



PRESEK



- POPAČENJE
- OPTIČNA »NEVIDNOST« Z LEČAMI
- IZZIVI ENOSTAVNE ASTROFOTOGRAFIJE
- ALGORITEM BATMINER ZA RUDARJENJE ASOCIATIVNIH PRAVIL



Razlaga mavrice

↓↓↓

→ Po irski legendi je škrat na koncu mavrice skrtil lonc zlata. A tudi brez zlata smo lahko nad mavrico navdušeni. Svetloba se pri vstopu in izstopu iz kapljic lomi, znotraj kapljic pa se odbija, včasih večkrat. S pomočjo trigonometrije lahko izračunamo lomni kot, ki določa, kje se nahaja vrh glavne mavrice. Njegova velikost je približno 42 stopinj. Enak je kotu z vrhom v opazovalčevem očesu ter krakoma skozi vrh mavrice in skozi senco opazovalčeve glave. Ker imajo različne barve različne valovne dolžine, se lomijo pod različnimi koti in tako ustvarijo eno ali dve mavrici.

Natančnejši pogled pokaže, da se znotraj sredinskega vijoličnega pasu pojavijo bolj nežni odenki. Nastanejo zaradi interference svetlobnih valov, pri čemer se nekateri valovi medsebojno ojačujejo. Razlaga teh pasov ni popolnoma očitna in v prvih teoretičnih razlagah mavrice ni zaobjeta. Za dokaz teh pasov je potrebna valovna teorija, natančen opis pa dajo Airyjevi integrali, ki jih numerično izračunamo s pomočjo neskončnih vrst. Radovednost pri proučevanju mavric je privedla celo do nekaterih novih odkritij v matematiki in fiziki, npr. do »mavric«, ki jih tvorijo sipani atomi ali jedra.

Radovednejši bralci si lahko preberete prispevek »The Rainbow Bridge: Rainbows in Art, Myths and Science«, ki sta ga leta 2001 napisala avtorja Raymond R. Lee in Alistair L. Frasier.



× × ×

→

Presek

list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje letnik 44, šolsko leto 2016/2017, številka 5

Uredniški odbor: Vladimir Batagelj, Tanja Bečan (jezikovni pregled), Mojca Čepič, Mirko Dobovišek, Vilko Domanjko, Bojan Golli, Andrej Guštin (astronomija), Marjan Jerman (matematika), Martin Juvan, Maja Klavžar, Damjan Kobal, Lucijana Kračun Berc (tekmovanja), Peter Legiša (glavni urednik), Andrej Likar (fizika), Matija Lokar, Aleš Mohorič (odgovorni urednik), Igor Pesek (računalništvo), Marko Razpet, Matjaž Vencelj, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si

Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2016/2017 je za posamezno naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100-1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBAS12X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

© 2017 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije – 2028

Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikazne novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana ali na naslov elektronske pošte presek@dmfa.si.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvirne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

MATEMATIČNI TRENUTKI

- 2 Razlaga mavrice

MATEMATIKA

- 4-12 Popačenje
(Peter Legiša)
- 12-13 Vsota kvadratov prvih n zaporednih naravnih števil
(Jens Carstensen in Alija Muminagić)

FIZIKA

- 14-15, 18-19 Optična »nevidnost« z lečami
(Robert Hauko, Jakob Murko, Leo Strmšek, Jana Padežnik Gomilšek in Robert Repnik)
- 20-21 Vertikalni temperaturni gradient
(Jože Rakovec)

ASTRONOMIJA

- 22-25 Izzivi enostavne astrofotografije
(Andrej Guštin)

RAČUNALNIŠTVO

- 26-29 Algoritem BatMiner za rudarjenje asociativnih pravil
(Iztok Fister ml. in Iztok Fister)

RAZVEDRILO

- 21 Barvni sudoku
- 26 Križne vsote
- 16-17 Nagradna križanka
(Marko Bokalič)
- 30 Rešitev nagradne križanke Presek 44/4
(Marko Bokalič)
- 31 Naravoslovna fotografija - Temperaturna inverzija
(Luka Senekovič)

TEKMOVANJA

- priloga 54. fizikalno tekmovanje srednješolcev Slovenije - državno tekmovanje
- priloga 26. tekmovanje iz razvedrilne matematike - državno tekmovanje

SLIKA NA NASLOVNICI: Snop sončne svetlobe, ki so ga ustvarile žaluzije, se je na robu ogledala na steni razklonil v mavrični trak. Trak pusti dolgo sled na primerno nagnjenem listu papirja. Foto: Aleš Mohorič

Popačenje

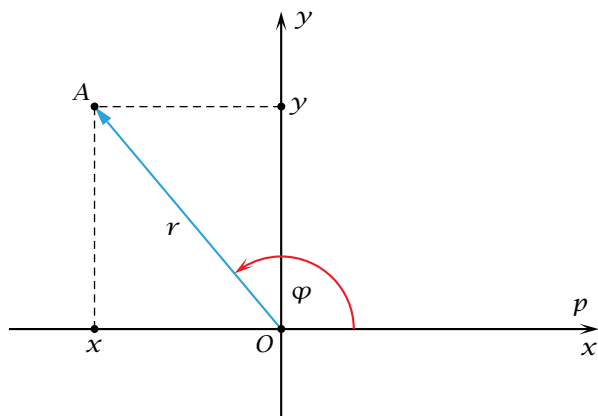
↓↓↓

PETER LEGIŠA

→

Polarni koordinatni sistem v ravnini

V ravnini imejmo pravokotni koordinatni sistem. Pozitivni del p abscisne osi, usmerjen od točke O , proglasimo za *polarno os*, točka O je *pol* ali *koordinatno izhodišče*.



SLIKA 1.

Točka O je pol, poltrak p polarna os. Števili $|OA| = r$ in kot φ sta polarni koordinati točke A .

Kote z vrhom v O merimo v smeri, ki pomeni najkrajše vrtenje polarne osi na pozitivni del osi y (slika 1).

Vsaki točki A v ravnini ($A \neq O$) lahko priredimo dve števili:

- razdaljo r točke A od O , ki jo imenujemo *polmer* ali *radij* točke in
- *polarni (smerni) kot* φ , ki ga zveznica OA oklepa s poltrakom p .

Števili r , φ sta *polarni koordinati* točke A . Točka A je s polarnima koordinatama enolično določena. Če vzamemo, da je $0 \leq \varphi < 360^\circ$, pa sta tudi polarni koordinati točke A enolično določeni. (Brez tega dogovora lahko smernemu kotu prištejemo poljubno

večkratnik polnega kota.) Sam pol O je karakteriziran z $r = 0$, polarni kot za točko O pa ni določen. Če je sta x in y pravokotni koordinati točke A , je seveda $r^2 = x^2 + y^2$.

Primer. Pomislite na uporabo radarja v morskem prometu. Radar oddaja ozek snop mikrovalov in se vrti okrog navpične osi. Ko radar v določeni smeri zazna odboj, sklepamo, da je tam ladja (ali kak drug večji kovinski objekt). Torej poznamo njen smerni kot. Iz zakasnitve odbitega vala pa izračunamo njeno oddaljenost – radij.

Če imamo pravokotni koordinatni sistem in ima točka A polarni koordinati (r, φ) , sta njeni kartezični koordinati po definiciji funkcij sinus in kosinus enaki

$$\blacksquare \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

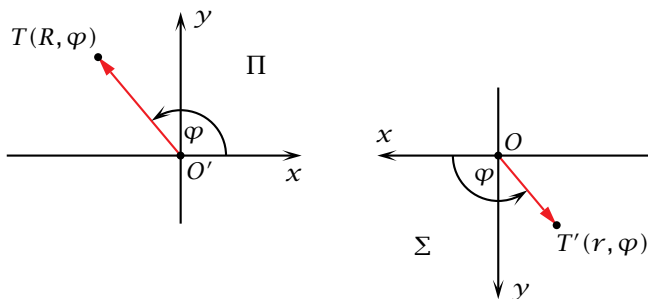
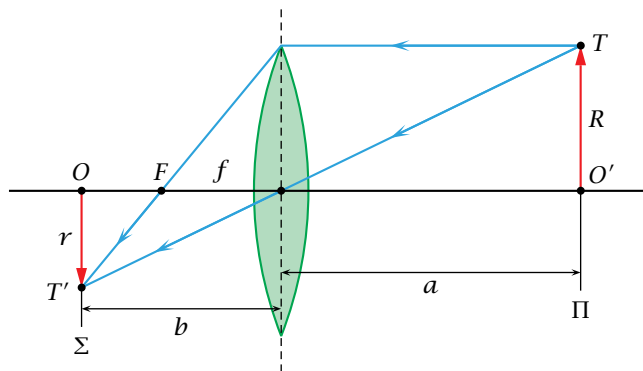
Dogovorimo se: *Koordinate* bodo v tem članku pomenile kartezične koordinate in *koordinatni sistem* kartezični koordinatni sistem, razen če ne bo rečeno drugače.

Kaj je popačenje?

Kaj naj bi »idealno« naredil objektiv v fotografskem aparatu? Privzeli bomo, da je naš objektiv rotacijsko simetričen. Se pravi, če bi (v laboratoriju) objektiv zavrteli okrog osi, se slika ne bi spremenila.

V praksi to ni čisto res. Tudi med novimi objektivi naletimo na slabši primerek. Navadno je kak element v sestavi premaknjen/nagnjen in je zato kakovost slike v raznih smereh različna. Danes take napake opazimo zaradi velike ločljivosti tipal ob stoodstotni povečavi na zaslonu mnogo hitreje kot včasih. Nekdanji zdravnik in znanstvenik je pred desetimi leti ustanovil uspešno podjetje, ki izposoja fotografske objektivne. Poroča [2], da morajo takoj po nakupu približno tri odstotke tovarniško nove (in večinoma drage) optike vrniti ali zanjo uveljavljati stvarno napako, ker njihovi testi pokažejo prevelike okvare.

