
"	"	regelmäßigen	Fünfecke	"	0·68819,
"	"	"	Sechsecke	"	0·86603,
"	"	"	Siebenecke	"	1·08326,
"	"	"	Achtecke	"	1·20711,
"	"	"	Neunecke	"	1·37374,
"	"	"	Zehnecke	"	1·53884,
"	"	"	Zwölfecke	"	1·86603 multiplizieren.

b. Unregelmäßige Vielecke.

Um den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes zu erhalten, zerlege man das Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreiecke, berechne den Inhalt jedes dieser Dreiecke und addiere alle Dreiecksflächen.

Z. B. Das unregelmäßige Sechseck ABCDEF wird durch Diagonalen in 4 Dreiecke zerlegt, in denen man durch Messung für die Grundlinien und Höhen folgende Längen findet: $AC = 12{\cdot}2^m$, $AD = 14{\cdot}5^m$, $AE = 10{\cdot}6^m$, $Bb = 4^m$, $Cc = 5{\cdot}6^m$, $Ee = 5{\cdot}8^m$, $Ff = 3{\cdot}9^m$; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Sechseckes?



Dreieck ABC $= \frac{12\cdot2 \times 4}{2} = 24\cdot4 \,\square^{m}$

" ACD $= \frac{14\cdot5 \times 5\cdot6}{2} = 40\cdot6$ "

" ADE $= \frac{14\cdot5 \times 5\cdot8}{2} = 42\cdot05$ "

" AEF $= \frac{10\cdot6 \times 3\cdot9}{2} = 20\cdot67$ "

Sechseck ABCDEF $= 127\cdot72 \,\square^{m}$.

Ein zweites Verfahren, den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes zu bestimmen, besteht darin, dass man durch die zwei entferntesten Eckpunkte eine Gerade und auf diese von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte fällt; dadurch zerfällt das Vieleck in rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und dann addiert werden.

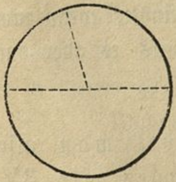
Aufgaben im V. Rechenbuche S. 162 und 163.

---

8. Der Kreis.

§. 153.

Dreht sich eine gerade Linie in einer Ebene um den einen Endpunkt so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der andere Endpunkt eine krumme Linie, welche Kreislinie heißt. Die Kreislinie sowohl als auch die von ihr begränzte Fläche nennt man auch bloß Kreis.



Aus der Erklärung der Kreislinie folgt, dass alle Punkte derselben von dem festen Drehungspunkte dieselbe Entfernung haben. Dieser Punkt heißt darum der Mittelpunkt oder das Zentrum, und die Entfernung desselben von den Punkten der Kreislinie der Halbmesser des Kreises. Eine gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und zwei Punkte der

Kreislinie verbindet, heißt ein Durchmesser des Kreises. Der Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als der Halbmesser. Alle Halbmesser eines Kreises sind gleich; ebenso alle Durchmesser.

Die Länge der ganzen Kreislinie wird der Umfang oder die Periferie des Kreises genannt. Ein Theil der Kreislinie heißt ein Bogen.

a. Umfang des Kreises.

Die genauere Ableitung der Verhältniszahl zwischen dem Umfange und dem Durchmesser eines Kreises überschreitet die Gränzen des Volksschulunterrichtes. Hier genügt es, den Schülern die Wahrheit auf anschaulichem Wege nahe zu legen. Der Lehrer zeichnet zu diesem Ende auf die Schultafel mit einem Halbmesser von $\frac{1}{2}$ Meter einen Kreis, der also 1 Meter im Durchmesser hat, und bemerkt: Der Umfang dieses Kreises ist eine krumme Linie, wir können sie nicht, wie eine gerade Linie, mit dem Meterstabe messen; wir können aber an den Umfang ringsherum einen Faden anlegen und dann die Länge dieses Fadens messen. Der Lehrer umspannt nun den Umfang möglichst genau mit einem Faden und lässt dann die Länge desselben von den Schülern mit dem Meterstabe messen; sie finden, dass er 3 Meter und beiläufig 14 Centimeter, oder 3·14 Meter lang ist, und schließen, dass der Umfang des Kreises 3·14mal so groß ist als der Durchmesser. Statt 3·14 kann auch $3\frac{1}{7}$ gesetzt werden. Es wird noch bemerkt, dass diese Messung keine vollkommen genaue ist, dass man den Umfang genauer findet, wenn man den Durchmesser mit 3·14159 multipliziert, dass es aber auch noch genauere Berechnungen gibt.

Den Umfang eines Kreises findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges mit $3\frac{1}{7}$, oder mit 3·14, oder genauer mit 3·14159 multipliziert.

Z. B. Der Durchmesser eines Kreises ist 18m; wie groß ist dessen Umfang?

$$\begin{array}{lll} 18 \times 3\tfrac{1}{7} & 18 \times 3{\cdot}14 & 18 \times 3{\cdot}14159 \\ 54 & \quad 2512 & \quad 2513272 \\ \;\,2\tfrac{4}{7} & \overline{56{\cdot}52^{m}} & \overline{56{\cdot}54862^{m}} \\ \overline{56\tfrac{4}{7}^{m}} & & \end{array}$$

Die Multiplikazion mit $3\frac{1}{7}$ ist bequemer und auch genauer als die Multiplikazion mit 3·14; sie genügt auch für die meisten Rechnungen des praktischen Lebens.

Für sehr genaue Rechnungen, insbesondere dann, wenn die Maßzahl des Durchmessers 4 oder mehrere Ziffern hat, ist die Zahl 3·14159 als Faktor anzuwenden.

Aus dem Produkte zweier Faktoren erhält man den einen Faktor, indem man das Produkt durch den andern Faktor dividiert. *Der Durchmesser eines Kreises ist also gleich dem Umfange dividiert durch $3\frac{1}{7}$, oder genauer durch 3·14159.*

Z. B. Der Umfang eines Kreises ist 44m; wie groß ist der Durchmesser?

$$44 : 3\tfrac{1}{7} = 44 \times \tfrac{7}{22} = 14^{m} \text{ Durchmesser.}$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 164—166.

