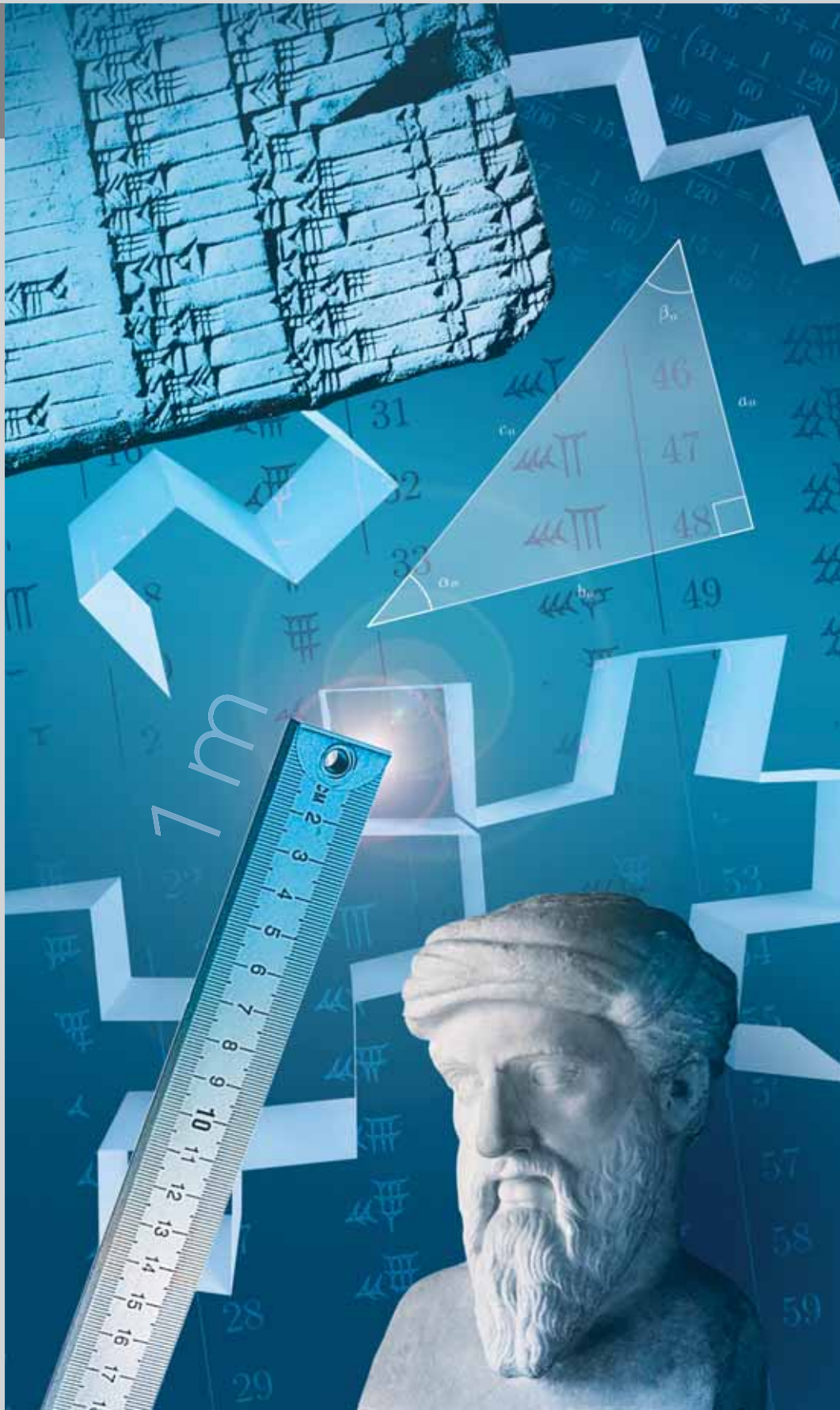
Matematika v šoli

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

2021, letnik 27 1



IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Učenčevo (samo)preverjanje pravilnosti reševanja nalog pri matematiki

Pregibanje papirja in učenje s preiskovanjem

IZ RAZREDA

Preverjanje znanja učencev na daljavo s kompleksno zastavljenimi nalogami

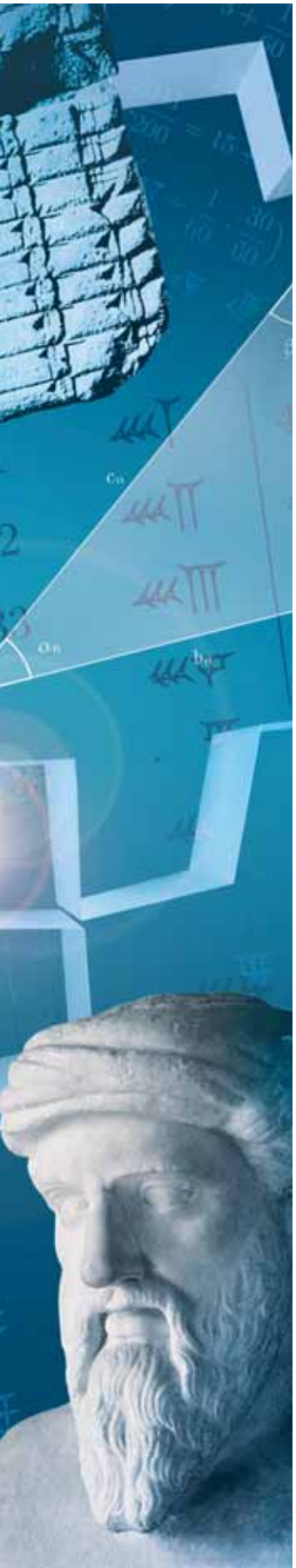
MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

Babilonska tablica in pitagorejske trojice

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Matematika v šoli

2021, letnik 27 1



VSEBINA

mag. Mateja Sirnik
Učimo se matematiko tudi na daljavo

IZ TEORIJE ZA PRAKSO

Lidija Pulko in mag. Mateja Sirnik
Izzivi poučevanja na daljavo pri matematiki 2

dr. Adrijana Mastnak
Učenčevo (samo)preverjanje pravilnosti reševanja nalog pri matematiki 8

Ana Lara Schwarzbartl in dr. Vida Manfreda Kolar
Preverjanje znanja matematičnih vsebin s številskim maratonom 15

dr. Adriaan Herremans
Pregibanje papirja in učenje s preiskovanjem 23

IZ RAZREDA

Jerneja Bone in mag. Magda Čevdek
Preverjanje znanja učencev na daljavo s kompleksno zastavljenimi nalogami 32

Simona Ostović
Različni načini preverjanja znanja in zbiranja dokazov znanja na daljavo pri matematiki 51

MATEMATIKA SKOZI ZGODOVINO

dr. Marko Razpet
Babilonska tablica in pitagorejske trojice 57

Učimo se matematiko tudi na daljavo

Epidemija virusa Covid-19 je lani spomladi v trenutku postavila pred izzive poučevanje in učenje matematike na daljavo. V preteklih letih smo si nabirali izkušnje z izobraževanjem dijakov športnikov na daljavo, sedaj pa je bil celoten šolski sistem postavljen pred velik izziv velikih sprememb. Vsak učitelj je po najboljših močeh začel uporabljati različna interaktivna orodja in se povezovati s svojimi učenci. Postavljala so se vprašanja, kako učence čim bolj ohraniti v učni kondiciji, spremljati njihov napredek in kljub fizični razdalji doseči, da bodo usvojili čim več načrtovanih ciljev pouka matematike.

Kako ste učitelji poučevali, lahko preberete v analizi vprašalnika, na katerega so odgovarjali udeleženci seminarja Poučevanje in učenje matematike na daljavo. Skozi različne izvedbene modele pouka na daljavo smo si v zadnjih dveh šolskih letih izmenjavali izkušnje med seboj. Predstavljena sta dva primera načrtovanja in izvedbe različnih dejavnosti pri pouku matematike na daljavo, kjer učiteljici opisujeta, kako sta izvajali različne problemske naloge.

V času fizične razdalje med učitelji in učenci so še toliko bolj pomembni različni načini samopreverjanja pravilnosti reševanja matematičnih nalog. Predstavljeni so najbolj pogosti načini preverjanja pravilnosti pri matematiki in priporočilo, da je v pouk treba vključevati tudi poučevanje preverjanja, kjer je učenec sam sebi vir informaciji o pravilnosti rešene naloge.

Številski maraton kot dejavnost za preverjanje znanja nam ponudi izhodišče, da razmišljamo o dejavnosti maratona tudi pri drugih matematičnih vsebinah v kateremkoli razredu in tudi na drugih predmetnih področjih.

Papir kot didaktični material je velikokrat osnova za raziskovanje novih matematičnih lastnosti in pravil ter za reševanje matematičnih problemov. Pregibanje papirnatih trakov je lahko izhodišče za različne dejavnosti matematičnega preiskovanja, ki so opisane v nadaljevanju.

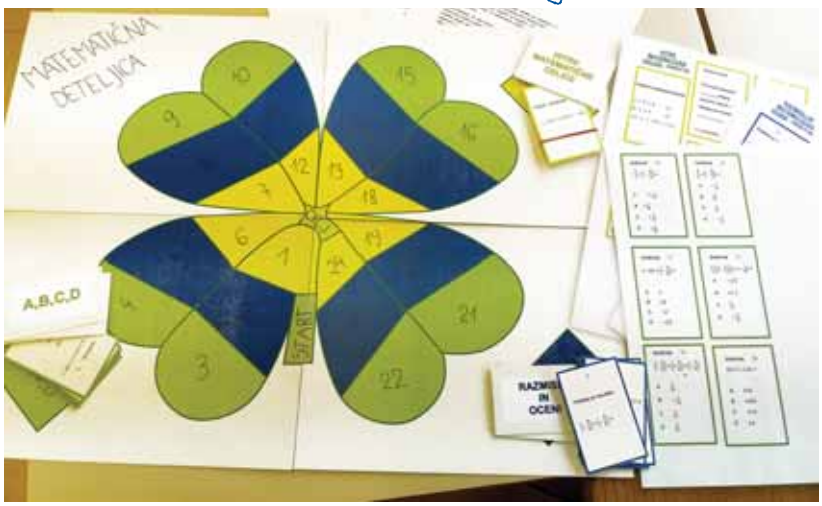
Ali je Pitagorov izrek res Pitagorov? Poznan je bil že veliko časa pred Pitagoro. Opisano je, na kakšen način na glineni babilonski tablici Plimton 322 pridemo do pitagorejskih trojic. Na koncu prispevka pa so dodane aktivnosti, ki jih lahko izvedemo z učenci pri pouku v osnovni in srednji šoli.

Vabljeni k branju. Če boste katero od dejavnosti izvedli v razredu, vabljeni k zapisu in objavi povratne informacije v naslednjih številkah revije.

Želim vam prijetne počitniške dni.

mag. Mateja SIRNIK, *odgovorna urednica*

Mateja Sirnik



Didaktična igra (Foto: Tatjana Kerin)

ISSN 1318-010X
MATEMATIKA V ŠOLI
letnik XXVII, številka 1, 2021

Izdajatelj in založnik: Zavod RS za šolstvo
Predstavnik: dr. Vinko Logaj

Odgovorna urednica: mag. Mateja Sirnik, Zavod RS za šolstvo
Uredniški odbor:
dr. Darja Antolin Drešar, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta,
dr. Andreja Drobnič Vidic, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko,
mag. Melita Gorše Pihler, Zavod RS za šolstvo,
mag. Valentina Herbaj, Ekonomska gimnazija in srednja šola Radovljica,
Silva Kmetič,
Sabina Kumer, Šolski center Krško – Sevnica,
dr. Zlatan Magajna, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta,
mag. Sonja Rajh, Zavod RS za šolstvo,
Simona Vreš, Gimnazija Ravne na Koroškem,
dr. Lucija Željko, Osnovna šola Dravlje,
dr. Herremans Adriaan, Universiteit Antwerpen, Belgija,
dr. Evgenia Sendova, Institute of Matematics and Informatics at the Bulgarian academy of Sciences, Bolgarija.

Jezikovni pregled: Katja Križnik Jeraj
Prevod izvlečkov in članka *Pregibanje papirja in učenje s preiskovanjem* v angleščino: Ensitra prevajanje, Brigita Vogrinec Škraba, s. p.
Urednica založbe: Andreja Nagode
Oblikovanje: Simon Kajtna
Ilustracije na str. 50: Davor Grgičević
Fotografije: avtorji člankov
Računalniški prelom: ABO grafika, d. o. o., zanj Igor Kogelnik
Tisk: Present, d. o. o.
Naklada: 510 izvodov

Prispevke pošljite na naslov:
Zavod RS za šolstvo, OE Kranj (za revijo Matematika v šoli), Kidričeva 53, 4000 Kranj, e-naslov: mateja.sirnik@zrss.si
Naročila: Zavod RS za šolstvo – založba, Poljanska cesta 28, 1000 Ljubljana, faks: 01/30 05 199, e-naslov: zalozba@zrss.si
Letna naročnina (2 številki): 22,00 EUR za šole in ustanove, 16,50 € za fizične osebe, 8,50 € za študente, dijake in upokojence. Cena posamezne številke v prosti prodaji je 13,00 EUR.

Revija Matematika v šoli je vpisana v razvid medijev, ki ga vodi Ministrstvo za kulturo, pod zaporedno številko 568. Revija je indeksirana in vključena v mednarodne baze podatkov: MathEduc – Mathematics Education Database, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik (ZDM), Co-operative Online Bibliographic System and Services (COBISS)

Priznanje avtorstva-Nekomercialno-Brez predelav

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Matematika v šoli, št. 1., letnik 27, 2021

Izzivi poučevanja na daljavo pri matematiki

Lidija Pulko in mag. Mateja Sirnik
Zavod RS za šolstvo

Izvleček

V prispevku predstavimo analizo vprašalnika, s katerim smo dobili vpogled v potek pouka matematike v času poučevanja na daljavo. Vprašalnik je bil izhodišče za izbiro vsebin osrednjega dela seminarja *Poučevanje matematike na daljavo*. Predstavimo objavljene modele poučevanja matematike na daljavo in izpostavimo nekaj dejavnosti, ki jih lahko izvedemo z učenci v živo ali na daljavo.

Ključne besede: pouk na daljavo, vprašalnik, modeli in dejavnosti za pouk

Challenges of Mathematics Distance Learning

Abstract

The paper presents an analysis of a questionnaire that was used to gain an insight into the course of Mathematics lessons during distance learning. The questionnaire was the starting point for selecting the contents of the core part of the seminar "Mathematics Distance Learning". The published models of Mathematics distance learning are presented and a few activities are highlighted which can be carried out with learners in person or at a distance.

Keywords: distance learning, questionnaire, models and activities for lessons

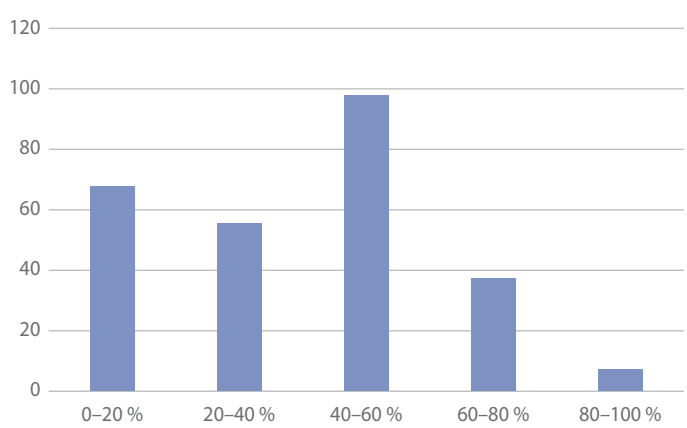
Uvod

V zadnjih dveh šolskih letih sta za nami dve daljši obdobji izobraževanja na daljavo. Opredelitev izobraževanja na daljavo je v literaturi veliko. Večina pri tem izhaja iz petih značilnih razlik, ki izobraževanje na daljavo ločujejo od običajnega izobraževanja, ki jih je leta 1990 opredelil Keegan:

- Učitelj in udeleženec sta pretežni del izobraževalnega procesa prostorsko in/ali časovno ločena (v nasprotju s klasičnim neposrednim izobraževanjem iz oči v oči).
- Za pripravo, organizacijo in izpeljavo izobraževanja je zadolžena določena organizacija (v nasprotju s samoizobraževanjem).
- Izobraževalni proces se izvaja z različnimi tehnologijami, ki premostijo oddaljenost obeh subjektov izobraževanja (v nasprotju s klasičnim izobraževanjem, kjer takšna tehnologija ni potrebna).
- Učna komunikacija je dvosmerna in omogoča udeležencu, da enakopravno posega v učni proces (v nasprotju s klasično enosmerno učno komunikacijo).
- Izobraževalni proces se izvaja individualno (v nasprotju s klasično razredno organizacijo).
- Možnost sodelovalnega učenja, kar omogoča uporabo sodobnih socialnih omrežij.

Analiza vprašalnika o poučevanju matematike na daljavo

V tem šolskem letu smo imeli tri izvedbe seminarja *Poučevanje matematike na daljavo*. Pred začetkom seminarja je 264 udeležencev odgovorilo na vprašalnik o poučevanju matematike na daljavo. Na vprašalnik je odgovorilo 220 učiteljev matematike v osnovnih šolah in 44 učiteljev matematike v srednjih šolah. Pri zbranih odgovorih, pri katerih je opazna razlika med odgovori skupine učiteljev, ki poučujejo v osnovi šoli, in odgovori učiteljev v srednješolskih programih, razliko v odgovorih navajamo.

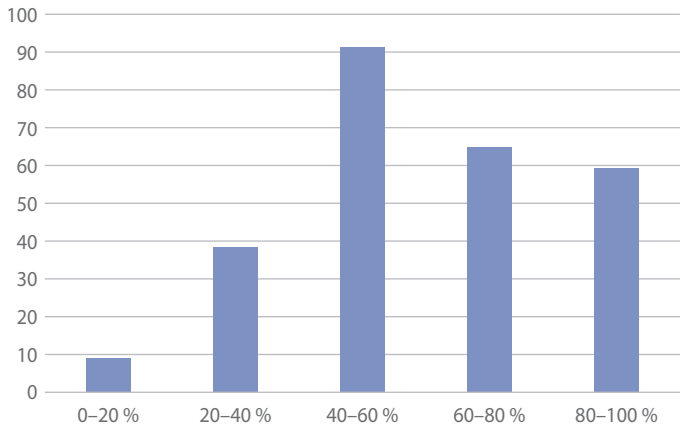


Graf 1: Delež asinhronega učenja.

Učenje je sestavljeno iz nesočasnega (asinhronega) in sočasnega (sinhronega) učenja. Učitelji v odgovorih navajajo delež posameznega učenja v poučevanju na daljavo.

Največ učiteljev (36,7 %) ocenjuje, da je delež asinhronega učenja med 40 in 60 % celotnega učenja. Opaziti je visok delež tistih, ki asinhronega učenja ne izvajajo (14 %). Frekvenco izbranih deležev prikazuje Graf 1.

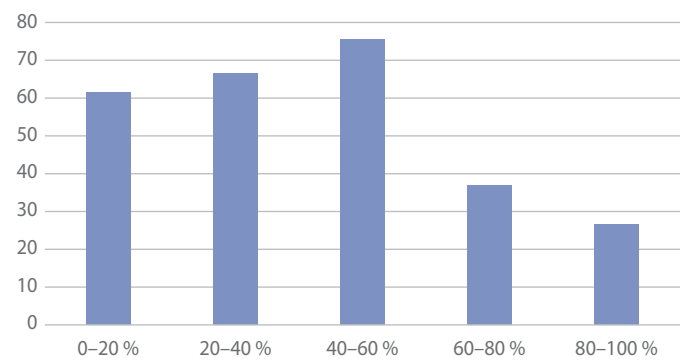
Za enak delež sinhronega učenja se je odločilo največ, to je 93 učiteljev (35,2 %). Podatke prikazuje Graf 2.



Graf 2: Delež sinhronega učenja.

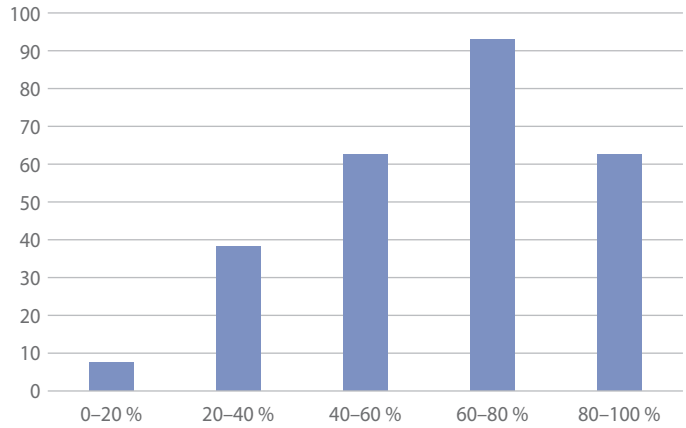
Podroben pogled v odgovore učiteljev, ki poučujejo v srednješolskih programih, kaže, da nobeden izmed učiteljev ni ocenil deleža asinhronega učenja nad 60 % in deleža sinhronega učenja pod 20 %. Odgovori učiteljev osnovne šole so razpršeni med vsemi ponujenimi vrednostmi.

Izbrani deleži med prevladujočimi dejavnostmi pri pouku kažejo, da je največkrat izbrana ocena deleža razlage pri dejavnostih 40–60 %. Delež je izbralo 76 učiteljev (28,8 %). Kot je razvidno iz Grafa 3, je veliko učiteljev ocenilo delež tudi do 40 %.



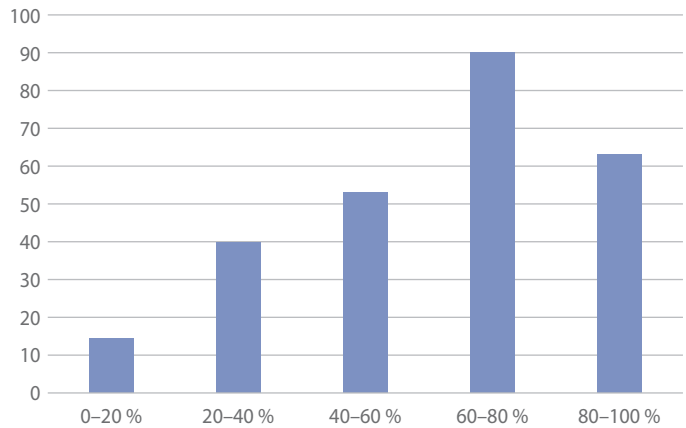
Graf 3: Delež razlage učnih vsebin.

Zastavljanje vprašanj in spodbujanje razprav je pri največ učiteljih (35,2 %) prisotno v visoko ocenjenem deležu med 60 in 80 %. Frekvence izbranih ocen prikazuje Graf 4.



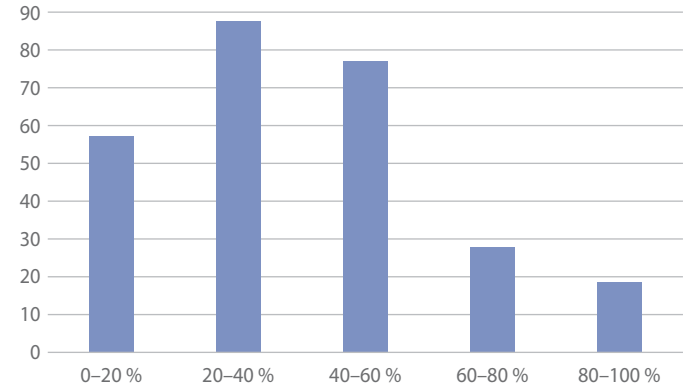
Graf 4: Delež postavljanja vprašanj in spodbujanja razprave.

Podobne podatke razberemo z Grafa 5, v katerem predstavljamo frekvence podanih ocen deležev z vizualizacijo podkrepljenih razlag.



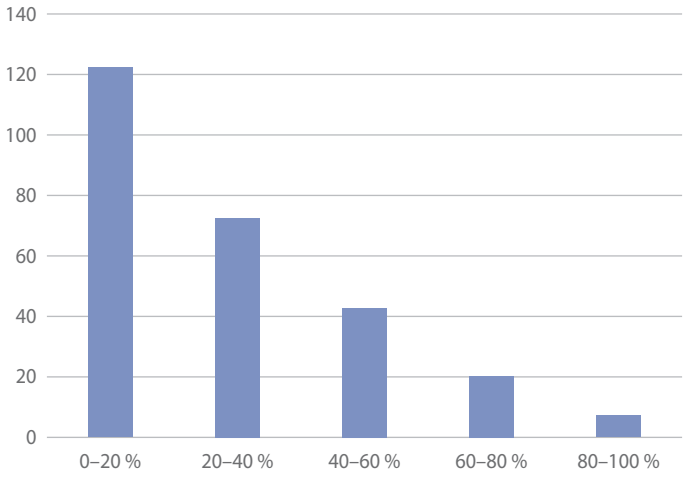
Graf 5: Delež vizualizacije razlage.

Med dejavnostmi pri pouku učenci naloge rešujejo tudi samostojno, učitelj je prisoten in nudi dodatno razlago ter pojasnila. Oceno deleža 20–40 % je izbralo 85 učiteljev (32,2 %). Frekvence izbranih deležev prikazuje Graf 6.



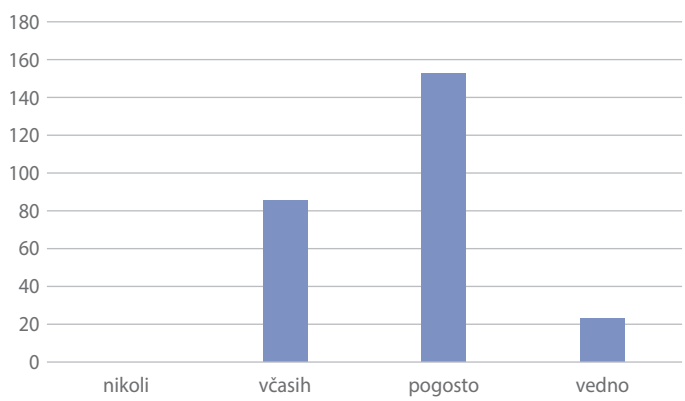
Graf 6: Delež samostojnega reševanja nalog.

Na Grafu 7 opazimo izstopajočo najpogostejšo izbiro ocene med 0 in 20 % deleža prisotnosti različnih oblik sodelovalnega učenja. Prav zaradi tega smo poudarek v vsebini seminarja namenile takim oblikam dela. Pripravile smo učne izkušnje, za katere smo želele, da so enostavno prenosljive na delo z učenci.

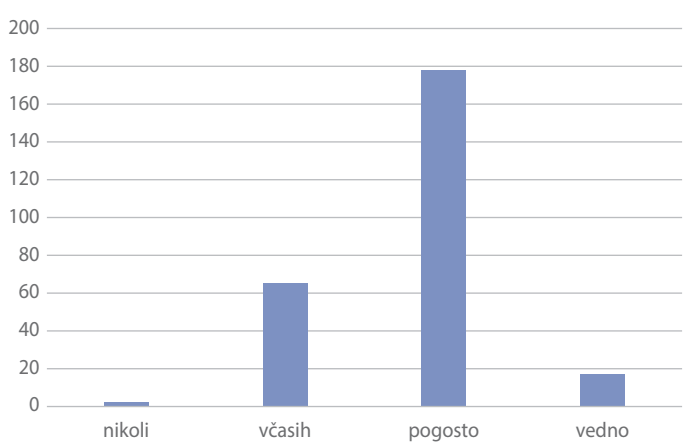


Graf 7: Delež različnih oblik sodelovalnega učenja.

Predstavljene podatke potrjujejo tudi odgovori na vprašanja o oblikah dela na daljavo. Opazimo zelo majhno zastopanost skupinske oblike dela, učenci največkrat delajo individualno. Največ učiteljev je na petstopenjski lestvici med »nikoli« in »vedno« izbralo stopnjo 2 pri zastopanosti skupinskega dela učencev in stopnjo 4 pri zastopanosti individualnega dela učencev. Naloge, ki jih učencem zastavljajo učitelji, terjajo različne miselne aktivnosti. Kar 58 % učiteljev je ocenilo, da je med miselnimi aktivnostmi pomnjenje pogosto prisotno. Frekvenco izbrane pogostosti prikazujemo na Grafu 8.



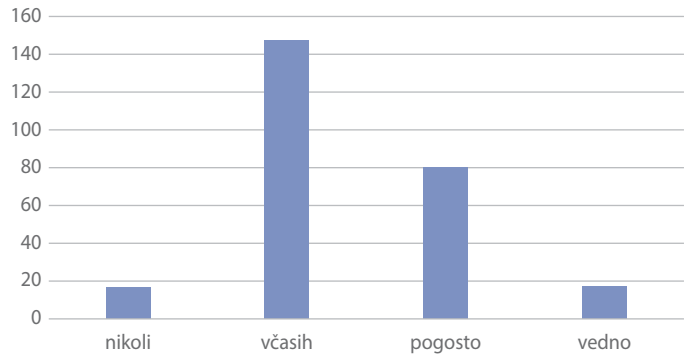
Graf 8: Pogostost prisotnosti pomnjenja kot miselne dejavnosti učencev.



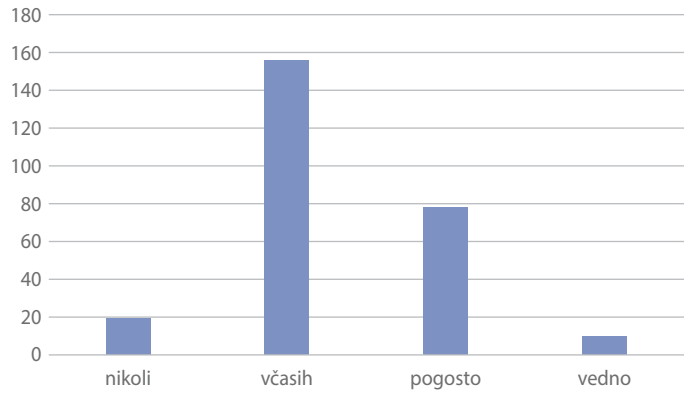
Graf 9: Pogostost rutinskega reševanja nalog.

Na Grafu 9 prikazujemo pogostost rutinskega reševanja nalog. Kar 179 učiteljev (67,8 %) je opisalo prisotnost rutinskega reševanja kot pogosto miselno aktivnost. Podobne podatke opazimo tudi pri pogostosti miselne aktivnosti razumevanja (izbira opisa »pogosto« pri 64 % učiteljev) in uporabe naučenega v novih situacijah (izbira opisa »pogosto« pri 58,7 % učiteljev).

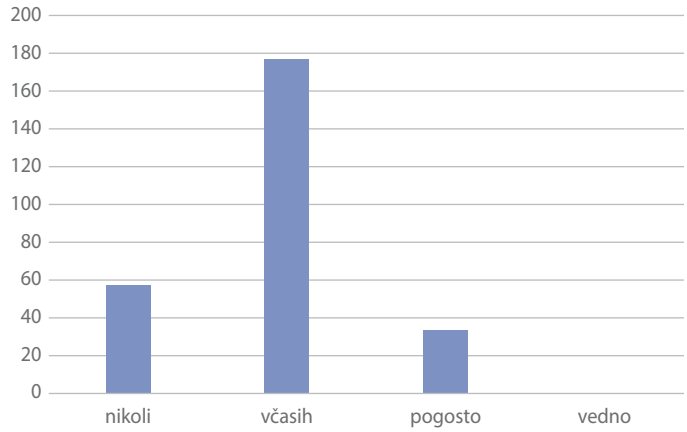
Redkeje je prisotna uporaba različnih virov, interpretacija in vrednotenje virov, podatkov ter postopkov, učenje s preiskovanjem in ustvarjalnost. Učitelji so najpogosteje za opis pogostosti teh miselnih aktivnosti izbrali opis »včasih«. Podatke predstavljamo na grafih 10, 11, 12 in 13.



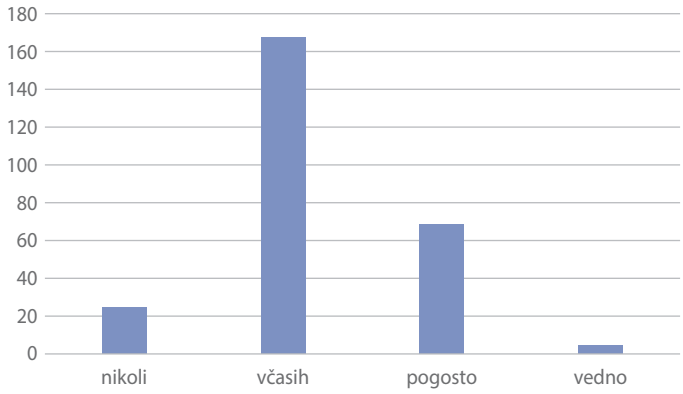
Graf 10: Pogostost uporabe različnih virov.



Graf 11: Pogostost interpretacije in vrednotenja (virov, podatkov, postopkov …).



Graf 12: Pogostost učenja s preiskovanjem.

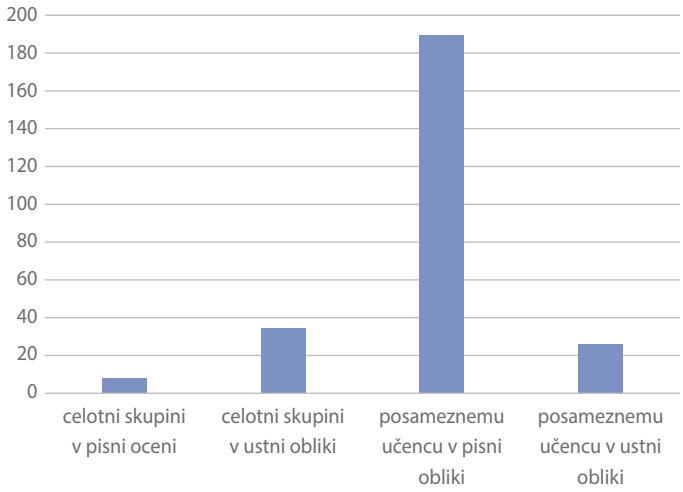


Graf 13: Pogostost ustvarjalnosti učencev pri pouku matematike.

Na podlagi zbranih podatkov smo se pri načrtovanju vsebinskega dela odločile predstaviti dejavnost preiskovanja v času poučevanja na daljavo.

V vprašalniku so učitelji med ponujenimi oblikami izbrali tri najpogostejša dokazila, s katerimi spremljajo napredek učencev. Izpolnjene učne liste kot dokazilo navaja 35,2 % učiteljev in povzetke predelane učne vsebine 12,5 %. Pogostost ostalih dokazil je manjša.

Učitelji povratno informacijo najpogosteje sporočajo posameznemu učencu v pisni obliki (72,3 % učiteljev). Odgovor je, glede na pogostost individualnega dela učencev, pričakovan. Frekvence odgovorov prikazuje Graf 14.



Graf 14: Način podajanja povratne informacije.

Zbrane podatke smo uporabile za prilagoditev vsebine in oblike dela na seminarju. Prilagojeni poudarki vsebin so učiteljem osvetlili pomen in uporabo teh vsebin. Z uporabljenimi oblikami dela so učitelji doživeli konkretno izkušnjo, se z obliko dela podrobneje seznanili in jo, upamo, kasneje prenesli v svojo pedagoško prakso.

Različne oblike zbiranja dokazov pri pouku matematike

Na seminarju so učitelji na forumu drug drugemu predstavili enega od dokazov o učenju učencev, za katerega so menili, da bi bil zanimiv za druge udeležence.

Učiteljica Tatjana Kerin iz Osnovne šole Leskovec pri Krškem je zapisala:

»Pri pouku na daljavo mi učenci pošiljajo vse dokaze o učenju (zapiske, naloge, plakate, izdelke, predstavitve, vrednotenje po kriterijih uspešnosti ...) v spletno učilnico, kjer jih po potrebi vrednotim, v vsakem primeru pa zapišem povratno informacijo.

Moji učenci so izkazovali znanje skozi raznovrstne izdelke:

7. razred – Ulomki – učenci so izdelali ***plakat, knjigo*** *in predstavili svoje znanje o ulomkih.*

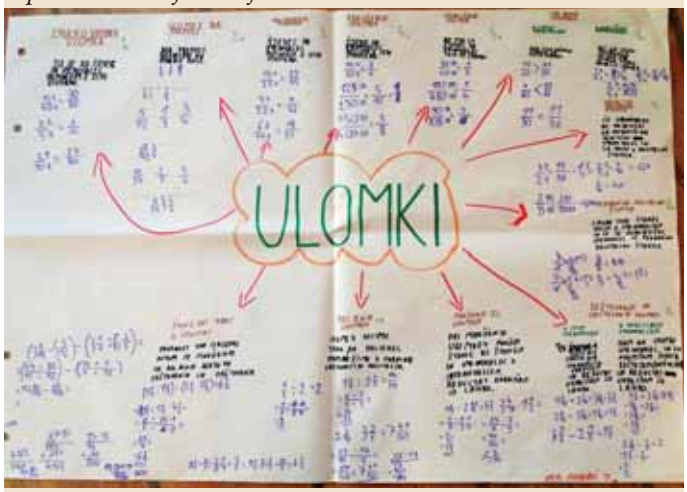


Foto: Tatjana Kerin

8. razred – Štirikotniki, izrazi z racionalnimi števili – učenci so izdelovali ***didaktične igre.***

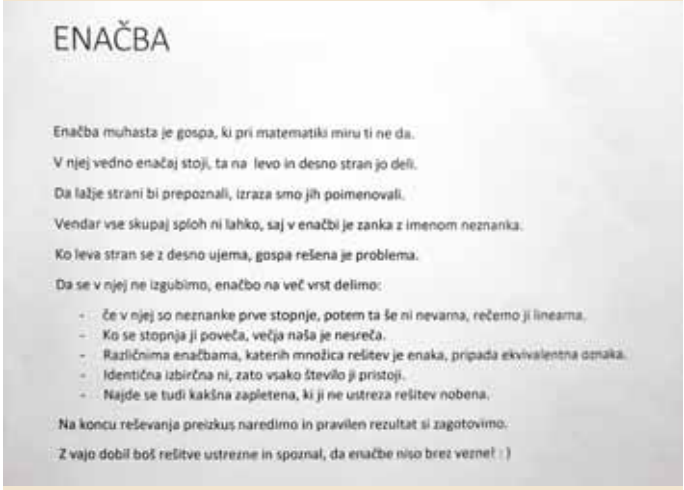
Foto: Tatjana Kerin

9. razred – Geometrijska telesa *– učenci so naredili* ***izdelek*** *iz geometrijskih teles (stavbe, hiše ...) in predstavili z narisanimi skicami, preračunali P in V ter postavili v življenjsko situacijo s preračunavanjem barve za pleskanje, prekrivanje strehe ... Izdelek so predstavili na ZOOM konferenci.*

Foto: Tatjana Kerin

Pogosto jim ponudim tudi preiskovalne naloge.