Presečišče osi objektiva in tipala kamere označimo z O . Imejmo ravnino Π , pravokotno na os leče (slika 2) (in torej vzporedno tipalu kamere). Tej ravnini rečemo *predmetna ravnina*. Njeno lego lahko podamo z enim samim številom – oddaljenostjo od ravnine tipala.



SLIKA 3.

Objektiv preslika točko $T(R, \varphi)$ v točko $T'(r, \varphi)$.

(R, φ) v ravnini Π preslika na ravnino Σ sensorja v točko T' s polarnima koordinatama (r, φ) .

Če bi bil objektiv idealen, bi veljalo $r = mR$. V tem primeru bi, kot smo rekli, preslikava bila podobnostna transformacija, ki ohranja kote in vse razdalje pomnoži z m . Tako pa je r funkcija spremenljivke R , ki se nekoliko razlikuje od mR . Pišimo $s = mR$. Število s bi bila razdalja preslikane točke od sredine tipala, če bi bil objektiv idealen. Na intervalu I možnih vrednosti za s velja

$$\blacksquare r(s) = s \left(1 + \frac{d(s)}{100} \right). \tag{1}$$

Tu je $d(s)$ velikost popačenja v odstotnih točkah. Absolutni razteg radija s znaša $sd(s)/100$. Včasih govorimo, da gre za **radialno popačenje**, ker prizadene le polmere. Privzeli bomo, da *funkcija* $s \mapsto r(s)$ *strogo narašča na intervalu* I in $d(0) = 0$.

To zagotavlja, da popačenje (namišljene) idealne slike različni točki preslika v različni, se pravi, da je popačenje injektivna preslikava. Če se omejimo na t. i. *priosne* žarke, se pravi žarke, ki potekajo blizu optične osi in oklepajo majhen kot z osjo, objektiv deluje v nekaterih pogledih skoraj idealno in torej popačenja praktično ni. Zato pričakujemo, da je $d(0) = 0$.

Funkcija $s \mapsto d(s)$ ni odvisna od tega, kako zaprta je zaslonka objektivna. Je pa odvisna od razdalje med predmetno ravnino in ravnino tipala.

Podjetje Zeiss je eno redkih, ki za nekatere svoje objektivne daje grafe funkcije d . Primere imamo v članku [3]. Na slikah v Zeissovem članku imamo poleg grafa za funkcijo d še rdeče narisane nagibe grafa, to je matematično *odvod* funkcije d . Nagib v dani

SLIKA 2.

Velja $r = mR$, kjer je $m = b/a$.

Če smo izostrili na predmetno ravnino, nam objektiv daljico dolžine R v predmetni ravnini Π preslika na daljico dolžine r v ravnini Σ tipala (= sensorja) kamere. Obstaja še število m (faktor pomanjšanja - ali povečanja), idealno odvisno le od razdalje do predmetne ravnine, da je $r = mR$. Izpeljavo teh rezultatov za upodabljanje s tanko lečo najdemo v članku *Moteča perspektiva* v prvi številki Preseka 2016-17 [1]. Idealni objektiv nam naredi **podobnostno transformacijo** (dela) ravnine Π na ravnino tipala. Tak idealen objektiv preslika daljice na daljice in ohranja kote. Pravokotnik idealni objektiv preslika v pravokotnik, kvadrat v kvadrat itd.

Predvsem pri uporabi zoom objektivov, ki segajo v širokokotno območje, pa opazimo, da ti ne delujejo idealno. Zlasti pri najmanjši goriščnici opazimo neprijetno napako, imenovano **popačenje**. Če nosilka preme črte ne gre skozi središče slike, je podoba črte na tipalu ukrivljena. Slika pravokotnika ni več pravokotnik. Angleški izraz za popačenje je *distortion*, nemški *Verzeichnung*.

Kako popačenje opišemo?

Kot zgoraj, imejmo ravnino Π , vzporedno ravnini sensorja. Objektiv je zmožen preslikati le del te ravnine okrog preseka O' optične osi s Π . Ta del je navadno krog ali (zaradi zaslonk, ki blokirajo nezaželene žarke v objektivu) pravokotnik s središčem v izhodišču O' . Navadno slika ravno pokriva tipalo aparata. V nadaljevanju članka bomo upoštevali to omejitev. Na sliki 3 vidimo, kako lahko izberemo koordinatna sistema v ravnini Π in v ravnini Σ sensorja, tako da se točka T s polarnima koordinatama



→ točki je smerni koeficient tangente na graf v tej točki. Kot bomo videli, je pomembno, kje funkcija d narašča (pada). Funkcija strogo narašča, kjer je njen nagib pozitiven. Strogo pada, kjer je nagib negativen.

Zanima nas, kako se dejanska slika razlikuje od idealne.

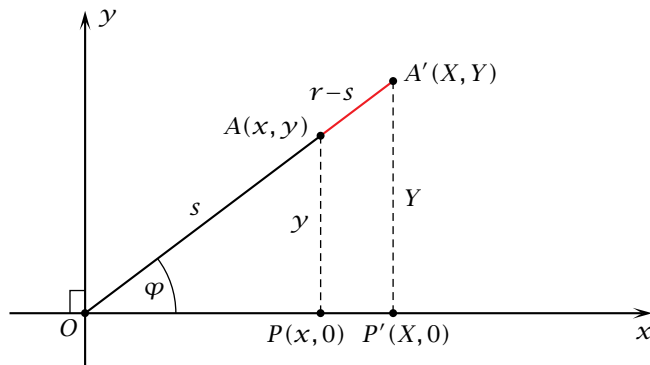
Podrobno bomo tako preučili preslikavo, ki točko A s polarnima koordinatama (s, φ) preslika v točko A' s polarnima koordinatama $(r(s), \varphi)$.

Ker se pri tem polarni kot ne spremeni, velja:

Vsaka premica p skozi izhodišče se pri tej preslikavi ohranja. Posamezne točke na premici p se lahko premaknejo, vendar ostanejo na p .

Formule za popačenje

Vzemimo na idealni sliki točko A s kartezičnima koordinatama $A(x, y)$. Njen polmer v polarnih koordinatah je $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. Na popačeni sliki točki A odgovarja točka A' s kartezičnima koordinatama $A'(X, Y)$ kot na sliki 4.



SLIKA 4.
Tu je $|OA| = s$ in $|OA'| = r$.

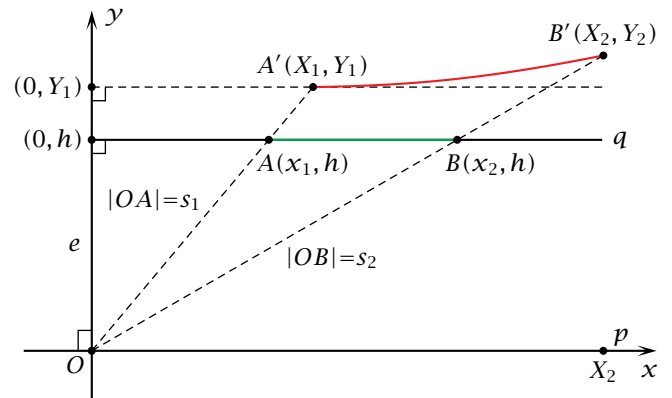
Njen polmer znaša $r(s) = s \left(1 + \frac{d(s)}{100}\right)$. Ker sta trikotnika POA in $P'OA'$ podobna, je $X : x = r(s) : s$. Tako ima točka A' absciso enako $X = xr(s)/s = x + x \frac{d(s)}{100}$. Enako vidimo, da je ordinata točke A' enaka $Y = yr(s)/s = y + y \frac{d(s)}{100}$. Tako sta kartezični

koordinati točke A' enaki

$$\begin{aligned} X &= x \frac{r(s)}{s} = x + \frac{x}{100} d \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right); \\ Y &= y \frac{r(s)}{s} = y + \frac{y}{100} d \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Popačenje daljico, katere nosilka gre skozi izhodišče, spet preslika na (navadno drugo) daljico z isto nosilko. Kaj pa, če nosilka daljice ne gre skozi izhodišče?

Vzemimo na idealni sliki premico q , ki ne gre skozi izhodišče O . Narišimo ji vzporednico p skozi O . Postavimo pravokotni koordinatni sistem tako, da ima q enačbo $y = h > 0$ kot na sliki 5.



SLIKA 5.
Tu je $|OA| = s_1$ in $|OB| = s_2$. Blazinasto popačenje daljico AB preslika na rdečo krivuljo od A' do B' .

Na popačeni sliki točki $T(x, h)$ na premici q po enačbi (2) odgovarja točka $T'(X(x), Y(x))$ s koordinatama

$$\begin{aligned} X(x) &= x + \frac{x}{100} d \left(\sqrt{x^2 + h^2} \right); \\ Y(x) &= h + \frac{h}{100} d \left(\sqrt{x^2 + h^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Poglejmo, kaj se dogaja, ko x narašča od 0 naprej. Narašča funkcija $x \mapsto s(x) = \sqrt{x^2 + h^2}$. Za nas je še posebno pomembna formula za višino Y ukrivljene slike vodoravne črte $y = h$, zato jo ponovimo:

$$Y(x) = h + \frac{h}{100} d \left(\sqrt{x^2 + h^2} \right). \quad (4)$$

Blazinasto popačenje

Denimo, da funkcija $s \mapsto d(s)$ na intervalu $J = [s_1, s_2]$ **strogo narašča**. Točka $A(x_1, h)$ z $x_1 > 0$ naj ima polmer s_1 , se pravi $x_1^2 + h^2 = s_1^2$ na sliki 5. Prav tako naj ima $B(x_2, h)$ z $x_2 > 0$ polmer s_2 . Seveda je $x_2 > x_1$. Če je $x_1 \leq x \leq x_2$, je $T(x, h)$ na daljici AB . Kakšno obliko ima popačena slika daljice AB ?