---

b. Länge eines Kreisbogens.

Die Länge eines Kreisbogens hängt von der Anzahl der Bogengrade und von der Länge des Halbmessers ab. Sie wird aus dem Umfange des Kreises durch die Schlussrechnung gefunden.

Z. B. Ein Kreis hat 5·8m im Durchmesser; wie lang ist in diesem Kreise ein Bogen von 65°?

$$\begin{array}{ll} \text{Umfang} = & 5{\cdot}8 \times 3\tfrac{1}{7} \\ & \overline{17{\cdot}4} \\ & \;\;0{\cdot}829 \\ & \overline{18{\cdot}229^{m}} \end{array}$$

360° haben eine Länge von $18{\cdot}229^m$

1° hat " " " $\frac{18{\cdot}229^m}{360}$

65° haben " " " $\frac{18{\cdot}229^m}{360} \times 65 = 3{\cdot}291^m$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 166.

---

c. Flächeninhalt des Kreises.

Der Kreis kann als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten angesehen werden.

Den Flächeninhalt eines Kreises findet man daher, indem man die Maßzahl des Umfanges mit der halben Maßzahl des Halbmessers multipliziert.

Dieser Satz läßt sich noch auf eine andere Art darstellen. Der Umfang eines Kreises ist nämlich das Produkt aus dem doppelten Halbmesser und aus $3^1/_7$; der Flächeninhalt ist daher das Produkt aus drei Faktoren: aus dem doppelten Halbmesser, dem halben Halbmesser und $3^1/_7$; allein der doppelte Halbmesser mit dem halben Halbmesser multipliziert, gibt ebensoviel, als der einfache Halbmesser mit sich selbst multipliziert. Man kann also auch sagen: Der Flächeninhalt eines Kreises wird gefunden, indem man die Maßzahl des Halbmessers mit sich selbst, und das Produkt mit $3^1/_7$ multipliziert.

Ist z. B. der Halbmesser des Kreises 6^m, so hat man
Umfang $= 12 \times 3^1/_7 = 37^5/_7{}^m$, oder Inh. $= 6 \times 6 \times 3^1/_7$
Inhalt $= 37^5/_7 \times 3 = 113^1/_7 \,\square^m$; $= 113^1/_7 \,\square^m$.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 166 und 167.

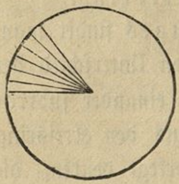
---

d. Flächeninhalt eines Kreisausschnittes.

Ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begränzt wird, heißt ein

Kreisausschnitt. Sein Flächeninhalt hängt von der Größe des Bogens und von dem Halbmesser des Kreises ab.

Ist der Bogen des Kreisausschnittes im Längenmaße gegeben, so denkt man sich zu dem Bogen unzählig viele Halbmesser



gezogen, durch welche der Kreisausschnitt in unzählig viele kleine Ausschnitte zerfällt; diese kann man als Dreiecke ansehen, deren Grundlinien zusammen die ganze Bogenlänge geben, und deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser des Kreises ist.

Den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes findet man also, indem man die Maßzahl der Bogenlänge mit der halben Maßzahl des Halbmessers multipliziert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes von 1^m Bogenlänge, wenn der Halbmesser des Kreises 3^m beträgt?

$$1 \times \tfrac{3}{2} = 1{\cdot}5 \ \square^m.$$

Ist dagegen der Bogen im Gradmaße gegeben, so wird der Flächeninhalt des Kreisausschnittes aus dem Flächeninhalte des Kreises durch die Schlußrechnung gefunden.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes von 54^0, wenn der Halbmesser des Kreises 2^m ist?

Inhalt des Kreises $= 2 \times 2 \times 3\tfrac{1}{7} = 12\tfrac{4}{7} \ \square^m$.

Zu 360^0 gehört eine Kreisfläche von $12{\cdot}571 \ \square^m$,

„ 1^0 „ „ „ „ $\dfrac{12{\cdot}571 \ \square^m}{360}$,

„ 54^0 „ „ „ „ $\dfrac{12{\cdot}571 \ \square^m \times 54}{360}$

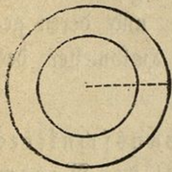
$= 1{\cdot}886 \ \square^m$.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 167.

e. Flächeninhalt eines Kreisringes.

Zwei Kreise, welche mit verschiedenen Halbmessern aus demselben Mittelpunkte beschrieben werden, heißen konzentrisch. Die Fläche, welche von den Umfängen zweier konzentrischer Kreise eingeschlossen wird, nennt man einen Kreisring.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahiert. — Man kann übrigens den Kreisring auch in sehr viele Vierecke zerlegt denken, die man als Trapeze berechnet, und addiert, woraus dann folgt: Der Flächeninhalt eines Kreisringes ist gleich der Summe der beiden Periferien multipliziert mit ihrem halben Abstande d. i. mit dem halben Unterschiede der beiden Halbmesser.

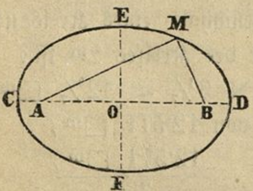


Aufgaben im V. Rechenbuche S. 168.

9. Die Ellipse.

§. 154.

Wenn man die Enden einer Schnur in den Punkten A und B befestigt und mit einem Stifte M um diese Punkte so herumfährt, dass die Schnur immer gespannt bleibt, so beschreibt der Stift eine krumme Linie, welche Ellipse heißt. Die durch A und B gezogene Gerade CD nennt man die große Achse, die darauf im Mittelpunkte O errichtete Senkrechte EF die kleine Achse der Ellipse.