Preizkusili so se tudi v ***pisanju pisnih sestavkov****.«*



ENAČBA

Enačba muhasta je gospa, ki pri matematiki miru ti ne da.

V njej vedno enačaj stoji, ta na levo in desno stran jo deli.

Da lažje strani bi prepoznali, izraza smo jih poimenovali.

Vendar vse skupaj sploh ni lahko, saj v enačbi je zanka z imenom neznanka.

Ko leva stran se z desno ujema, gospa rešena je problema.

Da se v njej ne izgubimo, enačbo na več vrst delimo:

- če v njej so neznanke prve stopnje, potem ta še ni nevarna, rečemo ji linearna.
- Ko se stopnja ji poveča, večja naša je nesreča.
- Različnima enačbama, katerih množica rešitev je enaka, pripada ekvivalentna oznaka.
- Identična izbirčna ni, zato vsako število ji pristoji.
- Najde se tudi kakšna zapletena, ki ji ne ustreza rešitev nobena.

Na koncu reševanja preizkus naredimo in pravilen rezultat si zagotovimo.

Z vajo dobil boš rešitve ustrezne in spoznal, da enačbe niso brez veze! :)

Foto: Tatjana Kerin

Izvedbeni modeli

V spletnih učilnicah za matematiko so objavljeni izvedbeni modeli pouka matematike na daljavo za naslednje sklope:

- Ulomki v 6. razredu
- Racionalna števila – decimalni zapis v 6. razredu (Andreja Oder Grabner)
- Seštevanje in odštevanje ulomkov v 7. razredu
- Potence v 8. razredu
- Linearna enačba in neenačba v 9. razredu
- Valj v 9. razredu
- Koreni
- Kvadratna funkcija
- Racionalna funkcija
- Statistika
- Statistika II: (Andreja Drobnič Vidic)
- Realna števila (Andreja Pečovnik Mencinger)
- Eksponentna enačba in neenačba
- Logaritemska enačba in neenačba
- Trigonometrijska enačba in neenačba
- Definicija odvoda: (Rok Lipnik)

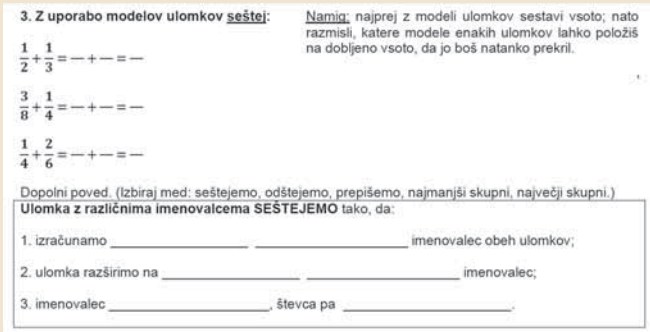
Modele lahko prilagodite stopnji izobraževanja, na kateri poučujete, tudi vrnitev v šolske klopi ni ovira za njihovo uporabo. Prav poimenovanje modela izraža njegovo bistvo: prenesete ga lahko na katerikoli sklop v učnem načrtu oz. katalogu znanja in po vzorčnem modelu oblikujete model, ki ustreza vam, vašim učencem in okoliščinam, v katerih poteka pouk.

Modeli so pripravljeni za celotne sklope, v njih so opisi dejavnosti od uvodnega preverjanja predznanja učencev do usvajanja vsebin, utrjevanja in preverjanja ter uporabe znanja. V modelih uporabljamo prosto dostopne i-učbenike, opisane so aktivnosti učitelja in učenca, zapisana navodila za učenca, na voljo so naloge za preverjanje znanja tako na začetku usvajanja novih vsebin kakor tudi skozi celoten sklop.

Učenci lahko v oblikovanih vprašalnikih ves čas spremljajo svoj napredek na poti usvajanja znanja, kar lahko spremlja tudi učitelj. Učitelj učencem podaja povratne informacije o dokazih učenja, ki jih oddajajo v dogovorjena odložišča. Z učenci organizira videosrečanja, jih vodi, da izvedejo preiskovalne aktivnosti, pripravijo in predstavijo ugotovitve preiskovanj. Učenci se samovrednotijo, povratne informacije podajajo tudi sošolcem in načrtujejo aktivnosti za izboljšanje znanja. Učenci v zanimivostih poiščejo odgovore na vprašanja, ki jih poraja njihova radovednost.

Poglejmo nekaj aktivnosti iz predstavljenih modelov

- **Dejavnost raziskovanja pravila za seštevanje ulomkov**



3. Z uporabo modelov ulomkov seštej:

Namig: najprej z modeli ulomkov sestavi vsoto; nato razmisli, katere modele enakih ulomkov lahko položiš na dobljeno vsoto, da jo boš natanko prekril.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{\ }{\ }+\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$

$\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{\ }{\ }+\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$

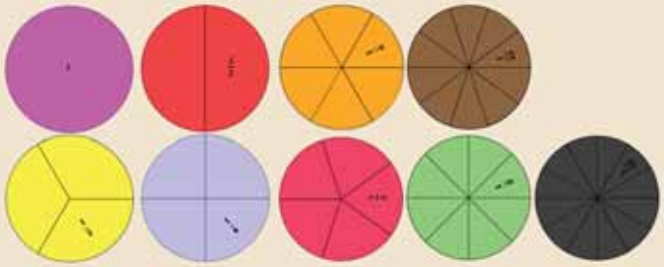
$\frac{1}{4}+\frac{2}{6}=\frac{\ }{\ }+\frac{\ }{\ }=\frac{\ }{\ }$

Dopolni poved. (Izbiraj med: seštejemo, odštejemo, prepišemo, najmanjši skupni, največji skupni.)

Ulomka z različnima imenovalcema SEŠTEJEMO tako, da:

1. izračunamo _____ _____ imenovalec obeh ulomkov;
2. ulomka razširimo na _____ _____ imenovalec;
3. imenovalec _____, števca pa _____.

Pri izvedbi uporabimo priložene modele ulomkov:



- **Primer utrjevanja iz linearne enačbe**

Metka je pravilno rešila enačbo. S pomočjo lističev je naredila uganko. Zapiši, kaj je zakrila tako, da bodo veljale vse enakosti.

$$
\begin{aligned}
7(\square - \square) &= -(-3x + 0{,}5) + (\square - \square) \\
7x - 14 &= 3x - 0{,}5 + 2{,}5 - 4x \\
7x + \square &= 2\ \square\ 14 \\
\square x &= 16 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

- **Primer navodil za dijake iz grafičnega reševanja eksponentnih enačb in neenačb**

Delo bo potekalo v skupini, v katero si razporejen. Preglej naloge, ki jih morate opraviti, razmisli, kako bi naloge reševal in se udeleži dela v skupini.

Ko boste rešili naloge, pripravite predstavitev nalog in vašega reševanja za sošolce, saj preostale skupine ne rešujejo enakih nalog.

Predstavitev oddajte na dogovorjeno mesto in preverite povratno informacijo o uspešnosti opravljenega dela ter v skladu z njo dopolnite ali popravite svojo predstavitev.

Predstavitev boste izvedli na naslednjem videokonferenčnem srečanju.

1. Narišite graf funkcije $f(x) = (\frac{1}{3})^x$.
2. S pomočjo grafa rešite enačbo: $(\frac{1}{3})^x = 9$. Odčitajte in zapišite rešitev enačbe.
3. Obravnavajte enačbo $(\frac{1}{3})^x = y$ tako, da zapišete ugotovitve, kako na rešitev enačbe vpliva y, če je y pozitivno število, če je $y = 0$ in če je y negativno število?
4. S pomočjo grafa rešite neenačbo: $(\frac{1}{3})^x > 9$. Odčitajte in zapišite rešitev neenačbe.
5. S pomočjo grafa rešite neenačbo: $(\frac{1}{3})^x < 9$. Odčitajte in zapišite rešitev neenačbe.

Za utrjevanje in samovrednotenje znanja v srednji šoli lahko uporabimo gradiva na portalu Jazon (https://jazon.splet.arnes.si/), ki so nastala pri projektu izobraževanja dijakov športnikov na daljavo.

Naloge na delovnih listih so sestavljene na treh zahtevnostnih ravneh. Označene so z različnimi barvami, in sicer:

rdeče	poznavanje pojmov, poznavanje in izvajanje postopkov
modro	uporaba in razumevanje pojmov ter postopkov
zeleno	povezovanje pojmov, reševanje in raziskovanje matematičnih in avtentičnih problemov

Za vsak tematski sklop so tudi zapisani kriteriji uspešnosti, ki naj bi jih dijak dosegel.

Zaključek

Zaključimo lahko, da ste učitelji matematike v tem času pouka na daljavo razvili raznolike kakovostne modele poučevanja na daljavo. Med seboj ste si delili izkušnje in primere poučevalnih praks ter s tem omogoči učencem, da so napredovali in nadgradili matematično znanje in uporabo digitalne tehnologije glede na svoje zmožnosti.

Viri in literatura

Interno gradivo iz seminarja *Poučevanje in učenje matematike na daljavo*

Interno gradivo iz spletnih učilnic za matematiko v osnovni šoli, gimnaziji in PSI

Keegan, Desmond (1990). *Foundations of distance education*. Routledge. London and New York; dostopno 19. 5. 2021: https://jazon.splet.arnes.si/

Učenčevo (samo)preverjanje pravilnosti reševanja nalog pri matematiki

Dr. Adrijana Mastnak
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

Eden izmed pomembnih ciljev učiteljev, ki želijo samostojne in odgovorne učence, je, da pri učencih razvijajo spretnost samopreverjanja pravilnosti reševanja nalog. Do sedaj ni veliko znanega o tem, katere vire informacij učenci pri procesu preverjanja uporabljajo. Temeljni namen prispevka je torej predstaviti učenčeve načine preverjanja pravilnosti reševanja nalog, kar nam bo pomagalo bolje razumeti učenčev proces samospremljanja pri reševanju nalog ter pri učencih razvijati pomembne elemente pri oblikovanju točne ocene lastnega znanja.

Ključne besede: samopreverjanje pravilnosti reševanja nalog, povratna informacija, samospremljanje, samoregulacija

Student Self-Checking the Correctness of Task-Solving in Mathematics

Abstract

A student self-checking the correctness of the solved mathematical tasks should be the central goal of primary school teachers who wish to foster responsible learners. However, there is not enough evidence about which information sources the students use in this process. Finding out more about the basis of their self-assessment (that is, the sources of information the students use) after doing mathematical tasks, would be helpful in understanding the students' self-monitoring processes and would help the students to become better self-assessors of their mathematical knowledge.

Keywords: checking the correctness of task-solving, feedback, self-monitoring, self-regulation

Uvod

Ena izmed pomembnih usmeritev pri oblikovanju sodobnega pouka je podpiranje razvoja mladih v samostojne vseživljenjske učence ter nudenje pomoči pri razvijanju ključnih kompetenc, med njimi tudi kompetence učenje učenja (European Communities, 2007). Razvijanje kompetence učenje učenja je poudarjeno tudi v Učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli (2011), kjer so avtorji med splošnimi cilji zapisali, naj učitelj matematike poleg razvijanja matematične kompetence, ki je pri pouku matematike najbolj poudarjena, spodbuja razvoj še drugih kompetenc, med njimi tudi kompetenco učenje učenja. V didaktičnih priporočilih razvijanja kompetence učenje učenja je v Učnem načrtu za matematiko v osnovni šoli (2011, str. 75) napisanih nekaj dejavnosti, ki naj bi jih bili učenci pri pouku deležni. Pri tem bi kot pomembno izpostavili, da naj bi učenci spremljali, usmerjali in evalvirali lastni proces učenja ter se samonadzirali pri delu. Kompetenca učenje učenja tako pomembno vpliva na razvoj učenčeve zavesti o lastnem učnem procesu in potrebah ter pomaga pri oblikovanju realne slike o svojem znanju. Več avtorjev (npr. Andrade, 2010; Yan in Brown, 2016) poudarja, da so učenci lahko sami sebi vir informacij o lastnem znanju. Pri tem imajo pomembno vlogo učenčeve samoregulativne in metakognitivne spretnosti, saj vključujejo učenčevo zmožnost učinkovitega samospremljanja pri učenju. Ta postaja še posebej pomembna v trenutnih razmerah izobraževanja na daljavo, ko je učencem takojšna (zunanja) povratna informacija o uspešnosti reševanja neke naloge, razumevanju nekega matematičnega koncepta še toliko težje dosegljiva. V teoretičnem delu prispevka bomo umestili pomen poznavanja in razvijanja različnih načinov (samo)preverjanja pravilnosti reševanja nalog v učni proces, z izsledki empirične raziskave pa predstavili sedanje stanje uporabe načinov (samo)preverjanja pravilnosti reševanja nalog in utemeljili pomembnost uvajanja novih.

(Samo)preverjanje kot del učenčeve samoregulacije učenja

Samoregulacijsko učenje je proces, pri katerem si učenci postavljajo učne cilje in poskušajo spremljati, uravnavati in nadzirati svoje vedenje, motivacijo ter znanje z namenom doseganja zastavljenih učnih ciljev (Andrade, 2010). Samoregulacijo učenja avtorji naj-

pogosteje razlagajo z behaviorističnega in socialnokognitivnega pogleda. Med ključnimi procesi samoregulacijskega procesa behavioristi navajajo učenčevo spremljanje samega sebe, samopoučevanje s pisnimi ali ustnimi navodili, ki si jih daje učenec, samovrednotenje na osnovi primerjave lastnega dosežka z določenim standardom in samoojačevanje (Pečjak in Košir, 2002). S socialnokognitivnega pogleda pa je najbolj znan Zimmermanov (1998) krožni model samoregulacijskega učenja, ki je sestavljen iz treh faz: predhodno razmišljanje, izvedba in zavestna kontrola ter samorefleksija. Predhodna faza predstavlja fazo priprave na učenje in vključuje učenčevo postavljanje učnih ciljev, prepričanja o lastni učinkovitosti, načrtovanje izbire strategij, metod učenja ipd. Faza izvedbe in zavestne kontrole poteka med samim učenjem in med drugim vključuje tudi spremljanje samega sebe, pri čemer učenec pridobiva povratne informacije o lastnem napredovanju. Pri pouku matematike učenec najpogosteje zbira informacije o svoji učni uspešnosti preko reševanja nalog. V fazi izvedbe učenec spremlja in vrednoti, kako uspešen je pri reševanju naloge, ki jo rešuje. V fazi samorefleksije pa učenec ovrednoti lasten dosežek, končni izdelek, premisli o optimalnih strategijah učenja in pripisuje uspešnost različnim dejavnikom (atribucije). V ožjem pomenu, npr. pri reševanju neke naloge, učenec v slednji fazi ovrednoti uspešnost reševanja naloge. To doseže s (samo)preverjanjem pravilnosti reševanja naloge. Pogosto učenec (samo)preverjanje izvaja že v fazi reševanja naloge, medtem ko se samospremlja. (Samo)preverjanje je torej metakognitivna spretnost znotraj samoregulativnega učenja, pri kateri učenec išče nase usmerjene povratne informacije o pravilnosti reševanja naloge. Te so lahko iz zunanjega vira ali pa je vir učenec sam. Pri slednjem bomo v prispevku uporabljali izraz samopreverjanje. Samopreverjanje je prav tako del učenčevega samospremljanja pri reševanju naloge (Yan in Brown, 2016) in samorefleksije po reševanju naloge (Hacker, Bol, Horgan in Rakow, 2000). Pri tem pa mora imeti učenec tako znanje o nalogi kot znanje o nadzoru učnega procesa (S. Pečjak, 2012b). Znanje o nalogi vključuje znanje o kriterijih in standardih. Učenec mora vedeti, katera so ključna znanja (kriteriji), ki jih mora pri nalogi pokazati, ter na kateri stopnji jih dosega (standard). Znanje o nadzoru pa vključuje tudi samoregulacijske strategije spremljanja, ki naj bi jih učenec med učenjem uporabljal. Med njimi S. Pečjak (2012b) navaja samotestiranje (oz. samopreverjanje) kot strategijo, pri kateri učenec preverja, ali napreduje v pravi smeri reševanja naloge.

Pomen uporabe strategije samopreverjanja v učnem procesu

Kurnaz in Cimer (2010) sta proučevala strategije, ki učencem povedo, da so se nekaj naučili. Ena izmed glavnih strategij, ki jo navajata, je, da se učenci samopreverijo. Pri tem učenci kot kriterij uspešnosti uporabljajo število pravilnih odgovorov pri nalogah ter zahtevnost nalog, ki jih uspejo rešiti. Bolj zahtevne naloge učenec reši, bolje zna učno vsebino. Podobne kriterije navaja tudi Yildiz s sod. (2006, v Kurnaz in Zimmer, 2010). Učencu zmožnost samopreverjanja tako lahko pomaga pri **oblikovanju realne slike o lastnem znanju** oz. pri bolj **točni samooceni uspešnosti reševanja nalog** (Kostons, van Gog in Paas, 2012). Ta pa je nadalje pomembna za učenčev **napredek v znanju**. Učenci se namreč lahko v kontekstu samoregulativnega učenja učijo učinkovito le, če imajo točno predstavo o svojem znanju (Raaijmakers idr., 2017). Tudi Hattie (2009) v svoji metaanalizi dejavnikov, ki vplivajo na učno učinkovitost učencev, navaja visok učinek učenčeve samoevalvacije in srednje velik učinek spremljanja na **učno učinkovitost učencev**. Če povzamemo, učencu sposobnost samopreverjanja pomaga učiti se učinkovito, imeti bolj točno predstavo o lastnem znanju ter postati **neodvisen vseživljenjski učenec** (Ramdass in Zimmerman, 2008).

Viri informacij v procesu (samo)preverjanja

Da učenci vedo, kako dobro znajo ali kako uspešno so rešili neko nalogo, morajo dobiti povratno informacijo. Hattie in Timperley (2007) opredelita povratno informacijo kot informacijo, ki jo nudi neko sredstvo (učitelj, vrstnik, knjiga, lastne izkušnje) in se nanaša na vidik učenčevega razumevanja učne vsebine ali uspešnosti pri reševanju nalog. Učenec tako pri preverjanju uspešnosti reševanja naloge uporablja svoje lastne (notranje) in zunanje vire povratnih informacij (Andrade, 2010) o kriterijih in standardih, ki so pri reševanju neke naloge pomembni. Pri (samo) preverjanju imajo še posebej pomembno vlogo učenčevi notranji viri povratnih informacij (Andrade, 2007). Težko je namreč doseči, da bi učitelj učencem ves čas podajal sprotno povratno informacijo o uspešnosti reševanja nalog. V tem kontekstu Heritage (2009, v van der Meer, 2012) opredeli notranjo povratno informacijo kot učenčevo sposobnost spremljanja lastnega razumevanja ali uspešnosti pri reševanju nalog s čim manj učiteljevega vodenja. Da pa učenec to lahko doseže, mora učitelj to sposobnost pri učencu tudi razvijati. Učencu je treba jasno predstaviti ključna znanja pri nalogi, da ve, kdaj je naloga pravilno rešena, ter ga naučiti, kako lahko sam preveri pravilnost rešene naloge. Ko učenci prvič rešujejo neko nalogo, še namreč nimajo ponotranjenega standarda, ki bi jim povedal, ali je naloga pravilno rešena (Raaijmakers idr., 2017), prav tako nimajo razvitih mehanizmov, s katerimi bi si pomagali, da preverijo pravilnost rešene naloge brez zunanjega vira (npr. podanih rešitev naloge).

Poučevanje samopreverjanja pravilnosti reševanja nalog

Več raziskav je pokazalo, da so učenci pogosto neuspešni pri preverjanju rešitev nalog oz. pri prepoznavanju napak v nalogah (Montague, Enders in Dietz, 2011; Pennequin, Sorel, Nanty in Fontaine, 2010). Garcia, Betts, Gonzalez-Castro, Gonzalez-Pienda in Rodriguez (2016) so v svoji raziskavi ugotavljali, katere samoregulacijske strategije učenci 5. in 6. razreda uporabljajo pri reševanju matematičnih problemov. Ugotovili so, da učenci najredkeje in najmanj učinkovito uporabljajo strategije v zadnji fazi samoregulacije, to je preverjanje in popravljanje napak pri reševanju nalog. Tudi S. Okita (2004) pravi, da učenci sami po sebi niso nagnjeni k samopreverjanju rešene naloge. Učence je treba torej spodbujati k samopreverjanju pravilnosti reševanja naloge ter jih tudi naučiti, kako so lahko pri tem učinkoviti. S. Pečjak (2012b) pravi, da je več raziskav pokazalo, da se metakognitivne sposobnosti, med njimi tudi samopreverjanje, najbolj intenzivno razvijajo med otrokovim 12. in 14. letom, zato naj bi učitelji učencev v višjih razredih osnovne šole zavestno in sistematično vključevali poučevanje teh sposobnosti.

Onu s sodelavci (2012) pravi, da je uporaba **učitelja kot modela metakognitivnega obnašanja** ena izmed najboljših tehnik razvijanja metakognitivnih strategij pri učencih. Učence torej lahko učitelj uči samopreverjanja pravilnosti rešene naloge tako, da jim modelira pri konkretni nalogi, kako se lahko samopreverijo. Pri modeliranju učitelj razmišlja na glas in s tem učenca usmerja v metakognitivno razmišljanje. Pogosta strategija, ki jo pri tem uporablja, je tudi **metakognitivno samospraševanje** (Pečjak, 2012a).

Zimmerman, Moylan, Hudesman, White in Flugman (2011) so učili učence pri pouku matematike samoregulativnih spretnosti. Pri tem so se osredotočili na učenje **prepoznavanja napak v matematičnih nalogah ter uporabo te povratne informacije** za nadaljnje učenje. Učence so učili tako, da jim je učitelj najprej modeliral različne tehnike prepoznavanja napak v matematičnih nalogah, nato pa so učenci individualno in v skupinah vadili prepoznavanje in popravljanje napak v nalogah. Učenci so na ta način izboljšali spretnost samopreverjanja. Tudi S. Okita (2004) je v svoji raziskavi uporabila računalniško orodje, ki izhaja iz ideje, da učenci običajno niso nagnjeni k temu, da bi pravilnost rešenih nalog preverjali, so pa zelo motivirani za iskanje napak pri nalogah, ki so jih rešili sošolci. Učenci, ki so bili vključeni v raziskavo, so se s pomočjo računalniškega orodja učili iskati napake v matematičnih nalogah, kar jim je nato pomagalo, da so znali spremljati in preverjati pravilnost nalog, ki so jih rešili sami.

Pri matematičnih nalogah se običajno, za razliko od nalog pri drugih predmetih, da ugotoviti pravilnost reševanja/rešitve naloge s premislekom, brez zunanjih virov, vendar pa je tovrstna znanja pri učencih treba razviti. Predvsem lahko učence naučimo samopreverjanja pravilnosti reševanja naloge, ki vključuje učenčevo poznavanje postopka (npr. pisno množenje dveh števil). Uberti, Mastropieri in Scruggs (2004) so v svoji raziskavi pri učencih spodbujali reševanje in samopreverjanje pri nalogi **s kontrolnimi listami**. Kontrolne liste vsebujejo seznam ključnih kriterijev, elementov v nalogi, ki jih je treba doseči. V zaključni fazi tako kontrolna lista vključuje seznam opravil za samopreverjanje pravilnosti rešenih nalog (npr. preveril sem pravilnost rešitve enačbe, preveril sem smiselnost rešitve v kontekstu naloge, zapisal sem odgovor). Pomembno vprašanje pri tem pa je, kako je učenec preveril pravilnost rešitve naloge (npr. pravilnost rešitve enačbe). V kontrolnih listah smo lahko pozorni tudi na ta element. Pri preverjanju pravilnosti rešitve enačbe naredimo preizkus, s katerim preverimo, ali z dobljeno vrednostjo enačbe dosežemo, da je leva stran enačbe enaka desni. Tudi pri geometrijski nalogi (npr. načrtovanje trikotnika) lahko učenca naučimo, da si zastavi vprašanja, ki vključujejo ključne kriterije samopreverjanja pravilnosti nastale geometrijske konstrukcije. Učenec se na primer lahko vpraša, ali je uporabil le dovoljene konstrukcijske postopke, katero geometrijsko dejstvo (izrek) pojasnjuje pravilnost konstrukcije, kako lahko preveri pravilnost konstrukcije (preveri z merjenjem dolžin stranic trikotnika, velikostjo kotov). V teh vprašanjih učencu ekspliciramo kriterije, torej ključna znanja, ki jih mora naloga vključevati ter jih spomnimo, da preveri, ali so uspešno prikazana v nalogi.

Tudi Keeley in Tobey (2011) navajata nekaj primerov tehnik, s katerimi učence učimo samopreverjanja pravilnosti reševanja nalog. Predvsem je pomembno, da učenci s temi tehnikami utrjujejo spretnost samopreverjanja, učitelj pa učencem modelira ključne kriterije pri nalogah, ki jih rešujejo. Poznavanje le-teh je namreč pomemben element pri preverjanju pravilnosti rešene naloge.

Prva izmed tehnik, ki jo Keeley in Tobey (2011) predstavljata, je **skupinsko popravljanje z namigi** (»CCC: Collaborative clued corrections«). Pri tej tehniki učitelj izbere nekaj izdelkov učencev in jih pregleda. Med izdelki izbere tiste, ki vsebujejo tipične napake, na katere želi učitelj opozoriti. Za pregledane izdelke učitelj poda namige in komentarje ter jih razdeli učencem za pregled izdelka v skupini. Učenci prediskutirajo izdelek in raziščejo učiteljeve namige. Po končanem skupinskem pregledu izdelka vsak učenec pregleda in popravi še svoj izdelek. Druga tehnika je **pregled s podajanjem komentarjev** (»Comments-only marking«). Pri tej tehniki učitelj pregleda učenčev izdelek in mu poda povratno informacijo. Povratna informacija se pri tem nanaša na:

- komentar o doseganju kriterijev uspešnosti: pri tej nalogi si pokazal, da znaš …;
- nejasnost postopka: podal si pravilne odgovor, a ni razumljiv postopek, kako si prišel do rešitve;
- napako pri računanju: poišči in popravi računsko napako;
- uporabo matematične terminologije: uporabil si napačen matematični termin. Lahko uporabiš drugega?;
- število pravilnih odgovorov: pravilno si odgovoril na (št.) nalog. Določi, katere naloge so rešene pravilno in katere napačno. Napačno rešene naloge popravi.

Učenec mora pri tej tehniki znati interpretirati in uporabiti učiteljevo povratno informacijo. Tretja tehnika, ki jo predstavljata Keeley in Tobey (2011) pa je **vnaprejšnja povratna informacija** (»FFF - Feedback to feed-forward«). Ta tehnika se uporablja kot nadaljevanje tehnike »Comments-only marking«. Učenci premislijo, kako bodo uporabili učiteljevo povratno informacijo, da popravijo svoj izdelek. Pri tem si pomagajo tako, da odgovorijo na vprašanja na listu (Slika 1).

Kako bom povratno informacijo uporabil pri pregledu svojega izdelka?	*Kako mi bo ta povratna informacija pomagala izboljšati moj naslednji izdelek?*
1. Kaj mi povratna informacija pove? 2. Pri svojem izdelku želim popraviti (seznam stvari, ki jih želim popraviti): 3. Česa pri povratni informaciji ne razumem (napiši in nato vprašaj osebo, ki ti je podala povratno informacijo, da ti jo bolj jasno razloži).	1. Del povratne informacije, ki ga lahko uporabim, ko bom reševal naslednjo nalogo, je … 2. Povratno informacijo si bom zapomnil, ko bom reševal naslednjo nalogo s tem, da bom …

Slika 1: Primer lista za tehniko FFF (Keeley in Tobey, 2011, str. 91).

Četrta tehnika, ki jo Keeley in Tobey (2011) podajata kot primer učenja samopreverjanja, je **vrstniška povratna informacija** (»Peer to peer focused feedback«). Pri tej tehniki se z učenci najprej pogovorimo o kriterijih uspešnosti, nato učenci rešijo nalogo ter odgovorijo na prvo vprašanje na listu (Slika 2). Učenci si zamenjajo izdelke za pregled, ob pregledu sošolčevega izdelka učenec odgovori na preostali dve vprašanji na listu ter popravi svoj izdelek na osnovi vrstniške povratne informacije.

Vrstniška povratna informacija

Ime in priimek: _____

1. Kateri so kriteriji uspešnosti?

   Pregledovalec: _____

2. Kateri kriteriji so pri nalogi doseženi? Napiši konkretne primere iz naloge, ki kažejo, da so kriteriji doseženi.
3. Kateri kriteriji v nalogi niso doseženi? Podaj mi predloge, ki mi bodo pomagali popraviti nalogo pri pregledu.

Slika 2: Primer lista za tehniko vrstniška povratna informacija (Keeley in Tobey, 2011, str. 152).

Vpogled v prakso (samo)preverjanja pravilnosti reševanja nalog z empirično raziskavo

Vpogled v prakso (samo)preverjanja pravilnosti reševanja nalog predstavljamo z rezultati empirične raziskave, izvedene v letu 2017. V raziskavo smo vključili 164 učencev 7. razreda iz štirih priložnostno izbranih osnovnih šol.

V raziskavi smo ugotavljali učenčeve vire informacij za ugotavljanje pravilnosti reševanja nalog. Zanimalo nas je, kako učenci najpogosteje ugotavljajo, ali so nalogo pravilno rešili ter kateri načini preverjanja pravilnosti reševanja nalog se jim pri tem zdijo najpomembnejši, da vedo, kako dobro znajo učno vsebino. Pri tem nas je tudi zanimala povezanost med pogostostjo in pomembnostjo posameznih načinov ter učenčeva prepričanost v pravilnost reševanja nalog, če učenec ne dobi povratne informacije o pravilnosti reševanja iz zunanjega vira.

Podatke smo zbrali z anketiranjem. Učenci so po obravnavi izpolnili anketni vprašalnik o učenčevih mehanizmih za samoocenjevanje, ki je vključeval tudi krajše preverjanje znanja s štirimi nalogami iz obravnavane učne vsebine. V nadaljevanju predstavljamo del rezultatov vprašalnika, ki se navezuje na naša raziskovalna vprašanja. Rezultati, ki jih predstavljamo, so namreč del nekoliko obsežnejše raziskave. Raziskava je bila kvantitativna, naredili smo osnovne statistične izračune opisne in inferenčne statistike. Vsi učenci niso odgovorili na vsa vprašanja v vprašalniku. V preglednicah so prikazani rezultati učencev, ki so na posamezno vprašanje oz. trditev pri vprašanju odgovorili.

Načini ugotavljanja pravilnosti reševanja nalog

Učencem smo zastavili deset trditev (T1 ... T10 v Preglednici 1) o možnih načinih preverjanja pravilnosti reševanja nalog. Na 4-stopenjski ocenjevalni lestvici (1 - nikoli, 2 - redko, 3 - občasno, 4 - pogosto) so morali oceniti, kako pogosto pri pouku matematike preverijo pravilnost rešitve naloge na naveden način.

Iz Preglednice 1 je razvidno, da največji delež učencev zaznava, da pri pouku matematike pogosto preverijo pravilnost rešitev nalog tako, da jim učiteljica pove rešitve/rezultate nalog. Ostale načine preverjanja rešitev nalog (razen zadnjega navedenega) ocenjujejo učenci v največjem deležu kot občasno ali redko uporabljene. Največji delež učencev zaznava kot občasne načine samopreverjanje s ponovnim pregledom naloge ali s pregledom rešitev v učbeniku. Prav tako največji delež učencev zaznava, da si občasno preverijo rešitve tako, da sami vprašajo učiteljico, ali so nalogo pravilno rešili, ali pa jim naloge preveri učiteljica in popravi v njih napake. Učenci v največjem deležu zaznavajo kot redko in kot občasno uporabljen način ta, da učiteljica označi naloge, v katerih so napake. Učenci kot redke načine zaznavajo to, da učiteljica pregleda naloge in v njih označi napake, ali pa pri nalogi napiše, kaj ima učenec prav/narobe, ter da učenec rešitve nalog primerja s sošolci. Malo več kot polovica učencev pa zaznava, da učiteljica učencem ne točkuje/oceni naloge. Ta način je največji delež učencev ocenil, da ga nikoli ne uporabijo za preverjanja rešitev nalog.

Preglednica 1: Pogostost posameznih načinov preverjanja pravilnosti reševanja nalog pri pouku matematike.

Nalogo preverim tako, da...	N	1 f f %	2 f f %	3 f f %	4 f f %
T1 ... nam učiteljica pove rešitve/rezultate nalog.	133	8 4,9	19 11,6	47 28,7	**59** **36,0**
T2 ... se sam preverim s tem, da rešim nalogo ponovno oz. si jo pregledam.	133	11 6,7	35 21,3	**50** **30,5**	37 22,6
T3 ... rešitve nalog preverim tako, da pogledam rešitve, rezultate nalog v učbeniku.	134	24 14,6	27 16,5	**45** **27,4**	38 23,2
T4 ... rešitve/rezultate nalog primerjam s sošolci.	134	24 14,6	**42** **25,6**	38 23,2	30 18,3
T5 ... mi učiteljica pregleda naloge in označi napake v nalogah.	136	19 11,6	**53** **32,3**	42 25,6	22 13,4
T6 ... sam vprašam učiteljico, ali sem nalogo pravilno rešil.	133	29 17,7	42 25,6	**47** **28,7**	15 9,1
T7 ... mi učiteljica označi naloge, v katerih so napake.	134	33 20,1	**41** **25,0**	**41** **25,0**	19 11,6
T8 ... mi učiteljica pregleda naloge in popravi napake v nalogah.	135	36 22,0	36 22,0	**48** **29,3**	15 9,1
T9 ... mi učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa pri nalogi še ne znam.	134	35 21,3	**46** **28,0**	36 22,0	17 10,4
T10 ... nam učiteljica točkuje/oceni naloge.	133	**62** **37,8**	32 19,5	24 14,6	15 9,1

Zanimalo nas je tudi, kako močno učencem navedeni načini preverjanja pravilnosti reševanja naloge pomagajo, da vedo, ali je naloga pravilno rešena. Učenci so stopnjo pomoči za posamezen način preverjanja ocenili na 4-stopenjski ocenjevalni lestvici ocenili (1 - sploh mi ne pomaga, 2 - malo mi pomaga, 3 - mi pomaga, 4 - zelo mi pomaga).

Preglednica 2: Pomembnost posameznih načinov preverjanja pravilnosti reševanja nalog pri pouku matematike.

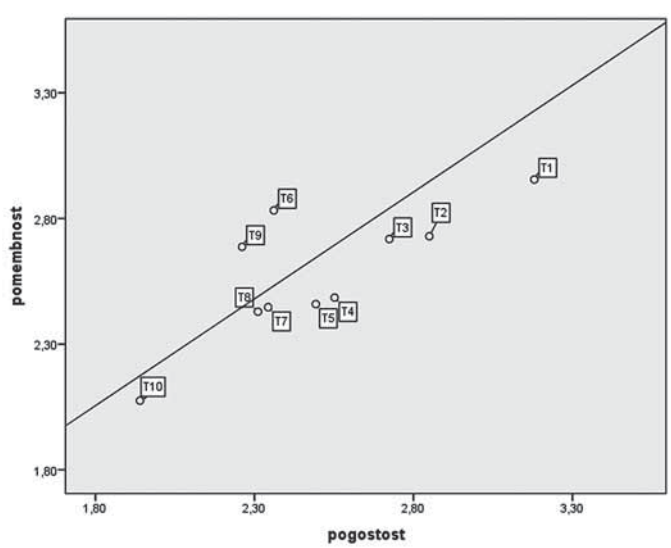
Kako močno mi pomaga, da vem, ali je naloga pravilno rešena, če...	N	1	2	3	4
		f f %	f f %	f f %	f f %
T1 ... nam učiteljica pove rešitve/rezultate nalog.	133	12 7,3	25 15,2	**53** **32,3**	43 26,2
T2 ... se sam preverim s tem, da rešim nalogo ponovno oz. si jo pregledam.	133	11 6,7	42 25,6	**52** **31,7**	28 17,1
T3 ... rešitve nalog preverim tako, da pogledam rešitve, rezultate nalog v učbeniku.	134	21 12,8	29 17,7	**47** **28,7**	34 20,7
T4 ... rešitve/rezultate nalog primerjam s sošolci.	134	23 14,0	44 26,8	**46** **28,0**	21 12,8
T5 ... mi učiteljica pregleda naloge in označi napake v nalogah.	136	16 9,8	**57** **34,8**	46 28,0	16 9,8
T6 ... sam vprašam učiteljico, ali sem nalogo pravilno rešil.	133	15 9,1	40 24,4	**46** **28,0**	29 17,7
T7 ... mi učiteljica označi naloge, v katerih so napake.	134	20 12,2	**53** **32,3**	39 23,8	20 12,2
T8 ... mi učiteljica pregleda naloge in popravi napake v nalogah.	135	26 15,9	43 26,2	**45** **27,4**	19 11,6
T9 ... mi učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa pri nalogi še ne znam.	134	19 11,6	35 21,3	**45** **27,4**	32 19,5
T10 ... nam učiteljica točkuje/oceni naloge.	133	49 29,9	38 23,2	35 21,3	12 7,3

Iz Preglednice 2 je razvidno, da učenci v največjem deležu zaznavajo, da jim pri preverjanju pravilnosti reševanja nalog pomaga to, da jim učiteljica pove rešitve nalog. To, da učiteljica učencem pregleda naloge in v njih označi napake ali pa, da učiteljica le označi naloge, v katerih so napake, največji delež učencev zaznava, da jim malo pomaga pri preverjanju pravilnosti reševanja nalog. Učenci v največjem deležu zaznavajo, da jim sploh ne pomaga, če jim učiteljica točkuje/oceni naloge. Ostale navedene načine učenci zaznavajo, da jim pomagajo, da vedo, ali so naloge pravilno rešili.