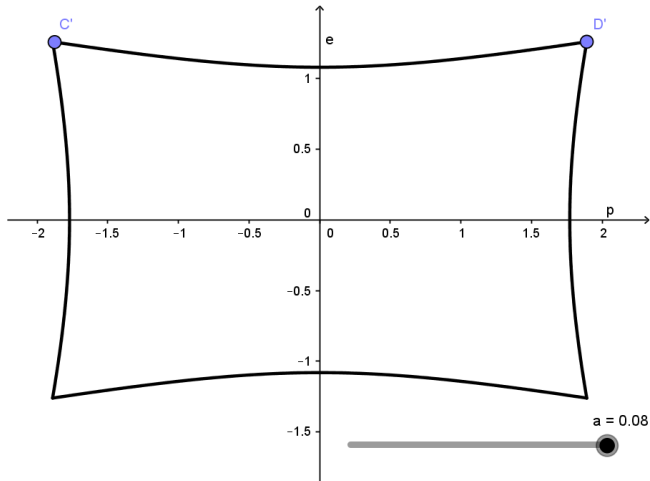
Ko x narašča od x_1 do x_2 , narašča $s(x) = \sqrt{x^2 + h^2}$ od s_1 do s_2 . Na intervalu $J = [s_1, s_2]$ je d naraščajoča. Zato na intervalu $I = [x_1, x_2]$ narašča funkcija $x \mapsto d(\sqrt{x^2 + h^2})$. Vsota dveh naraščajočih funkcij je naraščajoča, zato po (3) na intervalu I strogo narašča preslikava $x \mapsto X(x)$. Funkcija $Y(x) = h + \frac{h}{100} d(\sqrt{x^2 + h^2})$ prav tako strogo narašča na intervalu $I = [x_1, x_2]$. Ko x potuje od x_1 do x_2 , se zato $T'(X(x), Y(x))$ giblje desno in navzgor. Popačena slika daljice AB je torej krivulja, ki jo imamo lahko za graf strogo naraščajoče funkcije na intervalu od $X_1 = X(x_1)$ do $X_2 = X(x_2)$.

Torej, ko potujemo po popačeni sliki daljice AB od A' do B' , se T' oddaljuje od premice p kot na sliki 5.

Imejmo na idealni sliki pravokotni okvir (= rob pravokotnika) s središčem v izhodišču O , tako da polmeri vseh točk okvirja ležijo v intervalu J . Naj bo CD stranica okvirja in p premica skozi O , vzporedna daljici CD . Ko se po popačeni sliki stranice CD okvirja oddaljujemo od središča, se oddaljujemo tudi od premice p . (Premico p pa, kot smo že rekli, popačenje ohranja.)

Popačeni okvir ima tako obliko natlačene blazine – ožje v sredini, s štrlečimi vogali (slika 6), saj je popačenje relativno najbolj raztegnilo prav vogale. Temu pravimo **blazinasto popačenje** ali *popačenje v obliki blazine* – angleško *pincushion distortion*, saj so take napihnjene blazinice, v katere šivilja zabada bucike. Povzemimo:

Imejmo na idealni sliki daljico AB , vzporedno premici p skozi O (vendar ne vsebovano v p). Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p . Polmeri točk na AB naj leže na intervalu, na katerem funkcija d strogo narašča. Ko se po popačeni sliki daljice AB oddaljujemo od e , se **oddaljujemo** tudi od premice p . Zato govorimo o *blazinastem popačenju*.



SLIKA 6.
Blazinasto popačenje pravokotnega okvirja.

Vzeli smo $J = [s_1, s_2]$. Točke na idealni sliki s polmerom v J ležijo na kolobarju s središčem v izhodišču. Meji tega kolobarja sta krožnici s polmeroma s_1 in s_2 . Popačitev ta kolobar preslika na kolobar s središčem v izhodišču. Meji popačenega kolobarja sta krožnici s polmeroma $r(s_1) = s_1(1 + (1/100)d(s_1))$ in $r(s_2) = s_2(1 + (1/100)d(s_2))$. V našem primeru je $r(s_2) - r(s_1) = s_2 - s_1 + (1/100)(d(s_2) - d(s_1)) > s_2 - s_1$, torej popačenje poveča razdaljo med krožnicama.

Pri »standardnih« zoomih imamo navadno na tele območju rahlo blazinasto popačenje.

Sodčkasto popačenje

Denimo zdaj, da funkcija d na intervalu $K = [t_1, t_2]$ **strogo pada**. Naj ima $G(z_1, h)$ polmer t_1 in $H(z_2, h)$ polmer t_2 , kjer je $0 < z_1 < z_2$ kot na sliki 7. Potem $x \mapsto d(s(x))$ na tem intervalu strogo pada. Po formuli (4) funkcija $x \mapsto Y(x)$ strogo pada na intervalu $L = [z_1, z_2]$. Ker $x \mapsto s(x)$ strogo narašča, to velja tudi za $x \mapsto r(s(x))$, saj je r strogo naraščajoča. Toda $r(s(x)) = \sqrt{(X(x))^2 + (Y(x))^2}$. Ker $x \mapsto Y(x)$ strogo pada, mora $x \mapsto X(x)$ strogo naraščati. Ko x teče od z_1 do z_2 , se točka $T'(X(x), Y(x))$ giblje desno in navzdol. Tako vidimo:





Imejmo na idealni sliki daljico GH , vzporedno premici p skozi O (vendar ne vsebovano v p). Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p . Polmeri točk na GH naj leže na intervalu, na katerem funkcija d strogo pada. Ko se po popačeni sliki daljice GH oddaljujemo od e , se **bližamo** premici p kot na sliki 7. Zato govorimo o *sodčkastem popačenju* ali *popačenju v obliki sodčka* - angleško *barrel distortion*. Premici p in e se pri popačenju seveda ohranjata.

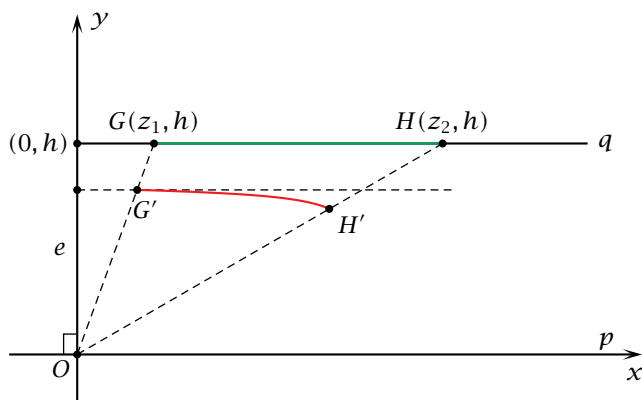
Vzemimo na idealni sliki pravokotni okvir s središčem v izhodišču, tako da polmeri vseh točk okvirja ležijo v intervalu K . Najbolj se skrčijo polmeri od središča slike najbolj oddaljenih točk. Popačenje »zategne« vogale pravokotnika. Popačeni pravokotnik dobi obliko soda kot na sliki 8.

Pri posnetkih arhitekture, reprodukcijah je popačenje zelo moteče.

Pri objektivih akcijskih kamer in »ribjih očes« pa je ekstremno sodčkasto popačenje celo zaželeno - ker na ta način spravimo na sliko kar se da veliko stvarnosti.

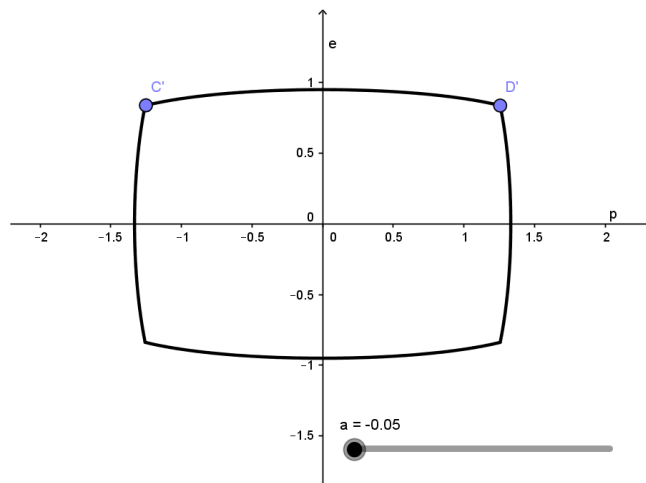
Valovito popačenje

Lahko se zgodi, da radiji točk na daljici BA , ki ne gre skozi izhodišče, ležijo v intervalu J , kjer funkcija d strogo narašča, in v intervalu K , kjer funkcija d strogo pada. Naj bo p premica skozi izhodišče



SLIKA 7.

Tu je $|OG| = t_1$ in $|OH| = t_2$.



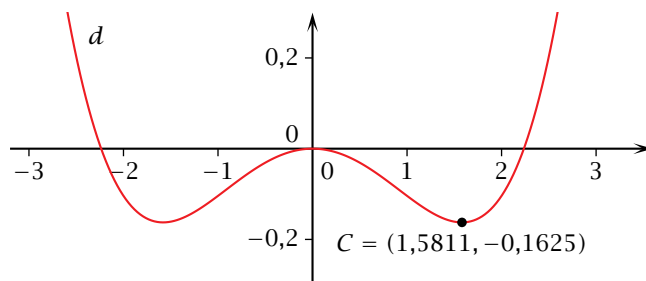
SLIKA 8.

Sodčkasto popačenje pravokotnega okvirja.

vzporedna in disjunktna z daljico AH . Premica e naj poteka skozi O in naj bo pravokotna na p . Ko se po popačeni sliki daljice AH oddaljujemo od e , se na enem delu oddaljujemo od p , na drugem delu pa približujemo premici p . Temu pravimo *popačenje v obliki brkov* - *mustač* ali *valovito popačenje*.