Man hat gefunden, dass eine Ellipse eben so viel Flächeninhalt hat, als ein Kreis, dessen Halbmesser mit sich selbst multipliziert dem Produkte der beiden halben Achsen der Ellipse gleich ist.

Den Flächeninhalt einer Ellipse findet man daher, indem man das Produkt aus den beiden halben Achsen mit $3^1/_7$ multipliziert.

Z. B. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 20^m und $12{\cdot}6^m$ sind?

$$10 \times 6{\cdot}3 \times 3^1/_7 = 198 \,\square^m.$$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 168.

II. Körperberechnungen.

§. 155.

Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller seiner Gränzflächen; sie wird durch das Flächenmaß bestimmt.

Unter dem Kubikinhalte (Volumen) eines Körpers versteht man die Größe des von seinen Gränzflächen eingeschlossenen Raumes. Um einen Körper zu messen, nimmt man einen andern bekannten Körper als Maßeinheit an und untersucht, wie oft diese Einheit in dem ersten Körper enthalten ist. Die Zahl, welche angibt, wie oft die Körpereinheit in einem Körper enthalten ist, heißt die Maßzahl seines Kubikinhaltes.

Als Einheit des Körpermaßes nimmt man einen Würfel oder Kubus an, dessen Kante die Längeneinheit ist. Die Einheit des österreichischen Körpermaßes ist das Kubikmeter d. i. ein Würfel, dessen Kante 1 Meter ist. 1 Kubikmeter (Kub.^{m}) hat 1000 Kubikdecimeter (Kub.^{dm}) à 1000 Kubikcentimeter (Kub.^{cm}) à 1000 Kubikmillimeter (Kub.^{mm}). Zum Kubikmaße gehört auch das Hohlmaß zur Messung trockener und flüssiger Gegenstände. Die Einheit des Hohlmaßes ist das Liter = 1 Kubikdecimeter; 1 Liter hat 10 Deciliter à 10 Centiliter; 100 Liter sind 1 Hektoliter.

In den meisten Fällen ist es wegen der Gestalt des zu messenden Körpers nicht möglich, unmittelbar zu untersuchen, wie oft die Kubikeinheit in ihm enthalten ist; man nimmt daher auch hier, wie bei der Flächenbestimmung, zu einem mittelbaren Verfahren Zuflucht, indem man durch Schlüsse Sätze ableitet, nach denen der Kubikinhalt aus den Maßzahlen der Linien und Flächen, welche die Größe eines Körpers unzweideutig bestimmen, durch Rechnung gefunden wird.

---

1. Der Kubus oder Würfel.

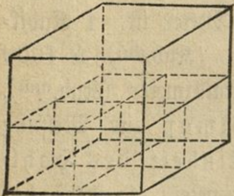
§. 156.

Ein Würfel (Kubus) ist von sechs gleichen Quadraten begränzt. Das Quadrat, auf welchem ein Würfel steht, heißt seine Grundfläche. Alle Kanten des Würfels sind unter einander gleich.

Die Oberfläche eines Würfels findet man, indem man den Flächeninhalt einer Gränzfläche — eines Quadrates — mit 6 multipliziert.

Beträgt z. B. die Kante eines Würfels $2{\cdot}5^{m}$, so ist der Flächeninhalt einer Gränzfläche $= 2{\cdot}5 \times 2{\cdot}5 = 6{\cdot}25 \square^{m}$, daher die Oberfläche des Würfels $=$ 6mal $6{\cdot}25 \square^{m} = 37{\cdot}5 \square^{m}$.

Es sei ferner der Kubikinhalt eines Würfels zu bestimmen. Ist z. B. 2^{m} die Länge einer Kante, so läßt sich die Grundfläche in $2 \times 2 = 4 \square$ Meter eintheilen und auf jedem $\square$ Meter der Grundfläche 1 Kubikmeter auflegen; man erhält also über der Grundlinie eine Schichte von 4 Kub.^{m}, und zwar bis 1^{m} Höhe; da nun der Würfel 2^{m} hoch ist, so enthält er zwei solche Schichten von je 4 Kub.^{m}; der Kubikinhalt ist also gleich 2mal 4 Kub.^{m}, oder $2 \times 2 \times 2 = 8$ Kub.^{m}.



Den Kubikinhalt eines Würfels findet man also, indem man die Maßzahl seiner Kante dreimal als Faktor setzt.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 169 und 170.

---

2. Das Prisma oder die Ecksäule.

§. 157.

Wenn sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade, mit einander parallele Linien beschreiben, so entsteht ein Körper, welcher Prisma oder Ecksäule heißt. Ein Prisma ist demnach ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Vielecken und von so vielen Parallelogrammen, als jedes der Vielecke Seiten hat, begränzt wird. Die beiden Vielecke bilden die Grundflächen des Prisma; die übrigen Gränzflächen (Parallelogramme) nennt man Seitenflächen, und ihre Summe die Seitenoberfläche. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

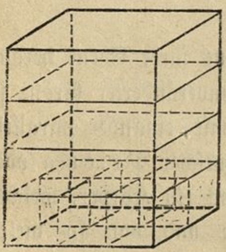
Ein Prisma, dessen Seitenflächen Rechtecke sind, dessen Seitenkanten also auf der Grundfläche senkrecht stehen, heißt ein senkrechtes Prisma. In einem senkrechten Prisma stellt jede Seitenkante zugleich die Höhe des Prisma vor.

Ein senkrechtes Prisma, in welchem auch die Grundflächen Rechtecke sind, heißt rechtwinklig. Ein rechtwinkliges Prisma wird von sechs Rechtecken begränzt. Drei Kanten, die in einer Ecke zusammentreffen, bestimmen die drei Ausdehnungen des rechtwinkligen Prisma: die Länge, die Breite und die Höhe. Sind alle drei Ausdehnungen einander gleich, so ist das rechtwinklige Prisma ein Würfel.