Nadalje nas je za posamezne načine preverjanja pravilnosti reševanja zanimala povezanost med učenčevim doživljanjem pomembnosti in pogostostjo uporabe posameznega načina. S Sprearmanovim koeficientom korelacije smo ugotovili, da znotraj posameznega načina preverjanja pravilnosti reševanja nalog obstaja statistično pomembna povezanost med pogostostjo uporabe in oceno pomembnosti načina. Pri vseh načinih je bila stopnja značilnosti nižja od 1 %. Spearmanov korelacijski koeficient rangov je znašal med 0,4 in 0,6. Rezultati so prikazani v Preglednici 3. Pri vseh načinih gre torej za pozitivno povezanost, kar pomeni, da se za posamezni način preverjanja pravilnosti reševanja pri učencih z večanjem ocene pogostosti uporabe veča tudi ocena pomembnosti načina. Najmočnejša povezanost med pogostostjo in pomembnostjo uporabe je pri treh načinih preverjanja: učiteljica točkuje/oceni naloge (0,636), učenci rešitve/rezultate primerjajo s sošolci (0,626) in učenci si naloge pregledajo z rešitvami, rezultati nalog v učbeniku (0,600). Najšibkejša povezanost med pogostostjo in pomembnostjo uporabe je pri načinu, pri katerem učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa učenec pri nalogi še ne zna (0,318).

Preglednica 3: Povezanost med pogostostjo in pomembnostjo načina preverjanja pravilnosti reševanja nalog.

	r_s	p
T1 ... nam učiteljica pove rešitve/rezultate nalog.	0,445	0,00
T2 ... se sam preverim s tem, da rešim nalogo ponovno oz. si jo pregledam.	0,564	0,00
T3 ... rešitve nalog preverim tako, da pogledam rešitve, rezultate nalog v učbeniku.	0,600	0,00
T4 ... rešitve/rezultate nalog primerjam s sošolci.	0,626	0,00
T5 ... mi učiteljica pregleda naloge in označi napake v nalogah.	0,498	0,00
T6 ... sam vprašam učiteljico, ali sem nalogo pravilno rešil.	0,521	0,00
T7 ... mi učiteljica označi naloge, v katerih so napake.	0,425	0,00
T8 ... mi učiteljica pregleda naloge in popravi napake v nalogah.	0,535	0,00
T9 ... mi učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa pri nalogi še ne znam.	0,318	0,00
T10 ... nam učiteljica točkuje/oceni naloge.	0,636	0,00



Grafikon 1: Odnos med povprečno oceno pogostosti in povprečno oceno pomembnosti načinov preverjanja pravilnosti reševanja nalog.

Kot zanimivost podajamo diagram (Grafikon 1), ki prikazuje odnos med povprečno oceno pogostosti in povprečno oceno pomembnosti obravnavanih načinov preverjanja pravilnosti reševanja nalog. Načini preverjanja so označeni od T1 do T10 (poimenovani v Preglednicah 1, 2 in 3). Tudi iz diagrama je razvidno, da učenci v povprečju ocenjujejo bolj pogosto uporabljene načine preverjanja rešitev kot zanje bolj pomembne. Nekoliko pri tem odstopata načina preverjanja, kjer učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa učenec pri nalogi še ne zna (T9) ter da učenec sam vpraša učiteljico, ali je nalogo pravilno rešil (T6). Pri teh dveh načinih učenci zaznavajo pomembnost višje kot pogostost uporabe.

Učenčeva prepričanost v pravilnost reševanja nalog

Učence smo po reševanju štirih matematičnih nalog (naloge so na QR kodi), ki so se navezovale na obravnavano učno vsebino, vprašali, ali so prepričani v pravilnost reševanja nalog. Učenčevo prepričanost v pravilnost reševanja naloge smo v možnih odgovorih na to vprašanje povezali z viri informacij o pravilnosti reševanja nalog. Učencem namreč rešitve nalog niso bile podane iz zunanjega vira (učiteljica, učbenik). Rezultati so prikazani v Preglednici 4.

Preglednica 4: Prepričanost v pravilnost reševanja nalog.

	f	f %
Nisem prepričan, ker mi ni nihče pregledal teh nalog.	42	32,3
Nisem prepričan, ker nimam rešitev teh nalog.	15	11,5
Sem prepričan, ker sem prišel skozi naloge.	27	20,8
Sem prepričan, ker sem dobil »lepo« sliko, ker se je izšlo.	37	28,5
Sem prepričan, ker sem sam preveril.	6	4,6
Drugo	3	2,3
Skupaj	130	100

Ugotovili smo, da malo manj kot polovica učencev (43,8 %) ni prepričana v pravilnost rešenih nalog, ker jim nalog ni nihče pregledal oz. nimajo rešitev. Gre najbrž za učence, ki pri preverjanju pravilnosti reševanja nalog uporabljajo zunanje vire (učiteljico, učbenik). Nekoliko več kot polovica učencev (53,9 %) pa je prepričana v (ne)pravilnost rešenih nalog, ker so dobili »lepo sliko« oz. »se je izšlo« ali pa zato, ker so/niso prišli skozi nalogo. Zelo majhen delež učencev (4,6 %) je prepričan v (ne)pravilnost reševanja zato, ker je sam preveril pravilnost rešenih nalog.

Zaključek

Analiza rezultatov pogostosti in pomembnosti uporabe načinov preverjanja pravilnosti reševanja nalog je pokazala, da je način, kjer učenci uporabljajo učiteljico kot vir, ki jim pove pravilnost rešenih nalog, pogosto uporabljen način, ki jim tudi pomaga, da vedo, ali so nalogo pravilno rešili. Podobno so ugotovili tudi Gennip, Segers in Tillema, (2010) in Gielen (idr. 2010), da učenci pri ugotavljanju pravilnosti rešenih nalog najpogosteje izhajajo iz povratne informacije učiteljice, saj menijo, da je bolj točna. Učenci v primeru učiteljeve povratne informacije namreč občutijo večjo psihološko varnost, saj težko zaupajo v svoje sposobnosti oblikovanja lastne povratne informacije o razumevanju učne vsebine ali pravilnosti rešene naloge (Gennip, Segers in Tillema, 2010). Tako je tudi v naši raziskavi približno polovica učencev navedla, da niso prepričani v pravilnost reševanja nalog, ker jim teh nalog ni nihče pregledal. Gennip, Segers in Tilema (2010) kot razlog navajajo, da se učenci ne počutijo usposobljeni za oblikovanje lastne povratne informacije o pravilnosti rešene naloge. S. Okita (2004) k temu dodaja, da učenci niso vajeni samopreverjanja pravilnosti rešene naloge brez zunanjega vira, če jih tega ne učimo. Pridobiti morajo torej izkušnje s samopreverjanjem. V raziskavi je sicer približno polovica učencev navedla, da vsaj občasno preveri pravilnost rešenih nalog in da jim ta način pomaga vedeti, ali so nalogo pravilno rešili. Pri tem pa žal ne vemo, kako učinkoviti so njihovi načini samopreverjanja. Po reševanju nalog večina učencev ni navedla, da bi si sama preverila pravilnost rešene naloge in s tem bila prepričana v pravilnost rešenih nalog. Večina učencev je bila prepričanih, ker so prišli skozi nalogo oz. so dobili »lepo« sliko oz. se je izšlo. Učenci, ki so prepričani v pravilnost reševanja, so torej razvili načine, s katerimi sami pri sebi preverjajo pravilnost rešenih nalog, vendar pa navedena kriterija nista najbolj relevantna za oceno pravilnosti rešene naloge. Rezultati raziskave tako kažejo, da učenci mehanizmov za samopreverjanje pravilnosti reševanja nalog nimajo ustrezno razvitih in bi jih bilo smiselno pri pouku učiti. To je namreč tudi osnova za učenčevo sprotno samougotavljanje in spremljanje lastnega znanja ter samousmerjanje napredovanja v znanju. Prav tako rezultati raziskave kažejo, da učitelji redko v pouk vključuje elemente samopreverjanja pravilnosti reševanja nalog, s katerimi bi učence spodbujali k iskanju lastnih napak in popravljanju teh napak. Hkrati pa učenci zaznavajo te načine preverjanja pravilnosti reševanja nalog kot pomembne. Tudi raziskava Stallings in Tascione (1996) je pokazala pozitivne učinke učiteljevega spodbujanje učencev k iskanju napak pri razvijanju učenčeve spretnosti samopreverjanja.

Pri vključevanju poučevanja samopreverjanja pri pouku je torej treba poznati načine, kako učenci lahko preverijo pravilnost rešenih in tudi upoštevati, kateri so učencem bolj pomembni, da vedo, ali so nalogo pravilno rešili. V raziskavi smo namreč ugotovili, da pogostost uporabe nekega načina sovpada z njegovo pomembnostjo. Še posebej je treba biti pozoren na načine, ki so učencem pomembni, a se je izkazalo, da niso tako pogosto uporabljeni. Pri tem izstopata dva načina – to, da učenec sam vpraša učiteljico, ali je nalogo pravilno rešil, ter da učiteljica pregleda naloge in pove/napiše, česa učenec pri nalogi še ne zna. V pouk pa je treba vpeljati tudi poučevanje preverjanja,

kjer je učenec sam sebi vir informacij (samopreverjenje) pravilnosti rešene naloge. Ta vpeljava naj bo načrtna in postopna. Učitelj lahko učence spodbuja k samopreverjanju reševanja naloge tudi z vprašanji (npr. Kako veš, da si nalogo rešil pravilno? Kako boš preveril pravilnost rešene naloge?) ter modeliranjem primernih odgovorov nanje. Še posebej pri geometrijskih, pa tudi nekaterih aritmetičnih nalogah, lahko učence naučimo, kako sami preverijo pravilnost rešene naloge brez zunanjega vira. Če znajo sami preveriti pravilnost naloge, postanejo sami sebi vir povratne informacije in tako postajajo bolj neodvisni pri učenju in lažje sproti ovrednotijo svoje znanje.

Viri in literatura

Andrade, H. L. (2010). *Students as the Definitive Source of Formative Assessment: Academic Self-Assessment and the Self-Regulation of Learning*. Paper presented at the annual meeting of the Northeastern Educational Research Association. Rocky Hill, CT.

Andrade, H. (2007). Self-assessment through rubbrucs. *Educational Leadership, 65*(4), 60–63.

European Communities (2007). *Key competences for lifelong learning European Reference Framework*. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities.

García, T., Betts, L., González-Castro, P., González-Pienda, J. in Rodríguez, C. (2016). On-line assessment of the process involved in maths problem-solving in fifth and sixth grade students: self-regulation and achievement. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(2), 165–186.

Gennip, N. A. E., Segers, M. S. R. in Tillema, H. H. (2010). Peer assessment as a collaborative learning activity: the role of interpersonal variables and conceptions. *Learning and Instruction*, 20(4), 280–290.

Gielen, S., Peeters, E., Dochy, F., Onghena, P. in Struyven, K. (2010). Improving the effectiveness of peer feedback for learning. *Learning and Instruction, 20*, 304–315.

Hacker, D. J., Bol, L., Horgann, D. in Rakow, E. A. (2000). Test prediction and performance in a classroom context. *Journal of Educational Psychology,* 92(1), 160–170.

Hattie, J. (2009). *Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses Relating to Achievement*. USA: Routledge.

Hattie, J. in Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112.

Keeley, P. in Tobey, C. R. (2011). *Mathematics formative assessment. 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning*. Sage, California.

Kostons, D., Van Gog, T. in Paas, F. (2012). Training self-assessment and task-selection skills: A cognitive approach to improving self-regulated learning. *Learning and Instruction, 22*, 121–132.

Kurnaz, M. A. in Cimer, S. O. (2010). How do students know that they have learned? An investigation of students' strategies. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 2(2), 3666–3672.

Mastnak, Adrijana: povezava do nalog: (pridobljeno 24. 5. 2021) https://drive.google.com/file/d/1u_9SoaltLTYakrisnH8C194ziysbNFQT/view?usp=sharing

Montague, M., Enders, G. in Dietz, S. (2011). Effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 34*(4), 262–272.

Pennequin, V., Sorel, O., Nanty, I. in Fontaine, R. (2010). Metacognition and low achievement in mathematics: The effect of training in the use of metacognitive skills to solve mathematical word problems. *Thinking and Reasoning, 16*(3), 198–220.

Raaijmakers, S. F., Baars, M., Schaap, L., Paas, F., Van Merriënboer, J. J. G. in Van Gog, T. (2017). Training self-regulated learning skills with video modeling examples: Do task-selection skills transfer? *Instructional Science, Advance online publication*.

Ramdass, D. in Zimmerman, B. J. (2008). Effects of Self-Correction Strategy Training on Middle School Students' Self-Efficacy, Self-Evaluation, and Mathematics Division Learning. *Journal of Advanced Academic*, *20*(1), 18–41.

Rawson, K. A. in Dunlosky, J. (2007). Improving students' self-evaluation of learning for key concepts in textbook materials. *European Journal of Cognitive Psychology, 19*, 559–579.

Okita, S. Y. (2014). Learning from the folly of others: learning to self-correct by monitoring the reasoning of virtual characters in a computer supported mathematics learning environment. *Computer & Education*, 71, 257–278.

Onu, V. C., Eskay, M., Igbo, J.N., Obiyo, N., in Agbo, O. (2012). Effect of training in math metacognitive strategy on fractional achievement in Nigerian schoolchildren. *US-China Education Review, 3*, 316–325.

Pečjak, S. (2012a). Razvoj metakognitivnih sposobnosti pri učenju in vloga učitelja. *Vzgoja in izobraževanje, 43*(6), 10–16.

Pečjak, S. (2012b). Metakognitivne sposobnosti pri učenju: struktura in njihov razvoj. *Vzgoja in izobraževanje, 43*(6), 4–9.

Pečjak, S. in Košir, K. (2002). *Poglavja iz pedagoške psihologije. Izbrane teme*. Ljubljana: Oddelek za psihologijo Filozofske fakultete.

Stallings, V. in Tascione, C. (1996). Student self-assessment and self-evaluation. *The mathematics teacher*, 89(7), 548–554.

Uberti, H., Mastropieri, M. A., in Scruggs, T. E. (2004). Check if off: Individualizing a math algorithm for students with disabilities via self-monitoring checklists. *Intervention in Schooland Clinic, 39,* 269–275.

van der Meer, K. (2012). *Student self-assessment in mathematics and the implications on leardership*. Master of Education. Faculty of Education, Lethbridge Alberta.

Yan, Z. in Brown, G. (2016). A cyclical self-assessment process: towards a model of how students engage in self-assessment. *Assessment & Evaluation in Higher Education*.

Zimmerman, B. J. (1998). Developing Self-Fulfilling Cycles of Academic Regulation: An Analysis of Exemplary Models. V D. H. Schunk, in B. J. Zimmerman (ur.), *Self-Regulated Learning: From Teaching to Self-Reflective Practice (str. 1–19*). New York, NY: Guilford Press.

Zimmerman, B.J., Moylan, A., Hudesman, J., White, N., in Flugman, B. (2011). Enhancing self-reflection and mathematics achievement of at-risk urban technical college students. *Psychological Test and Assessment Modeling, 53*(1), 108–127.

Žakelj, A., Röhler Prinčič, A., Perat, Z., Lipovec, A. in drugi (2011). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika*. ZRSŠ: Ljubljana.

Preverjanje znanja matematičnih vsebin s številskim maratonom

Ana Lara Schwarzbartl in dr. Vida Manfreda Kolar
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

V prispevku bomo predstavili način preverjanja znanja matematičnih vsebin s tehniko številskega maratona. Najprej bomo predstavili učno pripravo za Številski maraton[1] pri preverjanju znanja številskih izrazov, ki smo jo uspešno izvedli v 4. razredu na eni izmed ljubljanskih osnovnih šol. Na podlagi analize izvedene učne ure bomo strokovno podkrepili ugotovitve o učinkovitosti takšnega načina preverjanja znanja. Analiza ima vključene vse vidike, ki jih mora učitelj vključiti ali v pripravi maratona, njegovi izvedbi ali zaključku maratona, zato pričakujemo, da bo služila kot vzorčni model za prenos ideje Številskega maratona tudi na druge, tako matematične kot tudi nematematične učne vsebine v osnovni šoli, v vseh razredih izobraževanja.

Ključne besede: učna ura matematike, vodenje razreda, številski izrazi, utrjevanje znanja, motivacija, vloga učitelja

Assessing Mathematical Knowledge with a Numbers Marathon

Abstract

The paper will present the assessment of mathematical knowledge using the numbers marathon technique. It will begin by presenting a lesson plan for a Numbers Marathon[2] used to assess the knowledge of numerical expressions; it was successfully implemented in the 4th grade of a primary school in Ljubljana. The analysis of the implemented lesson will corroborate the findings regarding the effectiveness of this knowledge assessment method. The analysis covers all the aspects a teacher has to incorporate either in the preparation of the marathon, in its implementation, or its conclusion; it is therefore anticipated that the analysis will be used as an exemplary model for transferring the Numbers Marathon to other learning contents, either mathematical or non-mathematical, in all grades of primary school.

Keywords: Mathematics lesson, leading a class, numerical expressions, knowledge consolidation, motivation, teacher's role

Učna priprava

Na eni izmed ljubljanskih osnovnih šol smo v 4. razredu organizirali Številski maraton 2019. Na maratonu je sodelovalo 18 učencev. Maraton je potekal v treh delih:

1. priprava na Številski maraton
2. Številski maraton
3. zaključek Številskega maratona

Učna priprava za izvedbo Številskega maratona je v Prilogi. Z opombami v nadaljevanju prispevka se navezujemo na določen del učne priprave, ki je označen s to kodo.

Analiza številskega maratona

Ponavljanje in utrjevanje številskih izrazov kot sodelovanje na 1. Številskem maratonu je bil primer visoko motivacijske učne ure, zaradi uspešno logistično-organizacijsko oblikovanega razreda. Razred ali razredno okolje je osnovano na upoštevanju in prepletanju dveh komponent razreda: **fizično okolje razreda**, ki ga predstavlja razred kot opremljena učilnica, in **čustvenega okolja razreda**, se pravi razumevanje razreda kot skupnosti učencev (Hue & Li, 2008).

V nadaljevanju bomo analizirali izvedbo Številskega maratona glede na ti dve komponenti. Najprej bomo analizirali 1. Številski

1 Številski maraton 2019 je bil izveden kot nastop pri predmetu Didaktika matematike. Nastop je izvajala študentka Ana Lara Schwarzbartl pod mentorstvom izr. prof. dr. Vide Manfreda Kolar.

2 The Numbers Marathon 2019 was implemented as a teaching demonstration under the course Didactics of Mathematics. The teaching demonstration was delivered by Ana Lara Schwarzbartl under the mentorship of izr. prof. dr. Vida Manfreda Kolar.

maraton glede na čustveno okolje razreda (dojemanje razreda kot skupnosti učencev).

Čustveno okolje razreda

Čustveno okolje razreda (razredna klima) ima velik pomen pri razredni skupnosti. Navezuje se na *učence*, ki so motivirani za *učno snov*, in učni proces, ko se učenci *samo- in soodločajo*. Naslednji, ki vstopa v razredno skupnost, je učitelj, ki v razredu zahteva ocenjeno mero *discipline* in ima *vlogo usmerjevalca* aktivnega učnega procesa.

Sledi analiza čustvenega okolja razreda glede na Blažič (2003), v katerem smo izvajali Številski maraton.

Učenci. Učenci so med seboj po eni strani *enaki*: vsi so motivirani, kadar se resnično učijo in se ne dolgočasijo. Vsi izgubljajo pogum, kadar jih zaradi neuspeha nekdo kritizira. Vsi učenci želijo biti odvisni, hkrati pa se istočasno z vso močjo borijo za samostojnost, so včasih jezni in maščevalni. Dobivajo zaupanje vase, kadar so uspešni, in ga izgubljajo, ko jim nekdo pripoveduje, da to, kar so dosegli, ni dovolj. Cenijo in upoštevajo svoje potrebe in ščitijo svoje osebno dostojanstvo (Blažič, 2003).

Učenci so si *različni* v (naštete so različnosti učencev, ki so sodelovali na Številskem maratonu):

- telesnih lastnostih: motorična koordinacija je dobro razvita, potrebujejo veliko gibanja *(učenec z odločbo ADHD motnje; učenec je imel v učilnici kinestetično mizo);*
- sposobnostih: v stopnji razvoja, strukturi sposobnosti in hitrosti miselnega razvoja (*učenec z odločbo z motnjo avtističnega spektra);*
- znanju: razlike med splošnim in specifičnim znanjem in najprej med osnovnim in konceptualnim znanjem, proceduralnim znanjem, problemskim znanjem med učenci (*specifične učne težave pri matematiki pri vsaj dveh učencih);*
- učnih in spoznavnih stilih: način, kako zaznavajo, organizirajo in evalvirajo pridobljene informacije,
- socializaciji in čustvovanju: oblika dela v razredu, struktura naloge (*individualna naloga, tekmovalna naloga),*
- načinu spopadanja s problemi (*naloga kot izziv ali ovira),*
- motiviranosti: notranja ali pa zunanja motivacija *(preverjanje in utrjevanje znanja)* (Blažič, 2003).

Predvideno je bilo potrebno oblikovati močno diferencirane naloge, saj so razlike med učenci zelo velike.

Učna vsebina.[3] Učna enota Številski izrazi in računanje številskih izrazov je učna vsebina, ki se jo učenci učijo pri obravnavi učne teme Aritmetika in algebra v 4. razredu osnovne šole. Ta dejavnik pri oblikovanju razredne skupnosti je pomembno upoštevati predvsem z vidika upoštevanja težav, s katerimi se učenci navadno soočajo pri tej učni vsebini. Z upoštevanjem lahko oblikujemo naloge, ki bodo učencem pomagale pri razumevanju in utrjevanju izbrane učne vsebine.

Za učence je ta učna vsebina težavna, saj se kar naenkrat pojavi več računskih operacij v enem številskem izrazu. Učenci morajo za uspešno reševanje dobro znati poštevanko, na pamet seštevati in odštevati ter razumeti matematični jezik za vsako računsko operacijo (vsota, seštevanec, plus, minus, razlika, zmnožek …). To pomeni tudi, da morajo obvladati vsako računsko operacijo posebej.

Pri spoznavanju pravil sodelovanja[4] na Številskem maratonu sta bili dve izmed štirih pravil, pravili računanja v številskem izrazu. Vsa pravila so bila narisana simbolno na listu papirja. Simbolno prikazana pravila so za učence smiselna, ker gre za oprijemljivo prikazovanje in omogoča hitro vidno zapomnitev oz. pri učencu spodbudi asociacijo za določeno pravilo. Zaradi asociacije je lahko priklic informacije hitrejši, saj novo informacijo povežemo s podobnim znanim. Učenje z asociacijami je upoštevanje drugega načela delovanja dinamičnih procesov na sinapsah; in sicer *brez zveze se nikamor ne prileze* (angl.: Out of sync, loose your link.) (Bregant, 2016).

Takšno učenje prek spremembe na nivoju sinaps spreminja strukturo možganov in jo organizira ali reorganizira. Kadar se učimo z razumevanjem, so podatki shranjeni tako, da so med seboj povezani, kot kosi sestavljanke. Ko se potem skušamo spomniti enega dejstva ali podatka, se v trenutku spomnimo še ostalih v tisti sestavljanki. V tuji literaturi tak način delovanja možganov opisujejo kot »Spread of activation« oz. širjenje mreže asociacij. To pa je bistvo učenja z razumevanjem (Kristanc, 2016).

Utrjevanje in preverjanje znanja. V fazi načrtovanja dejavnosti in preverjanja učenčevega razumevanja smo izhajali iz ciljev[5] in pričakovanih dosežkov, ki so opredeljeni z veljavnim učnim načrtom (Učni načrt 2011).

Pri opredeljevanju ravni in kakovosti matematičnega znanja učencev[6] smo imeli za izhodišče Gagnejevo taksonomijo. Gagne znanje deli na *osnovno in konceptualno znanje* (naloge za 5 km in 9 km) *proceduralno zanje* (naloge za 7 km) *in problemsko znanje* (naloge za 10 km).

Poznavanje Gagnejeve taksonomije je imelo pomembno vlogo tako pri načrtovanju dejavnosti, preverjanju in ocenjevanju učenčevega znanja kot pri odkrivanju napak/napačnih predstav učencev. Pogosto smo lahko priča poučevanju matematičnih konceptov in vsebin, ki temelji na učenju na pamet. Da bi premostili razkorak med posredovanim znanjem s strani učitelja in prejetim znanjem s strani učenca, se je treba posvetiti prepoznavanju in odkrivanju napačnih predstav pri učencih (Manfreda Kolar, 2016).

Po navodilih o poteku Številskega maratona[7] je sledilo ogrevanje možganov učencev. Uporabili smo formativno tehniko preverjanja razumevanja[8] (formative assesment classroom techniques) – Soočanje v krogu, za preverjanje znanja in odkrivanje napak v razumevanju Številskih izrazov učencev (Kolar Manfreda, 2016).

3 Priloga.
4 A 5.
5 Učna priprava.
6 B 2.
7 A 1, A 2.
8 A 6.

Strategija s pomočjo občutkov aktivira mišljenje in vključevanje učencev v razpravo in zagovarjanje njihovih matematičnih idej. Učenci v našem primeru niso stali v krogu, ampak so stali za svojo šolsko mizo. Učitelj je prebral izjave[9]. Tisti učenci, ki so se z izjavo strinjali, so stali, tisti, ki se niso, pa so počepnili. Vse izjave so se nanašale na isto temo (*poštevanka, pojmi v računskih operacijah, seštevalni pari do desetice*). Pri izjavah, kjer učenci pri odločitvi o pravilnosti izjave niso enotni, nastopi diskusija, po kateri lahko učenci spremenijo svoje mišljenje in pridejo do novih spoznanj. Učitelj mora učence spodbujati, da so pri svojih odločitvah samozavestni in ne spreminjajo odgovorov zgolj zato, ker se večina njihovih sošolcev odloči drugače.

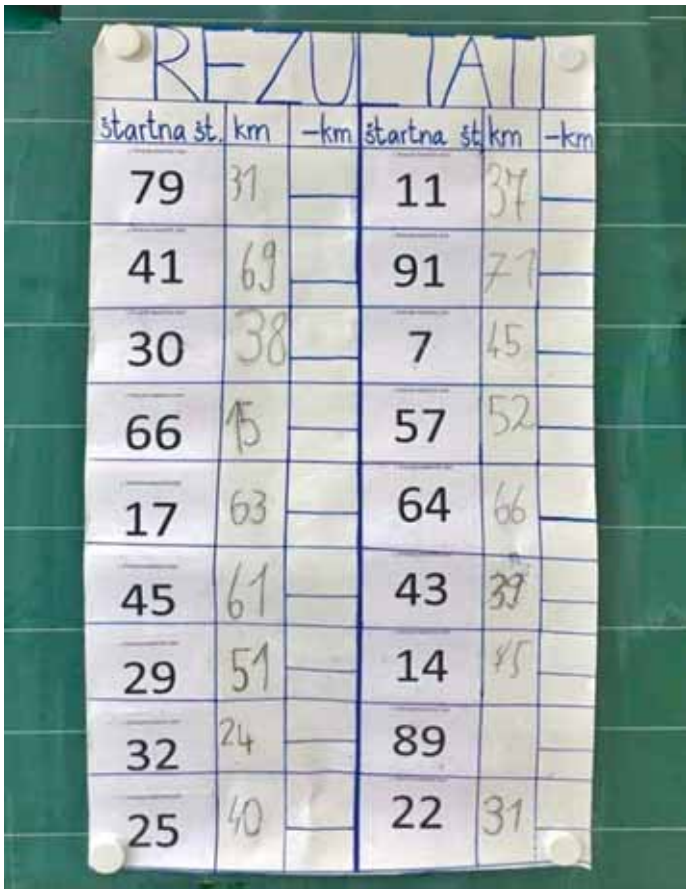
Učenci so se v povprečju odločali pravilno. Nekaj učencev je očitno čakalo na odločitev sošolcev, po kateri so nato sledili v gibanju oz. svoji presoji pravilnosti trditve. Opazili smo težave pri razumevanju matematičnega jezika, saj so se pri teh trditvah učenci odločali dlje časa in kazali znake negotovosti (*gledali po razredu, potrebovali več časa za odločitev, počepali počasneje/bolj previdno*). Nekateri učenci še vedno niso avtomatizirali poštevanke do 10. Napačno odločanje pri vseh trditvah pa lahko pripisujemo tudi metodi dela, kjer nekateri učenci potrebujejo več časa, da priredijo ustrezen pomen ustno izraženi trditvi.

Naloge za pridobivanje kilometrov so bile pripravljene tako, da bi bilo možno rešiti vse naloge v času maratona (pribl. 25 min) in tako osvojiti 100 km. Naloge[10] so bile diferencirane na 4 ravneh, kjer je bil 4. nivo sestavljen iz problemskih nalog, verjetno primernih za nadarjene učence. Pripravili smo 5 različnih nalog za 5 km, ki so predstavljale najnižji nivo, sledile so 4 naloge za 7 km, 3 naloge za 9 km in 2 nalogi za 10 km, ki sta predstavljali najvišji, 4. nivo.

V učni pripravi (QR koda)[11] so vključeni vsi primeri nalog, ki so jih reševali učenci za vsako raven znanja po Gagneju.

Vsota vseh možnih pridobljenih kilometrov na maratonu[12], ki je bila enaka 100 km, je učitelju omogočila vpogled v znanje učencev. 100 km bi lahko za učitelja pomenilo 100 % na preverjanju znanja oz. vse možne točke. Zaradi tega lahko Številski maraton uporabimo kot **metodo za preverjanje znanja matematičnih vsebin.** Učenci so na koncu maratona v preglednico rezultatov vpisali vsoto pridobljenih kilometrov (Slika 1).

Iz preglednice je razvidno, da večina učencev dosega minimalne standarde znanja[13], pri čemer je največ doseženih kilometrov (čez 70 km) opazno manj od manjšega števila pridobljenih kilometrov. Predpostavljamo, da je bil čas maratona ali prekratek ali pa znanje učencev še ne dovolj utrjeno. Nekateri učenci so še vedno na ravni usvojenega osnovnega in rutinsko proceduralnega znanja. Upoštevamo tudi, da bi lahko že 80 km od 100 km predstavljalo odlično oceno, saj sta bili nalogi za 10 km toliko težji, da jih verjetno ne bi ocenjevali, ampak sta imeli namen kvalitetne diferenciacije, se pravi kot nalogi za nadarjene učence. V takem primeru lahko zaključimo, da so bile naloge zastavljene primerno zahtevno, saj je razporeditev rezultatov smiselna za naključen razred s svojimi specifikami.



Slika 1: Rezultati Številskega maratona.

Samo- in soodločanje učencev.[14] Zaradi razlik v znanju učencev smo se odločili za učno obliko samostojnega dela učencev in jim zaupali presojo lastnega znanja. Formativno spremljanje lastnega znanja in možnost izbire nalog močno motivira učence. Da lahko učenec razvija svoje sposobnosti, mu moramo pustiti, da dela in obvladuje vse, kar se ga tiče in je od njega odvisno (Montessori, 2018). Rešitve nalog za učence niso bile posebej pripravljene, načrtovali smo, da učiteljica pregleda naloge po zaključku maratona in jim potem pove, koliko kilometrov morajo odšteti od svojega rezultata. Učenci bi lahko naloge pregledali tudi v paru (si zamenjali zvezke).

Predvsem pri nalogah za 10 km je bilo opaziti zelo različne odzive učencev.

Učenci naj bi najbolje oblikovali *razvojno miselnost po Dwecku*. To je način mišljenja, kjer učenec problem vidi kot izziv, vztraja pri reševanju in se zaveda, da lahko s trudom izboljša svoje znanje. Takemu načinu mišljenja je nasprotna *toga miselnost*, ki učencu ne omogoča možnosti premagovanja ovir, saj verjame, da so sposobnosti začrtane od rojstva in ne verjame v možen napredek, ki pride z vloženim delom (Dweck, 2017).

9 A 7.
10 B 2.
11 B 2.
12 C 1.
13 B 2.
14 B 2.

V naši skupini učencev smo pri reševanju nalog za 10 km prepoznali različne oblike spopadanja z ovirami, ki jih uporabljajo učenci. Nekateri so nalogo takoj zamenjali z drugo, ena učenka je nalogo rešila s poskušanjem, nekaj učencev ni nikoli niti pristopilo do košar z nalogami za 10 km, nekateri so še malo vztrajali in prosili za pomoč v Okrepčevalnici, vendar ker pomoč tu ni bila smiselna, so tudi obupali (*primer toge miselnosti)*. Nekateri učenci pa so naloge rešili z veseljem in se pri reševanju zadržali tudi dlje, z namenom uspešne rešitve naloge (*primer razvojne miselnosti)*. Učenci se s samostojnim izbiranjem težavnosti nalog učijo oblikovanja realnih oz. uresničljivih ciljev, ki jih sami zmorejo doseči. Učenci lahko izkusijo, da vseh nalog še ne znajo rešiti in se poskusijo odzvati na to informacijo. Nekateri se bodo še bolj trudili, drugi obupali ali se zanesli na možno srečo. Menimo, da bi učenci poskušali še bolj oblikovati *razvojno miselnost* na Številskem maratonu tako, da bi maraton trajal dlje časa za enako število nalog, zaradi česar bi bili vsi učenci proti koncu prisiljeni reševati tudi zahtevnejše naloge, če bi želeli nabrati še več kilometrov. V takem primeru bi morali za končni rezultat meriti čas, ki so ga potrebovali za zaključek maratona, namesto števila pridobljenih kilometrov.

Vloga učitelja.[15] Učitelj oz. vodja ure je imel pri tej učni uri vlogo usmerjanja oz. pospeševanja procesa reševanja, v smislu nudenja pomoči pri težavah pri npr. razumevanju navodil, reševanju nalog, vprašanjih organizacijskega vidika. Učitelj je na maratonu svojo vlogo upravljal v Okrepčevalnici. Tekačem na maratonih so na voljo Okrepčevalnice ali Okrepčevalne postaje, kjer je na voljo voda v kozarcih, energetski napitek (Enervit, Isostar), sladkor v kockah, sol, čokolada, sadje (banane, mandarine). Okrepčevalnica na Številskem maratonu je imela tako na voljo spodbudo, pomoč, odgovore na vprašanja organizacijskega vidika. Želeli smo, da v Okrepčevalnici učenec dobi tudi morda potrebno pohvalo, dodatno spodbudo, zaradi katere si želi še naprej spopadati se z izzivi. Okrepčevalnica naj bi bila najprej fiksna pred šolsko tablo. To se ni obneslo najbolje, saj je precej učencev potrebovalo pomoč. Če bi Okrepčevalnica ostala fiksna, bi to pomenilo, da bi učenci izgubljali čas, namenjen reševanju nalog, medtem ko bi v vrsti čakali v Okrepčevalnici. Prav ta način dela, premikajoče se Okrepčevalnice, je na koncu omogočil, da so učenci, medtem ko so čakali, da pridejo na vrsto, še malo premlevali reševanje naloge, se morda za pomoč obrnili k sošolcu, nekateri pa so odšli po drugo nalogo. Premikajoča se Okrepčevalnica je učitelju omogočila vpogled v delo vseh učencev, tudi tistih, ki ne vedo, da potrebujejo pomoč oz. te želje ne znajo/ne želijo izraziti. To je bilo mogoče, ker je bila Okrepčevalnica premična in je učitelj lahko pregledal reševanje vseh učencev, medtem ko se je sprehajal po razredu. Zaradi Okrepčevalnice so se učenci v razredu dobro počutili, saj so imeli »varno točko«. Takšna točka v razredu, ko uro vodi študent ali študentka, ki jih slabše pozna, se nam zdi še bolj smiselna, saj med ‚učiteljem za eno uro' in učenci spodbudi željo po sodelovanju.

S premično Okrepčevalnico smo spodbujali izboljševanje razredne interakcije, ki je ključna za uspešno izvedeno učno uro. Razredna interakcija je definirana kot interna izmenjava misli, občutkov in informacij med učiteljem in učenci. Z dobro razredno interakcijo učitelj motivira, usmerja in opogumlja učenčev proces učenja, se pravi, da je ta nujno potrebna, če želi učitelj prepoznavati in primerno zadovoljevati učenčeve potrebe. Interakcija upošteva tako besedno in nebesedno komunikacijo, slednja ima po navadi večjo težo na samo uspešnost razvoja le-te. Učinkovita razredna interakcija pa spodbuja v učencih občutek vrednosti, skrbi in spoštovanja. Dober učitelj je dober sogovorec (Wai-shing, 2008).