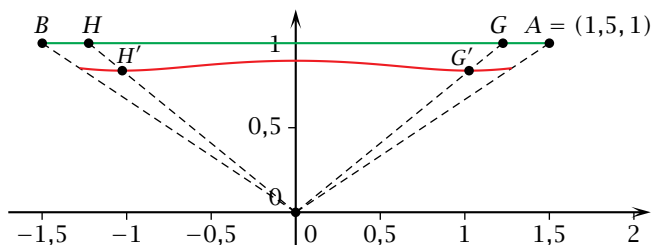
Primer. Denimo, da je $d(s) = -0,13s^2 + 0,026s^4$. Oglejmo si vedenje funkcije d za nenegativne s . Ko spremenljivko s povečujemo od 0 naprej, najprej prevlada prvi člen v vsoti za $d(s)$ in funkcija d pada. Kasneje prevlada višja potenca v drugem členu in funkcija d narašča.

Graf za d imamo na sliki 9. V točki C , kjer d preide iz padanja v naraščanje, zavzame funkcija d naj-



SLIKA 9.

Graf funkcije $d(x) = -0,13x^2 + 0,026x^4$ ima minima v točkah z absciso $x = \pm\sqrt{2,5}$.



SLIKA 10.

Rdeča krivulja predstavlja valovito popačenje daljice AB.

manjšo vrednost – minimum. Z matematičnim orodjem, imenovanim odvod (snov četrtega leta gimnazije), ugotovimo, da je ta minimum pri $s = \sqrt{2,5}$. Minime (in maksime) pa nam poišče tudi ukaz Ekstrem v prosto dostopni GeoGebri. Torej funkcija d pada na intervalu $[0, \sqrt{2,5}]$ in narašča na intervalu $[\sqrt{2,5}, \infty]$. To lahko preverimo tudi s kakim drugim programom ali računalom, ki zna narisati graf polinoma d .

Naj bo $A(1,5, 1)$ in $B(-1,5, 1)$. Popačeno podobo daljice AB imamo rdeče obarvano na sliki 10. V nadaljevanju tega članka bomo na preprostejših primerih razložili, kako smo to narisali. Točki $G(\sqrt{1,5}, 1)$ in $H(-\sqrt{1,5}, 1)$ na daljici AB imata polmer $\sqrt{2,5}$. Na sliki 10 vidimo v rdeči krivulji od G' do H' sodčkasto popačenje daljice GH in v rdečem preostanku blazinasto popačenje daljic AG in BH. Popačitev daljice AB ima obliko umetniških brkov, kakršni so bili v modi okrog leta 1900.

Na [4] imam na GeoGebra Tube interaktivno sliko z naslovom *Zapleteno popačenje daljice*, kjer je $d(s) = -0,13s^2 + bs^4$. Z drsnikom lahko spremenjamo parameter b .

Modeliranje popačenja

Mnoge funkcije lahko dobro aproksimiramo s polinomi. Ker je $d(0) = 0$, poskusimo z $\frac{d(s)}{100} = a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + \dots$. Literatura [3, str. 27], [5, str. 87–90] pravi, da po t. i. *Seidelovi teoriji aberacij* pri objektivih, sestavljenih iz dobro centriranih leč s sferičnimi površinami, v gornjem izrazu lahko izpustimo lihe potence. **Ludwig Seidel** je to teorijo objavil v več člankih v reviji *Astronomische Nachrichten* leta 1856. Praksa kaže, da pri takih

objektivih zelo dober približek dobimo v obliki

$$\frac{d(s)}{100} = as^2 + bs^4. \tag{5}$$

En tak primer smo že podrobno obravnavali.

Enostavno popačenje

V mnogih primerih lahko v enačbi (5) zanemarimo drugi člen, tako da vzamemo

$$\frac{d(s)}{100} = as^2 \tag{6}$$

in tako

$$r(s) = s(1 + as^2). \tag{7}$$

Če velja enačba (7), bomo to imenovali *enostavno popačenje*.

Razteg radija s znaša $r - s = sd(s)/100 = as^3$. Bistven vpliv na sliko ima predznak koeficienta a . Če je $a > 0$, funkcija $s \mapsto d(s) = as^2$ strogo narašča na intervalu $[0, \infty]$. Povzemimo:

- Za $a > 0$ dobimo enostavno blazinasto popačenje.
- Za $a < 0$ dobimo enostavno sodčkasto popačenje.

Če to vstavimo v enačbo (2), vidimo, da točki $A(x, y)$ na idealni sliki na popačeni sliki odgovarja točka $A'(X, Y)$ s kartezičnima koordinatama

$$\begin{aligned} X &= x + ax(x^2 + y^2); \\ Y &= y + ay(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{8}$$

Vodoravna premica z enačbo $y = h$ je sestavljena iz točk (x, h) . Zato se popači v krivuljo, sestavljeno iz točk (X, Y) , tako da je

$$\begin{aligned} X &= x + ax(x^2 + h^2); \\ Y &= h + ah(x^2 + h^2). \end{aligned} \tag{9}$$

To je *parametrična enačba* te krivulje; spremenljivka x je *parameter*. Programi za računalniško geometrijo kot, recimo, prosto dostopna GeoGebra, znajo narisati take parametrično podane krivulje. Ukaz je

```
Krivulja[
  x + a x(x^2 + h^2), h + a h(x^2 + h^2),
  x, -1.5, 1.5
],
```

če spremenljivka x teče od $-1,5$ do $1,5$.



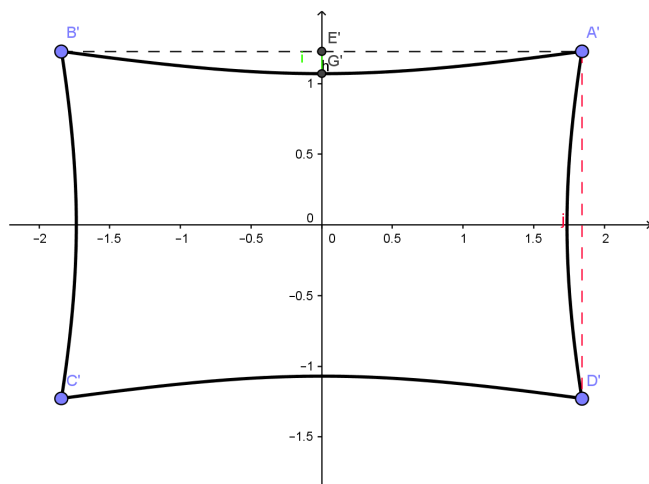


Na slikah 6 in 8 imamo enostavni popačenji pravokotnega okvirja velikosti 3×2 , s središčem v izhodišču. Na sliki 6 je $a = 0,08$, na sliki 8 pa je $a = -0,05$.

Na naslovu [4] sem v GeoGebri naredil interaktivno sliko z naslovom *Enostavno popačenje pravokotnega okvirja*. Z drsnikom spreminjamo parameter a . Pri $a = 0$ ni popačenja.

TV popačenje

Če imamo le blazinasto ali le sodčkasto popačenje, je zaželena preprosta številka ocena za velikost popačenja.



SLIKA 11.

Tu so A', B', C', D' vogali tipala.

Na sliki 11 so ukrivljene črte popačena slika pravokotnega okvirja s središčem v izhodišču O , pravokotnik $A'B'C'D'$ pa predstavlja tipalo. Kvocient

$$\blacksquare 100 \frac{|E'G'|}{|A'D'|}$$

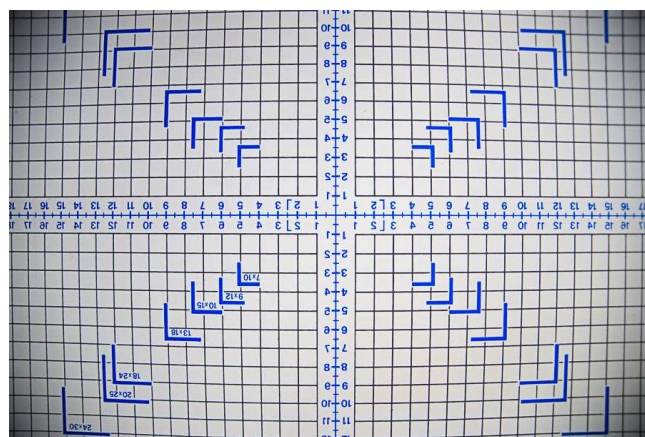
je *TV popačenje* v odstotnih točkah. Nekateri raje uporabljajo *SMIA TV popačenje*, ki je dvakratnik vrednosti TV popačenja. Vsi ti pojmi in precejšnja zmeda v terminologiji izvirajo še iz časov katodnih cevi na televizorjih. Uporabljajo pa jih tudi nekatere internetne strani, ki testirajo objektivne.

Pri primerjalnih testih objektivov velikost popačenja še zmeraj igra veliko vlogo. **Objektivi s fiksno goriščno razdaljo imajo navadno bistveno manjše popačenje kot zoom objektiv pri enaki goriščnici.**

Bolj zapletena popačenja in vinjetiranje

Kaj pa, če velja formula (5) ali kaj še bolj zapletenega? En tak primer smo že obravnavali in izdelali sliko 9. Objektivni pametnih telefonov in tudi mnogi drugi novejši širokokotni objektivni vsebujejo močno asferične elemente. Zato imajo lahko zelo zapletena popačenja. Na [3, str. 27] imamo grafa funkcije d za tak objektiv pri dveh razdaljah slikanja. Popačenje sicer ni veliko, a je tako zapleteno, da funkcije d ne moremo dobro aproksimirati s preprostim polinomom.

Poglejmo končno primer iz fotografske prakse.

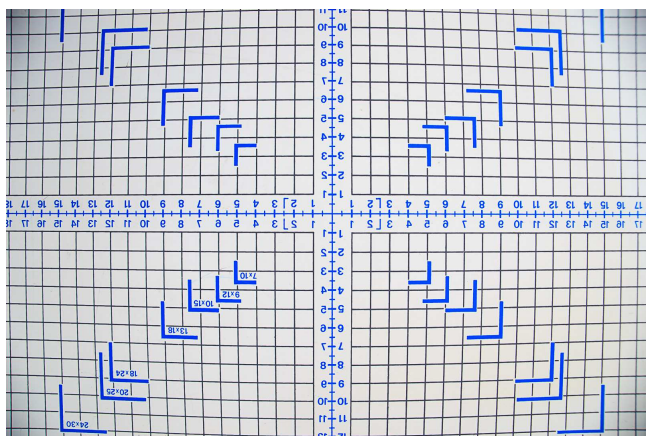


SLIKA 12.