Die Oberfläche eines Prisma ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche und der Seitenoberfläche.

Für das senkrechte Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn sie in einer Ebene ausgebreitet wird, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Prisma, und dessen Höhe der Höhe des Prisma gleich ist.

In jedem senkrechten Prisma ist also die Seitenoberfläche gleich dem Umfange der Grundfläche multipliziert mit der Höhe des Prisma.



Ist z. B. ein rechtwinkliges Prisma 3^m lang, 2^m breit und 4^m hoch, so hat man:

Grundfläche $= 3 \times 2 = 6 \square^m$
doppelte Grundfläche . . $= 12 \square^m$
Seitenoberfläche $= 10 \times 4 = 40$ „
ganze Oberfläche . . . $= 52 \square^m$.

Es sei nun der Kubikinhalt desselben Prisma zu bestimmen. Man theile die Länge in 3, die Breite in 2 und die Höhe in 4 gleiche Theile, deren jeder 1^m ist. Legt man nun durch die Theilungspunkte der Höhe Ebenen, welche mit der Grundfläche parallel sind, so zerfällt das Prisma in 4 gleiche Parallelschichten. Legt man dann auch durch die Theilungspunkte der Länge und der Breite Ebenen, welche mit den Seitenflächen parallel sind, so wird jede dieser Parallelschichten in so viele Kubikmeter zerlegt, als die Grundfläche $\square$ Meter enthält, also in $3 \times 2 = 6$ Kubikmeter. Das Prisma enthält demnach 4 Parallelschichten, und in jeder 6 Kubikmeter, also zusammen 4mal 6 Kubikmeter, oder $3 \times 2 \times 4 = 24$ Kubikmeter.

Den Kubikinhalt eines rechtwinkligen Prisma findet man daher, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliziert, oder, was gleichviel ist, indem man die Maßzahlen der Länge, Breite und Höhe mit einander multipliziert.

Auch in jedem andern Prisma gibt die Maßzahl der Grundfläche an, wie viel Kubikeinheiten auf derselben stehen können; diese Kubikeinheiten bilden eine Parallelschichte. Die Maßzahl der Höhe aber gibt an, in wie viele solche Schichten das Prisma zerlegt werden kann. Daraus folgt:

Den Kubikinhalt eines jeden Prisma findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Wird der Kubikinhalt eines Prisma durch die Grundfläche dividiert, so erhält man die Höhe; wird der Kubikinhalt durch die Höhe dividiert, so erhält man die Grundfläche.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 170—173.

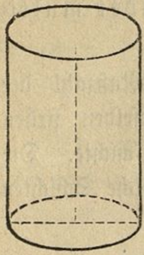
---

3. Der Zylinder oder die Rundsäule.

§. 158.

Ein Zylinder (Rundsäule) ist ein Körper, welcher von zwei gleichen und parallelen Kreisen und einer so gekrümmten Fläche begränzt wird, dafs man auf derselben durch jeden Punkt in einer Richtung eine gerade Linie ziehen kann. Die beiden Kreise bilden die Grundflächen, die gekrümmte Fläche heißt die Seitenoberfläche oder der Mantel des Zylinders. Den Abstand der beiden Grundflächen nennt man die Höhe, und die Gerade, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, die Achse des Zylinders. Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Zylinder ein senkrechter. In einem senkrechten Kegel stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

Die Oberfläche eines Zylinders ist gleich der Summe aus der doppelten Grundfläche und der Mantelfläche.



Für den senkrechten Zylinder bildet die Mantelfläche, wenn sie auf eine Ebene abgewickelt wird, ein Rechteck, welches den Umfang der Grundfläche zur Grundlinie, und die Höhe des Zylinders zur Höhe hat.

Die Mantelfläche eines senkrechten Zylinders findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann auch der Zylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, angesehen werden.

Den Kubikinhalt eines Zylinders findet man daher, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit der Maßzahl der Höhe multipliziert.

Z. B. Die Höhe eines senkrechten Zylinders ist 12^{dm}, der Durchmesser der Grundfläche 8^{dm}; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt des Zylinders?

Umfang der Grundfläche $= 8 \times 3^1/_7 = 25{\cdot}14^{dm}$

Flächeninhalt der Grundfläche $= 25{\cdot}14 \times 2 = 50{\cdot}28 \square^{dm}$

Doppelte Grundfläche $= 100{\cdot}56 \square^{dm}$

Mantelfläche des Zylinders $= 25{\cdot}14 \times 12 = 301{\cdot}68$ „

Oberfläche des Zylinders $= 402{\cdot}24 \square^{dm}$

Kubikinhalt des Zylinders $= 50{\cdot}28 \times 12 = 603{\cdot}36$ Kub.^{dm}

Um den Kubikinhalt einer zylindrischen Röhre oder hohlen Walze zu bestimmen, sucht man die Kubikinhalte der beiden Zylinder, von denen der kleinere aus dem größeren ausgeschnitten ist, und subtrahiert den Kubikinhalt des kleineren Zylinders von dem des größeren.

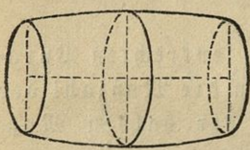
Aufgaben im V. Rechenbuche S. 174—177.

Ein Fass unterscheidet sich von einem Zylinder dadurch, dass sein Durchmesser am Spunde größer ist als jener der beiden

Bodenflächen. Der Inhalt eines Fasses wird übrigens der Wahrheit sehr nahe kommend gefunden, indem man das Fass als einen Zylinder berechnet, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses und dessen Durchmesser der dritte Theil aus der Summe des Boden- und des doppelten Spunddurchmessers ist.

Bei dieser Berechnung sind selbstverständlich die inneren Maßlängen des Fasses zu nehmen.