Disciplina. Naloga učitelja je, da pokaže pot k disciplini. Disciplina se rodi, ko se učenec lahko osredotoči na nekaj, kar ga privlači. Učenec, ki ima tako nalogo, se čudežno integrira, se umiri in žari od veselja. Stalno je zaposlen, pozabi nase in je neobčutljiv za nagrade (šele, ko so učenci rešili že polovico nalog, so začeli spraševati, koliko časa jim je še ostalo) (Montessori, 2018, str. 285).

Med pravili sodelovanja[16] je bilo tudi pravilo, da so naloge pravilno rešene takrat, ko imajo zapisane postopke reševanja oz. so rešene na daljši način. Tako smo poskusili preprečiti reševanje na pamet, ki sicer ne pomeni nujno neznanja, vendar računanje v mislih pogosto vodi k površnosti, pri zahtevnejših nalogah pa reševalec lahko hitro izgubi pregled nad postopkom reševanja in nalogo reši nepravilno. Učenci so izvedeli, da v primeru, ko ne zapišejo postopka reševanja, lahko izgubijo kilometre za dano nalogo. Poleg tega pravila je disciplino krepilo tudi vzgojno pravilo, ki je na tekmovanju prepovedovalo goljufanje in učence spodbujalo k pošteni igri. Menimo, da bi morali pri tem pravilu bolj poudariti, da pomoč sošolcu še ni goljufija. Zdelo se nam je, da bi tako lahko spodbudili zdravo sodelovanje oz. empatijo med učenci. Hkrati pa bi se ravno tako izgubila ideja o samostojnosti vsakega učenca, ki je odgovoren za svojo uspešnost.

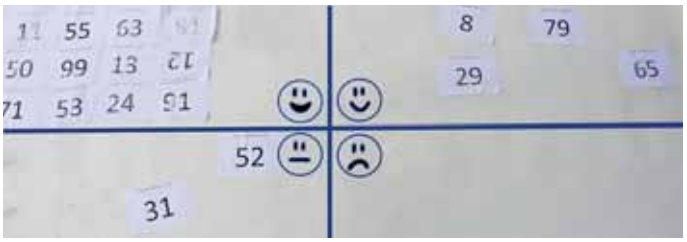
Disciplina na Številskem maratonu je bila zagotovo tudi posledica jasno podanih navodil na začetku učne ure. Navodila o poteku maratona smo oblikovali zelo natančno, s predpostavko, da se v okolju, kjer učenci poznajo svojo nalogo, vedo, kako jo lahko opravijo, imajo urejeno učno okolje (dovolj nalog) oblikuje spontana disciplina (Montessori, 2002). Zaradi učinka začetka in konca pri pridobivanju otrokove pozornosti smo navodila o tem, kako reševati naloge, kje se naloge nahajajo, da so različnih stopenj, da jih rešujemo v zvezek in vse ostale pomembne informacije o samem poteku maratona smo povedali takoj na začetku učne ure; ko je pozornost učencev zelo visoka.

Za neupoštevanje pravil smo določili »kazen«[17], ki je odštevanje pridobljenih kilometrov. Med potekom Številskega maratona nismo nikoli odšteli kilometrov, smo pa podali nekaj opozoril.

Zaključek 1. Številskega maratona.[18] Po zapisu rezultatov smo z učenci še analizirali počutje s Pravokotnikom počutja (Slika 2).

Pravokotnik počutja[19] je razdeljen na štiri različna počutja oz. zadovoljstva o sodelovanju na Številskem maratonu (*zelo dobro, dobro, niti dobro niti slabo, slabo*). Naloga učencev je, da ob zaključku maratona svojo štartno številko prilepijo v kvadrant, ki opredeljuje njihovo počutje ob sodelovanju na Številskem mara-

15 C.
16 A 5.
17 C 1.
18 C.
19 C 2.



Slika 2: Pravokotnik počutja.

tonu. Učenci imajo tako zagotovljeno anonimnost odločanja, saj so štartne številke od učitelja prejeli naključno. Odlepiti štartno številko pa se idejno poveže z rdečo nitjo ure in učence usmeri k zaključku učne ure. Od 18 učencev se jih je 12 opredelilo za *zelo dobro*, štirje za *dobro*, 2 učenca sta izbrala *niti dobro niti slabo*, nihče ni izbral *slabo*. Sklepamo, da so bili učenci zadovoljni s sodelovanjem na Številskem maratonu oz. so se na njem dobro počutili (vsaj polovica učencev je izbrala dobro oz. zelo dobro počutje). Učenci so za ne najbolj dobro počutje podali razloge: *zmanjkalo mi je časa, maraton je bil prekratek, on je goljufal, izgubil sem listek …* Tako zaključujemo, da so bili ti učenci nezadovoljni z zaključkom maratona, saj jim rezultatov maratona ni uspelo »preračunati«. Ob takšnem razpletu maratona je od učitelja oziroma vodje maratona odvisno, kako učencem razloži njihove pridobljene rezultate. Lahko so rezultati kot spodbuda za boljše reševanje ob naslednjem maratonu oz. povratna informacija, da bodo morali še vaditi učno snov, ali pa da se jim omogoči še dodatek časa, ki bi jim omogočil zaključek maratona.

V nadaljevanju prehajamo še na analizo 1. Številskega maratona še na drugo komponento razreda; **fizično okolje razreda**, ki ga predstavlja razred kot opremljena učilnica.

Fizično okolje razreda

Popis učilnice. V pripravi na učno uro smo popisali opremljenost učilnice: *Učilnica je bila postavljena tako, da imajo ob steni ob vratih omarice za učbenike, v učilnici imajo štiri vrste šolskih klopi, dva učenca sedita za katedrom in en učenec ima kinestetično mizo v levem kotu učilnice, nasproti šolske table.* Popis učilnice smo potrebovali, zato da smo se lahko na izvedbo učne ure čimbolj pripravili. Na podlagi poznavanja opremljenosti učilnice smo lahko zastavili razporeditev otokov z nalogami že pred izvajanjem v razredu. Popis učilnice študentu omogoči, da samo učno uro že pred izvedbo zelo podrobno vizualizira in tako na svoj nastop pride čim bolj samozavestno. Na Številskem maratonu je potreben »otok« z nalogami za pridobivanje kilometrov. Na tem otoku so bile naloge razdeljene v košare z različnimi ravnmi zahtevnosti. Vsaka košara je bila tudi vizualno drugačna, da so učenci hitro vedeli, katera izmed košar ima naloge za izbrano zahtevnostno raven. Ta otok je bil postavljen na omaricah ob vratih. Šolske klopi smo pred začetkom učne ure prestavili bolj narazen. To smo storili zato, da so lahko učenci lažje dostopali do košar in pri tem čim manj ovirali ostale. Premikanje po naloge je učencem omogočilo »minuto za gibanje« po vsaki rešeni nalogi.

Število natisnjenih nalog. Vsaka izmed nalog za različno težavnost je bila natisnjena 15-krat. S tem smo želeli preprečiti, da učenec ne bi dobil naloge, ker bi bila le-ta zasedena. To je posredno omogočalo boljšo uresničitev ideje o samo- in soodločanju učencev.

Okrepčevalnica.[20] Na Številskem maratonu je potreben še prostor, kamor se lahko učenci obrnejo po pomoč, t. i. Okrepčevalnica. Okrepčevalnica je bila predvidena kot odmašilo težav, ki se bodo pojavile na Številskem maratonu.

Čas reševanja.[21] Načrtovali smo, da bomo na šolski tabli merili čas maratona (iztekanje 25 minut). Med samo izvedbo smo ta del spremenili in štoparice nismo uporabili, saj smo morali upoštevati časovno omejenost nastopa in ga pravočasno zaključiti. To je pomenilo, da smo se odrekli nekaterim načelom maratona v zameno za pravočasno zaključeno učno uro. Tako se je deloma izgubila ideja o samostojnosti, saj učenci niso več upravljali s časom, ki ga imajo, in mogoče tudi glede na ta vidik drugače izbirali naloge. Hkrati pa je maraton brez štoparice, ki bi merila čas, razbremenil pritisk tekmovalnosti. Predstavljamo si, da so učenci pozabili na to, koliko časa je še, in imeli občutek, da bodo zagotovo lahko rešili vse naloge, zaradi česar z reševanjem niso prenehali. Desetletni otroci že imajo zametke razvoja abstraktnega mišljenja, zaradi česar se delno zavedajo abstraktne ideje časa. Zaradi zanimanja za čas (poznavanje ure, merske enote časa) je njihov motiv za delo zagotovo tudi možnost upravljanja s časom. Iztekanje časa pa je že samo po sebi motivacijsko, saj v človeku vzbuja občutek minevanja, ki je tesnoben. Ker učenci niso videli ure, smo deloma odvzeli stres, ki ga prinese iztekanje časa (omogočili smo jim, da so pozabili na čas, ki teče ne glede na njihovo učinkovito ali neučinkovito delovanje).

Štartne številke.[22] Štartne številke so bile izdelane kot nalepke, ki so jih učenci prilepili na sprednji del majice. Poudarili smo, da velikost številke na štartni številki ne vpliva na razporeditev rezultatov maratona. Zaradi štartnih številk so učenci bolj verjeli v zgodbo, saj jih je nalepka identificirala z njihovo novo vlogo. Poleg motivacijskega vidika štartnih številk se je na koncu izkazalo, da so štartne številke namesto imen na plakatu za prikaz rezultatov maratona vplivale na to, da se učenci niso pretirano primerjali med sabo. Pravzaprav so štartne številke uničile negativno tekmovalnost z drugimi sošolci, rezultati so tako postali deloma anonimni in so podprli moto, da »*najbolj tekmujem sam s seboj.*«

Zaključek 1. Številskega maratona.[23] Zaključek Številskega maratona bi bil lahko bolje premišljen. Številski maraton naj bi se zaključil s končnim izidom oz. seštevkom nabranih kilometrov, kar pa se ni zgodilo. Zavedamo se, da krajši maraton, se pravi manj časa za reševanje nalog v korist boljšega zaključka prav tako ne bi bil smiseln. Za potek zgodbe bi bilo prav tako pomembno, da se na koncu zgodi neke vrsta razglasitev rezultatov, ki jo učenci pričakujejo. Težavo bi lahko rešili tako, da bi ali imeli na voljo več časa, ali pa bi bil zaključek dogodka po koncu

20 A 5.
21 A 1.
22 A 3.
23 C.

maratona, brez odbitka kilometrov za napačno rešene naloge. V tem primeru sicer naloge ne bi bile pregledane oz. bi bila njihova pregledanost nepomembna, saj učence po razglasitvi ne bi več zanimale. Zaključujemo, da je nujno, ob izteku maratona vsaj 10 minut namenimo pregledu in razglasitvi rezultatov.

Zaključek

Zaključujemo z idejo, da je bila učna ura za učence visoko motivacijska ravno zaradi upoštevanja komponent, ki oblikujejo učno uro v razredu. V pripravi na učno uro smo upoštevali skoraj vse motive, ki naj bi jih učenci izbirali za motiviranost za delo. V razredu, kjer je vzpostavljena disciplina, je učenec skoncentriran na svoje delo. Skoncentriran učenec je visoko motiviran, vendar na poti do doseženih ciljev potrebuje znake ali oporo, da je na pravi poti (Montessori, 2018). Učiteljeva naloga je, da na tej poti do discipline učencu priskrbi primerna sredstva, odstranjuje ovire, vključno s tistimi, ki bi jih verjetno povzročil sam. Učiteljeva naloga je, da predvidi in pripravi »spodbujevalce motivacije«.

Spodbujevalci motivacije učenca so tako aktivni kot proaktivni. Pri učni uri so bili aktivni spodbujevalci približno enakomerno razporejeni čez celotno učno uro, se pravi: začetek zgodbe o 1. Številskem maratonu, prejem prave štartne številke, ogrevanje možganov, želja po zmagi oz. tekmovalnost, omejitev časa, raznolikost nalog za reševanje, konec maratona, zapis rezultatov, (razglasitev rezultatov). Pri tem pa so bili upoštevani še proaktivni spodbujevalci. Ti pa so predvsem logistično-organizacijskega vidika. To so npr. število nalog, število natisnjenih enakih nalog, število nalog glede na čas maratona, štartne številke, ki se nalepijo, pravila, zapisana simbolno, postavitev otokov v učilnici, uvedba Okrepčevalnice, poznavanje učencev, učne snovi in zahtevanih učnih ciljev, možnost izbire, samostojnost. Ko proaktivni spodbujevalci motivacije spodbudijo aktivne spodbujevalce motivacije učencev, lahko rečemo, da imamo v razredu visoko motivirane učence, ki so aktivni in v središču svojega učnega procesa.

Viri in literatura

Bregant, T. (2016). *Učenje ni igra*. Didakta junij–julij. Pridobljeno s: https://familylab.si/wp-content/uploads/2017/08/Ucenje-ni-igra_Didakta-2016.pdf.

Blažič, M. (2003). DIDATIKA. Novo mesto. Visokošolsko središče Novo mesto, Inštitut za raziskovalno in razvojno delo.

Centa, N., Hafner Jereb, M. (2020). *Razumevanje potreb posameznega delavca*. Ljubljana: HR&M december/januar.

Dweck, C. (2017). Mindset: *Changing the way you think to fulfil your potential.* Little, Brown Book Group. Pridobljeno s: https://www.bookdepository.com/Mindset-Carol-Dweck/9781780332000?pdg=dsa-19959388920:cmp-8862937091:adg-86528077382:crv-411135277650:pos-:dev-c&gclid=CjwKCAjwqML6BRAHEiwAdquMnafOVSY-oBjmP8naoI-dzK0jriwoCkYiduZolmnyo4i3KasEC6H9oRoCeIYQAvD_BwE.

Kolar Manfreda , V. (2016). *3. mednarodna konferenca o učenju in poučevanju matematike KUPM (2016). Zbornik izbranih prispevkov: Tehnike formativnega preverjanja znanja.* Brdo pri Kranju: Zavod RS za šolstvo. Pridobljeno s: https://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2016.pdf.

Kristanc, Manja (2016). *Učenje z razumevanjem ali učenje na pamet?* Pridobljeno s: https://zastarse.si/otroci/sola/ucenje-z-razumevanjem-ali-ucenje-na-pamet/.

Mink-tak, H., Wai-shing, L. (2008). *Classroom Managment. Creating a Positive Learning Environment.* China: Hong Kong University Press. Pridobljeno s: http://eds.a.ebscohost.com.nukweb.nuk.uni-lj.si/eds/ebookviewer/ebook/bmxlYmtfXzMyMjAzM19fQU41?sid=52722b33-d8b3-45a2-acd5-bd7909dbcda2@sessionmgr4008&vid=0&format=EB&rid=1.

Montessori, M. (1912). *The Montessori method. Scientific pedagogy as applied to child education in »The children's houses« with additions and revisions.* Frederick A. Stokes Company. Pridobljeno s: https://perso.telecom-paristech.fr/rodrigez/resources/PEDAGO/montessori_works.pdf.

Program osnovna šola. Matematika. Učni načrt (2011). Ljubljana: Ministrstvo RS za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo.

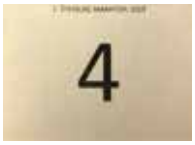
Učna tema: ARITMETIKA IN ALGEBRA (številski izrazi)

Učna enota: Številski izrazi, številski izrazi z oklepaji

Operativni učni cilji:

učenci:

1. na konkretnih primerih uporabljajo zakon o zamenjavi in zakon o združevanju (komutativnost in asociativnost) pri seštevanju in množenju,
2. izračunajo vrednost preprostega številskega izraza brez oklepajev,
3. izračunajo vrednost številskega izraza in upoštevajo vrstni red izvajanja računskih operacij,
4. izračunajo vrednost številskega izraza z oklepaji,
5. uporablja računske operacije pri reševanju besedilnih nalog.

A.	PRIPRAVA NA ŠTEVILSKI MARATON
A 1	Učencem se predstavimo. Danes smo za njihov razred organizirali Številski maraton 2019. Maraton poteka v treh delih: priprave na Številski maraton, Številski maraton in zaključek Številskega maratona. Številski maraton traja točno 25 minut. Naloga učencev je, da v tem času z reševanjem nalog poskusijo nabrati čim več kilometrov.
A 2	Naloge so označene s številkami in črkami. Izbirajo lahko med nalogami za 5 km/7 km/9 km/10 km. Naloge za 5 km so najmanj zahtevne, najbolj zahtevne pa so naloge za 10 km. Če učencem uspe rešiti vse naloge, lahko naberejo največ 100 km. Takrat dobijo dodatno nalogo.
A 3	Učence prosimo, da na mizi pripravijo samo karo zvezek za matematiko, svinčnik, radirko in rdečo barvico. V zvezek prepišejo naslov iz table Številski maraton. Naloge rešujejo v zvezek. To pomeni, da morajo imeti v zvezku napisane tudi vse številske izraze. Vedno si napišejo, katero nalogo so reševali (npr. 5 A). Z učenci naredimo primer na tabli.
A 4	Sledi razdelitev štartnih številk. Vsak učenec dobi naključno številko na nalepki, ki si jo nalepi na sredino majice. Velikost številke ni pomembna.
A 5	S podelitvijo štartnih številk učenci uradno postanejo tekmovalci na Številskem maratonu, zato se morajo strinjati z upoštevanjem štirih pravil. Učenci poskusijo pravila najprej sami 'prebrati'.  **Slika 3:** Primer štartne številke

Pravilo 1: Pri številskih izrazih imata množenje in deljenje vedno prednost pred seštevanjem in odštevanjem. 	**Pravilo 2:** Če imamo dve enakovredni računski operaciji, računamo po vrsti; od leve proti desni.
Pravilo 3: Računanje na pamet ni dovoljeno. Vsak rezultat mora imeti zapisan postopek reševanja. 	**Pravilo 4:** Na Številskem maratonu upoštevamo pravilo fair playa: kakršnakoli goljufija ali prepisovanje rezultatov od sodelujočih na maratonu je prepovedano. Če boste nalogo rešili napačno, vam kilometre za to nalogo odštejemo.

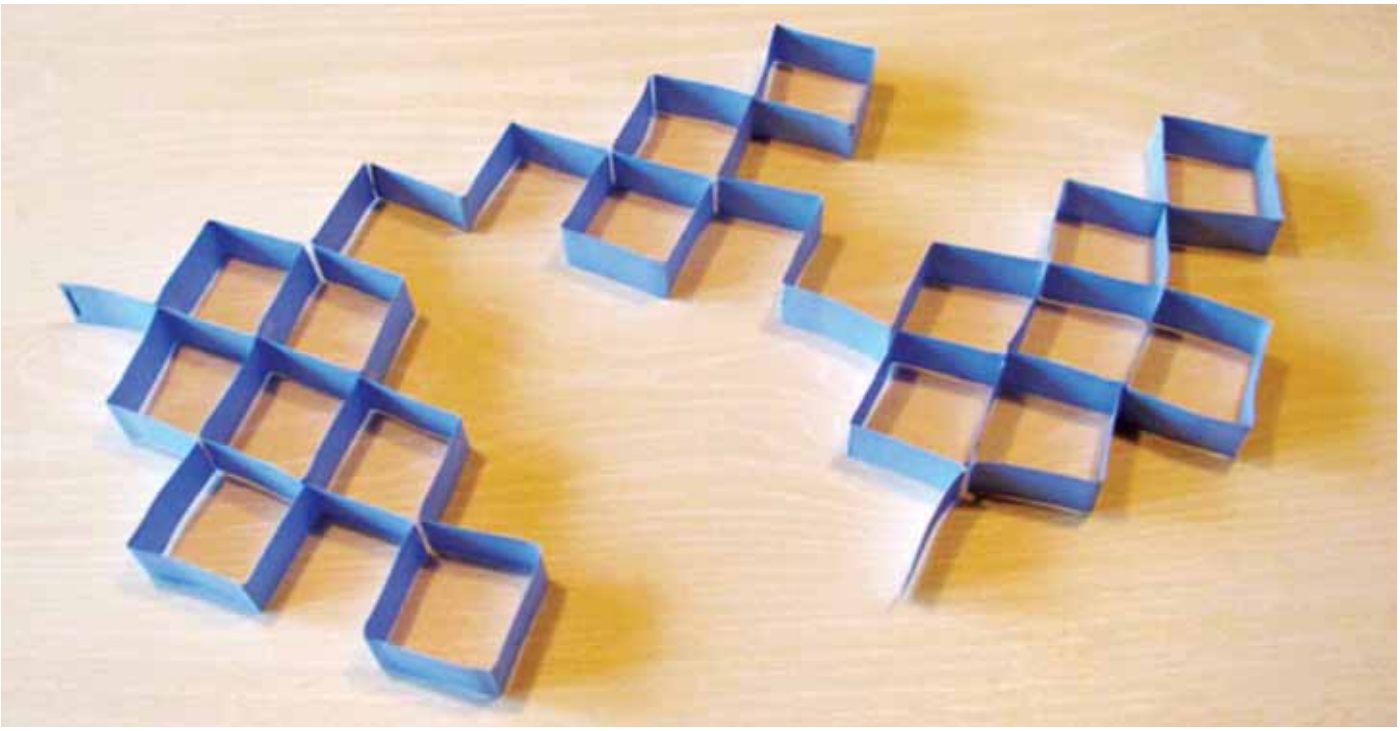
A 6	Na maratonu imamo tudi Okrepčevalnico. Namenjena je tistim, ki imajo težavo pri reševanju nalog ali pa potrebujejo dodatno spodbudo, pohvalo.
A 7	Pred začetkom maratona imamo z učenci še hitro ogrevanje možganov. Učence prosimo, da se postavijo v vrsto pred tablo. Ogrevanje poteka tako, da če se učenci s trditvijo strinjajo, pred tablo počepnejo, drugače naprej stojijo (Slika 4).

5 • 5 = 25	Vsota je rezultat operacije odštevanja.
7 • 4 = 21	Količnik je rezultat operacije deljenja.
8 • 8 = 64	Zmnožek je rezultat množenja.
9 • 3 = 28	Rezultat odštevanja je deljenec.
6 • 2 = 10	
100 : 10 = 12	
45 : 5 = 9	

Slika 4: Trditve za ogrevanje možganov

B.	**ŠTEVILSKI MARATON 2019**
B 1	Številski maraton 2019 se uradno začne.
B 2	Učenci samostojno prihajajo po naloge, ki so postavljene na robu učilnice, in jih rešujejo v zvezek. Učenci, ki predhodno zaključijo vse naloge, postanejo prostovoljci. Njihova naloga bi bila, da začnejo s pripravo nalog za Številski maraton 2020. To pomeni, da dobijo prazen listek, kamor napišejo nalogo, ki si jo sami zamislijo. Sami tudi ocenijo, koliko kilometrov je vredna naloga. Naloge za vsako raven znanja po Gagneju. *Učitelj/študentka* učencem pomaga v Okrepčevalnici, ki je premična. Učitelj spremlja delo učencev; če si izbirajo različne naloge, če zapisujejo postopke, če pravilno označujejo naloge, če si izbirajo primerno zahtevne naloge. Učitelj preprečuje nastanek zmede; npr. če je na otoku, kjer si učenci izbirajo naloge, prevelik zastoj, učitelj doda še en otok z enakimi nalogami.

C.	**ZAKLJUČEK ŠTEVILSKEGA MARATONA**
C 1	Učenci prenehajo z reševanjem. S sosedom si zamenjajo zvezek. Učenci drug drugemu seštejejo kilometre, ki so jih dosegli. Vsoto doseženih kilometrov si pridejo vpisat v preglednico na plakatu na šolski tabli, kjer so že zapisane vse njihove štartne številke. V preglednici je prazen prostor, kamor učiteljica po pregledu nalog vpiše minus kilometre za napačno rešene naloge. Slika plakata je priložena pri analizi učne ure, kjer se tudi že vidijo vpisani rezultati.
C 2	Za konec z učenci naredimo še analizo počutja sodelovanja na Številskem maratonu. Učenec prilepi svojo štartno številko v tisti kvadrant v pravokotniku počutja, ki se sklada z njihovim počutjem na Številskem maratonu. Pravokotnik počutja je vključen v analizo.



Pregibanje papirja in učenje s preiskovanjem

Dr. Adriaan Herremans
Univerza v Antwerpnu, Belgija

Izvleček

V članku predstavimo, s katerimi matematičnimi vsebinami se lahko srečamo pri pregibanju papirnatih trakov. Obravnavali bomo naloge s štetjem, geometrijo in kompleksnimi števili. Članek vsebuje tudi slike v pomoč vaši matematični intuiciji in nekaj nalog, s katerimi lahko to intuicijo izostrite.

Ključne besede: pregibanje papirja, učenje s preiskovanjem

Paper folding and Inquiry Based Learning

Abstract

In this article we elaborate on the mathematics you can encounter or discover by folding paper strips. We will discuss counting problems (§ 2), geometry (§ 3) and complex numbers (§ 4). We provide figures to help your mathematical intuition and some exercises in order to sharpen this intuition.

Keywords: paper folding, inquiry based learning

Uvod

Učenje s preiskovanjem pridobiva na prepoznavnosti v učnih načrtih po vsem svetu. Na Nizozemskem učni načrti omenjajo raziskovalne kompetence učencev, starih od 17 do 18 let, že več kot dve desetletji pri številnih predmetih. Učenci bi morali biti zmožni:

1. *načrtovati reševanje raziskovalnega problema s pomočjo zbiranja, organiziranja in obdelave informacij,*
2. *pripraviti, izvesti in evalvirati raziskovalni problem z matematično vsebino,*
3. *poročati o svojih rezultatih in jih obravnavati z različnih vidikov.*

Učitelj, ki želi pri pouku matematike razvijati navedene kompetence, ima lahko kar nekaj težav pri iskanju primernega gradiva, ki je za učence hkrati zanimivo in izvedljivo.

Na povezavi http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28177/ boste našli učni list, ki ga lahko uporabite v razredu. Večino odgovorov na naloge na učnem listu lahko najdete v članku oz. jih razberete iz njega. **Glede na to, da je praksa najboljši način učenja matematike, vam svetujemo, da vzamete nekaj papirnatih trakov in sami naredite nekaj pregibov med branjem članka.**

Zahvala

Zahvaljujem se Johanu Deprezu za koristne komentarje, popravke in dovoljenje za uporabo nekaterih fotografij.

1. Pregibanje in razpiranje papirnatih trakov

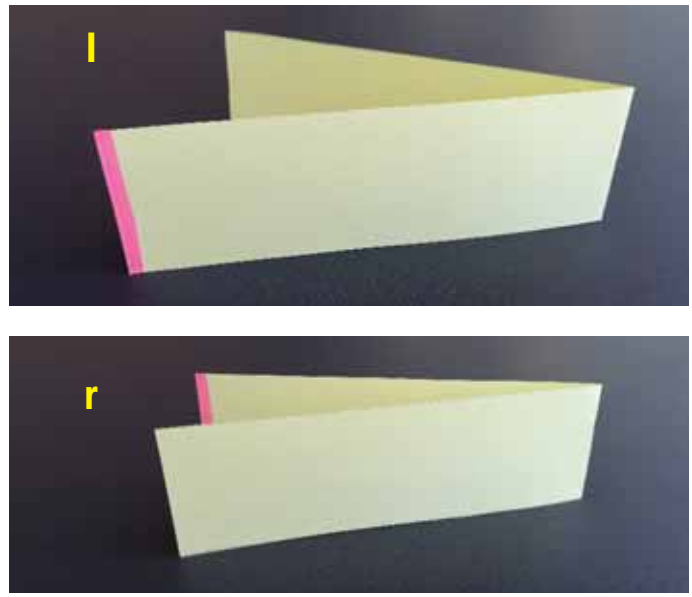
Začeli bomo z nekaterimi osnovnimi definicijami in razlagami.

Za boljšo predstavljivost vam svetujemo, da označite konec traku na eni strani, npr. z roza črto, nato pa trak položite na mizo tako, da je ta črta spredaj levo (glejte Sliko 1). Vedno bomo prepognili desno stran (prepognjenega) traku proti levi strani. Obstajata dva načina:

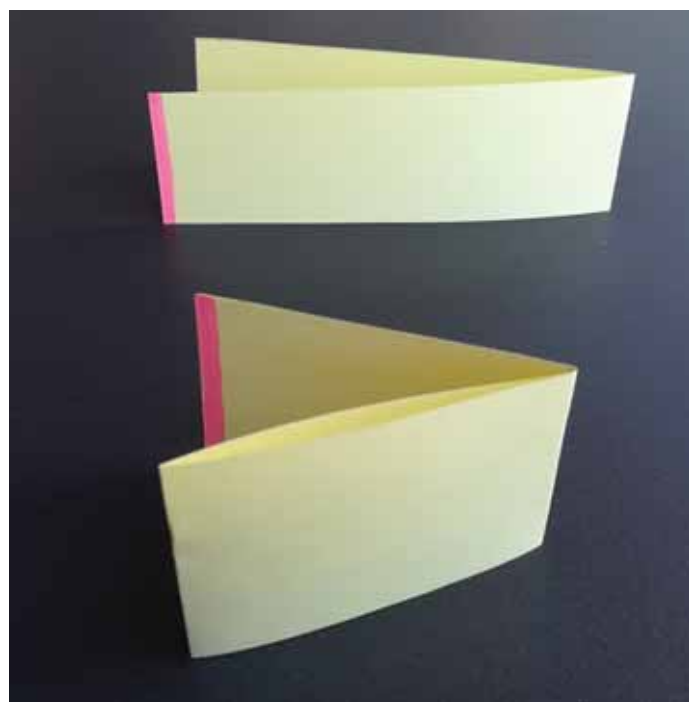
- Pregibanje stran od sebe. Desna stran traku bo pristala *za* levo stranjo (Slika 1). To označujemo z malo črko **l.**
- Po analogiji definiramo tudi pregibanje proti desni. V tem primeru bo desna stran traku pristala *pred* levo stranjo (Slika 1). To označujemo z malo črko **r**.

Bodite pozorni, da v obeh primerih črka pove tudi, katera polovica traku bo po prepogibanju spredaj.

To pregibanje lahko ponovite. Najprej lahko izvedete **l** in nato **r**. Za izvedbo drugega pregiba si zamislite, da je prepognjeni trak papirnati trak polovične dolžine. Ta trak lahko prepognete tako, da desna stran pristane spredaj (glejte Sliko 2). Tako lahko na enoličen način definiramo **zaporedje pregibov** kot zaporedje **l**-jev in **r**-jev, brano z leve proti desni. Slika 2 prikazuje dva koraka pregibanja, s katerima izvedemo pregibanje **l r**.

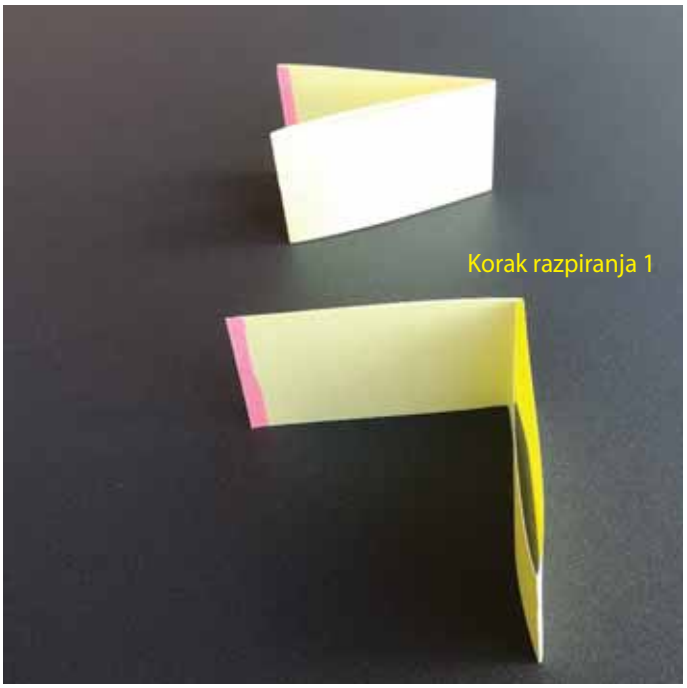


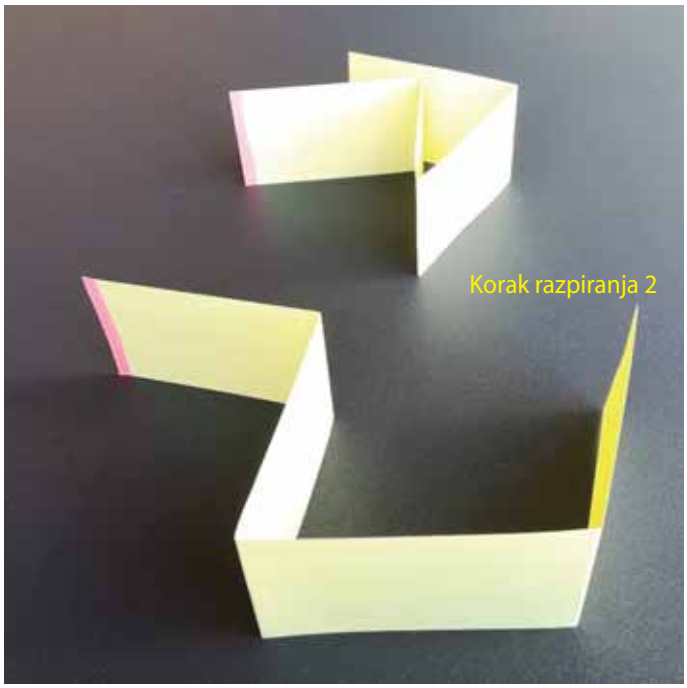
Slika 1: Pregibanje papirnatega traku.



Slika 2: Dva koraka pregibanja **l r.**

Začnite s prepognjenim papirnatim trakom, ki ga razprete. V vsakem **koraku razpiranja** trak razprete na desnem koncu tako, da polovico traku zasukate za 90°. Na ta način podvojite vidno dolžino traku. Ko izvedete toliko korakov razpiranja, kot je pregibov, ustvarite vzorec, ki spominja na labirint. Med vsakim zasukom nastanejo enako oddaljeni odseki. Če se dogovorimo, da je začetek pri roza črti horizontalno proti desni, potem dobimo enolično postavljen labirint. Slika 3 prikazuje dva koraka razpiranja v primeru **lr**. Na levi strani razpremo trak tako, da sprednjo polovico zasukamo, da dobimo pot v obliki črke L, sestavljeno iz dveh odsekov. Na desni strani razpremo to obliko črke L, s čimer dobimo pot, ki je sestavljena iz štirih odsekov.





Sliki 3a in b: Koraka razpiranja **lr.**

Če se sprehodite od začetka do konca labirinta, lahko zapišete vzorec s pomočjo zaporedja ovinkov, ki jih morate prehoditi. Ker so vsi ovinki pod kotom 90°, lahko preprosto zapišete veliki tiskani črki L ali R, odvisno od tega, ali ste zavili levo ali desno. Zaporedji črk L in R ter labirint imenujemo **zaporedje sprehodov**, ki je povezano z zaporedjem pregibov. Na Sliki 3b lahko vidite, da je rezultat razpiranja **lr zaporedje sprehodov** RLL.

V tem članku bomo raziskovali nekatere lastnosti takšnih **zaporedij sprehodov**. Zato je pomembno, da tudi sami ustvarite nekaj zaporedij pregibov in sprehodov. V preglednici 1 smo navedli vsa možna zaporedja pregibanja z enim, dvema in tremi pregibi.

Naloga 1

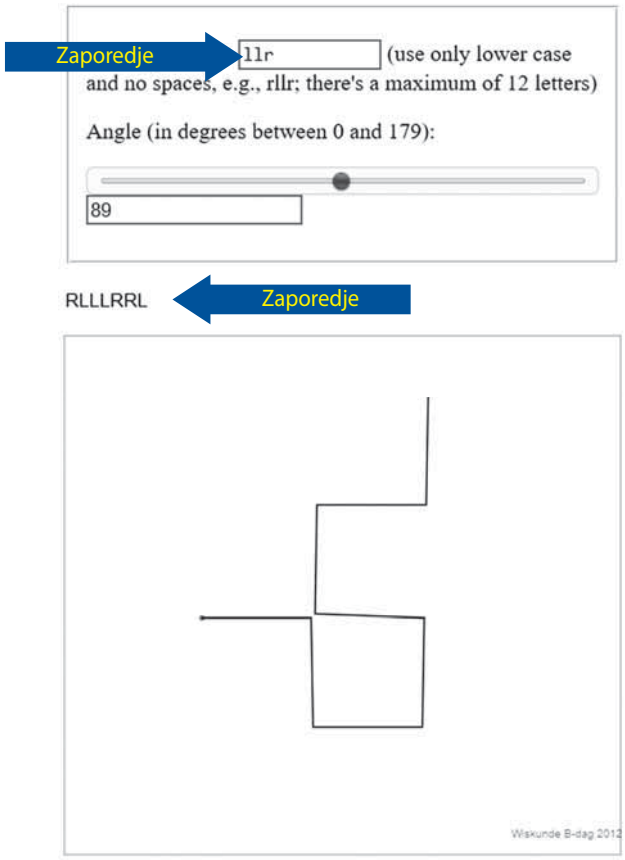
Preizkusite nekaj zaporedij iz preglednice 1 s pregibanjem in razpiranjem papirnatih trakov. Ustvarite podobno preglednico, sestavljeno iz šestnajstih (16) različnih zaporedij pregibov, ki jih dobimo s štirimi pregibi.