Zapleteno popačenje pravokotne mreže in temni vogali pri odprti zaslonki.

Fotografijo 12 sem posnel s četrst stoletja starim (cenenim) zoomom z goriščno razdaljo 28–80 mm (Canon EF 28–80 mm, 1 : 3,5–5,6 II) na tipalu »polnega formata« (Full Frame, kratko FF), to je velikosti približno $36 \text{ mm} \times 24 \text{ mm}$. Z zrcalom na mizi sem poskusil doseči, da je os slikanja pravokotna na tarčo. Goriščna razdalja je znašala 28 mm in izbral sem najmanjšo možno razdaljo slikanja. Vidno je popačenje, v glavnem sodčkasto. Edinole v vogalih se slika najvišje (najnižje) črte neha približevati vodoravni simetrali slike in se morda čisto v kotu celo začne oddaljevati. Po formuli (4) torej v vogalih funkcija d neha padati in je skoraj konstantna, morda čisto v kotu celo začne naraščati. Torej to ni enostavno popačenje. Čisto v kotu imamo morda celo malce blazinastega popačenja.

Slika je bila posneta pri povsem odprti zaslonki (1 : 3,5). Vogalčki so temni, temu pravimo **vinjetiranje**, ki je tu zelo močno. *Vinjeta* pomeni prvotno okrasni rob okrog risbe ali besedila. V fotografiji pa *vinjetiranje* pomeni zatemnitev vogalov. Vinjetiranje je pri portretih večkrat zaželeno, ker osredotoči pozornost na sredino fotografije. Včasih ga pričaramo celo naknadno. Na obravnavani reprodukciji pa nas zelo moti.



SLIKA 13.

Fotografija pravokotne mreže pri zaslonki 8.

Če objektiv nekoliko zaprem, denimo, za dve zaslonki in pol na 1 : 8 (se pravi na zaslonko število 8) kot na fotografiji 13, se popačenje ne spremeni, vinjetiranje pa skoraj izgine.

Druge napake objektiv in uklon

Fotografijo 12 sem ročno izostril na sredino na LCD zaslonu aparata (v »Live View« načinu), ob desetkratni povečavi. Standardno »fazno« ostrenje ob pogledu skozi optično iskalo na moji zrcalno refleksni kameri je namreč hitro, a ni zmeraj zanesljivo. Že na mali sliki v reviji lahko vidite, da je ob odprti zaslonki in natančni izostritvi na sredino slike desni rob povsem neoster, še posebno zgoraj. To bi lahko pomenilo, da morda tipalo ni povsem vzporedno tarči ali pa, kar je bolj neugodno, da je kak optični element nagnjen. Tudi v tem primeru bi, kot pravi članek [6], morda objektiv lahko ostro preslikal celotno tarčo, če bi bila ustrezno nagnjena. Za preiskus sem premaknil okvirček za ostrenje v zgornji

desni vogal. Izkazalo se je, da tega kota (za razliko od drugih vogalov) sploh ni mogoče zadovoljivo upodobiti. Z objektivom je nedvomno nekaj narobe.

Pri zoom objektivih je pogosto pri določeni goriščnici kak rob ali vogal manj oster – vendar navadno ni takih hudih napak kot v gornjem primeru. Če slikamo naravo, manjših neenakomernosti v ostrini večinoma ne bomo opazili. Več o tem lahko preberete v [6]. Nekateri proizvajalci zdaj zaradi vse večje ločljivosti tipal kontrolo kvalitete izboljšujejo [7].

Na fotografiji 13 sem na istem starem poceni zoom objektivu 28–80 mm zaslonko zaprl na 1 : 8. Ostrina na robovih in v vogalih se je močno izboljšala (a pri našem pokvarjenem primerku je desni zgornji vogal še zmeraj vidno slabši od drugih vogalov).

Če zapiram objektiv še bolj, bo sprva še manj problemov na robu. Vendar ob manjšanju odprtine, skozi katero prihaja svetloba na tipalo, vse bolj prihaja do izraza fizikalni pojav, imenovan **uklon (difrakcija)**. Uklon prizadene kakovost celotne slike, tudi v središču. Pri polnem formatu se vpliv uklona pozna nekako od zaslonkega števila 16 naprej. Pri zaslonki 32 tega ne moremo več spregledati. Uklon prizadene tudi najdražjo optiko. Nekateri proizvajalci kamer zdaj oglašujejo, da njihova tehnologija obdelave slike omogoča zmanjšanje vpliva uklona, a na promocijskem materialu kakih velikih izboljšav nisem opazil. Pri manjših tipalih se uklon pozna že pri manjših zaslonkih številih. Na kameri s senzorjem velikosti 6,2 mm × 4,6 mm (oznaka za to velikost je tudi 1 : 2,3'') je pri zaslonki 8 odprtina zelo majhna in slika že vidno slabša. Tipala pametnih telefonov so navadno še manjša. Ampak optika na telefonih navadno nima zaslonkega mehanizma, tako da dela z maksimalno odprtino. Več o uklonu si preberite na [8].

Sam za reprodukcije in pomembne skupinske slike uporabljam (zaradi slabih izkušenj z zoomi nižjega in srednjega cenovnega razreda) večinoma objektivne s fiksno goriščno razdaljo. Ti imajo nemerno manj optičnih problemov. Pri polnem formatu lahko za majhen denar kupimo standardni objektiv 50 mm 1 : 1,8 ali 40 mm 1 : 2,8. Za nekoliko manjši senzor (APS-C velikost) dobimo poleg prej omenjenih še objektiv 24 mm 1 : 2,8. Ti objektivni imajo minimalno popačenje. Od zaslonke 2,8 naprej naredijo ob pravilni izostritvi odlično sliko, in to od



→ roba do roba. Vredno je kupiti novejšje konstrukcije, saj je kontrola kakovosti boljša in pri zrcalno refleksijskih aparatih je t. i. fazno avtomatično ostrenje z novimi tipi motorčkov precej bolj zanesljivo.

Literatura

- [1] P. Legiša, *Moteča perspektiva*, Presek **44** (2016), 1, 4-14.
- [2] R. Cicala, *Lensrentals Repair Data: 2012-2013*, <https://www.lensrentals.com/blog/2013/08/lensrentals-repair-data-2012-2013/>, ogled: 1. 3. 2017.
- [3] Strokovnjaka firme Zeiss razlagata popačenje: B. Hönlinger, H. H. Nasse, *Verzeichnung*, Carl Zeiss Camera Lens News, Photo-Objektive, Oktober 2009, http://www.zeiss.com/content/dam/Photography/new/pdf/de/c1n_archiv/c1n33_de_web_special_distortion.pdf, angleška verzija: *Distortion*, http://lenspire.zeiss.com/en/wp-content/uploads/sites/2/2016/01/c1n33_en_web_special_distortion.pdf, ogled: 1. 3. 2017.
- [4] Interaktivne ilustracije članka so na avtorjevi strani na GeoGebra Tube: <https://www.geogebra.org/peter.legisa>, ogled: 1. 3. 2017.
- [5] S. F. Ray, *Applied photographic optics*, Second ed., Focal Press, Oxford 1995.
- [6] R. Cicala, *Fun with field of focus II*, <https://www.lensrentals.com/blog/2016/11/fun-with-field-of-focus-ii-copy-to-copy-variation-and-lens-testing/>, ogled: 1. 3. 2017.
- [7] R. Cicala, *Is your camera really the best optical test*, <https://www.lensrentals.com/blog/2016/09/is-your-camera-really-the-best-optical-test/>, ogled: 1. 3. 2017.
- [8] Cambridge in Colour, *Lens Diffraction and Photography*, <http://www.cambridgeincolour.com/tutorials/diffraction-photography.htm>, ogled: 1. 3. 2017.

× × ×

Vsota kvadratov prvih n zaporednih naravnih števil

↓↓↓

JENS CARSTENSEN IN ALIJA MUMINAGIĆ

→ Ko boste prebrali naslov, si boste verjetno mislili, saj to pa dobro poznamo. Kaj novega pa lahko še izvemo? Avtorja misliva drugače in zato sva napisala ta članek.



Najprej opišimo zgled, kje na omenjeno vsoto lahko naletimo v življenju. Zamislite si jabolka, zložena v kvadratno piramido. Eno na vrhu, pod njim so štiri, zložena v kvadrat s stranico po dve jabolki, v tretji plasti nato sledi devet jabolok in tako dalje. Koliko je vseh jabolok v piramidi, če vemo, iz koliko plasti je sestavljena? Ravno toliko, kot vsota, ki jo obravnavamo. Poznamo mnogo (tudi zelo duhovitih) doka-

zov, da je

$$\blacksquare S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1)$$

Eden od takih je tudi ta dokaz: enostavno preverimo, da za vsa realna števila a velja enostavna zveza:

$$\blacksquare a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = 4a^2.$$

Če za a po vrsti vstavljamo naravna števila 1, 2, 3, ..., n , dobimo vrsto enačb: od $1 \cdot 2^2 - 1 \cdot 0^2 = 4 \cdot 1^2$ do $n(n+1)^2 - n(n-1)^2 = 4n^2$. Vrsto enačb nato seštejmo:

$$\begin{aligned} \blacksquare 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n-1)n^2 + n(n+1)^2 - 1 \cdot 0^2 - 2 \cdot 1^2 - \\ \dots - (n-1)(n-2)^2 - n(n-1)^2 = \\ = 4(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2). \end{aligned}$$

Vidimo, da se na desni pojavi člen, ki bi ga radi izračunali. Člene na levi lahko preuredimo in pri tem upoštevamo, da je $1 \cdot 0^2 = 0$ v:

$$\blacksquare -2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + \\ + (n-1)n^2 + n(n+1)^2 = 4S_2.$$

Upoštevajmo še $1 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^2 = -2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^2 = -2 \cdot 3^2, \dots, (n-2)(n-1)^2 - n(n-1)^2 = -2(n-1)^2$, pa dobimo

$$\blacksquare -2[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + (n-1)n^2 + \\ + n(n+1)^2 = 4S_2.$$

Izraz v oglatih oklepajih lahko izrazimo z vsoto, ki jo želimo izračunati: $1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = S_2 - n^2$ in ostane nam:

$$\blacksquare -2(S_2 - n^2) + n^2 - n^2 + n^3 + 2n^2 + n = 4S_n.$$

Od tu brez težav izrazimo

$$\blacksquare S_2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ta dokaz je neizpodbiten (in eleganten), vendar nanj lahko damo nekaj pripomb: 1. Kako vemo, da je vsota kvadratov prvih zaporedni naravnih števil enaka prav $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$? 2. Kako smo se domislili enačbe $a(a+1)^2 - a(a-1)^2 = 4a^2$?