Z. B. Wie groß ist der Inhalt eines Weinfasses von 9^{dm} Länge, wenn der Durchmesser seiner Bodenfläche $4{\cdot}8^{dm}$ und die Spundtiefe $5{\cdot}7^{dm}$ beträgt?



Bodendurchmesser . . . . $= 4{\cdot}8^{dm}$
Doppelte Spundtiefe . . . $= 11{\cdot}4^{dm}$
$16{\cdot}2 : 3$
Durchmesser des Zylinders $= 5{\cdot}4^{dm}$
Grundfl. $= 2{\cdot}7 \times 2{\cdot}7 \times 3\tfrac{1}{7} = 22{\cdot}91\,\square^{dm}$
Inhalt $= 22{\cdot}91 \times 9 = 206{\cdot}19$ Kub.^{dm}
$= 206{\cdot}19$ Liter

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 177.

---

4. Die Pyramide oder Spitzsäule.

§. 159.

Wenn sich eine geradlinige Figur aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade, in einem Punkte zusammentreffende Linien beschreiben, so entsteht ein Körper, welcher Pyramide oder Spitzsäule heißt. Eine Pyramide ist demnach ein Körper, welcher von einem Vielecke und von so vielen Dreiecken, als das Vieleck Seiten hat, begränzt wird. Das Vieleck ist die Grundfläche der Pyramiden, die Dreiecke sind die Seitenflächen und bilden zusammen die Seitenoberfläche. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammentreffen, heißt die Spitze, und eine

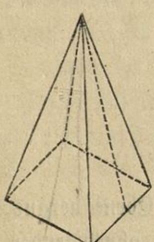
Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die *Höhe* der Pyramide.

Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck, und trifft die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche in den Mittelpunkt derselben, so heißt die Pyramide *senkrecht* (regelmäßig). In einer senkrechten Pyramide heißt der Abstand der Spitze von einer Seite der Grundfläche die *Seitenhöhe*.

Die Oberfläche einer Pyramide ist gleich der Summe aus der Grundfläche und der Seitenoberfläche.

In der senkrechten Pyramide besteht die Seitenoberfläche aus lauter gleichen Dreiecken, deren Grundlinien den Umfang der Grundfläche der Pyramide bilden, und deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe der Pyramide ist.

Die Seitenoberfläche einer senkrechten Pyramide findet man also, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der halben Maßzahl der Seitenhöhe multiplizirt.



Z. B. In einer senkrechten Pyramide ist die Grundfläche ein Quadrat von 6^{dm} Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt $12{\cdot}37^{dm}$; wie groß ist die Oberfläche?

Umfang der Grundfläche $= 24^{dm}$

Flächeninhalt der Grundfläche $= 36 \;\square^{dm}$,

Seitenoberfläche $= 24 \times \frac{12{\cdot}37}{2} = 148{\cdot}44$ „

ganze Oberfläche $= \overline{184{\cdot}44}\,\square^{dm}$

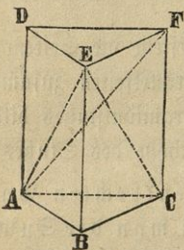
Um den Satz, nach welchem der *Kubikinhalt einer Pyramide* berechnet wird, zu begründen, müßen zwei andere Sätze vorausgesetzt werden.

1. *Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Kubikinhalt.*

Dieß folgt unmittelbar aus der Entstehungsweise einer Pyramide durch die parallele Bewegung eines sich stetig verkleinernden Vieleckes. Haben nämlich zwei Pyramiden gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, so sind auch je zwei zur Grundfläche parallele Durchschnitte, welche von der Spitze gleichweit abstehen, einander gleich; daher müßen auch die Räume, welche die sich bewegenden gleichen Vielecke beschreiben, gleich sein.

2. Jedes dreiseitige Prisma läſst sich in drei gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen.

Es sei ABCDEF ein dreiseitiges Prisma. Durchschneidet man dasselbe durch die Ebene AEC, so zerfällt es in die dreiseitige Pyramide EABC und in die vierseitige EACFD. Durch die Ebene AEF wird die letztere wieder in zwei dreiseitige Pyramiden EACF und EADF zerlegt, so daſs das dreiseitige Prisma aus drei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzt erscheint. Es läſst sich nun zeigen, daſs diese drei Piramiden einander gleich sind, da je zwei derselben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben.



Diese Zerlegung des Prisma kann den Schülern an einem zerlegbaren Modelle anschaulich gemacht werden.

Jede dreiseitige Pyramide ist mithin der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Jede mehrseitige Pyramide läſst sich in dreiseitige zerlegen; es ist daher jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Da nun der Kubikinhalt eines Prisma gleich ist dem Produkte aus der Grundfläche und der Höhe, so folgt:

Den Kubikinhalt einer Pyramide findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl der Höhe multipliziert

Ist z. B. die Grundfläche einer 12^{dm} hohen Pyramide ein Quadrat von 6^{dm} Seitenlänge, so hat man

Grundfläche $= 36 \square^{dm}$,

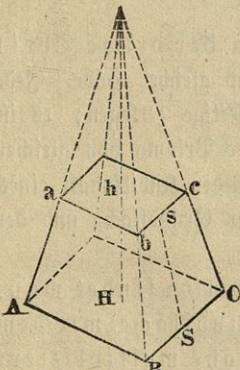
Kubikinhalt $= 36 \times \frac{12}{3} = 144$ Kub.^{dm}.

Wenn man eine Pyramide durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchschneidet, so heißt der untere Theil eine abgekürzte (abgestumpfte) Pyramide oder ein Pyramidalstutz, der obere Theil die Ergänzungspyramide. Der Abstand der beiden Grundflächen eines Pyramidalstutzes heißt die Höhe desselben. Ist die durchschnittene Pyramide senkrecht, so wird auch der Pyramidalstutz ein senkrechter genannt.

Die Oberfläche eines Pyramidalstutzes ist gleich der Summe aus den beiden Grundflächen und der Seitenoberfläche.