Aplet [1] lahko uporabite kot digitalno kontrolo. Ta pripomoček je priročen, če želite preizkusiti zaporedja z večjim številom pregibov (do 12). Preprosto natipkajte zaporedje pregibov in dobili boste zaporedje sprehodov, tako zaporedje črk kot sliko. Na Sliki 4 smo preizkusili zaporedje pregibanja **llr**. Uporabili smo kot 89° pri vsakem ovinku, saj lahko tako natančneje spremljamo zaporedje sprehodov, še posebej pri stičnih točkah.

Preglednica 1: Zaporedja pregibov in pripadajoča zaporedja sprehodov.

Zaporedje pregibov	Zaporedje sprehodov (ovinki)
l	L
l l	L L R
l r	R L L
l l l	L L R L L R R
l l r	R L L L R R L
l r l	L R R L L L R
l r r	R R L L R L L

Zaporedje pregibov	Zaporedje sprehodov (ovinki)
r	R
r r	R R L
r l	L R R
r r r	R R L R R L L
r r l	L R R R L L R
r l r	R L L R R R L
r l l	L L R R L R R



Slika 4: Posnetek zaslona na spleti strani [1].

2. Naloge s štetjem

Ko boste razprli papirnati trak po tem, ko ste izvedli zaporedje pregibov, boste videli, da so na traku številne pregibne črte. Ko boste iz tega naredili zaporedje sprehodov, bodo vsi povezovalni odseki ležali bodisi horizontalno bodisi vertikalno.

Če si ogledate preglednico 1, boste morda opazili enakomerno porazdelitev števila pregibnih črt.

Trditev 1

Razprt trak po vsakem zaporedju pregiba (ali pripadajočem zaporedju sprehodov) z n pregibi vsebuje natančno 2^n-1 pregibnih črt (oz. ovinkov).

To lahko preverite v preglednici 1 za $n = 2$ in 3 ter v svoji preglednici pri nalogi 1 za $n = 4$.

Naloga 2

Dokažite trditev 1 z uporabo popolne indukcije.

Po trditvi 1 sta prvi in zadnji odsek zaporedja sprehodov vedno pravokotna. Dejansko imamo *liho* število ovinkov in pri vsakem ovinku pod kotom 90° spremenimo položaj iz horizontalnega v vertikalni ali obratno.

Zanimiva naloga štetja je, da si pogledamo verjetnost, da je zaporedje črk L in R zaporedje sprehodov, ki ga lahko izvedemo s pregibanjem papirnatega traku. Ko razmišljate o možnem številu zaporedij pregibov s točno določenim številom n pregibov in to primerjate s teoretičnim številom zaporedij z L in R dolžine 2^n-1, ugotovite, da je precej izjemno.

Npr. verjetnost, da lahko s pregibanjem izvedete naključno zaporedje sedmih črk L in R, je enaka $\frac{1}{16}$. Iz preglednice 1 vidimo, da obstaja točno 8 zaporedij sprehodov od možnih $2^7 = 128$ zaporedij. Potemtakem lahko sklepamo, da je verjetnost izvedbe zaporedja enaintridesetih (31) črk L in R s pregibanjem enaka $\frac{1}{67\,108\,864}$. Iz tega lahko izpeljemo splošno formulo. Naj spomnimo, da je smiselno opazovati samo zaporedja dolžine 2^n-1, saj je v nasprotnem primeru nemogoče ustvariti zaporedje sprehodov (glejte trditev 1). Velja naslednja trditev:

Trditev 2

Predpostavimo, da lahko q zapišemo kot 2^n-1 za $n \in \mathbb{N}$. Verjetnost, da je naključno zaporedje q črk R in L zaporedje sprehodov po ovinkih, ki je izvedljivo, je enaka $\frac{2^n}{2^q} = \frac{1}{2^{q-n}}$, v nasprotnem primeru pa je enaka nič.

Če si ogledamo preglednici 1 in nalogo 1, lahko opazimo še eno lastnost. Če preštejete število L-jev in R-jev, boste opazili, da se v *vsakem* zaporedju sprehodov razlikuje samo za eno črko. Še več, natanko polovica zaporedij sprehodov dolžine q ima $\frac{q+1}{2} = 2^{n-1}$ L-jev in $\frac{q-1}{2}$ R-jev. Druga polovica je sestavljena iz $\frac{q+1}{2}$ R-jev. Ko enkrat ugotovimo pravilo za ustvarjanje zaporedij sprehodov, si lahko znova pogledamo, kolikšna je verjetnost, da je naključno zaporedje res zaporedje sprehodov? Dobimo spodnjo trditev.

Trditev 3

Predpostavimo, da lahko q zapišemo kot $2^n - 1$ za $n \in \mathbb{N}$ in da je $p = \frac{q+1}{2} = 2^{n-1}$. Imamo dano zaporedje črk L in R dolžine q, pri čemer je natančno $\frac{q+1}{2}$ L-jev oz. R-jev. Verjetnost, da je dano zaporedje sprehodov, je enaka $\frac{2^{n-1}}{\binom{q}{p}} = \frac{p}{\binom{q}{p}}$, pri čemer je $\binom{q}{p}$ binomski koeficient.

Torej je verjetnost, da je zaporedje sedmih črk s tremi (3) ali štirimi (4) L-ji zaporedje sprehodov, je enaka $\frac{4}{35}$. V primeru zaporedja enaintridesetih (31) črk s petnajstimi (15) ali šestnajstimi (16) L-ji, je ta verjetnost enaka $\frac{16}{300\,540\,195}$.

3. Zveza med zaporedjem pregibov in zaporedjem sprehodov

Da bi odkrili razmerje med zaporedjem pregibov in sprehodov, si bomo ogledali primer, tj. zaporedje pregibov **llr**. Natančneje, ogledali si bomo postopek razpiranja papirnatega traku.

Prvo razpiranje je podobno koraku razpiranja 1 na Sliki 3 na levi. Opazimo več stvari:

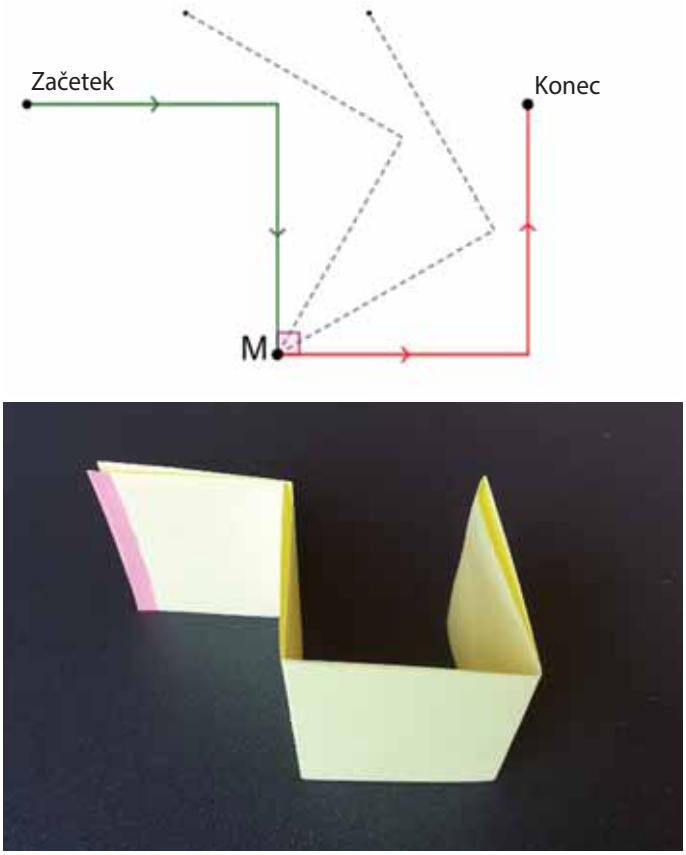
- izvedli smo zasuk za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca okoli končne točke prepognjenega traku na desni strani,

- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehoda R,
- to zaporedje sprehoda se ujema z zaporedjem pregiba **r.**

Drugo razpiranje lahko vidite na Sliki 5, ki poleg diagrama vsebuje tudi fotografijo. Na začetku koraka razpiranja 2 smo imeli samo zeleni del Slike 5, po koncu drugega razpiranja pa smo imeli zeleni in rdeči del. Zaradi jasnosti smo na vsakem odseku označili smer sprehoda in dodali prekinjeno črto, ki prikazuje premikanje dejanskega razpiranja.

Opazimo številne podobnosti s prvim korakom razpiranja:
- izvedli smo zasuk za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke M,
- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehodov RLL,
- to zaporedje sprehodov se ujema z zaporedjem pregibov **Ir.**

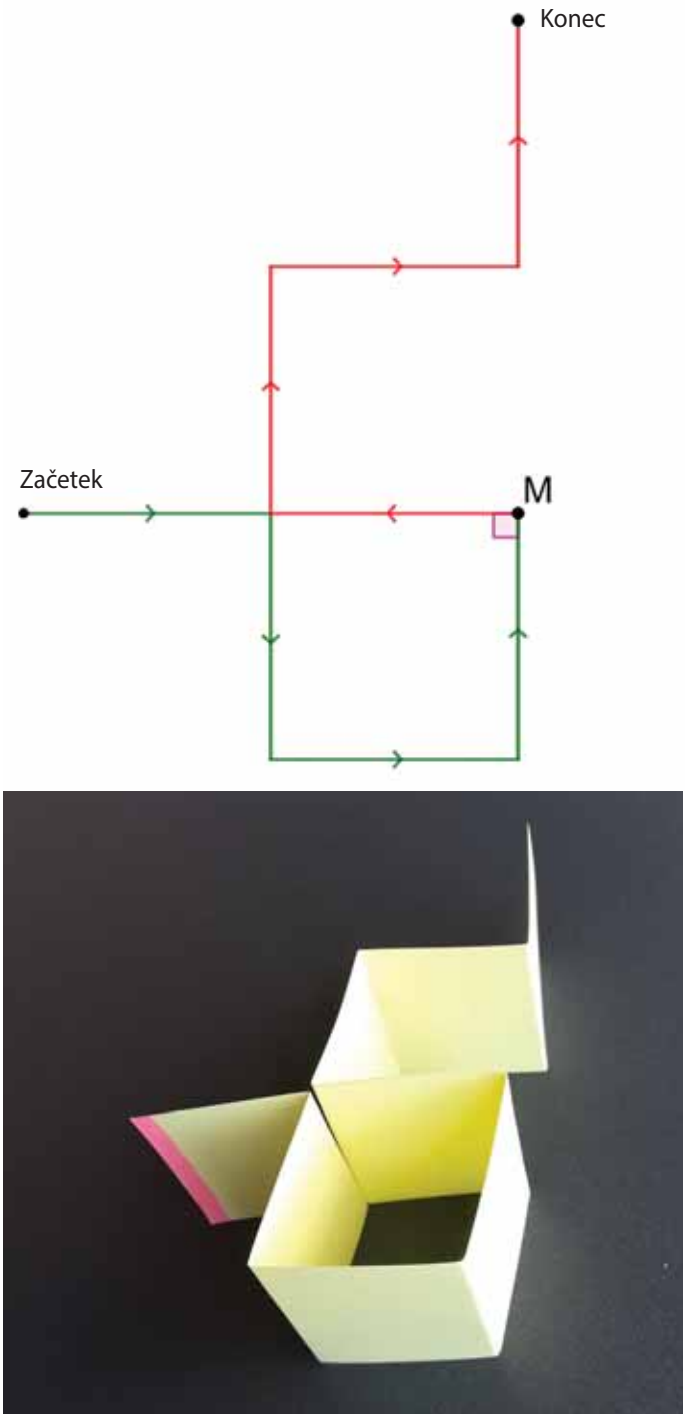
S pomočjo smeri zasuka okoli točke M lahko izpeljemo jasno zvezo med zaporedjem sprehodov pred razpiranjem in po njem. Odkrijemo neke vrste asimetrijo: sprehod po rdeči poti od točke M do končne točke je enako (oz. ima enake črke) kot sprehod po zeleni poti od točke M do začetne točke (glejte Sliko 5). Ta ugotovitev je ključnega pomena za razumevanje razmerja med zaporedjema pregibov in sprehodov.



Slika 5: Korak razpiranja 2 **Ir.**

Zadnji korak v postopku razpiranja je prikazan na Sliki 6 in nam je znan. Zopet vidimo neke vrste asimetrijo med zeleno in rdečo potjo okoli osrednje točke razpiranja, imenovane M: sprehod po zeleni poti od točke M do začetne točke se ujema s sprehodom po rdeči poti od točke M do končne točke.

Poleg tega opazimo naslednje:
- izvedli smo zasuk za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke M,
- dobili smo trak, ki je enak zaporedju sprehodov RLLLRRL,
- to zaporedje sprehodov se ujema z zaporedjem pregibov **IIr.**



Slika 6: Korak razpiranja 3 **IIr.**

V trditvah 4-6 bomo opisali nekatere splošne lastnosti, ki smo jih razbrali iz tega dejanja razpiranja. Predlagamo vam, da tudi sami naredite nekaj pregibov papirja, da boste bolje razumeli te ugotovitve. V preglednici 2 bomo poiskali konkreten primer povezave med zaporedjem pregibov in sprehodov in kako z nekaterimi podatki zapišemo zaporedji.

Trditev 4

V vsakem zaporedju sprehodov je okoli središčne črke prisotna asimetrija. Če preberemo črke z leve proti desni, pri čemer začnemo desno od središčne črke, dobimo nasprotne črke kot v zaporedju, prebranem z desne proti levi z začetkom levo od središčne črke.

V našem primeru zaporedja pregibanja **llr** dobimo pripadajoče zaporedje sprehodov RLLLRRL (preglednica 1). Če začnemo desno od središčne (podčrtane) črke L in beremo z leve proti desni, dobimo zaporedje RRL. Če to primerjate z zaporedjem, ki ga dobite z desne proti levi z začetkom levo od središčne črke L, dobite nasprotno zaporedje LLR. Ta asimetrija je opazna v vseh zaporedjih sprehodov (glejte nalogo 3).

Dokaz ugotovitve 4 najdemo v opisu korakov razpiranja. Dokaz temelji na dejstvu, da je vsako zaporedje sprehodov rezultat zasuka okoli končne točke, pri čemer se dolžina traku podvoji, prvi del pa ostane nespremenjen.

Naloga 3

Preverite trditev 4 v preglednici 1 in v svoji preglednici pri nalogi 1.

Trditev 1 pravi, da v primeru n pregibov na papirnatem traku nastane $2^n - 1$ pregibnih črt. Pri tem se poraja vprašanje: kateri pregib je ustvaril kateri ovinek (ovinke) ali pregibno črto (črte)? Če ovinke oštevilčimo z leve proti desni glede na pripadajočo črko v zaporedju sprehodov, lahko trdimo, da se prva črka zaporedja pregibov vedno ujema z ovinkom (ali pregibno črto) na položaju 2^{n-1} (v našem primeru **llr**, $n = 3$).

Z uporabo popolne indukcije lahko ugotovite, da se drugi pregib ujema z dvema pregibnima črtama na položajema 2^{n-2} in $3 \cdot 2^{n-2}$: prva črta ima enako črko kot druga črka v zaporedju pregibanja, druga črta pa ima nasprotno črko (glejte drugo pregibanje v preglednici 2).

Preostale pregibne črte v našem primeru je ustvaril zadnji pregib, pravzaprav je v našem primeru vse lihe ovinke ustvaril tretji pregib. Ti ovinki zopet ustvarijo izmenični vzorec, ki se začne z enako črko kot tretji pregib, tj. s črko R (glejte tretje prepogibanje v preglednici 2).

Preglednica 2: Razmerje med zaporedjem pregibov in sprehodov.

številka (položaj) ovinka	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1. pregibanje (l)				L			
2. pregibanje (l)		L				R	
3. pregibanje (r)	R		L		R		L
zaporedje sprehodov	R	L	L	L	R	R	L

Ugotovitev lahko posplošimo. Nakazuje, da lahko rekonstruiramo celotno zaporedje sprehodov (in zaporedje pregibov), če poznamo le n od 2^n-1 črk, pod pogojem, da poznamo črko ovinka za vsak večkratnik števila dve (ali lihi večkratnik). Torej, če poznate črko na položaju 2^{n-1}, eno črko pri lihem večkratniku števila 2^{n-2}, eno črko pri lihem večkratniku števila 2^{n-3},… in eno črko števila na lihem položaju, potem lahko rekonstruirate celotno zaporedje pregibov in sprehodov. Zgornjo razlago lahko povzamemo v naslednji ugotovitvi.

Trditev 5

Predpostavimo, da papirnati trak prepognete n-krat. Ovinke (ali črke v zaporedju sprehodov) na položajih, ki so lihi večkratniki števila 2^{n-r}, je ustvaril r-ti pregib traku ($1 \leq r \leq n$).

Potemtakem je v zaporedju sprehodov nemogoče imeti štiri L-je ali štiri R-je v vrsti, saj vse liho oštevilčene črke prihajajo iz zadnjega pregiba in se izmenjujejo.

To nakazuje, da z razpiranjem in z oblikovanjem zaporedja sprehajanja nikoli ne naletimo na težave: nemogoče je, da bi se odseki prekrivali. Nasprotno, odseki v zaporedju sprehodov se pogosto stikajo (v ovinku). To se zgodi, kadar imamo v zaporedju sprehodov tri L-je ali tri R-je v vrsti.

Naloga 4

Ustvarite nekaj preglednic, podobnih preglednici 2, npr. za zaporedja pregibov **lll**, **lrl** in **llr**.

Zadnja ugotovitev opisuje vse korake razpiranja.

Trditev 6

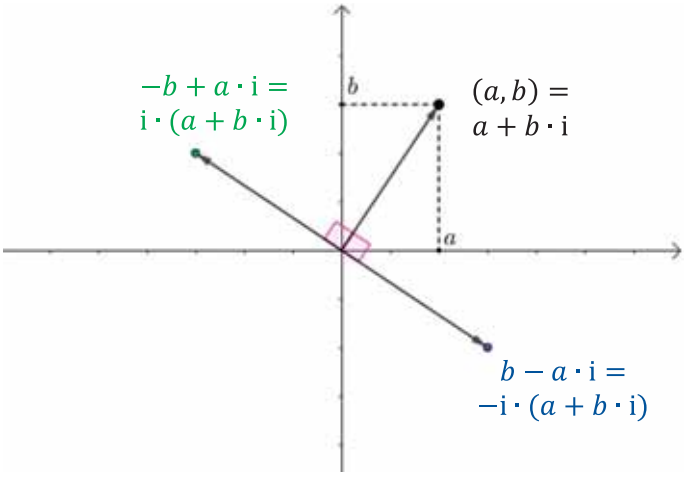
Predpostavimo, da smo papirnati trak prepognili v skladu z zaporedjem pregibanja dolžine n. Po r korakih razpiranja traku dobimo zaporedje sprehodov, ki se ujema z zaporedjem pregibov, sestavljenih iz zadnjih r črk prvotnega zaporedja ($1 \leq r \leq n$).

To smo opazili v našem primeru, vendar vas spodbujamo, da to preverite še z drugim primerom. Ko smo razprli papirnati trak, ki je bil prepognjen v skladu z **llr**, smo naleteli na zaporedja sprehodov, ki so skladna z zaporedjem pregibov **r** po enem koraku razpiranja, **lr** po dveh korakih razpiranja in **llr** po treh korakih razpiranja.

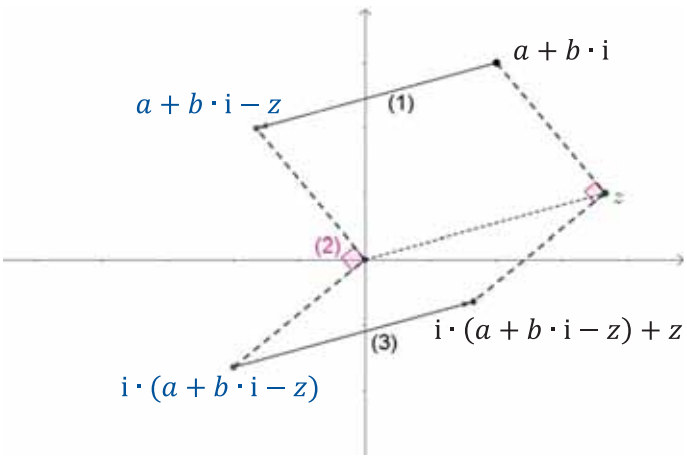
Dejstvo, da se v vsaki vrstici preglednice 2 prva velika tiskana črka ujema z malo črko pregiba, izhaja iz tega, da se okoli končne točke trak razpira v smeri urnega kazalca (oz. v nasprotni smeri urnega kazalca), če je pripadajoč pregib **l** (oz. **r**). Posledično lahko sklepamo, da je prva črka zaporedja pregibanja enaka središčni črki zaporedja sprehodov (glejte preglednico 1).

Naloga 5

Izpeljite zaporedje sprehodov in pregibov modrega lika na začetku članka.



Slika 7a: Zasuk okoli izhodišča za 90° v kompleksni ravnini



Slika 7b: Zasuk s središčem z

4. Kompleksna ravnina

Nazadnje si bomo ogledali izrek, ki pove točno lego končne točke zaporedja sprehodov, kadar je zaporedje pregibov znano. V ta namen bomo uporabili kompleksna števila. Spomnimo se, da lahko množico kompleksnih števil $\mathbb{C} = \{ a + b \cdot \mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}, \mathrm{i}^2 = -1\}$ določimo s točkami $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ v realni ravnini. Če si ogledate zasuk okoli *izhodišča* za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca, vidite, da je slika kompleksne točke $a + b \cdot \mathrm{i}$ enaka množenju kompleksnega števila z i (glejte Sliko 7a). Torej je poljubno kompleksno število $a + b \cdot \mathrm{i}$ s pomočjo rotacije preslikano v kompleksno število $\mathrm{i} \cdot (a + b \cdot \mathrm{i})$. Po analogiji je zasuk okoli izhodišča za 90° v smeri urnega kazalca enak množenju z -i (glejte Sliko 7a). Za lažje razumevanje smo narisali vektorje od izhodišča do kompleksnih števil.

Naloga 6

Izpeljimo, da s formulo $\mathrm{i} \cdot (a + b \cdot i - z) + z$ dobimo zasuk kompleksnega števila $a + b \cdot \mathrm{i}$ za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca okoli kompleksnega števila z. Oglejte si paralelograme na Sliki 7b: zasuk lahko razumemo kot zaporedje treh togih preslikav: (1) preslikava iz središča zasuka z v izhodišče, (2) zasuk v nasprotni smeri urnega kazalca okoli izhodišča in (3) inverz preslikave (1).

Takšni izračuni s kompleksnimi števili za izvedbo rotacij so uporabno orodje za določitev točne lokacije končnih točk zaporedij sprehodov.

Izrek

*Dan imamo trak dolžine 2^n in zaporedje pregibov dolžine n. Če zaporedje sprehodov začnemo pri izhodišču in poteka vodoravno proti desni je lega končne točke enaka kompleksnemu številu $(1 + i)^{\#\mathbf{l}}$, pri čemer sta #**l** in #**r** števili **l**-jev oz. **r**-jev v zaporedju pregibov.*

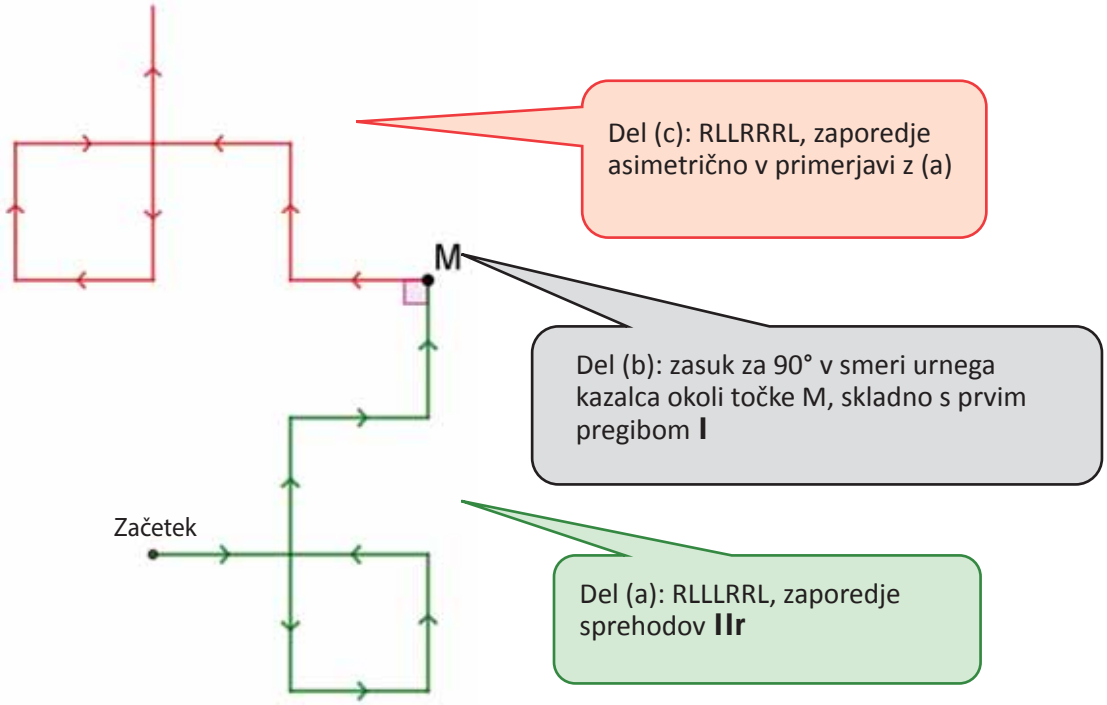
Upoštevajte, da je #**l** + #**r** = n. Nadalje, če izberemo dolžino 2^n, so vsi odseki med sosednjimi ovinki dolžine 1. Izrek dokažemo s pomočjo izpeljave iz n. Za $n = 1$ imamo le dve možni zaporedji pregibov: **l** in **r**. Pripadajoči zaporedji sprehodov imata končni točki 1 + i in 1 – i, torej formula velja za $n = 1$.

Predpostavimo, da formula velja za zaporedja pregibov dolžine k in dokažimo, da formula velja za vsa zaporedja dolžine $k + 1$. Katerokoli zaporedje pregibov dolžine $k + 1$ (temu rečemo pregibanje $k + 1$) lahko obravnavamo kot eno črko (**l** ali **r**), ki ji sledi zaporedje pregibov dolžine k. Zaporedje pregibov dolžine $k + 1$ utemeljimo z #**l** in #**r** kot števili **l**-jev in **r**-jev ter predvidevamo, da se zaporedje pregibov začne s črko **l** (argument je podoben v primeru začetne črke **r**). Ta argument je prikazan še enkrat z zaporedjem pregibov **lllr** na Sliki 8, vendar je zelo podoben opisu zadnjega koraka razpiranja, kot je pojasnjen v 3. poglavju.

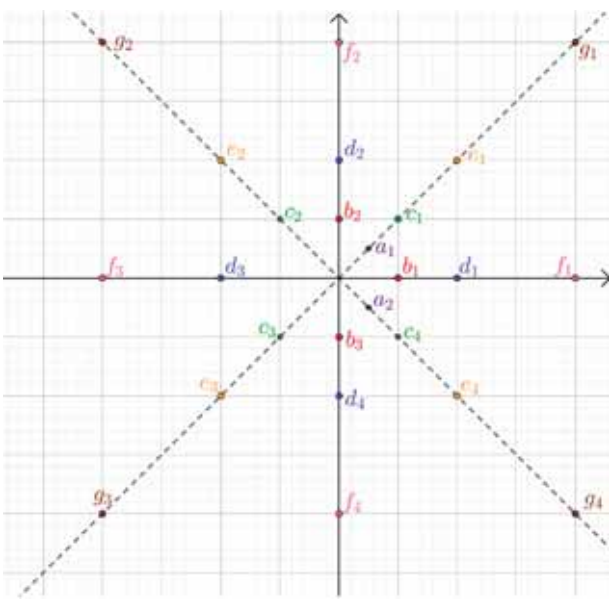
Glede na ugotovitve 4, 5 in 6 lahko zaporedje sprehodov razdelimo na tri dele: (a) zaporedje sprehodov za pregibanje k, ki ga dobimo z izpustitvijo prve črke **l** (ugotovitev 6), (b) središčne črke L (ugotovitev 5), (c) čemur sledi natančna kopija zaporedja sprehodov v (a) po zasuku za 90° *v nasprotni smeri urnega kazalca* okoli končne točke zaporedja sprehoda k (to je asimetrija iz trditve 4). V primeru Slike 8 je končna točka **lllr** ustvarjena iz zasuka izhodišča v smeri urnega kazalca okoli končne točke **llr**. S pomočjo induktivno oblikovane hipoteze vemo, da je končna točka poti k (dela (a)) enaka $z_k = (1 + \mathrm{i})^{\#\mathbf{l}-1} \cdot (1 - \mathrm{i})^{\#\mathbf{r}}$. Končna točka pregiba $k + 1$ je torej zasuk izhodišča za 90° v smeri urnega kazalca okoli točke z_k. S pomočjo naloge 6 ugotovimo, da je ta končna točka enaka $-\mathrm{i} \cdot (0 - z_k) + z_k = (1 + \mathrm{i})\, z_k = (1 + \mathrm{i})^{\#\mathbf{l}} \cdot (1 - \mathrm{i})^{\#\mathbf{r}}$. ■

Ko kompleksna števila v formuli izreka zapišemo v polarni obliki, dobimo $\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\#\ell} \cdot \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{\#r}$. Z uporabo Moivrove formule lahko poenostavimo ta izraz in dobimo $\sqrt{2}^n(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$, pri čemer je $\theta = (\#\ell - \#r)\frac{\pi}{4}$. Torej, če je papirnati trak dolg 2^n in si ogledate zaporedje sprehodov po n pregibih, končna točka *vedno* leži na razdalji $2^{n/2}$ od začetne točke. Nadalje, če vzamemo izhodišče kot začetek, obstajajo samo štiri možnosti za končno točko pregibanja n (za $n > 2$):

- če je n sodo število, potem je tudi $\#\ell - \#r$ sodo in $(\#\ell - \#r)\frac{\pi}{4}$ je večkratnik $\frac{\pi}{2}$. Štiri možne končne točke za $n > 2$ so štiri točke na oseh v kompleksni ravnini na razdalji $2^{n/2}$;
- če je n liho število, potem je tudi #**l** - #**r** liho. Za $n > 2$ dobimo štiri možnosti v kompleksni ravnini, tj. štiri točke na simetralah kvadrantov na razdalji $2^{n/2}$.



Slika 8: Zaporedje sprehodov **IIIr** (kot v dokazu izreka).



Slika 9: Možne končne točke za $1 \leq n \leq 7$.

Na Sliki 9 smo narisali možne končne točke za $1 \leq n \leq 7$. Točke z oznako a se ujemajo z $n = 1$, točke z oznako b z $n = 2$, …, točke z oznako g z $n = 7$. Ker sta za $n = 1$ možna le dva pregiba, obstajata samo dve možni končni točki. Za $n = 2$ obstajajo samo tri možnosti.

Naloga 7

Dokažite, da je razdalja med končno točko in začetno točko enaka $2^{n/2}$, brez uporabe kompleksnih števil. Pomagate si lahko s popolno z indukcijo in z razlago zadnjega koraka razpiranja. Podate lahko tudi geometrijski dokaz vseh možnih končnih točk.

Zaključek

Glede na to, da pregibanje in razpiranje papirnatih trakov ni del učnega načrta, pričujoče gradivo omogoča razvoj raziskovalnih dejavnosti z učenci. Gradivo lahko zlahka preučijo in si zapišejo osnovne ugotovitve (kot v preglednici 1). Od te točke dalje lahko izpeljete številne ugotovitve s pomočjo matematičnih vsebin, ki so v učnem načrtu. Imejte v mislih, da je v večini primerov mogoče dokazati ugotovitve na različne načine. Pokazali smo, da lahko podamo ugotovitve na intuitivni ravni (3. poglavje) ali pa priskrbimo formalne dokaze (4. poglavje). Izberite ustrezno možnost glede na raven znanja vaših učencev in ko jim boste priskrbeli papirnate trakove, bo kmalu nastal vrvež v učilnici (Slika 10).

Slika 10: Učenci skupaj raziskujejo matematiko prepogibanja papirnatih trakov.

Preučite lahko številne druge primere učenja matematike s prepogibanjem, ki niso navedeni v tem članku. Učence lahko npr. vprašate po formuli za točno število stičnih točk v zaporedju sprehodov po tem, ko ste odkrili zaporedje pregibov (še ena naloga s štetjem) ali pa po formuli, ki določa največjo razdaljo od izhodišča v zaporedju sprehodov (mi smo izračunali le končno točko). Če želite več geometrijskih vsebin, lahko preučite ovinke pod kotom 120° namesto 90°. V tem primeru bo zaporedje sprehodov sestavljeno iz enakostraničnih trikotnikov (uporabite [1] za raziskovanje) z zanimivimi lastnostmi, ki jih lahko preučite.

Viri in literatura

http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/sliderappletEN/eenvouwdigEN.html
Programček za ustvarjanje zaporedij sprehodov (ogled, maj 2021)

http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28177/ (ogled, maj 2021)
Učni list (v angleščini)

Preverjanje znanja učencev na daljavo s kompleksno zastavljenimi nalogami

Jerneja Bone, Zavod RS za šolstvo
Mag. Magda Čevdek, Osnovna šola Solkan

Izvleček

V prispevku predstavljamo primer preverjanja in ocenjevanja znanja matematike v 8. razredu, ki smo ga izvedli v prvem valu epidemije, ko je pouk potekal na daljavo. Pri izboru nalog smo izhajali iz vsebin, ki smo jih želeli preveriti. Pri pripravi nalog smo izhajali iz ciljev, standardov znanj in minimalnih standardov, zapisanih v učnem načrtu. Oblikovali smo kriterije uspešnosti, ki smo jim sledili in jih priredili za učence v njim razumljivem jeziku. Za vsako nalogo opišemo, kaj nas je vodilo pri oblikovanju naloge ter kakšne napake so pri reševanju delali učenci. Ob zaključku podamo še izkušnjo s takim načinom izvedbe preverjanja in ocenjevanja znanja.

Ključne besede: preverjanje in ocenjevanje znanja na daljavo, matematika, naloge iz vsakdanjega življenja

Assessing Pupils' Knowledge at a Distance Using Complex Tasks

Abstract

The paper gives an example of knowledge assessment in Mathematics class in the 8th grade, which was carried out during the first wave of the epidemic, when distance learning was first introduced. The tasks were selected based on the contents I wanted to assess. The tasks were prepared in accordance with the objectives, the target knowledge and the minimum standards laid down in the curriculum. I designed the success criteria that were applied and adapted them, so the pupils could understand them. I have described what guided me when designing each task and which mistakes the pupils made when solving them. The paper concludes with a description of how the applied knowledge assessment method was experienced.

Keywords: distance knowledge assessment, Mathematics, tasks relating to everyday life

Izbira načina preverjanja in ocenjevanja znanja

V obdobju poučevanja na daljavo smo se prvič srečali s preverjanjem in ocenjevanjem, ki ga je treba izvesti na daljavo. Hkrati smo se spraševali, kako upoštevati merske karakteristike ocenjevanja: veljavnost, objektivnost, občutljivost, zanesljivost in ekonomičnost. Za namen preverjanja znanja smo izbrali različne naloge iz vsakdanjega življenja, kar se je zdelo v situaciji, ko smo poučevali na daljavo in smo z učenci sodelovali preko spletnih učilnic in videokonferenc, najbolj primerno. Če bo preverjanje znanja, ki ga bomo izvedli na tak način uspelo, smo se odločili, da bomo tako izvedli tudi ocenjevanje znanja, kar smo učencem tudi predstavili. V preverjanje smo zajeli različne vsebinske sklope, ki smo jih obravnavali, hkrati pa smo naloge oblikovali tako, da so bile uvrščene v različne taksonomske stopnje in so bile različnih težavnostni. S tako oblikovanimi nalogami smo prilagodili zahtevnost preverjanja od osnovnih nalog do najzahtevnejših.

Zastavljene naloge so bile povezane z realnim življenjem. Učenci so reševali »skoraj vsak svoj problem«, niso mogli prepisovati drug od drugega, rešitev niso našli na spletu. Učitelji smo spremljali tudi potek in postopke reševanja nalog in ne le končnega cilja (to je končnega izdelka, rešitve naloge oz. rezultata). Učenci so z reševanjem takih nalog pri preverjanju znanja dobili izkušnjo procesa reševanja in se urili v pridobivanju procesnih znanj, ne le vsebinskih.

Z načinom poteka preverjanja in kasneje ocenjevanja znanja (kriteriji, navodili, postopkom za pridobitev ocen …) smo seznanili tudi ravnatelja, razrednika in starše ter seveda učence. Z načinom vrednotenja smo seznanili tudi celoten aktiv učiteljev matematike, predstavili smo ga tudi na sestanku aktiva matematikov in zapisali način izvedbe v zapisnik.

Cilji, standardi znanja in kriteriji uspešnosti

S preverjanjem znanja smo stremeli k preverjanju vsebin in ciljev, ki smo jih obravnavali med poučevanjem na daljavo. V ta namen smo vsako nalogo opremili s cilji, minimalnimi stan-

dardi in standardi triletja. Ta del priprave na preverjanje je bil namenjen učitelju in učencu, hkrati pa zagotavljal objektivnost, zanesljivost, občutljivost in veljavnost preverjanja in kasnejšega ocenjevanja.

S pripravljenimi nalogami smo preverjali doseganje naslednjih **standardov znanja tretjega triletja**, ki *niso neposredno povezani* z obravnavanimi vsebinami oz. sklopi iz učnega načrta:

- razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku),
- v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku),
- matematični jezik uporablja pri sporazumevanju,
- pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom,
- pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.