Pokazali bomo, kako lahko zaslutimo, da velja enačba (1). Dobro je znana vrsta prvih n zaporednih naravnih števil:

$$\blacksquare S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2)$$

Oglejmo si sledečo tabelo 1.

Vidimo, da je $\frac{S_2}{S_1} = \frac{2n+1}{3}$ za $n = 1, 2, 3, \dots$. Od tu sledi:

$$\begin{aligned} \blacksquare S_2 &= \frac{(2n+1)S_1}{3} = \frac{(2n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Deduktivno iskanje kvocientov je zelo zanimivo in nam da idejo, kako priti do izraza, vsekakor pa to ni dokaz. To zvezo bi lahko dokazali npr. z indukcijo. Poskusite!

Literatura

- [1] A. Muminagić, *Suma kvadrata prvih n uzastopnih prirodnih brojeva*, časopis Miš, 59, 60 in 61, 2011.
- [2] J. Carstensen, *Kvadratsummen*, Matematik Magasinet 78, 2014.
- [3] G. S. Barnard, *Looking for patterns*, The mathematical gazette, 436, 1982.

n	1	2	3	4	5	6	...
S_1	1	3	6	10	15	21	...
S_2	1	5	14	30	55	91	...
$\frac{S_2}{S_1}$	$\frac{1}{1} = \frac{3}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$	$\frac{30}{10} = \frac{9}{3}$	$\frac{55}{15} = \frac{11}{3}$	$\frac{91}{21} = \frac{13}{3}$...

TABELA 1.

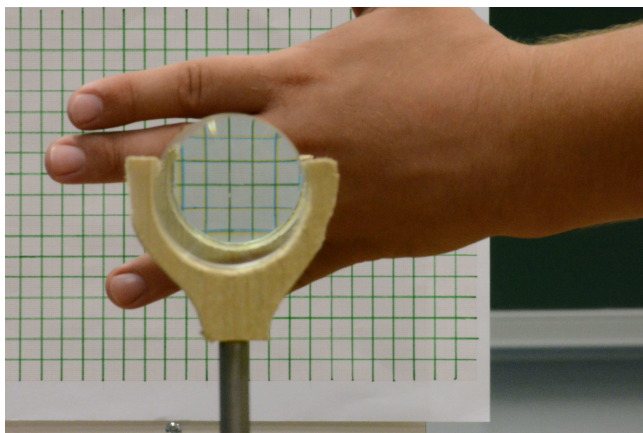
× × ×

Optična »nevidnost« z lečami

↓↓↓

ROBERT HAUKO, JAKOB MURKO, LEO STRMŠEK, JANA PADEŽNIK GOMILŠEK IN ROBERT REPNIK

→ Kako doseči optično »nevidnost«? Ali bolje rečeno: Kako optično preslikati območje iz geometrijske sence predmeta (»ozadja«) pred predmet in ustvariti iluzijo (delnega) izginotja predmeta? Fotografija na sliki 1 kaže, da je to mogoče. Za opisano »čarovnijo« lahko uporabimo leče, zrcala ali kombinacijo obojega. V spodnjih vrsticah sledi opis ustvarjanja »nevidnosti« z lomom svetlobe.

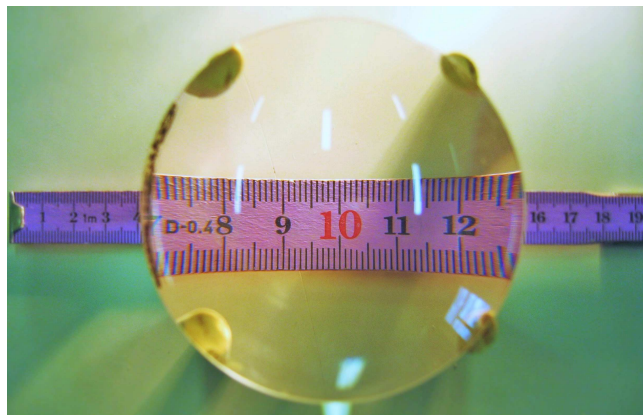


SLIKA 1.

Del roke lahko postanejo »nevidni«.

Za začetek je dovolj le ena zbiralna leča. Predmet (merilni trak) postavimo med gorišče in lečo tako, da leži vzporedno z goriščno ravnino. V tem primeru deluje zbiralna leča kot lupa, nastane pokončna povečana slika merilnega traku. Na sliki 2 je prikazana fotografija traku, vendar pa - na fotografiji ne vidimo vseh enot merilnega traku. Kam so »izginile«?

Na sliki 3 je prikazana shema preslikave, pri čemer je f goriščna razdalja leče, a oddaljenost predmeta



SLIKA 2.

Fotografija merilnega traku - deloma skozi lupo, deloma neposredno. Na sliki ni številčnih oznak med 5 in 7 ter med 13 in 15.

od leče in b razdalja med sliko in lečo. K nastanku slike prispeva vsa svetloba, ki izhaja iz predmeta in vpade na lečo. Lego slike posamezne točke predmeta (npr. točke 1 ali 2) lahko konstruiramo z dvema žarkoma: vzporedni žarek na drugi strani leče poteka skozi desno gorišče leče, središčni žarek ne spremeni smeri. Navidezna slika je v presečišču njunih podaljškov. Tudi podaljški vseh drugih žarkov iz iste točke predmeta, ki gredo skozi lečo, se sekajo v tej točki. Dobimo pokončno povečano sliko predmeta. Ta je tem večja, čim bližje levemu gorišču je predmet.

Ko opazujemo sliko z očesom ali fotoaparatom, vidimo samo svetlobo, ki vpade na zenico ali objektiv fotoaparata. Na dani razdalji od leče jo ponazorimo z žarki iz posamezne točke predmeta, ki gredo skozi majhen del leče (npr. temnejši zeleni snop na sliki 3 za sliko točke 1). Če želimo videti preslikavo celotnega predmeta, moramo opazovati zelo blizu zelo majhne leče ali pa spreminjati lego očesa. V primeru, ko opazujemo sliko z očesom ali fotoapa-

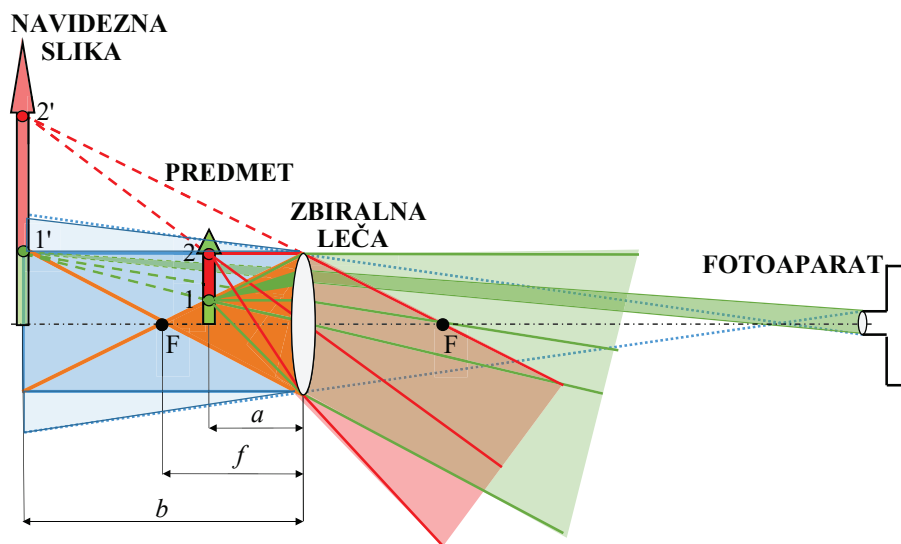
ratom na optični osi na veliki oddaljenosti od leče, vidimo samo del slike, ki leži v »geometrijski senci« leče (modro območje). Pri takem opazovanju vidimo le svetlobo, ki je po lomu na leči skoraj vzporedna z optično osjo in vpade v oko ali na objektiv fotoaparata. V limiti neskončne oddaljenosti jo ponazorimo z žarki, ki potekajo iz točk predmeta znotraj stožca z vrhom v gorišču in osnovno ploskvijo na leči (oranžno območje), »geometrijska senca« pa dobi obliko valja (temnejše modro območje). Za opazovalca rdeči deli predmeta navidezno izginejo, opazuje lahko preslikan spodnji del predmeta ter neposredno vrhni del predmeta (mimo leče), oboje je označeno zeleno. Na fotografiji merilnega traku (slika 2) torej manjkajo dolžinske enote v območju, ki je na sliki 3 označeno z rdečim.

Iz podobnih razlogov ne opazimo slike posameznih delov predmeta tudi v primeru, ko predmet postavimo na razdaljo a od leče tako, da velja $f < a < 2f$ (slika 4). V približku velja, da pri opazovanju na veliki oddaljenosti od leče ne vidimo točk, ki ležijo v prostoru za lečo zunaj označenih oranžnih stož-

cev. To območje imenujemo »skrito območje« in ga lahko izkoristimo za umeščanje predmetov, katerih dele želimo »narediti nevidne«.