In dem senkrechten Pyramidalstutz besteht die Seitenoberfläche aus lauter gleichen Trapezen, deren Parallelseiten zusammen die Umfänge der beiden Grundflächen des Pyramidalstutzes bilden, und deren gemeinschaftliche Höhe die Seitenhöhe des Stutzes ist.

Die Seitenoberfläche eines senkrechten Pyramidalstutzes findet man also, indem man die Summe aus den Maßzahlen der Umfänge der beiden Grundflächen mit der halben Maßzahl der Seitenhöhe multipliziert.



Es seien 9^{dm} und 6^{dm} zwei parallele Kanten der beiden Grundflächen, und $7{\cdot}16^{dm}$ die Seitenhöhe eines senkrechten vierseitigen Pyramidalstutzes; wie groß ist die Oberfläche?

Die Grundflächen des Stutzes sind Quadrate.

Umfang der unteren Grundfl.		$= 36^{dm}$,
„ „ oberen	„	$= 24^{dm}$;
Flch. Inh. „ unteren	„	$= 81\square^{dm}$,
„ „ oberen	„	$= 36$ „
beide Grundflächen		$= 117\square^{dm}$.

Seitenoberfläche $= 60 \times \frac{7{\cdot}16}{2} = 214{\cdot}8$ „

ganze Oberfläche $= 331{\cdot}8\square^{dm}$.

Den Kubikinhalt eines Pyramidalstutzes findet man, indem man von dem Inhalte der vollständigen Pyramide den Inhalt der Ergänzungspyramide subtrahiert.

Es seien z. B. 9^{dm} und 6^{dm} zwei parallele Kanten der quadratischen Grundflächen eines 7^{dm} hohen Pyramidalstutzes; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

Zuerst muß die Höhe der ganzen Pyramide gesucht werden. Die Kanten Aa und Bb haben sich bei einer Höhe von 7^{dm} um $9^{dm} - 6^{dm} = 3^{dm}$ genähert; damit sie zusammentreffen, d. i. sich um 9^{dm} nähern, muß die Höhe so oftmal 7^{dm} betragen, als 3^{dm} in 9^{dm} enthalten sind, also 3mal $7^{dm} = 21^{dm}$. Die Höhe der vollständigen Pyramide ist demnach 21^{dm}, die Höhe der Ergänzungspyramide $21^{dm} - 7^{dm} = 14^{dm}$.

Inhalt der vollständigen Pyramide $= 81 \times \frac{21}{7} = 567$ Kub.^{dm}
" " Ergänzungspyramide $= 36 \times \frac{14}{3} = 168$ "
" " abgekürzten Pyramide . . $= 399$ Kub.^{dm}.

Annäherungsweise findet man den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide, indem man diese als ein Prisma berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe aus den beiden Grundflächen des Pyramidalstutzes, und dessen Höhe die Höhe des Stutzes ist.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 178—180.

---

5. Der Kegel.

§. 160.

Ein Kegel ist ein Körper, welcher von einem Kreise und von einer in einen Punkt auslaufenden gekrümmten Fläche begränzt wird. Der Kreis bildet die Grundfläche des Kegels, die gekrümmte Seitenoberfläche heißt der Mantel, und der Punkt, in den sie ausläuft, die Spitze des Kegels. Den Abstand der Spitze von der Grundfläche nennt man die Höhe, und die Gerade, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet, die Achse des Kegels.

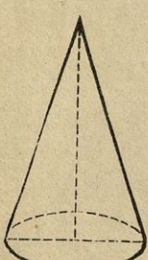
Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Kegel ein senkrechter. In einem senkrechten Kegel stellt die Achse zugleich die Höhe vor. Eine Gerade, welche von der Spitze zum Umfange der Grundfläche gezogen wird, heißt die Seite des senkrechten Kegels.

Die Oberfläche eines Kegels ist gleich der Summe aus der Grundfläche und der Mantelfläche.

Jeder Kegel kann als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden; die Seitenhöhe der senkrechten Pyramide stellt in dem senkrechten Kegel die Seite vor. Daraus folgt:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegels findet man, indem man die Maßzahl des Umfanges der Grundfläche mit der halben Maßzahl der Seite multipliziert.

Den Kubikinhalt eines Kegels findet man, indem man die Maßzahl der Grundfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl der Höhe multipliziert.



In einem senkrechten Kegel beträgt der Durchmesser der Grundfläche 7^{dm}, die Höhe 12^{dm} und eine Seite $12{\cdot}5^{dm}$; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Kubikinhalt des Kegels?

Umfang der Grundfläche $= 7 \times 3\frac{1}{7} = 22^{dm}$

Flächeninh. der Grundfl. $= 22 \times \frac{7}{4} = 38{\cdot}5\,\square^{dm}$

Mantelfläche $= 22 \times \frac{12{\cdot}5}{2} = 137{\cdot}5$ „

ganze Oberfläche $= 176\ \square^{dm}$.

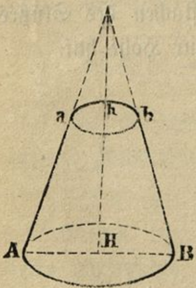
Kubikinhalt $= 38{\cdot}5 \times \frac{12}{3} = 154$ Kub.^{dm}.

Wenn ein Kegel durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so heißt der untere Theil ein **abgekürzter Kegel** oder ein **Kegelstutz**, der obere Theil der **Ergänzungskegel**. Der Abstand der beiden Grundflächen eines Kegelstutzes heißt die **Höhe** desselben. Ist der durchschnittene Kegel senkrecht, so wird auch der Kegelstutz ein **senkrechter** genannt. Eine gerade Linie, welche von einem Punkte des oberen Kreisumfanges zu dem Umfange des unteren Kreises (senkrecht) gezogen wird, heißt die **Seite** des Kegelstutzes.

Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels ist gleich der Summe aus den beiden Grundflächen und der Mantelfläche.

Da ein abgekürzter Kegel als eine abgekürzte Pyramide, deren Grundflächen Kreise sind, angesehen werden kann, so folgt:

Die Mantelfläche eines senkrechten Kegelstutzes findet man, indem man die Summe aus den Maßzahlen der Umfänge beider Grundflächen mit der halben Maßzahl der Seite multipliziert.



In einem abgekürzten senkrechten Kegel betragen die Durchmesser der Grundflächen 7^{dm} und 3^{dm}, und die Seite $6{\cdot}76^{dm}$; wie groß ist die Oberfläche?

Umf. der unt. Grundfl.	$= 7 \times 3\frac{1}{7}$	$=$	22^{dm}
„ „ ob. „	$= 3 \times 3\frac{1}{7}$	$=$	$9{\cdot}43^{dm}$
Inh. „ unt. „	$= 22 \times \frac{7}{4}$	$=$	$38{\cdot}5 \square^{dm}$
„ „ ob. „	$= 9{\cdot}43 \times \frac{3}{4}$	$=$	$7{\cdot}07$ „
	beide Grundflächen	$=$	$45{\cdot}57 \square^{dm}$
Mantelfläche	$= 31{\cdot}43 \times \frac{6{\cdot}76}{2}$	$=$	$106{\cdot}23$ „
	ganze Oberfläche	$=$	$151{\cdot}8 \square^{dm}.$

Den Kubikinhalt eines Kegelstutzes findet man, indem man von dem Inhalte des vollstän-

digen Kegels den Inhalt des Ergänzungskegels subtrahiert.

Z. B. Wie groß ist der Kubikinhalt eines $6{\cdot}4^{dm}$ hohen Kegelstutzes, dessen Grundflächen 7^{dm} und 3^{dm} zu Durchmessern haben?

Vor allem muß die Höhe des vollständigen Kegels gesucht werden. Die Seiten Aa und Bb haben sich bei einer Höhe von $6{\cdot}4^{dm}$ um $7^{dm}-3^{dm}=4^{dm}$ genähert; damit sie zusammentreffen, d. i. sich um 7^{dm} nähern, muß die Höhe so oftmal $6{\cdot}4^{dm}$ betragen, als 4^{dm} in $6{\cdot}4^{dm}$ enthalten sind, also $1{\cdot}6$mal $6{\cdot}4^{dm}=10{\cdot}24^{dm}$. Die Höhe des ganzen Kegels ist demnach $10{\cdot}24^{dm}$, die Höhe des Ergänzungskegels $10{\cdot}24^{dm}-6{\cdot}4^{dm}=3{\cdot}84^{dm}$.

Inhalt des vollständ. Kegels $= 38{\cdot}5 \times \frac{10{\cdot}24}{3} = 131{\cdot}41$ Kub.^{dm}

" " Ergänzungskegels $= 7{\cdot}07 \times \frac{3{\cdot}84}{3} = 9{\cdot}05$ "

Inhalt des Kegelstutzes $= 122{\cdot}36$ Kub.^{dm}.

In der Praxis begnügt man sich gewöhnlich mit einer angenäherten Bestimmung des Kubikinhaltes eines Kegelstutzes, indem man diesen als einen Zylinder berechnet, welcher die halbe Summe aus den beiden Grundflächen des Stutzes zur Grundfläche, und die Höhe des Stutzes zur Höhe hat.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 181—184.

---

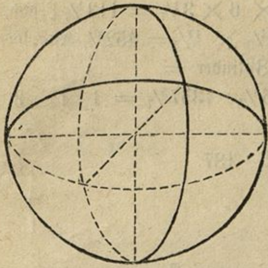
6. Die Kugel.

§. 161.

Eine Kugel ist ein Körper, welcher von einzigen so gekrümmten Flächen begränzt wird, dass jeder Punkt der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte, dem Mittelpunkte, gleichweit absteht. Eine Gerade, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser, und eine Gerade, welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zu dem entgegensetzten Punkte der Oberfläche geht, ein Durchmesser der Kugel. Man kann sich die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Achse, und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel.

Jeder Durchschnitt der Kugel durch eine Ebene ist ein Kreis; geht der Schnitt durch den Mittelpunkt, so heißt er ein größter Kreis der Kugel. Ein größter Kreis der Kugel hat mit dieser gleichen Durchmesser.

Man hat gefunden, dass die Oberfläche einer Kugel 4mal so groß ist als eine größte Kreisfläche derselben.



Z. B. Wie groß ist die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmesser 8^{dm} ist?

Größte Kreisfläche
$= 4 \times 4 \times 3\frac{1}{7} = 50{\cdot}285 \square^{dm}$,

Oberfläche der Kugel
$= 50{\cdot}285 \times 4 = 201{\cdot}14 \square^{dm}$.

Die Bestimmung des Kubikinhaltes einer Kugel wird auf die Inhaltsberechnung der Pyramide zurückgeführt.

Wenn man nämlich durch den Mittelpunkt der Kugel sehr viele Ebenen legt, so zerfällt dadurch die Kugel in sehr viele kleine Pyramiden, die ihre Spitze im Mittelpunkte und daher zur gemeinschaftlichen Höhe den Halbmesser der Kugel haben, und deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel bilden.

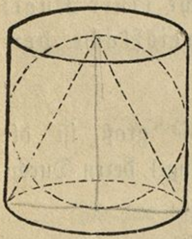
Den Kubikinhalt einer Kugel findet man also, indem man die Maßzahl der Oberfläche mit dem dritten Theile der Maßzahl des Halbmessers multipliziert.

So findet man für die oben betrachtete Kugel

Kubikinhalt $= 201{\cdot}14 \times \frac{3}{4} = 268{\cdot}19$ Kub.dm.