Pri oblikovanju kriterijev uspešnosti smo izhajali iz **standardov znanja tretjega triletja**, ki *so neposredno povezani* z vsebinami oz. sklopi, ki smo jih preverjali oz. ocenjevali:

- pozna in uporablja pojme in postopke s pojmi ravninske geometrije,
- uporablja različne strategije merjenja, pretvarja merske enote v geometrijskih nalogah in nalogah iz vsakdanjega življenja,
- uporablja formule ravninske geometrije pri reševanju problemov,
- reši naloge z odstotnim računom,
- oceni rešitev, jo zaokroži in kritično ovrednoti,
- prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah,
- opiše in zapiše odnos med spremenljivkami.

Upoštevali smo **minimalne standarde znanja**, ki so povezani z obravnavanimi vsebinami:

- prepozna odvisnost količin,
- pozna in uporablja lastnosti premega sorazmerja,
- bere podatke iz različnih prikazov in jih uredi v preglednici,
- izračuna obseg in ploščino kroga,
- reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

V prilogi 2 predstavljamo naloge z zapisi **ciljev**, ki jih posamezna nalog preverja. Zapisali smo tudi **standarde znanja in minimalne standarde znanja,** katerih doseganje smo z nalogami preverjali.

Osredotočali smo se na naslednja področja uspešnosti:

- Razlikovanje med merskim številom in mersko enoto, uporaba ustreznih merskih enot.
- Izbira ustrezne strategije reševanje oz. računskega postopka.
- Izbor ustrezne formule za izračun določene količine (obseg, ploščina).
- Risanje skice.
- Ustrezno zaokroževanje.

Vsako nalogo smo dopolnili s **kriteriji uspešnosti**, ki so bili namenjeni samovrednotenju učencev, zato smo jih napisali tako, da so jih učenci razumeli. V prilogi 3 predstavljamo poročilo o izvedbi nalog. Pod vsako nalogo so zapisani kriteriji uspešnosti.

Potek preverjanja znanja

Pri oblikovanju nalog smo sledili temu, da so bila navodila jasna, kratka in nedvoumna. Učence smo spodbudili, da pri preverjanju uporabljajo žepno računalo. Kot učiteljice smo razmislile, da morda vsi učenci nimajo enakih možnosti. Poznamo razmere učencev in tako vemo, kaj in koliko lahko pričakujemo, kje in kako jih lahko podpremo. Predhodno smo preverili pri učiteljih, kakšne obveznosti bodo imeli učenci tisti dan pri drugih predmetih, da ne bi bilo preveč obveznosti.

Na dan preverjanja, ki je bilo napovedano, so bile naloge dopoldan ob dogovorjeni uri dostopne v spletni učilnici z namenom, da si jih do napovedane videokonference preberejo in pripravijo morebitna vprašanja, ki jih bodo zastavili učiteljici. Z učenci smo imeli ob dogovorjeni uri videokonferenčno srečanje, kjer smo jim podali dodatna navodila, odgovorili na njihova vprašanja in prediskutirali kriterije uspešnosti. V Prilogi 1 so predstavljena navodila v spletni učilnici.

Učenci so nato reševali naloge. Čas reševanja nalog so si prilagodili glede na obveznosti pri drugih predmetih v tistem dnevu. Učiteljici sva jim bili od videokonference do oddaje nalog ves čas na razpolago preko neposrednih sporočil v spletni učilnici za svetovanje, odgovarjanje na vprašanja, dileme ter podajanje povratnih informacij. V istem dnevu so učenci vse naloge oddali v pregled v za to pripravljeno odložišče v spletni učilnici. Učiteljici sva oddane rešene naloge pregledali in podali povratno informacijo.

Na dan preverjanja so si učenci sami razporedili čas za opravljanje zadolžitev pri drugih predmetih. Naj omenimo, da se je to preverjanje izvedlo v prvem valu epidemije, ko je bila izvedba pouka na daljavo prilagojena (ni bilo toliko videokonferenc za učence).

Učenci so po preverjanju znanja sporočili, da so se počutili varne, ker so vedeli, da je učiteljica dosegljiva v primeru, če potrebujejo pomoč. Njihova vprašanja niso bila usmerjena v pravilnost reševanja (»*Kako naj to rešim?, Ali je ta rezultat pravilen?* …«), ampak so bila usmerjena v izvedbo (»*Kako dodam sliko?, Ali lahko uporabim ta in ta material za izdelavo prtička?* …«).

Naloge v preverjanju znanja: od zasnove do evalvacije po preverjanju

V nadaljevanju predstavimo posamezne naloge od njihove zasnove, dilem in vprašanj, ki smo si jih zastavljali do evalvacije po končanem preverjanju. Štiri celotne naloge, tako kot so jih dobili učenci v spletni učilnici, najdete v prilogi 3.

1. NALOGA: RECEPT

Krhka jabolčna pita po starem

Na povezavi https://www.gurman.eu/recepti/krhka-jabolcna-pita-po-starem-6931 je recept za Krhko jabolčno pito po starem za **8 oseb**. Izračunaj, koliko moke in koliko sladkorja potrebuješ za pripravo iste sladice za **14 oseb. Rezultate zaokroži na gram natančno.**

Koliko jajc bi potrebovali za pripravo pite za 14 oseb? Pojasni svoj odgovor.

V začetku oblikovanja te naloge smo razmišljali, da bi učenec sam poiskal recept. Po pregledu receptov na različnih spletnih portalih smo opazili, da v nekaterih receptih ni navedenega števila oseb, za katere je recept pripravljen, pri nekaterih pa je možno avtomatsko preračunavanje na želeno število oseb (okusno.si). Zaradi tega smo se odločili podati enoten recept.

Odločili smo se, da vseh količin učenci ne bodo preračunavali, ker že s preračunavanjem pri dveh količinah preverimo razumevanje in uporabo znanja o premem sorazmerju. Načrtovali smo tudi preverjanje standarda triletja »*se kritično opredeli do interpretiranih podatkov*«. V ta namen smo želeli, da obrazložijo, koliko jajc bodo porabili za določeno število ljudi. Predvidevali smo, da bodo učno uspešnejši učenci razumeli, da ne moremo uporabiti npr. 1,65 jajca in se bodo morali odločiti, da uporabijo npr. 2 ali 1 jajce. Karkoli bodo izbrali, bo prav.

Rečemo lahko, da gre za preprosto matematično modeliranje, kjer učenci prepoznajo in zapišejo odnose med izbranimi spremenljivkami oziroma predlagajo matematično strukturo za dano situacijo. V našem primeru vsak učenec predlaga svojo matematično rešitev za izbirano število jajc. Želeli smo, da utemeljijo, zakaj so se odločili za eno ali dve jajci. V nalogi so učenci kritično presojali podatke in smiselno zaokroževali. Na ta način bi zaznali razlike v znanju učencev. Največ težav smo pričakovali pri zaokroževanju, mnogo manj pa pri izboru strategije reševanja in pri računskih postopkih.

Razmišljali smo o možnosti, da bi podali vsakemu učencu ali skupini učencev drugačno število oseb, kjer bodo prilagodili recept različnemu številu oseb. Ker nismo znali odgovoriti na vprašanje, kako posameznemu učencu posredovati informacijo o številu oseb, ki naj jih uporabi, smo idejo o različnem številu oseb opustili.

Evalvacija po opravljenem preverjanju

Najpogostejše napake, ki so jih učenci naredili, so bile: niso prepisali vseh sestavin v receptu, niso zaokroževali na gram natančno, največ težav je povzročala količina jajc in utemeljitev izbire. Maloštevilni učenci so znali utemeljiti izbiro.

2. NALOGA: PRTIČEK

Moj prtiček

Iz poljubnega materiala (papir, plastika, tekstil ali podobno) izdelaj prtiček okrogle oblike in ga fotografiraj. Fotografijo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge.

Izračunaj in izračunane vrednosti zaokroži na stotine.

a) Kolikšen je obseg tvojega izdelanega prtička?

b) Koliko cm^2 papirja, plastike, tekstila … si porabil?

Nalogo smo zastavili zelo odprto. Vsak učenec je izbral drugačen material in izdelal drugačen prtiček z drugačnim polmerom. Pri izračunu obsega smo učencem pustili, da se sami odločijo, v katerih enotah bodo izrazili obseg, medtem ko smo pri količini porabljenega materiala pričakovali, da jo izrazijo v cm^2.

Evalvacija po opravljenem preverjanju

Pri reševanju druge naloge nismo opazili večjih vsebinskih težav. Izkazalo se je, da nekateri učenci v poročilo o izvedbi naloge niso vstavili fotografije izdelanega prtička.

3. NALOGA: PODATKI O EPIDEMIJI

SARS-CoV-2 (COVID-19)

Na spletni strani Nacionalnega inštituta za javno zdravje so bili 28. 4. 2020 med drugimi dostopni sledeči podatki:

Celotno 3. nalogo najdete v prilogi 2.

V prvem valu epidemije smo spremljali različne prikaze podatkov. Odločili smo se, da bomo branje podatkov iz različnih prikazov preverjali z aktualnimi podatki, ki smo jih dobili na spletni strani Nacionalnega inštituta za javno zdravje. Učencem smo zastavili različna vprašanja, od najbolj preprostih do malo težjih, kjer smo preverjali tudi višje ravni znanja.

Evalvacija po opravljenem preverjanju

Na začetna vprašanja je večina učencev uspešno odgovarjala. Znali so zastaviti vprašanje na že podan odgovor. Težavo smo opazili pri nalogi, kjer so morali učenci sami oblikovati vprašanje in nanj tudi odgovoriti. Nekateri učenci te naloge niso rešili, nekateri pa so na lastno vprašanje narobe odgovorili. Pri vprašanju, kjer so primerjali število umrlih žensk in moških, je večina

odgovorila, katerih je več, vendar kar nekaj učencev ni zapisalo, koliko več. Razlog je morda v nenatančnem branju.

Pri utemeljevanju odgovora na vprašanje, med katerima sosednjima starostnima skupinama moških je največja razlika v obolelih, posamezni učenci niso bili pozorni, da naloga sprašuje po sosednjih starostnih skupinah. Opazili smo tudi, da učenci pri reševanju niso zapisali vseh izračunov. Težave smo opazili tudi pri računanju odstotkov.

4. NALOGA: OKROGEL PREDMET

Okrogel predmet

a) Z vrvico, ki ni raztegljiva, ali šiviljskim metrom izmeri obseg izbranega okroglega predmeta (npr. škatlice od sirčkov, lonca, pokrovke, skodelice ali podobnega).

Izbrani predmet fotografiraj in fotografijo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge.

b) Iz obsega izračunaj polmer izbranega predmeta. Za π uporabi približek 3,14.

c) Kako se spreminja polmer predmeta, če se njegov obseg dvakrat, trikrat poveča?

d) Sestavi preglednico odvisnosti polmera od obsega.

e) Nariši graf odvisnosti polmera od obsega.

Naloga je preprosta, običajna naloga, ki se razlikuje le v tem, kateri predmet si bodo učenci izbrali. Nalogo smo otežili s primerjavo med obsegom in polmerom, kjer smo želeli, da povezanost med količinama polmer in obseg učenec predstavi tako s preglednico kot z grafom.

Evalvacija po opravljenem preverjanju

Tako kot pri 2. nalogi smo tudi pri tej opazili, da nekateri učenci niso oddali fotografije predmeta. Posamezni učenci niso sledili navodilu naloge, to je, da bi izračunali polmer okroglega predmeta iz obsega, ampak so polmer izmerili in nato izračunali obseg. Ponovno so imeli težave z zaokroževanjem. Pri ugotavljanju odvisnosti polmera od obsega so si nekateri učenci kar izmisli obseg, to pomeni, da niso izhajali iz izmerjenega obsega. Pri risanju grafa so nekateri učenci zamenjali koordinatni osi (risali so odvisnost obsega od polmera). Posamezni učenci so risali točkovni diagram in ne poltrak. Nekateri učenci pa grafa sploh niso narisali.

Pogled na preverjanje znanja

Učencem so bile naloge všeč. Učitelju je podajanje povratne informacije vzelo ogromno časa, saj smo za vsakega učenca posebej preračunavali rezultate. Učenci so pohvalili, da so naloge lahko najprej samostojno pregledali (prebrali) in da smo se potem srečali na videokonferenci, kjer smo učitelji odgovorili na dodatna vprašanja. Učenci niso v veliki meri izkoristili možnosti podpore učitelja preko spletne učilnice v času preverjanja znanja. Načrtovali smo, da bodo učenci oddali naloge (izdelke) do 14.00, vendar smo čas podaljšali do 16.00. Naloge so reševali dokaj uspešno, težave so imeli predvsem z zaokroževanjem ter nepozornim branjem navodil. Nekateri učenci so reševali naloge v zvezek in fotografije vstavljali v poročilo o izvedbi naloge, tisti pa, ki so pisali na računalnik, so imeli težave z uporabo matematičnih simbolov v urejevalniku besedil.

Učenci so imeli nekaj dni po objavljenih povratnih informacijah učitelja možnost vpogleda v svoje naloge in postavljanja vprašanj preko neposrednih sporočil učiteljici v spletni učilnici. Dopolnilnega pouka po preverjanju znanja pred ocenjevanjem se je preko videokonference udeležilo le nekaj učencev. Na videokonferenčnem srečanju smo naredili popravo nalog. Učna ura matematike, ki smo jo v nadaljevanju izvedli preko videokonference, je bila namenjena analizi in popravi nalog preverjanja, ponavljanju in utrjevanju vsebin ter odpravljanju vrzeli v znanju, ki smo jih med preverjanjem zaznali.

Ocenjevanje znanja

Z izkušnjami in povratnimi informacijami, ki smo jih dobili pri preverjanju znanja, smo izboljšali naloge za ocenjevanje ter kriterije uspešnosti. Glede na to, da smo naloge zastavili na različnih taksonomskih ravneh, da so naloge take, da preverjajo doseganje minimalnih standardov, da so naloge na različnih zahtevnostnih ravneh, smo pričakovali, da bodo ocene zelo primerljive s tistimi, ki so jih učenci predhodno dobili pri različnih ocenjevanjih. Naša pričakovanja so se pri večini učencev uresničila.

Pri posameznih nalogah smo si označili, kje preverjamo doseganje minimalnih standardov znanja. Mejo za pozitivno oceno smo določili glede na število »točk«, s katerimi smo preverjali doseganje minimalnih standardov znanja. Za višje ocene smo sorazmerno upoštevali doseganje višjega števila točk.

Navodila za ocenjevanje so bila oddana v spletni učilnici in so podrobno predstavljena v Prilogi 4. Organizacija poteka ocenjevanja je bila enaka kot pri preverjanju znanja. Naloge iz ocenjevanja znanja so v Prilogi 5.

Sodelovanje s svetovalko za matematiko

Že od zamisli takega načina preverjanja in kasneje ocenjevanja znanja smo sodelovali s svetovalko za matematiko, ki je podajala izčrpne povratne informacije. Namen prošnje za svetovanje oz. njeno sodelovanje vsekakor ni bil dobiti «žegn», saj je vsak učitelj odgovoren za svoje delo, ampak smo skupaj stremeli k izboljšanju preverjanja znanja v dobro učencev. Velja omeniti, da je pričujoči članek nastal iz zapisov vseh dopisovanj po e-pošti med učiteljico in svetovalko.

Zaključek

Ob zaključku lahko povemo, da je tak način preverjanja in ocenjevanja dobrodošel, terja pa veliko strokovnega premisleka pri oblikovanju nalog, izboru ciljev, standardov znanj in oblikovanju kriterijev uspešnosti, zasnovi poteka preverjanja in ocenjevanja znanja ter podajanja povratnih informacij učencem.

Viri in literatura

Dnevno spremljanje okužb s SARS-CoV-2 (COVID-19). *https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, (Pridobljeno: 27. 4. 2020, 28. 4. 2020, 13.5.2020)*

How to Determine the Age of a Tree *https://www.wikihow.com/Determine-the-Age-of-a-Tree (Pridobljeno 10. 5. 2020)*

Jagodna torta z belo čokoladno kremo. https://vizita.si/zdravi_z/jagodna-torta-z-belo-cokoladno-kremo.html (pridobljeno 12. 5. 2020)

Krhka jabolčna pita po starem. https://www.gurman.eu/recepti/krhka-jabolcna-pita-po-starem-6931 (pridobljeno 26. 4. 2020)

PVC prti – okrogli. https://www.pletenje.eu/trgovina-old/razno/pvc-prti/pvc-prti-okrogli (pridobljeno 27. 4. 2020)

Žakelj, A. et. al. (2011). Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika. Ljubljana. Ministrstvo za šolstvo in šport. Zavod RS za šolstvo.

PRILOGA 1

Navodila za preverjanje znanja v spletni učilnici za matematiko

PONEDELJEK, 11. 5. 2020

Potek preverjanja znanja:

1. Ob 9.30 bodo objavljene naloge na preverjanje znanja v spletni učilnici pod tem naslovom. Naloge si do 10.00 pozorno preberi, premisli in pripravi vprašanja.
2. Ob 10.00 bo videokonferenca za dodatna pojasnila navodil in kjer boste podali dodatna vprašanja.
3. Do 14.00 izvajanje preverjanja, možnost komunikacije z učiteljico preko sporočil v spletni učilnici.
4. Oddaja nalog v pdf obliki v odložišče Oddaja nalog za tvojo skupino, najkasneje do 14.00.

   Pri reševanju nalog lahko uporabljaš lahko žepno računalo, vendar morajo biti vsi izračuni zapisani.

Naloge za preverjanje s cilji, standardi znanja in minimalni standardi znanja, katerih doseganje smo preverjali pri posamezni nalogi

1. KRHKA JABOLČNA PITA PO STAREM

Na povezavi https://www.gurman.eu/recepti/krhka-jabolcna-pita-po-starem-6931 je recept za Krhko jabolčno pito po starem za **8 oseb**. Izračunaj, koliko moke in koliko sladkorja potrebuješ za pripravo iste sladice za **14 oseb. Rezultate zaokroži na gram natančno.**

Koliko jajc bi potrebovali za pripravo pite za 14 oseb? Pojasni svoj odgovor.

NALOGA	CILJI	STANDARDI
1.	Učenec: - pozna in uporabi pojme odvisna in neodvisna spremenljivka, - pozna in opredeli premo sorazmerje, - s sklepanjem reši besedilne naloge o premem sorazmerju - uporablja premo sorazmerje v problemskih nalogah - pisno predstavi obravnavo matematičnega problema, - kritično vrednoti rešitev, oblikuje odgovor. - razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku), - v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku), - matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, - pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, - pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.	**TRILETJA:** - uporablja različne strategije merjenja, pretvarja merske enote v geometrijskih nalogah in nalogah iz vsakdanjega življenja, - uporablja formule ravninske geometrije pri reševanju problemov, - oceni rešitev, jo zaokroži in kritično ovrednoti, - prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah, - uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja, - se kritično opredeli do interpretiranih podatkov. **MINIMALNI:** - prepozna odvisnost količin, - pozna in uporabi lastnosti premega sorazmerja, - reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

2. MOJ PRTIČEK

Iz poljubnega materiala (papir, plastika, tekstil ali podobno) izdelaj prtiček okrogle oblike in ga fotografiraj. Fotografijo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge.

Izračunaj in izračunane vrednosti zaokroži na stotine.

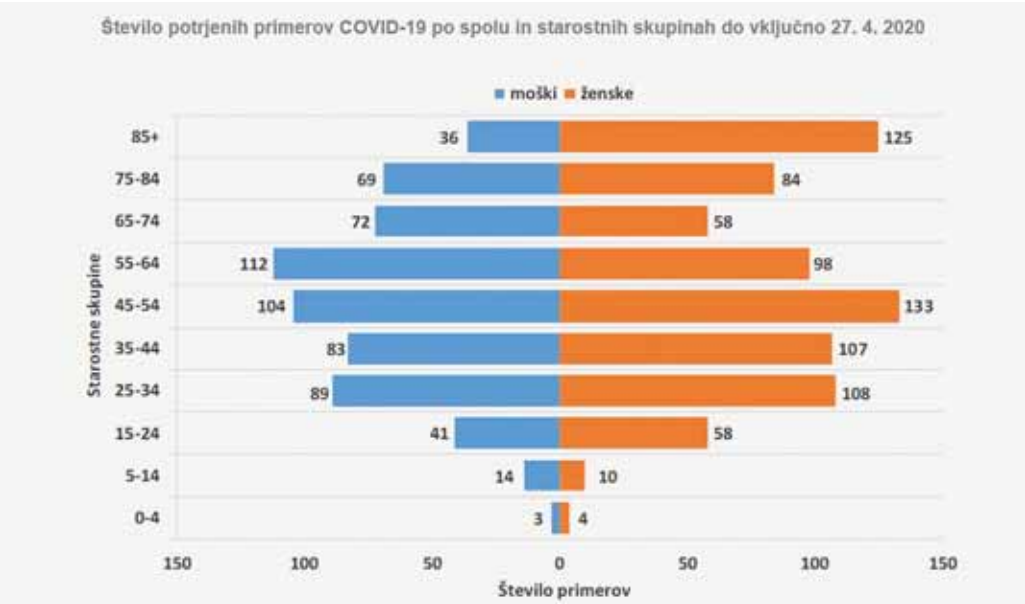
a) Kolikšen je obseg tvojega izdelanega prtička?

b) Koliko cm^2 papirja, plastike, tekstila … si porabil?

NALOGA	CILJI	STANDARDI
2.	Učenec: - razvija geometrijske predstave v ravnini in prostoru, - razvija geometrijske predstave v ravnini, - razume pomen števila pi, - izračuna obseg kroga z uporabo obrazca, - izračuna ploščino kroga z uporabo obrazca, - reši besedilne naloge v povezavi s krogom (z računalom ali brez njega), - uporablja pretvarjanje merskih enot pri reševanju problemov iz življenjskih situacij, - pisno predstavi obravnavo matematičnega problema, - razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku), - v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku), - matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, - pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, - pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.	**TRILETJA:** - pozna in uporablja pojme in postopke s pojmi ravninske geometrije, - uporablja različne strategije merjenja, pretvarja merske enote v geometrijskih nalogah in nalogah iz vsakdanjega življenja, - uporablja formule ravninske geometrije pri reševanju problemov, - oceni rešitev, jo zaokroži in kritično ovrednoti, - prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah, - uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja. **MINIMALNI:** - izračuna obseg kroga, - izračuna ploščino kroga, - reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

3. SARS-CoV-2 (COVID-19)

Na spletni strani Nacionalnega inštituta za javno zdravje so bili 28. 4. 2020 med drugimi dostopni sledeči podatki:

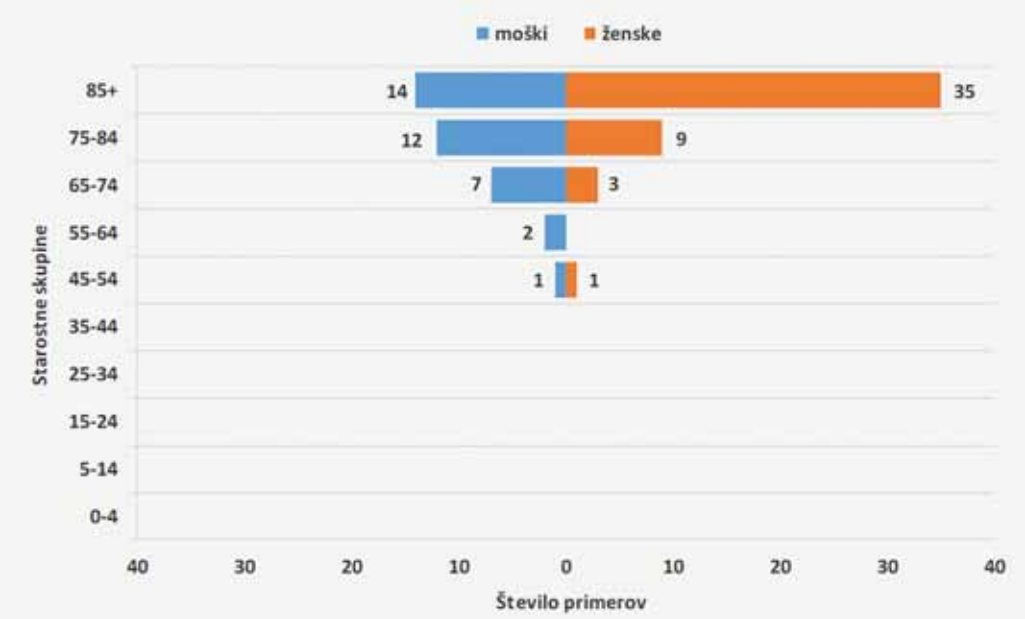


(Vir: https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, 28. 4. 2020)

	moški	ženske	skupaj
Skupno število pozitivnih primerov	623	785	1.408
Novi primeri v preteklem dnevu	2	4	6

Do vključno 27. 4. 2020 je umrlo 84 oseb. V nadaljevanju je prikazano število umrlih po starostnih skupinah in spolu.

Število umrlih po spolu in starostnih skupinah do vključno 27. 4. 2020



(Vir: https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, 28.4.2020)

Preberi vprašanja. Zapiši potek reševanja in odgovori na vprašanja.

a) Koliko ljudi, starejših od 84 let, je okuženih?

b) Koliko žensk, mlajših od 55 let, je okuženih?

c) Koliko odstotkov okuženih je umrlo?

d) Zapiši vprašanje, na katerega se odgovor glasi: »*Med umrlimi je skupaj 36 žensk*.«

e) Še sam zapiši eno vprašanje, na katerega lahko odgovoriš s pomočjo podatkov v prikazih. Na vprašanje tudi odgovori.

f) Primerjaj skupno število umrlih žensk in umrlih moških. Kaj ugotoviš po primerjavi?

g) Med katerima sosednjima starostnima skupinama moških je največja razlika v obolelih? Pojasni svoj odgovor.

NALOGA	CILJI	STANDARDI
3.	Učenec: - bere grafe, - uporablja odstotni račun v problemskih situacijah, - pisno predstavi obravnavo matematičnega problema. - razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku), - v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku), - matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, - pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, - pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.	**TRILETJA:** - reši naloge z odstotnim računom - pozna in uporablja načine zbiranja, strukturiranja in predstavljanja podatkov, - uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja. **MINIMALNI:** - bere podatke iz različnih prikazov in jih uredi v preglednici, - reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

4. OKROGEL PREDMET

a) Z vrvico, ki ni raztegljiva, ali šiviljskim metrom izmeri obseg izbranega okroglega predmeta (npr. škatlice od sirčkov, lonca, pokrovke, skodelice ali podobnega).

Izbrani predmet fotografiraj in fotografijo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge.

b) Iz obsega izračunaj polmer izbranega predmeta. Za π uporabi približek 3,14.

c) Kako se spreminja polmer predmeta, če se njegov obseg dvakrat, trikrat poveča? Sestavi preglednico odvisnosti polmera od obsega.

d) Nariši graf odvisnosti polmera od obsega.

NALOGA	CILJI	STANDARDI
4.	Učenec: - razvija geometrijske predstave v ravnini in prostoru, - razume pomen števila pi, - izračuna obseg kroga z uporabo obrazca, - izračuna ploščino kroga z uporabo obrazca, - reši besedilne naloge v povezavi s krogom (z računalom ali brez njega), - uporablja pretvarjanje merskih enot pri reševanju problemov iz življenjskih situacij, - pozna in uporabi pojme odvisna in neodvisna spremenljivka, - pozna in opredeli premo sorazmerje, - podatke zapiše v preglednico, - nariše graf premega sorazmerja, - pisno predstavi obravnavo matematičnega problema, - razvije učinkovite bralne strategije za nadaljnje učenje in izobraževanje (sporazumevanje v maternem jeziku), - v skladu z vsebinami osnovnošolske matematike razvije matematično in nematematično terminologijo (sporazumevanje v maternem jeziku), - matematični jezik uporablja pri sporazumevanju, - pri reševanju besedilnih nalog uporablja bralne strategije in besedilno nalogo opiše z matematičnim jezikom, - pri reševanju (besedilnih) problemov kritično razmišlja o potrebnih in zadostnih podatkih.	**TRILETJA:** - pozna in uporablja pojme in postopke s pojmi ravninske geometrije, - uporablja različne strategije merjenja, pretvarja merske enote v geometrijskih nalogah in nalogah iz vsakdanjega življenja, - uporablja formule ravninske geometrije pri reševanju problemov, - oceni rešitev, jo zaokroži in kritično ovrednoti, - prepozna odnose med količinami in jih uporablja v problemskih situacijah, - uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja. **MINIMALNI:** - prepozna odvisnost količin, - pozna in uporabi lastnosti premega sorazmerja, - reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

Poročilo o izvedbi nalog za preverjanje znanja s kriteriji uspešnosti

1. KRHKA JABOLČNA PITA PO STAREM

Zapiši sestavine v receptu za 8 oseb:

Reševanje:

Ugotovitev: Potrebne količine za 14 oseb:

MOKA: _____ SLADKOR: _____ JAJCA: _____

Pojasnilo odgovora:

Kriteriji uspešnosti **Uspešen sem, ko:**	**DA**	**NE**	**Opombe**
Poiščem recept in zapišem količino sestavin v receptu.			
Izberem ustrezno strategijo reševanja.			
Zapišem vse računske postopke, s katerimi bom prišel do rezultatov.			
V računskih postopkih ni računskih napak.			
Smiselno zaokrožam.			
Zapišem ustrezne enote pri posamezni količini.			
Zapišem, koliko določene količine potrebujem za določeno število oseb.			

2. MOJ PRTIČEK

Fotografija prtička: Skica prtička:

Polmer prtička:

Reševanje:

Ugotovitve: Obseg mojega prtička je _____.

Porabil sem _____ cm^2 materiala.

Kriteriji uspešnosti **Uspešen sem, ko:**	**DA**	**NE**	**Opombe**
Izdelam prtiček, ga fotografiram in sliko vstavim v Poročilo o izvedbi naloge.			
Izpišem podatke. Pazim na zapis merskega števila in merske enote.			
Narišem skico in na skici označim dane podatke.			
Uporabim formulo za obseg.			
Zapišem postopek računanja obsega.			
Izračunam obseg kroga.			
Rezultat zapišem v pravilnih enotah.			
Rezultat zaokrožim glede na navodila.			
Uporabim formulo za ploščino kroga, za izračun, koliko cm^2 materiala sem porabil.			
Zapišem postopek reševanja, koliko cm^2 materiala sem porabil.			
Izračunam, koliko cm^2 materiala sem porabil.			
Rezultat zapišem v pravilnih enotah.			
Rezultat zaokrožim glede na navodila.			

3. SARS-CoV-2 (COVID-19)

a) Koliko ljudi, starejših od 84 let, je okuženih?

Reševanje:

Odgovor:

b) Koliko žensk, mlajših od 55 let, je okuženih?

Reševanje:

Odgovor:

c) Koliko odstotkov okuženih je umrlo?

Reševanje:

Odgovor:

d) Vprašanje, na katerega se odgovor glasi: »*Med umrlimi je skupaj 36 žensk*.«

Vprašanje:

e) Vprašanje in odgovor na zastavljeno vprašanje:

Vprašanje:

Odgovor:

f) Primerjava skupnega števila umrlih žensk in umrlih moških.

Reševanje:

Odgovor:

g) Med katerima sosednjima starostnima skupinama moških je največja razlika v obolelih?

Reševanje:

Odgovor:

Pojasnilo:

Kriteriji uspešnosti **Uspešen sem, ko:**	**DA**	**NE**	**Opombe**
Iz različnih prikazov preberem podatke in odgovorim na vprašanja.			
Pri iskanju odgovorov si pomagam z računskimi postopki.			
Zastavim vprašanje na že zapisan odgovor.			
Zastavim vprašanje v povezavi s prikazi in podatki prikazanimi v prikazih ter nanj odgovorim.			
Primerjam različne podatke v prikazih med seboj.			
Utemeljim odgovor na vprašanje.			

4. OKROGEL PREDMET

a) Fotografija predmeta:

Izmerjen **obseg** predmeta: _____

b) Računanje **polmera** predmeta

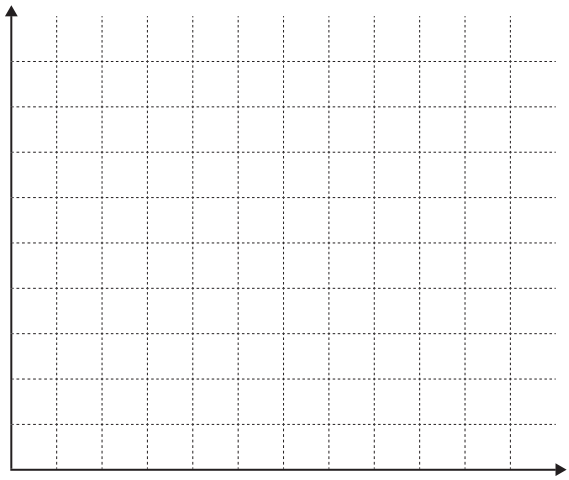
Reševanje:

Polmer predmeta je: _____

c) **Ugotovitev odvisnosti** polmera od obsega:
preglednica odvisnosti **polmera od obsega**.

Obseg (cm)					
Polmer predmeta (cm)					

d) **Graf odvisnosti polmera od obsega.**



Kriteriji uspešnosti **Uspešen sem, ko:**	**DA**	**NE**	**Opombe**
Okrogel predmet fotografiram in sliko vstavim v Poročilo o izvedbi naloge.			
Izmerim obseg predmeta in zapišem meritev v ustreznih enotah.			
Narišem skico in na skici označim dane podatke.			
Uporabim pravilno strategijo za računanje polmera iz obsega.			
Izračunam polmer izbranega predmeta.			
Rezultat zapišem v pravilnih enotah.			
Rezultat smiselno zaokrožim.			
Uporabim pravilno strategijo za ugotavljanje odvisnosti polmera od obsega.			
Ugotovljena odvisnost polmera od obsega.			
Izpolnim preglednico.			
Narišem graf.			
Graf opremim z vsemi potrebnimi podatki.			
Sem pozoren na enote pri prikazu podatkov v preglednici in grafu.			

Navodila za ocenjevanje znanja v spletni učilnici za matematiko

PONEDELJEK, 18. 5. 2020

Potek ocenjevanja znanja:

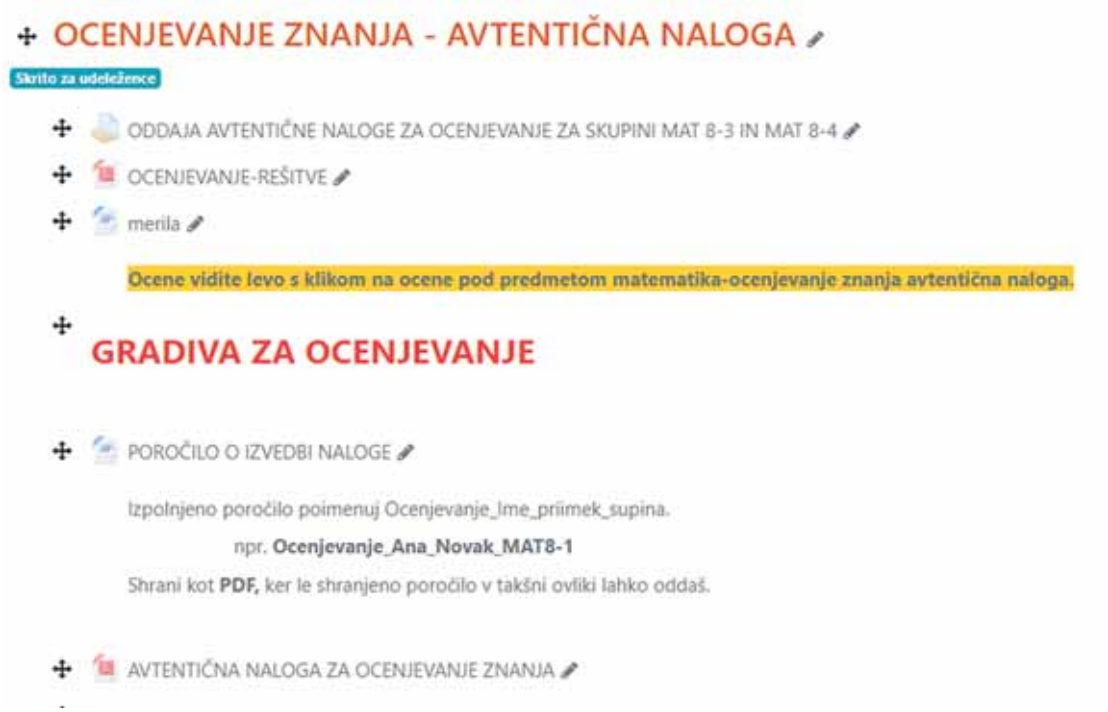
1. Ob **9.00** bo **objavljena povezava na ocenjevanje znanja v spletni učilnici**. Naloge si **do 9.30** pozorno preberi, premisli in **pripravi vprašanja.**
2. Ob bo **9.30 videokonferenca** za dodatna **pojasnila navodil**. Na videokonferenci boste lahko zastavili dodatna vprašanja.
3. **Do 15.00** reševanje nalog. **Učitelji nudimo možnost** povratne informacije, pojasnil, pomoči in **podpore** preko sporočil v spletni učilnici.
4. Oddaja **nalog v pdf obliki pod naslovom oddaja nalog za tvojo skupino**, predvidoma najkasneje **do 15.00**

   Pri reševanju nalog lahko uporabljaš žepno računalo, vendar morajo biti vsi izračuni zapisani. Poročilo izpolnjuješ na natisnjen dokument *Poročilo* ali zapisuješ vse v zvezek.