Zdaj nam preostane še drugi del naloge - preslikava ozadja. Ko postavimo lečo pred navpično ravnino (»ozadje«) tako, da je ravnina leče z njo vzporedna, goriščna ravnina leče pa je na sredini med lečo in ozadjem, nastane na razdalji b od leče enako velika obrnjena slika ozadja. S pogojem $a = 2f$ iz enačbe leče $1/a + 1/b = 1/f$ izračunamo vrednost $b = a$, za razmerje med velikostjo slike in predmeta $m = -b/a$ pa $m = -1$.

Slika 5 prikazuje potek žarkov pri preslikavi ozadja. Pri preslikavi posamezne točke ozadja sodeluje vsa svetloba, ki izhaja iz te točke in vpade na lečo. Ko z očesom ali fotoaparatom opazujemo sliko daleč stran od leče, nas iz tega snopa doseže le svetloba, ki je skoraj vzporedna z optično osjo. Za točko 1 na sliki 5 ponazorimo to svetlobo s snopom žarkov, ki so skoraj vzporedni z goriščnim žarkom in potekajo skozi spodnji rob leče (zeleno). Točka 2 je od optične osi enako oddaljena kot rob leče. Svetlobo, ki izhaja



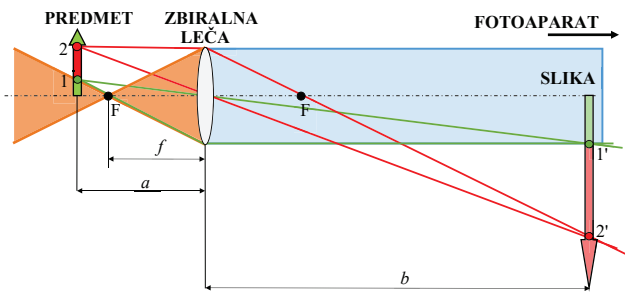
SLIKA 3.

Shema preslikave pri lupi in opazovanje slike predmeta na končni razdalji od leče. Zaradi preglednosti je predmet narisano na eni strani optične osi. Razdalja med sliko in lečo (b) je odvisna od lege predmeta (a) in goriščne razdalje leče (f). Prikazani so žarki, s katerimi konstruiramo nastanek slike dveh točk predmeta (točki 1 in 2). Večina žarkov po lomu na leči ne seka objektiv fotoaparata. Vidimo lahko - skozi lečo ali neposredno mimo nje - samo zeleno obarvane dele predmeta. V limitnem primeru, ko opazujemo na neskončni razdalji od leče, vidimo preslikane samo tiste dele predmeta, ki se nahajajo znotraj oranžnega stožca.

18

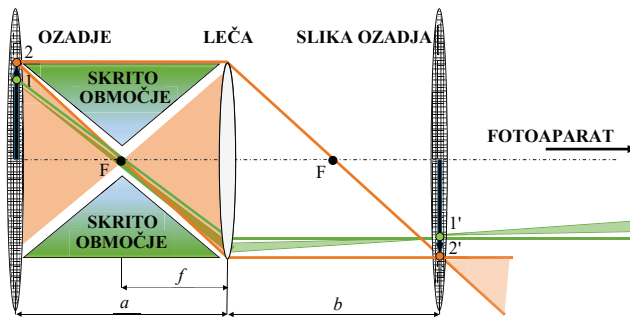
nadaljevanje
na strani

15
nadaljevanje
s strani



SLIKA 4.

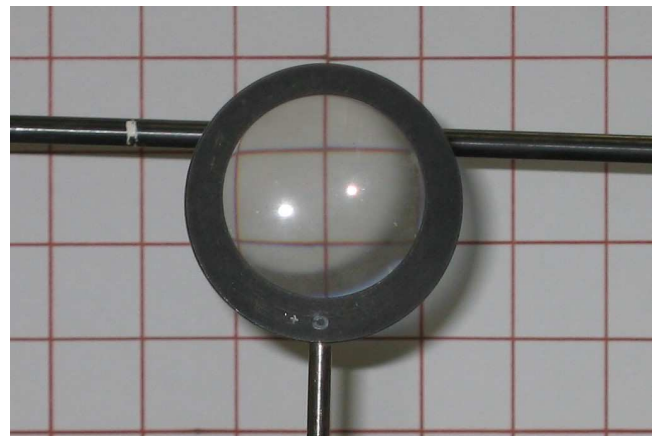
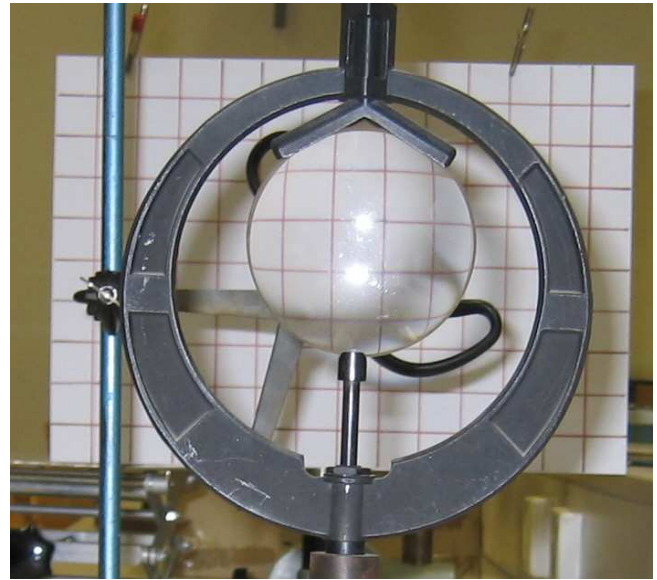
Shema preslikave za predmet na razdalji a od leče, tako da velja $f < a < 2f$, pri čemer je f goriščna razdalja leče in b razdalja med sliko in lečo. Tudi v tem primeru lahko pri opazovanju na optični osi daleč od leče vidimo samo del slike, ki leži v »geometrijski senci« leče. V limiti neskončne razdalje postane to območje valj (modro), vidimo lahko le preslikave točk predmeta, ki ležijo znotraj levega oranžnega stožca.



SLIKA 5.

Nastanek slike ozadja s potekom žarkov in skritim območjem za nevidni predmet. Pri opazovanju slike z očesom ali s fotoaparatom so pomembni le žarki, ki so po lomu na leči skoraj vzporedni z optično osjo (npr. zeleno obarvan snop).

iz te točke in vpade na lečo, ponazorimo s snopom žarkov, ki ga omejujeta goriščni in vzporedni žarek (oranžna črta). Ti žarki ne sekajo objektiva fotoaparata. Točka 2 leži na robu vidnega območja in jo lahko opazimo šele v limiti neskončne oddaljenosti fotoaparata od slike. Velja, da na nastanek slike vplivajo le žarki z ozadja, ki potekajo skozi oranžna svetlobna stožca z vrhom v gorišču in z osnovnima ploskvama na ozadju oziroma leči. Tako smo pokazali, da predmeti v »skritem območju« ne ovirajo nastanka slike ozadja, če jo opazujemo na op-

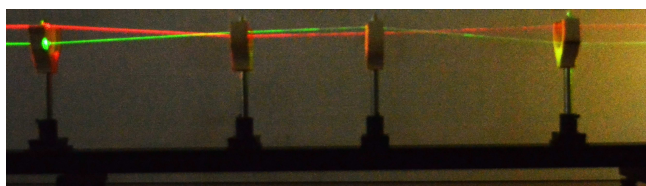
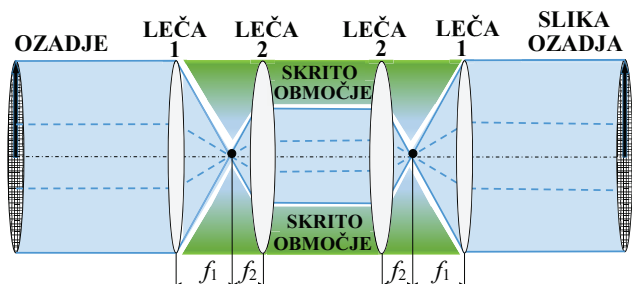


SLIKA 6.

Optično izginjanje delov predmeta z uporabo zbiralne leče. Predmete, ki jih skrivamo (škarje, del palice), postavimo v bližino goriščne ravnine leče tako, da poteka optična os leče mimo njih.

tični osi leče v veliki razdalji od leče (mного večji od goriščne razdalje leče). »Skrito območje« povečamo z uporabo leče s čim večjo goriščno razdaljo. Slika 6 prikazuje fotografiji izginjanje delov predmetov – škarij in kovinske palice. Slika ozadja je zrcaljena glede na optično os leče, vendar tega ne opazimo, saj smo izbrali ozadje, ki je na to os zrcalno simetrično.

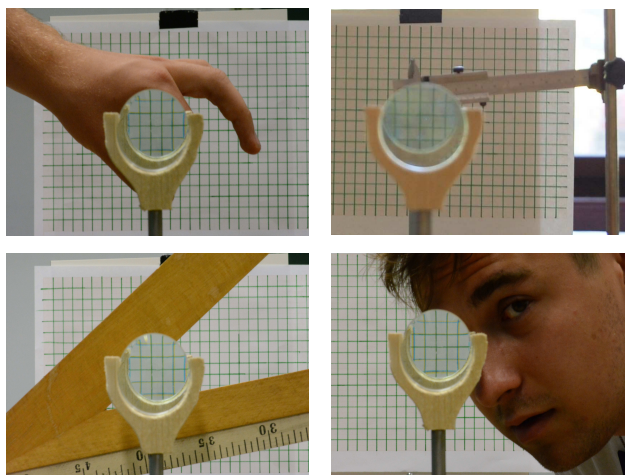
Z uporabo večjega števila leč lahko odpravimo zrcaljenje slike ter zmanjšamo odvisnost od zornega



SLIKA 7.