Die Zusammenfassung der Inhaltsberechnung der runden Körper enthält folgende Aufgabe:

In einen Zylinder von 12cm Durchmesser und 12cm Höhe beschreibt man eine Kugel und einen senkrechten Kegel; a) wie groß ist der Kubikinhalt jedes dieser drei Körper, b) wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Zylinders zu einander?



Zylinder: Grundfl. $= 6 \times 6 \times 3^{1}/_{7} = 113^{1}/_{7}$ □dm,
Inh. $= 113^{1}/_{7} \times 12 = 1357^{5}/_{7}$ Kub.dm.
Kugel: Oberfl. $= 6 \times 6 \times 3^{1}/_{7} \times 4 = 452^{4}/_{7}$ □dm,
Inhalt $= 452^{4}/_{7} \times {}^{6}/_{3} = 905^{1}/_{7}$ Kub.dm.
Kegel: Grundfl. $= 6 \times 6 \times 3^{1}/_{7} = 113^{1}/_{7}$ □dm,
Inhalt $= 113^{1}/_{7} \times {}^{12}/_{3} = 452^{4}/_{7}$ Kub.dm.
Kegel : Kugel : Zylinder $=$
$452^{4}/_{7} : 905^{1}/_{7} : 1357^{5}/_{7} = 1 : 2 : 3.$

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 185—187.

---

7. Bestimmung des Kubikinhaltes eines Körpers aus dessen Gewichte.

§. 162.

Der Kubikinhalt (das Volumen) und das Gewicht eines Körpers stehen im innigen Zusammenhange.

Die Größe des Druckes, den ein Körper auf seine Unterlage ausübt, heißt das **Gewicht** des Körpers. Das Gewicht, das einem Körper ohne Rücksicht auf seine Größe (auf seinen Kubikinhalt) zukommt, ist das **absolute Gewicht** desselben.

Das Gewicht, welches eine Kubikeinheit, z. B. ein Kubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen spezifisches Gewicht. Z. B. 1 Kub.dm Gold wiegt 19·36 Kilogramm; diese sind das spezifische Gewicht des Goldes für 1 Kub.dm als Raumeinheit.

Da 1 Kub.dm reines Wasser 1 Kilogr. wiegt, so enthält das spezifische Gewicht eines Körpers für 1 Kub.dm auch die Angabe, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumtheiles reinen Wassers das Gewicht eines eben so großen Raumtheiles des betreffenden Körpers ist.

Spezifische Gewichte einiger Körper:

1 Kub. Decimeter

Alabaster	wiegt	2·70	Kil.	Korkholz	wiegt	0·24	Kil.
Bernstein	„	1·08	„	Kupfer, gehämmert	„	8·88	„
Blei	„	11·35	„	„ gegossen	„	8·79	„
Buchenholz	„	0·74	„	Marmor	„	2·72	„
Eichenholz	„	0·86	„	Messing (im Mittel)	„	8·40	„
Eisen, geschmiedet	„	7·79	„	Platin	„	21·45	„
„ gegossen	„	7·21	„	Quecksilber	„	13·60	„
Elfenbein	„	1·83	„	Silber	„	10·51	„
Fichtenholz	„	0·47	„	Steinkohle (im Mittel)	„	1·30	„
Gold	„	19·36	„	Stahl	„	7·82	„
Granit (im Mittel)	„	2·70	„	Tannenholz	„	0·48	„
Kalkstein	„	0·46	„	Zink	„	7·19	„
Kieferholz	„	0·52	„	Zinn	„	7·29	„

Welchen Kubikinhalt nehmen 1800 Kilogramm Steinkohlen ein?

Da 1 Kub.dm Steinkohle 1·3 Kilogr. wiegt, so nehmen 1800 Kilogr. Steinkohlen so viel Kub.dm Raum ein, als wie oft 1·3 Kilogr. in 1800 Kilogr. enthalten sind;

$$1800 : 1{\cdot}3 = 1384{\cdot}6 \text{ Kub.}^{\text{dm}}.$$

Den Kubikinhalt eines Körpers in Kubikdecimeter findet man also, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogramm durch das spezifische Gewicht dividiert.

Ein Schlauch faßt 18 Kub.dm; wie viel wiegt das darin enthaltene Quecksilber?

1 Kub.dm Quecksilber wiegt 13·6 Kilogr.; 18 Kub.dm wiegen daher

$$13{\cdot}6 \times 18 = 244{\cdot}8 \text{ Kilogramm.}$$

Das absolute Gewicht eines Körpers in Kilogramm findet man also, indem man dessen spezifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Kub.dm ausgedrückten Kubikinhaltes multipliziert.

Aufgaben im V. Rechenbuche S. 187 und 188.

Inhaltsverzeichnis.

Erste Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume bis zwanzig.

Zweite Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume bis hundert.

Dritte Abtheilung.

Das Rechnen im Zahlenraume bis tausend und in den höheren Zahlenkreisen.

Vierte Abtheilung.

Das Rechnen mit Dezimalbrüchen, mehrnamigen Zahlen und gemeinen Brüchen.

Seite

Fünfte Abtheilung.

Rechnungsübungen für die oberen Schulklassen.

Im k. k. Schulbücher-Verlage sind von demselben Verfasser nachstehende Rechenbücher, auf welche sich die vorliegende methodische Anleitung bezieht, erschienen:

Erstes **Rechenbuch** für Volksschulen, broschiert, 7 Kr.

Zweites Rechenbuch für Volksschulen, broschiert, 10 Kr.

Drittes Rechenbuch für Volksschulen, broschiert, 13 Kr.

Viertes Rechenbuch für Volksschulen, broschiert, 14 Kr.

Fünftes Rechenbuch für Volksschulen, mit Leinwandrücken, 35 Kr.

DRŽAVNA

Druck von Karl Gorischek in Wien.

NARODNA IN UNIVERZITETNA
KNJIŽNICA

COBISS ©

00000492095

372.7.02(021)