POMEMBNO:

V primeru **nepravočasne oddaje** nalog, **boš svoj postopek reševanja nalog moral tudi ustno zagovarjati.**

Če nalog **ne oddaš**, bomo tvoje znanje **ustno ocenjevali.** Spraševali bomo **teorijo, utemeljevanje izbire postopkov reševanja, uporabo ustrezne matematične terminologije** in podobno **glede na kriterije uspešnosti osmega razreda**.



Naloge za ocenjevanje znanja

Navodilo

Pozorno sledi navodilom in **izpolnjuj poročilo** o izvedbi naloge ter se **sam ovrednoti** s pomočjo kriterijev uspešnosti.

Pri delu lahko uporabljaš žepno računalo, vendar **zapisuj vse postopke** izračunov. Rezultate **zaokrožuj** glede na zahteve naloge.

1. JAGODNA TORTA Z BELO ČOKOLADNO KREMO

Na povezavi https://vizita.si/zdravi_z/jagodna-torta-z-belo-cokoladno-kremo.html je recept za Jagodno torto z belo čokoladno kremo za **4 osebe**. Izračunaj, koliko jagod in koliko sladkorja v prahu potrebuješ za pripravo iste sladice za **14 oseb**.

Koliko jajc bi potrebovali za pripravo torte za 14 oseb? Pojasni svoj odgovor.

2. MOJ PRTIČEK

Na povezavi https://www.pletenje.eu/trgovina-old/razno/pvc-prti/pvc-prti-okrogli si izberi prt okrogle oblike, ki ti je všeč. Bodi pozoren: na sliki je vzorec blaga, napisan je premer okroglega prta.

Skopiraj sliko vzorca izbranega prta ter jo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge. **Zapiši** tudi **premer** izbranega prta.

Izračunaj. Za število π uporabi približek **3,14**.

Premer: 140 cm

a) Prt je zaključen s cik-cak vzorcem, ti pa ga boš obrobil z okrasnim trakom. Kolikšna je dolžina traku s katerim boš prt obrobil?

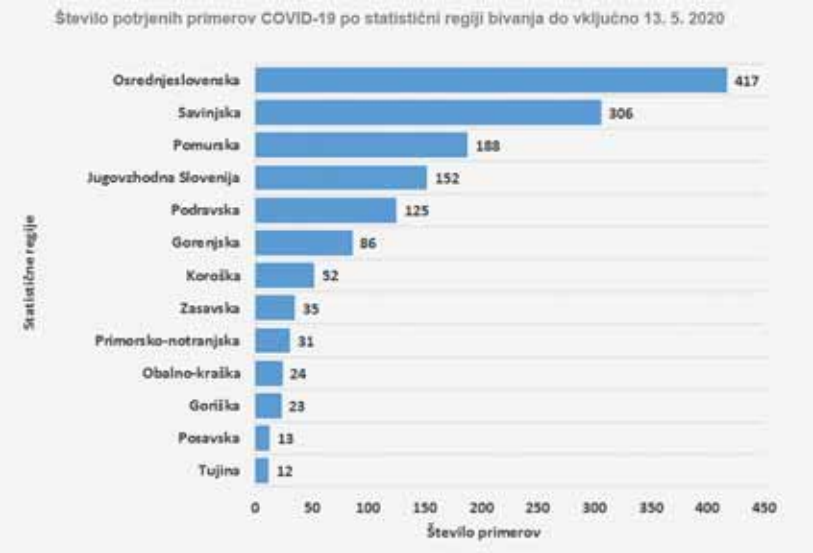
b) Koliko cm^2 blaga so porabili za izdelavo prta?

3. SARS-CoV-2 (COVID-19)

Na spletni strani Nacionalnega inštituta za javno zdravje so bili 13. 5. 2020 med drugimi dostopni sledeči podatki:

	moški	ženske	skupaj
Skupno število pozitivnih primerov	646	818	1.464
Novi primeri v preteklem dnevu	1	0	1

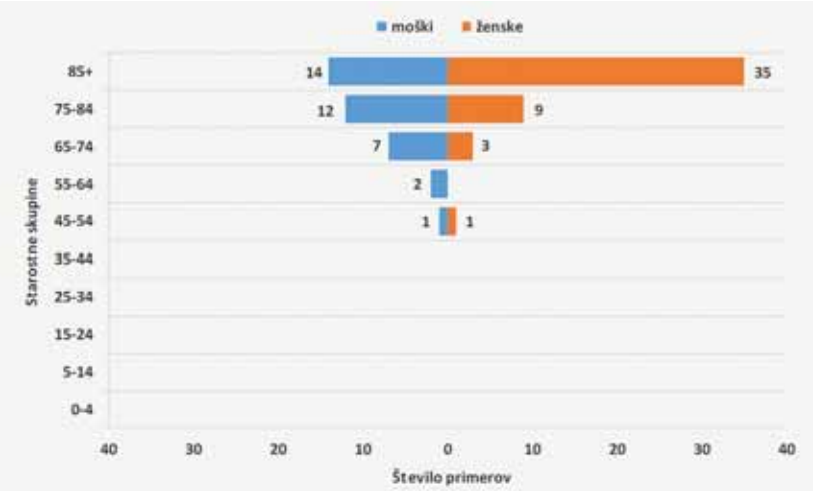
Spodnji graf nam prikazuje število potrjenih primerov COVID-19 po statistični regiji bivanja do vključno 13. 5. 2020.



(Vir: https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, 13.5.2020)

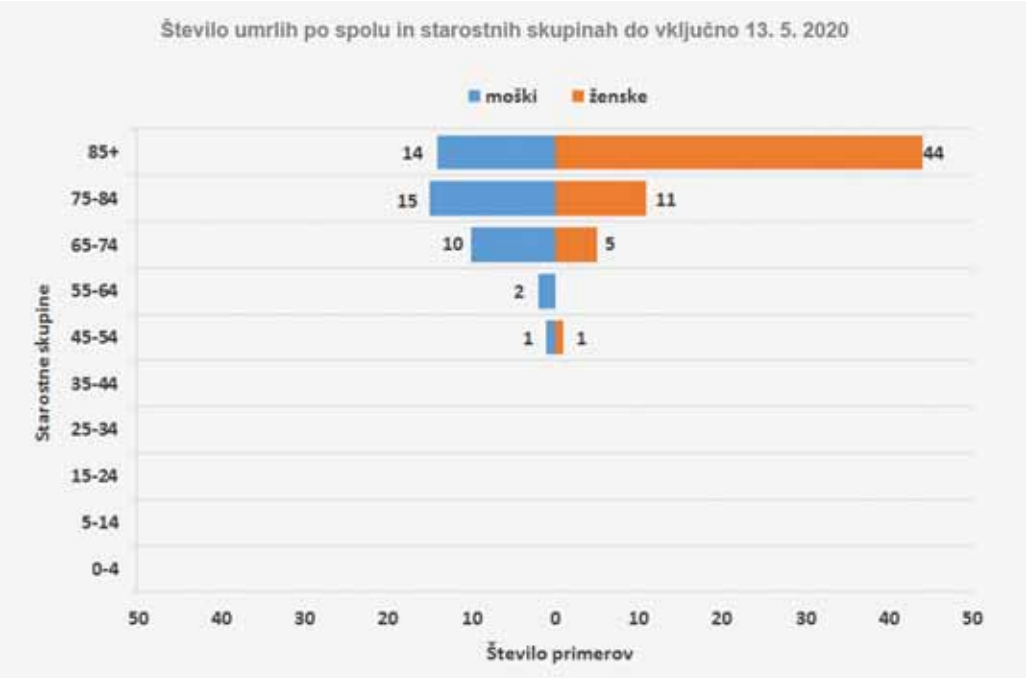
Do vključno 27. 4. 2020 je umrlo 84 ljudi. Do dne 13. 5. 2020 pa so zabeležili 103 umrle osebe. V nadaljevanju je prikazano število umrlih po starostnih skupinah in spolu.

Število umrlih po spolu in starostnih skupinah do vključno 27. 4. 2020



(Vir: https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, 27. 4. 2020)

Število umrlih po spolu in starostnih skupinah do vključno 13. 5. 2020



(Vir: https://www.nijz.si/sl/dnevno-spremljanje-okuzb-s-sars-cov-2-covid-19, 13.5.2020)

Preberi vprašanja. Zapiši potek reševanja in odgovori na vprašanja.

a) Koliko potrjenih primerov je skupaj v Goriški, Obalno-kraški in Primorsko-notranjski regiji?

b) Koliko žensk, starejših od 55 let, je umrlo od 27. 4. 2020 do 13. 5. 2020?

c) Za koliko odstotkov se je povečalo število umrlih od 27. 4. 2020 pa do 13. 5. 2020?

d) Zapiši vprašanje, na katerega se odgovor glasi:
»Dvainštirideset oseb moškega spola je umrlo do 13. 5. 2020.«

e) Še sam zapiši eno vprašanje, na katerega lahko odgovoriš s pomočjo podatkov v prikazih. Na vprašanje tudi odgovori.

f) Primerjaj število potrjenih primerov obolelih za COVID 19 med slovenskima regijama z največ in najmanj obolelimi.

g) Med katerima sosednjima starostnima skupinama je največja razlika med umrlimi od 27. 4. 2020 do 13. 5. 2020? Pojasni svoj odgovor.

4. STAROST DREVESA

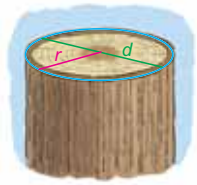
NAMEN: Ugotavljanje odvisnosti starosti drevesa od njegovega obsega.

PRIPOMOČKI: drevesno deblo, nerazteglјiva vrvica ali šiviljski meter, ravnilo, žepno računalo, pripomočki za pouk matematike.

IZVEDBA

a) V bližini svojega doma poišči deblo, ki je čim bolj okrogle oblike. Predpostavljamo, da je drevesno deblo okroglo. Deblo ali drevo **fotografiraj** ter fotografijo vstavi na predvideno mesto v Poročilo o izvedbi naloge.

b) S pomočjo nerazteglјive vrvice ali šiviljskega metra izmeri **obseg drevesnega debla** v višini **1,4 m** od tal kot kaže slika. **Zapiši si obseg v centimetrih.**



c) Iz obsega **izračunaj polmer** drevesa. Za število uporabi približek **3,14. Izračunano vrednost polmera zaokroži na stotine.**

d) Od polmera **odštej debelino lubja**. Za grobo oceno od polmera odštejemo **1,3 cm**.

e) Izračunaj **starost drevesa**, ki si mu izmeril obseg. To izračunaš tako, da polmer drevesa zmanjšan za debelino lubja deliš z letnim prirastkom. Za letni prirastek uporabi 1,9 cm.

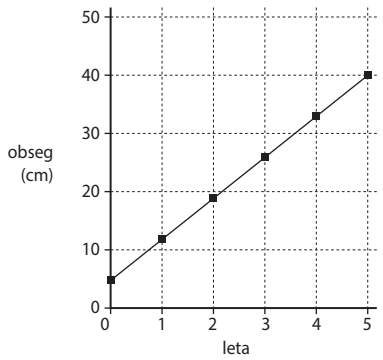
$$\text{Starost drevesa} = \frac{\text{polmer - debelina lubja}}{\text{letni prirastek}} =$$

f) Obseg drevesa se dvakrat, trikrat poveča. **Kako sta povezana obseg drevesa in starost drevesa?**

g) **Sestavi preglednico** odvisnosti starosti izbranega drevesa od njegovega obsega.

h) Nariši graf odvisnosti **starosti** izbranega drevesa **od** njegovega **obsega.**

Za pomoč: Na sliki je prikazan **graf odvisnosti obsega drevesa od njegove starosti**.



Slika: Graf prikazuje obseg debla jelke v cm glede na starost v letih
(Vir: https://brainly.com/question/4656506)

Različni načini preverjanja znanja in zbiranja dokazov znanja na daljavo pri matematiki

Simona Ostović
Osnovna šola Orehek Kranj

Izvleček

Pouk na daljavo je vsem prinesel veliko novih in neznanih izzivov. Hkrati pa smo dobili možnost za odkrivanje novih načinov poučevanja in podajanja povratnih informacij ter preverjanja in ocenjevanja znanja. Izkazalo se je, da delo na daljavo in uporaba spleta, aplikacij in platform, prinaša odlično priložnost za udejanjanje nekaterih elementov in z njimi povezanih aktivnosti formativnega spremljanja. V prispevku jih vam bom prikazala nekaj.

Ključne besede: poučevanje na daljavo, dokazi o učenju, soba pobega, seminarska naloga, povratna informacija

Different Methods of Assessing Knowledge and Collecting Evidence of Learning in Mathematics Distance Learning

Abstract

Distance learning has brought many new and previously unknown challenges to all of us. At the same time, it gave us the opportunity to discover new ways of teaching the subject matter, providing feedback, and assessing knowledge. It turns out that distance learning and using the Internet, applications and platforms has provided us with an excellent opportunity to implement certain elements and the corresponding formative assessment activities. The paper will demonstrate a few of these.

Keywords: evidence of learning, escape room, seminar paper, feedback

Uvod

Pouk na daljavo je bil svojevrsten izziv, ki je tako od učiteljev kot tudi učencev zahteval povsem nov pristop k poučevanju in učenju. Učitelji smo se spraševali, na kakšen način bodo učenci uspešni in osvojili potrebno učno snov. Vendar je tudi pouku na daljavo lahko sledil načelom formativnega spremljanja (FS), ki že sam po sebi ponuja ogromno idej, kako motivirati učence za delo in prevzemanje odgovornosti za svoje znanje (Holcar Brunauer idr, 2016):

- Učitelji skrbijo, da je vzdušje v razredu miselno spodbudno, psihološko varno in sproščeno.
- Učenci naj bi razumeli, kaj se učijo in zakaj ter kaj bodo morali znati, da bodo uspešni.
- Učenje mora biti socialno in sodelovalno.
- Učitelji z vprašanji spodbujajo dialog in učencem dajejo dovolj časa za razmislek.
- Učenci lahko izkazujejo svoje znanje na različne načine.
- Najpomembnejše povratne informacije so tiste, ki pridejo od učencev k učiteljem.
- Učitelji so občutljivi za individualne razlike med učenci, še posebej za razlike v njihovem predznanju.
- Učitelji se zavzemajo, da učenci v čim večji meri prevzamejo skrb nad učenjem in razvijejo odgovoren odnos do učenja.

Med poukom na daljavo sem se večkrat vprašala, na kakšne zanimive načine bi lahko preverjala učenčevo znanje. Po načelih FS naj bi učenci znanje izkazovali na različne načine in splet je v tem primeru ponujal ogromno zanimivih možnosti za izkazovanje znanja – od različnih spletnih vsebin do spletnih orodij in iger za sestavljanje križank, iskanje asociacij, reševanje kvizov s takojšnjo povratno informacijo ... Lahko si našel že pripravljena gradiva ali pa si gradiva izdelal sam.

Različni dokazi znanja

Dokaze zbiramo v vseh fazah učnega procesa, v različnih učnih situacijah, le-ti pa morajo biti raznoliki, kajti tako dobimo bolj zanesljiv in veljaven vpogled v učenčevo delo, razumevanje in v njegov napredek (Holcar Brunauer idr, 2016). Hkrati pa tako lažje prilagajamo in oblikujemo nadaljnje procese učenja.

Igra s kocko

S pomočjo orodja za izdelavo spletne igre s kocko v Google preglednicah, ki sem ga našla na spletni strani https://www.flippity.net/, sem izdelala igro (Slika 1), kjer so učenci metali kocko in reševali naloge. Uporabila sem ga tako za preverjanje predznanja kot tudi za utrjevanje znanja.

Učenci so to igro igrali po skupinah ločeno v več videokonferenčnih sobah. Metali so virtualno kocko in se pomikali po poljih. Na poljih (znak i) jih je lahko čakala naloga ali le navodilo, za koliko mest se pomaknejo naprej oz. nazaj. Modre kartice (Slika 2 in 3) z vprašajem sem oblikovala na različne načine. Lahko kot kartice presenečenja, kjer so morali učenci narediti dodatno gibalno nalogo (naredi 5 počepov, 10 krat poskoči ...). Ob teh nalogah so učenci še posebno uživali. Lahko pa je bila modra kartica oblikovana kot klasična naloga, kjer so ob kliku na kljukico učenci takoj dobili povratno informacijo o pravilno rešeni nalogi oz. številskemu izrazu.

Pri preverjanju predznanja (razmerja in sorazmerja, 9. r) so učenci naloge (Slika 4), ki so jih dobili med igro, reševali v zvezke, nato pa smo skupaj preverili in naloge dopolnili z ustreznimi definicijami in dopolnilno razlago.

Pri utrjevanju (računanje z decimalnimi števili, 6. r) pa so učenci takoj po reševanju posamezne naloge dobili povratno informacijo, ali so jo rešili pravilno in se tako pomikali naprej oz. ob napačno rešeni nalogi nazaj, po poljih.

Uro utrjevanja smo izpeljali večkrat, tudi sedaj, ob povratku v šolo in učenci so bili navdušeni. Eden izmed učencev je bil nad takim načinom utrjevanja tako navdušen, da se je še sam lotil sestavljanja te igre za učenje slovenščine, kjer je snov zapisal v obliki vprašanj in odgovorov. Koda za igro je prostodostopna na že omenjeni strani. Potrebne je le malo iznajdljivosti in osnovnega računalniškega znanja in igro lahko prilagodiš vsakemu predmetu in katerikoli vsebini.

Virtualna soba pobega

S pomočjo Googlovih orodij sem pripravila virtualno sobo pobega (Slika 5), ki sem jo uporabila za utrjevanje znanja.

Sobo sem grafično pripravila v Google predstavitvi. Za osnovno sem vzela sliko učilnice, kamor sem dodala elemente, povezane z verjetnostjo in statistiko in jih naredila aktivne – ob kliku nanje se je odprla nova stran (Google dokument, povezava do filmčka, youtube stran ...). Aktivni so bili tudi nekateri deli celotne slike. Ob strani pa je bil odštevalnik časa.

Slika 1: Izgled igre s kocko za utrjevanje znanja.

Slika 2, 3, 4: Kartici presenečenja in primer naloge.

Slika 5: Primer slike učilnice za sobo pobega.

Ko so pravilno rešili vse naloge, so dobili kodo virtualne ključavnice, ki je odklenila vrata zaklenjene učilnice. Programski del sobe pobega je bil narejen z Google obrazci, v katerih je bila povezava do virtualne sobe in kamor so učenci vpisovali in preverjali svoje rešitve in končno kodo. Ob napačnem vpisu kode oz. rešitve naloge so dobili namig, kaj je narobe, ali usmeritev, kako naj rešijo nalogo.

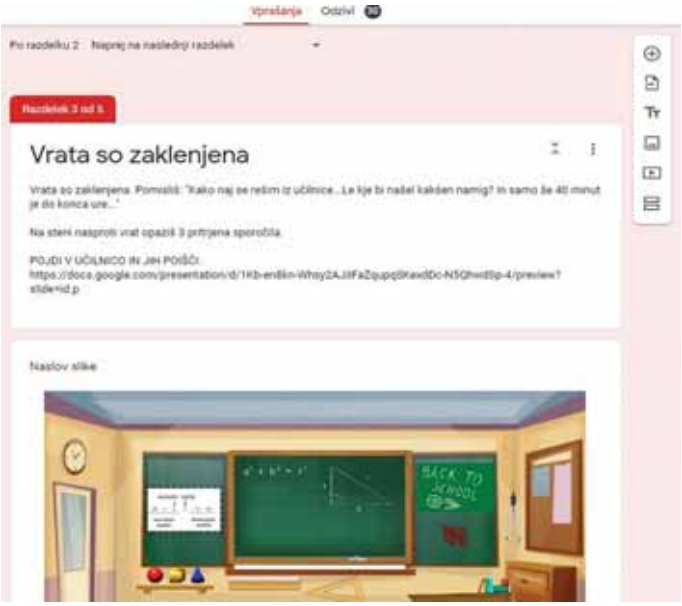
V primeru, da učenci nalog ne bi znali rešiti samostojno, so bili namigi v obliki posnetkov ali zapisane razlage. Sproti ali ob kon-

cu so lahko preverili, ali so rešitve posamezne naloge pravilne, saj je bil cilj, da bi se vsi učenci – samostojno ali s pomočjo – rešili iz sobe pobega.

Izkazalo se je, do so se nekateri učenci rešili samostojno, drugi s pomočjo namigov ali pomoči. Nekaterim pa se kljub temu ni uspelo rešiti. Za pomoč so lahko prosili tudi učiteljico. Ob koncu ure smo pogledali, kje so imeli težave, učenci so zapisali tudi povratno informacijo o tem, kako jim je šlo in če jim je bil tak način utrjevanja in preverjanja všeč – in brez izjeme so bili navdušeni.

Sobo pobega sem oblikovala za 9. r sklop Enačbe in sklop Verjetnost in statistika. Vsak, ki je že oblikoval kviz ali preverjanje v Google obrazcih, lahko brez večjih težav naredi tudi sobo pobega. Treba je le premisliti, kaj se bo zgodilo ob posameznem kliku in kaj je naslednji korak v obrazcu glede na izbor odgovora ali pravilen oz. nepravilen vpis. Ni potrebnega znanja programiranja, le nekaj dodatnih klikov in dobra zasnova.

Tudi na ta način so učenci dokazovali svoje znanje. Nekateri so se iz sobe rešili povsem brez pomoči, nekateri so potrebovali namige in si ogledali spremljajoče posnetke, tretji so vprašali za pomoč še učiteljico, nekaterim pa se kljub vsemu ni uspelo rešiti v določenem času.



Slika 6: Primer Google obrazca za sobo pobega.

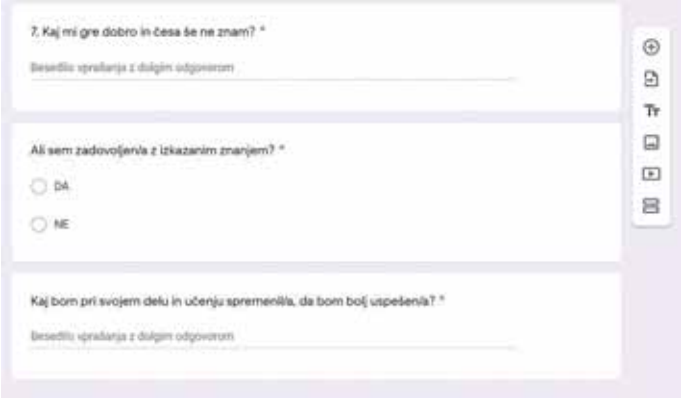
Elektronska povratna informacija

Povratna informacija je ključna za uspešno učenje, saj ima tako vsak učenec možnost doseči cilje, ki si jih je zastavil (Holcar Brunauer idr, 2016). Tudi za podajo povratnih informacij preko spleta ni bilo ovir. Poleg učiteljeve povratne informacije npr. po oddani nalogi, Google obrazci ponujajo možnost najboljše povratne informacije, tj. od učenca k učitelju. Po različnih aktivnostih sem za učence pripravila Google obrazec, kamor so zapisali, kako dosegajo posamezne zastavljene kriterije uspešnosti (Slika 7) in kaj bodo v prihodnje naredili, da bo njihovo znanje boljše (Slika 8).

Prednost elektronske oblike zapisa vidim v tem, da so ga po oddanem obrazcu učenci dobili na svoj mail, hkrati pa sem odgovore vseh učencev prejela tudi jaz. Odgovore sem lahko pogledala posamično ali po vprašanjih v skupni tabeli. Tako sem imela vpogled ne samo v posameznikovo delo, temveč tudi na razred kot celoto – kako dosegajo posamezne kriterije uspešnosti, kaj si želijo ali kaj jim je bilo oz. ni bilo všeč. Učenci pa so lahko svoje odgovore natisnili in nalepili v zvezek.

Za kratke evalvacije sem uporabljala tudi orodje Padlet in Mentimeter (Slika 9).

Slika 7: Primer vprašanj za povratno informacijo o doseganju ciljev.



Slika 8: Primer vprašanj za povratno informacijo o delu učenca.

Problemska seminarska naloga

Za enega od načinov pridobivanja ocen v času dela na daljavo smo v aktivu matematike izbrali problemsko seminarsko nalogo – v 9. razredu pri vsebinah Verjetnost in statistika.

Učenci so dobili 4 naloge statistične obdelave podatkov in računanja verjetnosti.

Pri 10 do 15 sorodnikih so pridobili številske podatke (prva naloga) – številka noge, velikost ali masa in opisne podatke (druga naloga) – najljubša barva, barva las. Zbrane podatke so uredili in jih opisati s pomočjo srednjih vrednosti. Vedeti so morali, za katere vrste podatkov se posamezne srednje vrednosti lahko izračunajo oz. določijo in to tudi razložiti.

V tretji nalogi so poiskali modus črk svojega imena in priimka ter izračunali verjetnost za naključni izvlek posamezne črke. Na koncu so morali zapisati še ime in priimek ali stavek s tremi modusi.

Slika 9: Primer evalvacije učencev po izvedeni delavnici.

Pri zadnji nalogi pa so učenci metali 2 igralni kocki in si beležili izide. Izračunali so verjetnost oz. relativno frekvenco vnaprej določenih dogodkov.

Seminarsko nalogo so zapisali v Wordu ali Googlovih dokumentih in oddali v spletno učilnico.

Pri učencih sem najprej preverila, kako vešči so uporabe urejevalnika besedil, urejanja tabel in zapisovanja enačb ter posebnih znakov. Večina učencev funkcije Formula še nikoli ni uporabljala, zato sem eno uro namenila spoznavanju možnostmi uporabe enačb v Wordu oz. Googlovih dokumentih, pokazala sem jim, kako se zapiše ulomke in uporablja posebne znake. Preko deljenja zaslona na videokonferenci sem jim prikazala uporabo, učenci pa so sproti, vsak na svojem računalniku, preizkušali, kako se uporablja posamezne funkcije.

Za samostojno delo so imeli učenci teden dni časa. Večina učencev je seminarsko nalogo rešila brez večjih težav in napak, pokazali so tako razumevanje pojmov kot tudi znanje uporabe računskih postopkov. Nekateri učenci niso pokazali razumevanja povezave med vrsto podatkov in srednjimi vrednostmi, saj so za opisne podatke določali mediano, nekateri celo aritmetično sredino. S samim zapisom seminarske naloge pa učenci niso imeli težav.

Z učenci smo se predhodno pogovorili tudi o kriterijih ocenjevanja, tako da so pri vsaki nalogi vedeli, kaj od njih pričakujem.

Kriteriji ocenjevanja so izhajali iz ciljev in standardov znanja za matematiko. V preglednici 1 so zapisani cilji, standardi triletja ter minimalni standardi za 1. nalogo.

Preglednica 1: Cilji in standardi znanja iz učnega načrta za matematiko v osnovni šoli.

Cilji	Standardi
Učenec: • pri reševanju problemov izberejo in izdelajo primeren prikaz za predstavitev podatkov, • uporabljajo primerne prikaze in tabele za prikaz življenjskih situacij, • izračunajo aritmetično sredino, modus in mediano za dane podatke, • smiselno določijo tip sredine (glede na tip podatkov), • kritično primerjajo sredine, • izračunajo sredino z žepnim računalom in s preglednico.	**Triletja:** • pozna in uporablja načine zbiranja, strukturiranja in predstavljanja podatkov, • načrtuje in izvede statistično raziskavo, rezultate kritično analizira in jih predstavi na najustreznejši način, • se kritično opredeli do interpretiranih podatkov, • pozna in uporablja aritmetično sredino, modus in mediano, • uporablja matematiko pri reševanju problemov iz vsakdanjega življenja, • uporablja informacijsko-komunikacijsko tehnologijo pri reševanju problemov. **Minimalni:** • pripravi in izvede anketo ter rezultate prikaže in interpretira, • reši matematični problem in problem z življenjsko situacijo.

2. naloga

Barva las / Najljubša barva / Najljubša žival *(izberi eno)*

Vprašaj 10-15 svojih bližnjih oseb (starše, brate, sestre, babice, dedke, tete, strice, bratrance, sestrične …) in zberi podatke o lastnosti, ki si jo izbral.

a) Zbrane podatke (neurejene) vpiši v tabelo (pri barvi las zapiši osnovne barve – blond, rjave, črne, rdeče, sive …).

b) Podatke smiselno uredi in jih vpiši v novo tabelo.

c) Izračunaj srednje vrednosti zbranih podatkov (aritmetično sredino, modus, mediano). Srednje vrednosti smiselno zaokroži. Ali lahko določiš vse tri srednje vrednosti? Razloži.

d) Razmisli in zapiši, kaj pomenijo dobljeni rezultati izračunanih srednjih vrednosti.

4. naloga

Verjetnost meta dveh igralnih kock

Mečeš dve igralni kocki naenkrat. Na obeh kockah lahko pade različno število pik (npr. 3 in 4) ali enako število pik (5 in 5). Ob metu dveh kock tako pade različna vsota pik obeh kock (npr. 3 + 4 = 7, 5 + 5 = 10 ...).

Vzemi dve kocki, vrzi ju 40-krat. Število pik, npr. 3, 4, zapiši v preglednico in izračunaj vsoto.

Številka meta	Število pik	Vsota
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Številka meta	Število pik	Vsota
11		
12		
13		
14		
15		
16		
…		
…		
…		
…		

Pridobi še podatke od dveh sošolcev in jih zapiši.

1. Za zbrane mete dveh igralnih kock izračunaj:
   a) Kolikšna je verjetnost, da je vsota pik enaka 7?
   b) Kolikšna je verjetnost, da je vsota večja od 10?
   c) Kolikšna je verjetnost, da je vsota liho število?
   d) Kolikšna je verjetnost, da je vsota večkratnik števila 3?
   e) Kolikšna je verjetnost, da je vsota delitelj števila 20?
   f) Kolikšna je verjetnost, da je na eni kocki padlo 5 pik in da je vsota manjša od 8?
   g) Kolikšna je verjetnost, da je na obeh kockah padlo liho število pik?

2. Razišči, koliko je vseh različnih možnosti, ko vržemo dve kocki hkrati. Vse možnosti predstavi na način, za katerega meniš, da je najbolj primeren. Zapiši ugotovitve.

   Glede na tvojo predstavitev vseh možnosti izračunaj verjetnosti 1 a) in 1 b) naloge. Primerjaj rezultata z rezultatoma pri 1. nalogi.

Primer zapisanih kriterijev ocenjevanja:

Barva las / Najljubša barva / Najljubša žival *(izberi eno)*

Preglednica 2: Kriteriji ocenjevanja za 2. nalogo.

Kriterij ocenjevanja	Možne točke	Dosežene točke	Opombe
Zbrani podatki (neurejeni) vpisani v preglednici (pri barvi las zapiši osnovne barve – blond, rjave, črne, rdeče, sive …).	1t		
Podatki smiselno urejeni in vpisani v novi preglednici.	1t		
Izračunane srednje vrednosti zbranih podatkov (aritmetična sredina, modus, mediana). Srednje vrednosti smiselno zaokrožene. Zapisan odgovor na vprašanje: Ali lahko določiš vse tri srednje vrednosti? Razloži.	3t		
Zapisan razmislek: kaj pomenijo dobljeni rezultati izračunanih srednjih vrednosti.	1t		
Skupaj	6t		

Kriterije so imeli v spletni učilnici. Po uvodni uri navodil sem jim bila v tednu samostojnega dela še enkrat na voljo preko videokonference za vprašanja in pomoč, lahko pa so se name obrnili tudi preko elektronskih sporočil oz. spletne učilnice.

Učenci so nalogo oddali v spletno učilnico, kamor sem jim zapisala tudi povratno informacijo in oceno.

Zaključek

Delo na daljavo je bila odlična priložnost za odkrivanje in uporabo novih načinov preverjanja in ocenjevanja oz. zbiranja dokazov znanja. Učiteljeva iznajdljivost in ustvarjalnost sta bili po mojem mnjenju pri tem ključni predvsem zato, da delo na daljavo ni bilo preveč suhoparno po drugi strani pa naporno za učence. Učenci so nove načine preverjanja in ocenjevanja znanja odlično sprejeli, saj so bili nad igrami in sobami pobega navdušeni in so izpostavili, da bi si takega načina dela želeli tudi v bodoče. Sestavljanje iger in sobe pobega sicer vzame veliko časa, vendar se mi zdi da s takimi oblikami stremimo h ključnim odlikam pouka po FS – da je vzdušje pri pouku miselno spodbudno, psihološko varno in sproščeno in da imajo učenci možnost svoje znanje izkazovati na različne načine, hkrati pa je učenje socialno in sodelovalno.

Viri in literatura

Holcar Brunauer, A. idr. (2016). *Formativno spremljanje v podporo učenju: priročnik za učitelje in strokovne delavce.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo.

Žakelj Amalija idr. (2021). *Učni načrt. Program osnovna šola. Matematika.* Ljubljana: Zavod RS za šolstvo, https://www.gov.si/assets/ministrstva/MIZS/Dokumenti/Osnovna-sola/Ucni-nacrti/obvezni/UN_matematika.pdf učbenik

Babilonska tablica in pitagorejske trojice

Dr. Marko Razpet
Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta

Izvleček

Glavni namen članka je obravnava vsebine babilonske glinene tablice Plimpton 322. Za lažje razumevanje sta pojasnjena babilonski sistem zapisovanja števil in kratka razlaga pitagorejskih trojic. Na koncu je dodanih še nekaj nalog.

Ključne besede: šestdesetiški sistem, pitagorejske trojice, Plimpton 322

A Babylonian Tablet and Pythagorean Triples

Abstract

The main aim of the article is a discussion of the Babylonian clay tablet Plimpton 322. For an easier understanding, the Babylonian system of writing numbers and the Pythagorean triples are explained. At the end, some exercises are added.

Keywords: sexagesimal system, Pythagorean triples, Plimpton 322

Uvod

Mezopotamijo, grško Μεσοποταμία, kar pomeni Medrečje, pogosto imenujejo zibelka civilizacije. Danes je del Iraka. Že v Mezopotamiji sta reki Evfrat in Tigris s poplavami skrbeli za rodovitno zemljo, tako kot na primer Nil v Egiptu. Zato so tu ljudje zgradili bivališča in svetišča, se naselili in začeli obdelovati zemljo ter rediti domače živali. Ker je bilo treba živali, bojevnike, delovno silo in zaloge preštevati in izvajati potrebne račune, zemljo pa pogosto deliti, meriti in napovedovati čas poplav, so se hitro razvile aritmetika, geometrija in astronomija, kar je zahtevalo zapisovanje besedil in števil z znaki. Svojevrsten zapis števil z vrezovanjem črt v lesene palice ali kosti so ljudje uporabljali že v pradavnini za evidenco staleža živine, prihodkov, odhodkov in posojil. Več o tem na primer v [3].

Najbolj je bila v Mezopotamiji za zapisovanje števil in besed pripravna tamkajšnja glina, ki jo je bilo na pretek. Iz nje so za potrebe gradbeništva izdelovali opeko, ki so jo sušili na soncu ali pa žgali v preprostih pečeh. Hitro so ugotovili, da se da na sveže glinaste tablice pisati s priostrenimi paličicami iz trstja. Zato so zelo zgodaj izumili *klinopis*. V slovenščini je tako poimenovan zaradi klinaste oblike znakov. Popisane tablice so, tako kot opeko, žgali v pečeh ali pa so jih pustili posušiti se na žgočem soncu.

Tako so zapisi postali zelo obstojni, žal pa se tablice rade krušijo in lomijo. V 2. stoletju starih klinopisov že nihče ni več znal brati. Arheologi so jih v novejši dobi našli na tisoče in po več tisoč letih so v 19. stoletju uspeli razvozlati pozabljeno pisavo in rekonstruirati stare jezike, ki jih nihče ni več govoril (sumerski, akadijski, babilonski). Tako so se nam ohranila imena starodavnih mest, pokrajin, ljudstev, vladarjev, zakoniki, epi in tablice z matematično vsebino. Od literarnih del se je skoraj v celoti ohranil sumerski Ep o Gilgamešu, iz katerega se da razbrati, kakšno je bilo življenje Sumercev v stari Mezopotamiji. Del epa pripoveduje o vesoljnem potopu.

Mezopotamija je bila v zgodovini vedno zanimiva za osvajalce vseh vrst. Tako zasledimo na njenih tleh od približno leta 3000 p. n. š. naprej sumersko, akadijsko, novosumersko, starobabilonsko, asirsko, novobabilonsko, kaldejsko, medijsko in perzijsko kraljestvo, če navedemo samo nekatera. Klinopisno pisavo so poznali že Sumerci, druga ljudstva so jo prevzela in prilagodila svojim jezikom. Celo staroperzijska pisava je bila klinopisna. Dolgo časa je bil Babilon osrednje mesto v Mezopotamiji, zato bomo v nadaljevanju govorili kar o Babiloncih, babilonskih številskih znakih in babilonskem načinu zapisovanja števil.

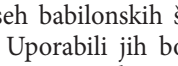
Babilonci so za zapis števil uporabljali samo dva klinopisna znaka: 𒁹 za 1 in 𒌋 za 10. S pravilno priostreno paličico iz trstja ju ni bilo težko odtisniti v mehko surovo glino. Naravna števila od 1 do 9 so zapisovali z ustreznim številom znakov za 1, ki so jih razporedili v kupčke:

𒁹 = 1, 𒁹𒁹 = 2, 𒁹𒁹𒁹 = 3, 𒁹𒁹𒁹𒁹 = 4, 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 = 5, 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 = 6, 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 = 7, 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 = 8, 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 = 9.

Desetkratnike od 10 do 50 so zapisovali z ustreznim številom znakov za 10, ki so jih tudi razporedili v kupčke:

𒌋 = 10, 𒌋𒌋 = 20, 𒌋𒌋𒌋 = 30, 𒌋𒌋𒌋𒌋 = 40, 𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋 = 50.

Naravna števila od 1 do 59 so zapisovali z ustreznim številom desetic in enic, na primer


$= 18,$

$= 47.$

Klinopisni zapisi vseh babilonskih števil od 1 do 59 so zbrani v preglednici 1. Uporabili jih bomo kot števke ali cifre v šestdesetiškem sistemu mestnih vrednosti. Zaradi enotnejšega zapisa bomo tedaj enomestnim številom spredaj dodali ničlo: 01, 02 … 09.

Kako so zapisovali naravna števila, ki so večja od 59, to se pravi 60, 61 …?
Kako so zapisovali pozitivne ulomke in realna števila? Negativnih števil še niso uvedli. O tem bo tekla beseda v nadaljevanju.

V običajnem življenju uporabljamo desetiški ali decimalni (lat. Decimus – deseti) številski sistem mestnih vrednosti. Osnova v tem sistemu je 10. To pomeni, da pozitivno realno število a zapišemo v obliki

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

Pri tem so a_n, a_{n-1} … a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2} … naravna števila 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

To je deset števk desetiškega sistema. Začetna števka a_n navadno ni enaka 0. Včasih jo dopišemo v preglednicah zaradi lepšega zapisa. Število a lahko v splošnem razdelimo na celi del $[a]$ in decimalni del (a), to pomeni $a = [a] + (a)$, kjer sta

$$[a] = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0,\ (a) = \\ = a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \ldots$$

Preglednica 1: Števke babilonskega šestdesetiškega sistema.

01		16		31		46	
02		17		32		47	
03		18		33		48	
04		19		34		49	
05		20		35		50	
06		21		36		51	
07		22		37		52	
08		23		38		53	
09		24		39		54	
10		25		40		55	
11		26		41		56	
12		27		42		57	
13		28		43		58	
14		29		44		59	
15		30		45			

Vsaka števka ima svoj pomen: a_0 je število enic, a_1 število desetic, a_2 število stotic itd. Decimalni del je vsota desetiških ulomkov, to je ulomkov, ki imajo za imenovalec naravno potenco osnove, torej števila 10. Števka a_{-1} je število desetin, a_{-2} število stotin, a_{-3} število tisočin itd.

Po dogovoru število a v splošnem zapišemo v strnjeni obliki:

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots$$

Vejica v zapisu razmejuje celi in decimalni del. Imenujemo jo decimalna vejica. Desno od nje stojijo decimalke. Če število nima decimalnega dela, pišemo enostavneje

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

če pa nima celega dela, pa

$$a = 0, a_{-1} a_{-2} \ldots$$

Decimalni del realnega števila je lahko vsota neskončnega števila desetiških ulomkov. Teh je končno mnogo le v primeru, ko je a ulomek, katerega imenovalec je večji kot 1 in ga lahko zapišemo v obliki $2^i \cdot 5^j$, pri čemer sta i in j naravni števili ali 0. Taka števila imenujemo *regularna števila* v desetiškem sistemu. Razlog tiči v tem, da ima osnova 10 prafaktorja 2 in 5: $10 = 2 \cdot 5$. Drugi ulomki imajo neskončno število decimalk, ki se periodično ponavljajo, kar označujemo s črto nad periodično skupino števk. Iracionalna števila imajo tudi neskončno število decimalk in so brez periode.

Primeri.

$$\frac{3}{2} = 1{,}5, \quad \frac{791}{250} = 3{,}164, \quad \frac{22}{7} = 3{,}\overline{142857}.$$

Omenimo, da zapis v decimalni obliki ni enoličen. Število 1/2 ima dve obliki: 0,5 in $0{,}4\overline{9}$.

Ni pa osnova 10 edina možna. Za osnovo številskega sistema mestnih vrednosti lahko uporabimo katerokoli naravno število b, ki je večje od 1. To pomeni, da pozitivno realno število a lahko zapišemo v obliki

$$a = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0 + a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + \ldots$$

Pri tem so a_n, $a_{n-1} \ldots a_1$, a_0, a_{-1}, $a_{-2} \ldots$ naravna števila 0, 1 … $b - 1$. To je b števk sistema z osnovo b. V računalništvu sta v rabi sistem z osnovo $b = 2$ s števkama 0 in 1 ter sistem z osnovo $b = 16$ s števkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Prvega imenujemo dvojiški ali binarni (lat. binarius – dvojen), drugega pa šestnajstiški ali heksadecimalni (gr. ἕξ, heks – šest, lat. decimus – deseti) sistem.

Sledi drugih številskih sistemov najdemo v besedni obliki v nekaterih jezikih, na primer dvajsetiškega v francoščini (quatre-vingts – osemdeset, to je štirikrat dvajset; quatre zase pomeni štiri, vingt pa dvajset) in v nam bližji rezijanščini, slovenskem narečju v zamejstvu. V Reziji, alpski dolini pod Kaninom v Italiji, namreč za dvajset uporabljajo besedo dvisti, za šestdeset besedi trikrat dvisti in za osemdeset štirikrat dvisti. Sledi dvanajstiškega sistema imamo v angleščini (eleven, twelve – enajst, dvanajst; od trinajst do devetnajst se angleški števniki končajo s -teen). Desetiški sistem ima izvor v desetih prstih človekovih rok, dvajsetiški v dvajsetih prstih človekovih rok in nog, dvanajstiški pa v skupaj dvanajstih členkih kazalca, sredinca, prstanca in mezinca ene človekove roke. Palec služi za kazanje nanje pri štetju.

Babilonci so v astronomiji in matematiki za svoj številski sistem uporabljali osnovo $b = 60$. Razvili so torej šestdesetiški ali seksagezimalni (lat. sexagesimus – šestdeseti) sistem. O tem, zakaj so izbrali za osnovo ravno 60, ni enotnega mnenja. Sprejemljiva je razlaga, da so pri štetju uporabili 12 členkov desne roke, tako kot smo opisali zgoraj, s petimi prsti leve roke pa so šteli dvanajstice ali ducate. S tem so obvladali števila od 1 do 60.

Število $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ima več deliteljev kot 10, zato ima šestdesetiški sistem tudi več regularnih števil, to je takih števil, večjih kot 1, ki se dajo zapisati v obliki $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, pri čemer so i, j in k naravna števila ali 0. Regularna števila šestdesetiškega sistema so na primer 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20. V tem sistemu lahko vsako realno število a zapišemo takole:

$$a = a_n \cdot 60^n + a_{n-1} \cdot 60^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 60 + a_0 + a_{-1} \cdot 60^{-1} + a_{-2} \cdot 60^{-2} + \ldots$$

Pri tem so $a_n, a^{n-1} \ldots a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2} \ldots$ naravna števila 0, 1, 2 … 59. Zanje zato potrebujemo šestdeset znakov šestdesetiškega sistema iz preglednice 1 oziroma kar naše številke 00, 01, 02 … 59. Po dogovoru spet zapišemo krajše:

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 ; a_{-1} a_{-2} \ldots$$

Podpičje v zapisu razmejuje celi in seksagezimalni del. Za naše potrebe mu bomo rekli seksagezimalno podpičje. Desno od njega stojijo seksagezimalke.

Če število nima seksagezimalnega dela, pišemo enostavneje

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,$$

če pa nima celega dela, pa

$$a = 00; a_{-1} a_{-2} \ldots$$

Seksagezimalni del realnega števila je lahko vsota neskončnega števila šestdesetiških ulomkov, to je ulomkov, ki imajo v imenovalcu naravno potenco števila 60. Teh ulomkov je končno mnogo v primeru, ko je a ulomek, katerega imenovalec je regularno število šestdesetiškega sistema.

Števke 00, 01, 02 … 59 v šestdesetiškem sistemu mestnih vrednosti bomo podčrtovali v primerih, ko obstaja nevarnost zamenjave z običajnimi desetiško zapisanimi števili. V vsakem primeru pa jih bomo med seboj ločili s presledki, na primer: $72 = \underline{01}\ \underline{12}$.

Uporabili smo analogijo z desetiškim sistemom. V resnici Babilonci niso uporabljali seksagezimalnega podpičja, pa tudi ne znaka za nič. Če so nanj naleteli, so pustili v zapisih kar prazen prostor. Iz konteksta so razbrali, kje naj bi stalo podpičje, ki ga mi tule uvajamo samo zaradi boljše razumljivosti. Odsotnost ničle je seveda vodila do zlorab in napak. V tem besedilu bomo, kjer bo to potrebno, namesto babilonskega praznega prostora uporabili znak ◡.

Neregularnih imenovalcev v ulomkih so se Babilonci izogibali, če se je le dalo. Tako so na primer za ulomek 1/7, ki ima neregularen imenovalec, poznali le približek z nekaj seksagezimalkami. Število $\sqrt{2}$, s katerim se izraža diagonala kvadrata, je iracionalno in ima nešteto neperiodičnih decimalk in seksagezimalk. Našli pa so glinasto tablico, na kateri je narisan kvadrat z diagonalama, zraven pa je zapisano tudi število $\sqrt{2}$ z nekaj seksagezimalkami.

Babilonski način zapisovanja števil so še precej časa uporabljali, sčasoma pa je prevladal desetiški številski sistem in indijsko-arabske števke. Omenimo še tatarskega matematika in astronoma Al Kašija (1380–1429), ki je izračunal iracionalno število 2π po arhimedski metodi krogu včrtanih in očrtanih pravilnih večkotnikov in dobil njegovih 9 seksagezimalk:

$$2\pi \doteq 06; 16\ 59\ 28\ 01\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50. \qquad (1)$$

Preden je prevladal desetiški sistem, so matematiki in astronomi decimalni del realnega števila še vedno radi zapisovali v šestdesetiškem sistemu. Ostanke šestdesetiškega sistema še dandanes uporabljamo pri merjenju časa in kotov. Ena ura ima 60 minut, ena minuta 60 sekund. Ena kotna stopinja ima 60 kotnih minut, ena kotna minuta 60 kotnih sekund. Pripomnimo, da seštevanje in odštevanje v šestdesetiškem sistemu ni nič težje kot seštevanje in odštevanje kotov. Če vzamemo na primer

$$\alpha = 15^\circ\ 45'\ 21'' \text{ in } \beta = 3^\circ\ 50'\ 47'', \text{ dobimo}$$

$$\alpha + \beta = 18^\circ\ 95'\ 68'' = 19^\circ\ 36'\ 8'',$$
$$\alpha - \beta = 14^\circ\ 104'\ 81'' - 3^\circ\ 50'\ 47'' = 11^\circ\ 54'\ 34''.$$

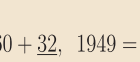
Zanimiva je bila tudi babilonska utežna mera *talent*, ki je ustrezala masi nekaj nad 30 kg. En *talent* je tehtal 60 min, ena *mina* pa 60 seklov. En *sekel* je bil zato enak 1/60 mine oziroma 1/3600 talenta.

Kasneje (šele okoli leta 300 p. n. š.) so Babilonci uvedli za naš 0 poseben znak, ki pa je imel samo vlogo zapolnjevalca praznega mesta v zapisu števil. Dolgo časa je preteklo, preden so ljudje začeli 0 obravnavati kot število. Bilo je namreč nerazumljivo, zakaj bi nič zapisovali z nečim, kar je vidno in zato ni nič. Babilonski zapolnjevalec praznega mesta je imel obliko .

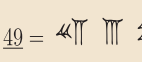
Kako pretvorimo naravno število v šestdesetiško obliko? Odgovor je preprost: z nekaj deljenji s 60 upoštevajoč ostanke. Najlaže to pojasnimo s primeri.

Primeri

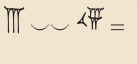
Pretvorimo števila 1949, 79429 in 648015 v šestdesetiško obliko in jih zapišimo z uporabo preglednice 1 v klinopisni obliki.

$$1949 = 32 \cdot 60 + \underline{29},\ \ 32 = 0 \cdot 60 + \underline{32},\ \ 1949 = \underline{32}\ \underline{29} =$$  .

$$79429 = 1323 \cdot 60 + \underline{49},\ \ 1323 = 22 \cdot 60 + \underline{03},\ \ 22 = 0 \cdot 60 + \underline{22},$$

$$79429 = \underline{22}\ \underline{03}\ \underline{49} =$$  .

$$648015 = 10800 \cdot 60 + \underline{15},\ \ 10800 = 180 \cdot 60 + \underline{00},\ \ 180 = 3 \cdot 60 + \underline{00},\ \ 3 = 0 \cdot 60 + \underline{03},$$

$$648015 = \underline{03}\ \underline{00}\ \underline{00}\ \underline{15} =$$  .

V zadnjem primeru vidimo, kaj se zgodi, če je kakšna števka v šestdesetiškem zapisu enaka 00. Na koncu smo uporabili še babilonski zapolnjevalec praznega mesta.

Oglejmo si še primere ulomkov z regularnim imenovalcem.

Primeri

Pretvorimo ulomke

$\frac{3}{4}, \frac{127}{36}, \frac{110041}{7200}$

v šestdesetiško obliko in jih zapišimo z uporabo preglednice 1 v klinopisni obliki.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{60} \cdot \frac{180}{4} = \frac{1}{60} \cdot 45 = \underline{00}\,;\underline{45} = ;$$.

$$\frac{127}{36} = 3 + \frac{19}{36} = 3 + \frac{1}{60} \cdot \frac{95}{3} =$$

$$= 3 + \frac{1}{60} \cdot \left(31 + \frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{1}{60} \cdot \left(31 + \frac{1}{60} \cdot \frac{120}{3}\right) = 3 + \frac{1}{60} \cdot 31 + \frac{1}{60^2} \cdot 40 =$$

$$= \underline{03}\,;\underline{31}\ \underline{40} =$$.

$$\frac{110041}{7200} = 15 + \frac{2041}{7200} = 15 + \frac{1}{60} \cdot \frac{2041}{120} = 15 + \frac{1}{60} \cdot \left(17 + \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 15 + \frac{1}{60} \cdot \left(17 + \frac{1}{60} \cdot \frac{30}{60}\right) = 15 + \frac{1}{60} \cdot 17 + \frac{1}{60^3} \cdot 30 =$$

$$= \underline{15}\,;\underline{17}\ \underline{00}\ \underline{30} =$$.

Pitagorejske trojice

Da bi laže razumeli vsebino tablice Plimpton 322, na kratko ponovimo, kaj so pitagorejski trikotniki oziroma pitagorejske trojice.

Pitagorejski je tak pravokoten trikotnik, ki ima dolžine katet a, b in hipotenuze c izražene z naravnimi števili neke dolžinske enote. Pri tem seveda velja zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Namesto o pitagorejskem trikotniku govorimo pogosto o pitagorejski trojici (a, b, c). Pitagorejsko trojico (a, b, c) sestavljajo naravna števila a, b, c ($a < c$, $b < c$), za katere je $a^2 + b^2 = c^2$. Trikotnik, ki ima v takem primeru stranice v razmerju $a : b : c$, je po obratu Pitagorovega izreka pravokoten. Pitagorejska trojica (a, b, c) je primitivna, če naravna števila a, b, c nimajo skupnega delitelja razen 1. Primitivnih pitagorejskih trojic (a, b, c) je nešteto. Vse pitagorejske trojice (a, b, c) so zajete v obrazcih

$$a = k(p^2 - q^2),\ b = 2kpq,\ c = k(p^2 + q^2) \qquad (2)$$

oziroma

$$a = 2kpq,\ b = k(p^2 - q^2),\ c = k(p^2 + q^2),$$

če izberemo tuji si števili p in q, pri čemer je $p > q$ in sta p, q različnih parnosti, torej eno liho, drugo sodo. Pri tem je k naravno število. Za $k = 1$ dobimo primitivne pitagorejske trojice.

Primer

Za $k = 1$, $p = 2$, $q = 1$ dobimo najenostavnejšo pitagorejsko trojico (3, 4, 5), za $k = 1$, $p = 3$, $q = 2$ pa (5, 12, 13).

V vsaki primitivni pitagorejski trojici je vsaj ena stranica deljiva s 3, 4 ali 5 (glej na primer [6]). Ta tri števila so si tuja in njihov najmanjši skupni večkratnih je 60, kar je osnova šestdesetiškega sistema.

Pitagora, grško Πυθαγόρας, po katerem se imenuje slavni izrek in omenjeni trikotniki ter trojice, je živel od leta 570 do leta 495 p. n. š. Vse kaže, da so relacijo $a^2 + b^2 = c^2$ v pravokotnem trikotniku poznali že veliko prej, kar nam izpričuje tudi glinasta tablica Plimpton 322.

Tablica Plimpton 322

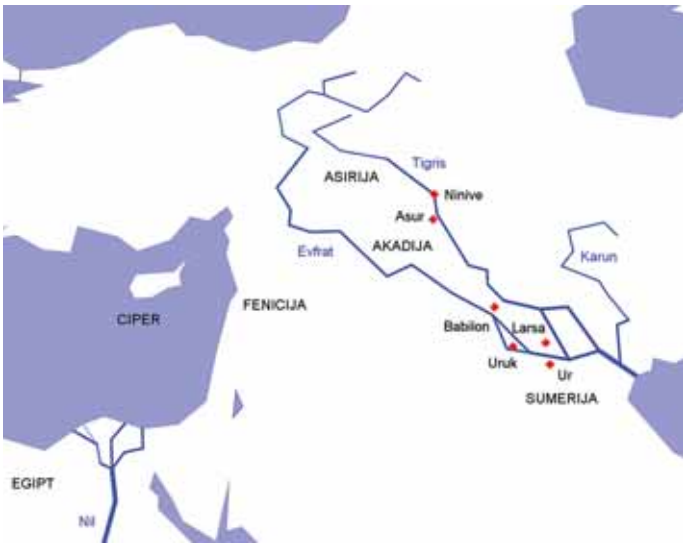
Glinasta tablica Plimpton 322 izvira iz sumerskega mesta Larse v današnjem Iraku. V bližini sta bili še starodavni mesti Ur in Uruk, blizu Perzijskega zaliva (Slika 2). Tablica je bila izdelana okoli leta 1800 p. n. š, nekako v času vladarja Hamurabija, ki je znan po svojem zapisanem zakoniku. Ko so se v 19. in 20. stoletju tam začela arheološka izkopavanja, so lokalni prebivalci raznesli precej izkopanin in jih prodajali po svetu. Tako je tablica Plimpton 322 prek prekupčevalcev starin prišla okoli leta 1922 v roke ameriškemu publicistu in filantropu Georgeu Arthurju Plimptonu (1855–1936), ki je Univerzi Columbia v New Yorku daroval mnogo starin, med drugim tudi obravnavano tablico. Takrat so menili, da je na njej nek nepomemben trgovski popis. Na univerzi je dobila kataloško oznako Plimpton 322 in je pod tem imenom zabeležena v zgodovini matematike. Morda je bila tablica nekoč večja, obstoječa meri 127 mm × 88 mm, debela je okoli 20 mm. Prva sta jo opisala Otto Neugebauer (1899–1990) in Abraham Sachs (1914–1983) v odmevnem članku leta 1945. Kasneje je bilo o njej objavljenih še več drugih člankov.

Slika 1: Tablica Plimpton 322.

Avtorji so obravnavali vsebino in namen tablice, prav tako napake in kako so Babilonci prišli do pitagorejskih trojic itd. Na tablici je sedem napak. Nekaj jih je naredil zapisovalec, nekaj računar. Vendar je toliko vrstic pravilnih, da se je dalo ugotoviti, za kaj sploh gre. Če upoštevamo popravke napak in dodamo števila, ki manjkajo na poškodovanih mestih, dobimo prenovljen Plimpton 322, ki ga bomo obravnavali v nadaljevanju. Doslej še nobena glinasta klinopisna tablica ni vzbudila toliko pozor-

nosti kot Plimpton 322, zato se spodobi, da jo predstavimo tudi našim bralcem. Morda gre to tudi na škodo drugih, prav tako zanimivih tablic. Babilonci so napisali na primer tudi tablice s poštevankami, obratnimi vrednostmi, kvadrati itd.

Za učence in dijake pa je tablica lahko vir številnih nalog, na primer pretvarjanje števil iz desetiškega sistema v šestdesetiškega in obratno, uporaba Pitagorovega izreka, merjenje kotov itd.



Slika 2: Lokacija najdbe.

Na tablici je 15 vrstic klinopisno zapisanih števil v šestdesetiškem številskem sistemu. V prvem stolpcu z desne so zaporedne številke vrstic. V drugem stolpcu je v vseh vrsticah klinopisno zapisana beseda ki – 𒆠, ki smo jo v prepisu izpustili. Pomenila naj bi v nekem starem orientalskem jeziku *njegov položaj*.

Ugotovili so, da so v tretjem stolpcu z desne dolžine hipotenuz c_n, v četrtem stolpcu z desne dolžine krajših katet, denimo a_n, v petem stolpcu pa količniki a_n^2/b_n^2 pitagorejske trojice (a_n, b_n, c_n). Katet $b_n = \sqrt{c_n^2 - a_n^2}$ na tablici ni, pač pa so pravilno upoštevane v količnikih a_n^2/b_n^2. Obstaja možnost, da je v petem stolpcu skrajno levo nekoč stal znak 𒁹, to je število 1, a se je tablica na tistem mestu po vertikali odlomila. V tem primeru bi v tem stolpcu bili količniki za 1 večji, ker velja enakost $c_n^2/b_n^2 = (a_n^2 + b_n^2)/b_n^2 = 1 + a_n^2/b_n^2$.

V vseh primerih indeks n pomeni zaporedno številko vrstice. Zanimivo je tudi to, da so vse pitagorejske trojice, ki jih dobimo iz števil na tablici, primitivne, razen v 11. vrstici, ki ji ustreza pitagorejska trojica (45, 60, 75). Takoj opazimo, da je to 15-kratnik najmanjše pitagorejske trojice (3, 4, 5).

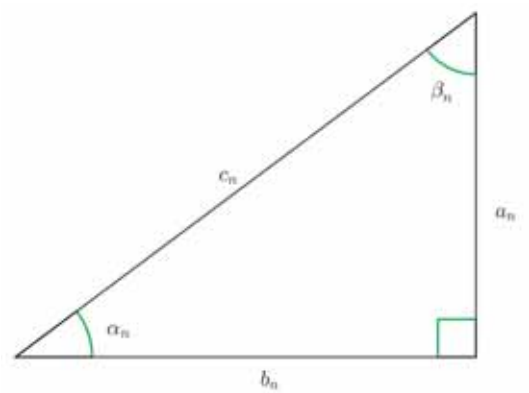
Egipčani in morda tudi Babilonci so jo v praksi uporabljali za konstrukcijo pravega kota. Med števili, ki sestavljajo tablico, je tudi precej praštevil.

V glavi tablice, nad prvo vrstico, seveda niso oznake n, a_n itd., ampak je v klinopisni pisavi v mešanici akadijskega in sumerskega jezika opisana vsebina ustreznih stolpcev.

Samo ugibamo lahko, kako so Babilonci našli vsa na tablici zapisana števila, zakaj niso izračunali kar količnike a_n/b_n, iz katerih lahko izračunamo ali izmerimo v trikotniku kot α_n (Slika 3), čemu je služila itd. Nekateri menijo, da gre samo za nekakšen šolski izdelek. Obstaja veliko razprav na to temo, na primer v [1,

Preglednica 2: Plimpton 322. Prepis s klinopisnimi simboli in odpravljenimi napakami. Podpičje pri a_n^2/b_n^2 ni zapisano.

a_n^2/b_n^2	a_n	c_n		n
𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹



Slika 3: Pravokotni trikotnik.

2, 4, 5]. Presenetljivo pa je to, da koti α_n od zgoraj navzdol padajo približno po 1°. V tem nekateri vidijo zametke trigonometrije.

Vsi količniki so točno zapisani, ker so imenovalci regularna števila šestdesetiškega sistema. Preglednica 2 je prepis tablice Plimpton 322 z računalniškimi znaki. Odpravljene so vse napake, ki so na originalu. Dodali smo za 15. vrstico še eno. Na originalu je namreč v 15. vrstici »tiskarska« napaka. Tam namreč v tretjem stolpcu z desne preberemo 53, v četrtem pa 56, kar je sprto z vsebino v petem stolpcu in z dejstvom, da so po vrsticah v tretjem stolpcu povsod drugod večja števila kot v četrtem. Če pa 56 popravimo v 28 ali pa 53 v 106, se nam izračun lepo izide. Zadnje čase prevladuje mnenje, da je pravilnejša prva varianta, ker takrat dobimo tudi primitivno pitagorejsko trojico.

Kako do pitagorejskih trojic v Plimptonu 322?

O tem, kako so Babilonci prišli do števil a_n za krajše katete in c_n za hipotenuze pravokotnega trikotnika na tablici Plimpton 322, si raziskovalci niso povsem enotni. Morda so poznali obrazec (2), morda so si pomagali s tablicami obratnih vrednost, za kar se ogreva precej razlagalcev. Če namreč v (2) postavimo zahtevo $a < b < c$, potem mora za $p > q$ veljati zveza

$p^2 - q^2 < 2pq$. Iz te dobimo $2p^2 = p^2 + p^2 < p^2 + 2pq + q^2 = (p + q)^2$, torej $p\sqrt{2} < p + q$. Iz tega sledi:

$$q < p < q(1 + \sqrt{2}).$$

Če pa vse tri stranice v (2) delimo z $b = 2kpq$, dobimo

$$r = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right), \quad s = \frac{b}{b} = 1, \quad t = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \qquad (3)$$

Pri tem velja $r < 1$, $t > 1$ in $r^2 + 1 = t^2$. To pomeni, da sta r in $s = 1$ kateti, t pa hipotenuza pravokotnega trikotnika, ki ima zato racionalne stranice. V obrazcih (3) opazimo par obratnih si vrednosti p/q in q/p. Glede na to, da izbiramo tuji si števili p in q različnih parnosti, sta to okrajšana ulomka.

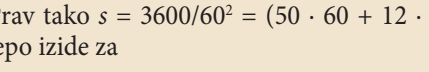
Babilonci so poznali posebno pravilo za množenje števil, in sicer z uporabo enakosti:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \qquad (4)$$

Če vanjo vstavimo $x = p/q$ in $y = q/p$, dobimo z oznakami iz (3) enakost $1 = t^2 - r^2$ oziroma $r^2 + 1 = t^2$, to pa je ravno tisto, kar smo ugotovili v prejšnjem odstavku, to je Pitagorov izrek za pravokotni trikotnik s stranicami r, 1 in t. Če racionalno trojico (r, 1, t) pomnožimo s primernim številom, da odpravimo ulomka, dobimo primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c). Zato je možno, da so Babilonci s preglednicami kvadratov in obratnih vrednosti računali pitagorejske trojice.

Primer

Denimo, da je babilonski matematik prepisal s tablice par recipročnih si števil



Prvo pomeni $x = 2 + 15/60 = 9/4$,
drugo pa $y = 26/60 + 40/60^2 = 4/9$.

Ker je $x \cdot y = 1$, sta si števili res recipročni: $y = 1/x$.

Nato je števili seštel in odštel, da je dobil

$$x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{41}{60} + \frac{40}{60^2}, \; x - \frac{1}{x} = 1 + \frac{74}{60} + \frac{60}{60^2} - \frac{26}{60} - \frac{40}{60^2} =$$
$$= 1 + \frac{48}{60} + \frac{20}{60^2}.$$

Nato je oba rezultata delil z 2 in dobil

$$t = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{20}{60} + \frac{50}{60^2} = \underline{01}\,;\underline{20}\;\;\underline{50},$$
$$r = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{54}{60} + \frac{10}{60^2} = \underline{00}\,;\underline{54}\;\;\underline{10}.$$

Seveda velja relacija $r^2 + s^2 = t^2$. Pri tem je $s = 1$. Opazil je, da bi oba rezultata lahko delil s 50, če bi zapisal

$$t = \frac{50}{60} + \frac{50 + 30 \cdot 60}{60^2}, \; r = \frac{50}{60} + \frac{4 \cdot 60 + 10}{60^2}.$$

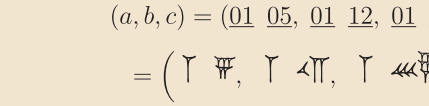
Prav tako $s = 3600/60^2 = (50 \cdot 60 + 12 \cdot 50)/60^2$. Račun se lepo izide za

$t' = t/50$, $r' = r/50$, $s' = s/50 = 1/50$:

$$t' = \frac{1}{60} + \frac{37}{60^2} = \underline{00}\,;\underline{01}\;\underline{37}, \; r' = \frac{1}{60} + \frac{5}{60^2} = \underline{00}\,;\underline{01}\;\;\underline{05}, \; s' =$$
$$= \frac{1}{60} + \frac{12}{60^2} = \underline{00}\,;\underline{01}\;\;\underline{12}.$$

Za dobljeni števili velja relacija $r'^2 + s'^2 = t'^2$. Števila r', s', t' pomnožimo s $60^2 = 3600$. To pomeni, podobno kot pomik decimalne vejice v desno za dve mesti pri množenju z $10^2 = 100$ v desetiškem sistemu, pomik seksagezimalnega podpičja za dve mesti v desno. Iz trojice (r', s', t') dobimo trojico

$$(a, b, c) = (\underline{01}\;\;\underline{05},\; \underline{01}\;\;\underline{12},\; \underline{01}\;\;\underline{37}) =$$



ki je celo primitivna pitagorejska in zanjo seveda velja $a^2 + b^2 = c^2$. V desetiškem sistemu je to trojica $(a, b, c) = (65, 72, 97)$.

Babilonec je izračunal še
$a^2/b^2 = (r'^2/s'^2) = r^2/s^2 = r^2 = ((x - 1/x)/2)^2$.

Morda je pogledal na tablico kvadratov, morda je izračunal in našel:

$$\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{48}{60} + \frac{54}{60^2} + \frac{1}{60^3} + \frac{40}{60^4} = \underline{00}\,;\underline{48}\ \underline{54}\ \underline{01}\ \underline{40}.$$

S tem je pravzaprav izračunal 5. vrstico na tablici Plimpton 322:

$$a_5^2/b_5^2 = \underline{00};\underline{48}\ \underline{54}\ \underline{01}\ \underline{40},\quad a_5 = \underline{01}\ \underline{05},\quad c_5 = \underline{01}\ \underline{37}.$$

V klinopisni pisavi je to

Verjetno so Babilonci podobno izračunali tudi preostale vrstice na tablici.

Zaključek

Predstavili smo zelo star dokument, samo enega od mnogih, ki je nastal pred več kot 3800 leti v Mezopotamiji. Čeprav kljub obsežnim raziskavam ne vemo točno, kako in čemu je nastal, pa se iz njega lahko veliko naučimo. Vse kaže, da so Babilonci več kot 1000 let pred Pitagoro poznali znamenito povezavo med stranicami pravokotnega trikotnika. To pomeni, da so v različnih krajih ljudje prišli do enakih matematičnih ugotovitev, čeprav morda v drugačnih oblikah.

Tablica Plimpton 322 je lahko bogat izvor raznih šolskih aktivnosti. V prilogi dodajmo nekaj nalog primernih za šolske aktivnosti, za preiskovanje. Ker je preračunavanje precej obsežno, bi bilo najbolje, da ga opravite v skupinah z dvema ali tremi učenci. V osnovni šoli lahko učenci sami izdelajo preglednico 1. Prvo in drugo aktivnost naj morda izvedejo kar brez računanja količnikov v prvem stolpcu z leve. Kot primer medpredmetnega povezovanja lahko učenci pri likovnem pouku izdelajo iz gline svojo tablico pitagorejskih trojic v klinopisni pisavi.

Viri in literatura

A. A. Abdulaziz, The Plimpton 322 tablet and the Babylonian method of generating Pythagorean triples, arXiv: 1004.0025v1 [math.HO] 31 Mar 2010, spletni vir, dosegljiv 21. aprila 2021.

D. F. Mansfield, N. J. Wildberger, Plimpton 322 is Babylonian exact sexagesimal trigonometry, Historia Mathematica 44 (2017), str. 395–419.

U. C. Merzbach, C. B. Boyer. (2011). *A history of mathematics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Hoboken.

E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322, Historia Mathematica 28 (2001), str. 167–206.

E. Robson, Words and pictures: new light on Plimpton 322, American Mathematical Monthly 109 (2002), str. 105–120.

W. Sierpiński. (2003). Pythagorean triangles. New York: Dover Publications, Mineola.

1. aktivnost

Zapišite preglednico 2 s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števkami. To pomeni, da nadaljujte preglednico:

a_n^2 / b_n^2	a_n	c_n	n
00; 59 00 15	01 59	02 49	1

2. aktivnost

Zapišite preglednico 2 s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števkami in jo razširite z drugo kateto. To se pravi, da nadaljujte preglednico:

a_n^2 / b_n^2	a_n	b_n	c_n	n
00; 59 00 15	01 59	02 00	02 49	1

3. aktivnost

Zapišite preglednico 2 v desetiškem sistemu s pomočjo preglednice 1 z običajnimi arabskimi števkami in jo razširite z drugo kateto. Ali se katete izražajo z regularnimi števili? Dobljena števila razstavite na prafaktorje. Z risanjem ustreznih pravokotnih trikotnikov in kotomerom določite kote α_n. Dijaki, ki poznajo trigonometrične funkcije, naj te kote izračunajo. To se pravi, da nadaljujte preglednico:

α_n(°)	a_n^2 / b_n^2	a_n	b_n	c_n	n
44,76	0,9834027777...	$119 = 7 \cdot 17$	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$169 = 13^2$	1

4. aktivnost

Po vzoru tablice Plimpton 322 pripravite številske podatke za svojo tablico, drugačne kot so na tablici Plimpton 322. Najbolj goreči jo lahko izdelate iz gline.

5. aktivnost

Pretvorite Al Kašijev približek (1) števila 2π v decimalno obliko. Koliko točnih decimalk dobite?

Mathematics in school

1 2021 Volume 27

CONTENTS

Mateja Sirnik
We Also Practise Mathematics Distance Learning

FROM THE THEORY FOR PRACTICE

Lidija Pulko and Mateja Sirnik
Challenges of Mathematics Distance Learning 2

Adrijana Mastnak
Student Self-Checking the Correctness of Task-Solving in Mathematics 8

Ana Lara Schwarzbartl and Vida Manfreda Kolar
Assessing Mathematical Knowledge with a Numbers Marathon 15

Adriaan Herremans
Paper folding and Inquiry Based Learning 23

FROM THE CLASSROOM

Jerneja Bone and Magda Čevdek
Assessing Pupils' Knowledge at a Distance Using Complex Tasks 32

Simona Ostović
Different Methods of Assessing Knowledge and Collecting Evidence of Learning in Mathematics Distance Learning 51

MATHEMATICS THROUGH HISTORY

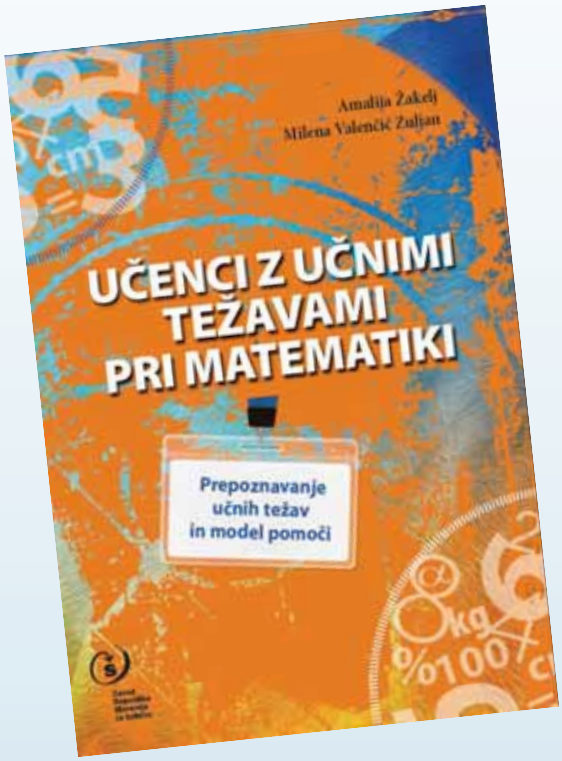
Marko Razpet
A Babylonian Tablet and Pythagorean Triples 57

IZ ZALOŽBE ZAVODA RS ZA ŠOLSTVO

Amalija Žakelj in Milena Valenčič Zuljan

Učenci z učnimi težavami pri matematiki

Prepoznavanje učnih težav in model pomoči



Monografija obravnava vrsto vprašanj, ki se vsebinsko nanašajo na pomoč učencem z učnimi težavami pri matematiki, posega pa tudi širše, na področje izvajanja pouka matematike nasploh.

Prikazuje znake in **vzroke učnih težav** pri matematiki:

- tako tiste, ki jih zaznamo **pri učencu**,
- kot tiste, ki so opazni **pri organizaciji in izvedbi pouka** in ki se zrcalijo v učiteljevem odnosu, prepričanjih in uporabljenih metodah,
- ter tiste, ki so povezani **z družbenim okoljem**, v katerem učenec živi.

Zapisane so konkretne rešitve za odpravo in/oz. lajšanje težav.

2015, ISBN 978-961-03-0306-0, 200 str.

cena: 25,00 €

Monografija med drugim prinaša tudi izvirni model pomoči UTMAT, ki temelji na predpostavkah, da učenci za kakovosten pouk potrebujejo:

- osmišljeno matematično znanje,
- pouk kot vzajemno dejavnost učenca in učitelja ter
- udeleženost učenca pri načrtovanju, izvajanju in evalviranju pouka.

Zavod Republike Slovenije za šolstvo

Naročanje:

- po pošti (Zavod RS za šolstvo, Poljanska c. 28, 1000 Ljubljana)
- po faksu (01/3005-199)
- po elektronski pošti (zalozba@zrss.si)
- na spletni strani (http://www.zrss.si)

ISSN 1318-010X