Prikaz poteka žarkov pri uporabi sistema iz štirih zbiralnih leč. Razdalja med zunanjsima paroma leč (leči 1 in 2) je enaka vsoti njunih goriščnih razdalj, razdalja med notranjsima lečama pa je v splošnem lahko poljubna. Zgoraj je shema poteka žarkov, spodaj pa fotografija eksperimenta in dveh skrajnih žarkov. Potek žarkov je dobro viden zaradi sipanja laserske svetlobe na parafinski pari.

kota opazovanja in morebitnega odklona točke opazovanja od optične osi. Enega od možnih sistemov predstavlja simetrična postavitev dveh parov enakih zbiralnih leč [1], prikazana na sliki 7. Ideja zakrivanja ostaja ista, »skrito območje« se precej poveča, slika ozadja ni obrnjena. Snop vzporednih žarkov iz oddaljenega ozadja po lomih na prvih dveh lečah zožimo, z lomoma na drugih dveh lečah pa dobimo prvotno širino snopa z ohranjeno orientacijo.



SLIKA 8.

»Izginjanje« delov predmetov z uporabo lečja iz štirih zbiralnih leč. Opisani eksperiment je v obliki filma dostopen na spletnih straneh [2].

Na sliki 8 so prikazane fotografije »nevidnih predmetov«, pri katerih smo uporabili opisani sistem iz štirih leč.

Ste dobili ob branju tudi že lastno idejo ustvarjanja »nevidnosti«? In kako doseči »nevidnost« z odbojem svetlobe na zrcalih? O tem kdaj drugič, za motivacijo k lastnemu raziskovanju pa tokrat le povežava na enega od posnetkov na spletnih straneh [3].

Literatura

- [1] J. S. Choi in J. C. Howell, *Paraxial ray optics cloaking*, Optics Express, 22, 29465–29478, 2014.
- [2] <https://www.youtube.com/watch?v=KH6W9qFwsWw>, ogled: 3. 3. 2017.
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=oJb9RnAVDuE>, ogled: 3. 3. 2017.

× × ×

www.presek.si
www.dmfa.si

Vertikalni temperaturni gradient



JOŽE RAKOVEC

→ Opis spreminjanja temperature z višino, vertikalni temperaturni gradient, ki je bil podan v pripevku v [1] prejšnji številki Preseka, potrebuje nekaj dodatnih pojasnil.

Sončevo obsevanje je skoraj edini vir toplote za Zemljo (dotok toplote iz njene vroče sredice prispeva skoraj štiri tisočkrat manj). Če bi toploto samo dodajali, bi bilo vse topleje in topleje. A ni tako, ker Zemlja tudi oddaja toploto v vesolje z infrardečim sevanjem – toliko, kot je dobi od Sonca, toliko je odda.

Ker čist zrak skoraj popolnoma prepušča Sončeve žarke, se od Sonca neposredno ogrevajo le tla (od tistega, kar se ne odbije od tal nazaj navzgor). Mirujoč zrak je obenem zelo dober toplotni izolator, zato se od tal navzgor toplota skoraj nič ne prevaja; prevaja pa se v tleh – podnevi navzdol v globino, ponoči z globine proti površini. Če ne bi bilo še drugih načinov prenosa toplote od tal navzgor, bi bilo pri tleh zelo vroče, zgoraj v ozračju pa zelo mrzlo. Razlike bi bile seveda posebej velike podnevi, ko Sonce obseva tla, manjše pa ponoči.

Toplota od tal se vseeno prenaša tudi v višine, a skoraj nič s prevajanjem, ampak z dviganjem toplega zraka v višine, z infrardečim sevanjem, pa tudi tako, da je toplota, ki se porabi za izhlapevanje vode iz tal (iz morij in iz vlažnih kopnih tal) »skrita« v zraku (s tem, da je v zraku para). Ko se para »tam zgoraj« v oblakih kondenzira nazaj v vodne kapljice, se ta toplota ponovno »prikaže tam zgoraj«.

Zato je v povprečju po vseh krajih na Zemlji, preko dneva in noči ter v vseh letnih časih temperatura pri

morju 15 °C, zgoraj, kjer letijo letala (okrog 10 km visoko), pa poleti in pozimi okrog –50 °C. Torej v povprečju beležimo 65 °C razlike na 10 km ali –6,5 °C na kilometer višinske razlike.

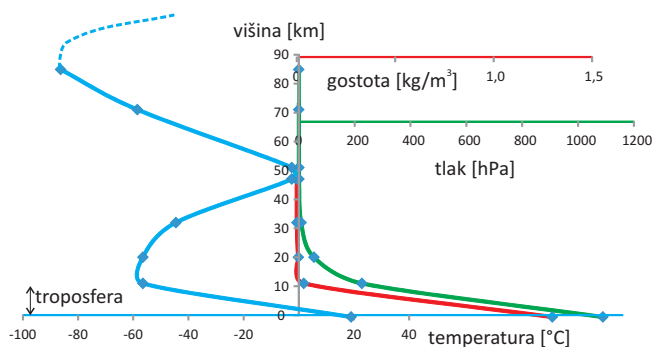
Ni pa vedno in povsod tako. Vsako noč, posebej močno pa pozimi, se zrak pri tleh ohladi in je prav pri tleh najbolj mrzlo. Ta pojav je še posebej izrazit v kotlinah, kamor se z okoliških pobočij nateče mrzel, gost zrak in se ujame v kotlino (kot voda v škaf). Tedaj je lahko pri tleh tudi za pet, deset ali celo več stopinj hladneje kot 100 ali 200 m višje. Takrat torej temperatura zraka z višino ni vse nižja, ampak obratno – višja. Takemu pojavu rečemo temperaturni obrat ali temperaturna inverzija.

Včasih je v posameznih plasteh zraka kar po vsej višini enaka temperatura – temu rečemo izotermija.

Redkeje, a vseeno tu in tam, pa se temperatura z višino znižuje tudi za več kot –6,5 °C/km. To je tedaj, ko se zrak po višini izrazito meša: deli zraka se dvigajo, drugi deli pa spuščajo. Pri dviganju zrak prihaja v višine, kjer je zračni tlak nižji. Ker ga nič ne zadržuje, se tlak v njem prilagaja tistemu okoli nje tako, da se mu poveča volumen. Tako se tlak znotraj zraka, ki se je dvignil, zniža. Za povečanje volumna pa je treba odriniti okolico, v kateri je tlak p – to pa pomeni, da zrak ob povečevanju volumna opravlja delo $+p\Delta V$. To delo »plača« z znižanjem svoje notranje energije $-mc_v\Delta T$. Upoštevamo enačbo stanja plina $pV = mRT/M$ in iz tega $p\Delta V + V\Delta p = (mR/M)\Delta T$, kako se zračni tlak spreminja z višino: $dp = -\rho g dz = -(m/V)g dz$, ter da je $R/M = c_p - c_v$ in ugotovimo, da se zraku, ki se dviga, temperatura niža: $\Delta T = -(g/c_p) \cdot \Delta z = -9,8 \text{ °C/km} \cdot \Delta z$. Tam kjer je dviganje, se torej temperatura znižuje bolj, kot v povprečju: $\approx -10 \text{ °C/km}$.

Ob spuščanju pa obratno: zrak ki pride »dol«, okolica stisne na svoj tlak – in zato se spuščajoči se zrak ogreva z globino za $\approx 10 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$. Ker se ob vertikalnem mešanju dogaja tudi mešanje po horizontali, se torej povsod na takem področju vzpostavi upad temperature z višino $\approx -10 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$.

Kje pa se pojavlja tako močno zniževanje temperature z višino? Dviganje zraka je pod oblaki, v okolici pa je za izravnavo spuščanje zraka. Kjer vidimo, da nastajajo oblaki, je $\Delta T \approx -10 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km} \cdot \Delta z$. Kako dolgo to traja? Dokler se zrak dviga. Kaj pa kjer ni oblakov? Tam se zagotovo temperatura z višino znižuje za manj, kot za $\approx -10 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km}$. In povprečno? Kot smo že povedali, v povprečju je $\Delta T = -6,5 \text{ }^\circ\text{C}/\text{km} \cdot \Delta z$. To je povprečje med vsemi najrazličnejšimi možnostmi; vključno z območji, kjer so temperaturne inverzije, kjer so izotermije, vključno z območji z zmernim padcem temperature z višino ter vključno z območji, kjer se zrak izrazito meša in zato temperatura z višino močno pada.



SLIKA 1.

Nad troposfero začne temperatura naraščati do višine 50 km, nato pa spet pada. Grafi kažejo temperaturo (modro), gostoto (rdeče) in tlak (zeleno) zraka na različnih nadmorskih višinah, kot jih definira Mednarodna standardna atmosfera.

Literatura

- [1] A. Mohorič, *Atmosferski tlak in plastenka*, Presek 44, 4 (2016/17), 30–31.

Barvni sudoku

↓↓↓

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

							5
		1					6
		6					4
7	4				8	3	
	6		4		7		2
	3		8		4		
						7	
			6				5

REŠITEV BARVNI SUDOKU

4	5	2	1	6	8	7	3
3	7	9	8	1	4	2	5
6	1	4	5	8	7	3	2
2	8	7	3	4	5	6	1
1	3	8	6	5	2	4	7
7	4	5	2	3	6	1	8
8	6	3	7	2	1	5	4
5	2	1	4	7	3	8	6

Izzivi enostavne astrofotografije

↓↓↓

ANDREJ GUŠTIN

→ Fotografija je zelo močna astronomska metoda, ki pa ima ogromno »sovražnikov«. Sovražniki astronomske fotografije so naravne, tehnične in druge danosti, ki nam preprečujejo jasen pogled v vesolje. Pokaže pa se, da lahko z relativno enostavnimi prijemi in ne predrago opremo te ovire premagamo. Cilj mladega astronoma pa ne more biti samo lepa astronomska fotografija, temveč mora fotografija služiti tudi meritvi oziroma spoznavanju osnov astronomije, zato vam tokrat predlagamo tudi nekaj takih izzivov.



SLIKA 1.

»Sovražniki«

Majhen sij nebesnih teles

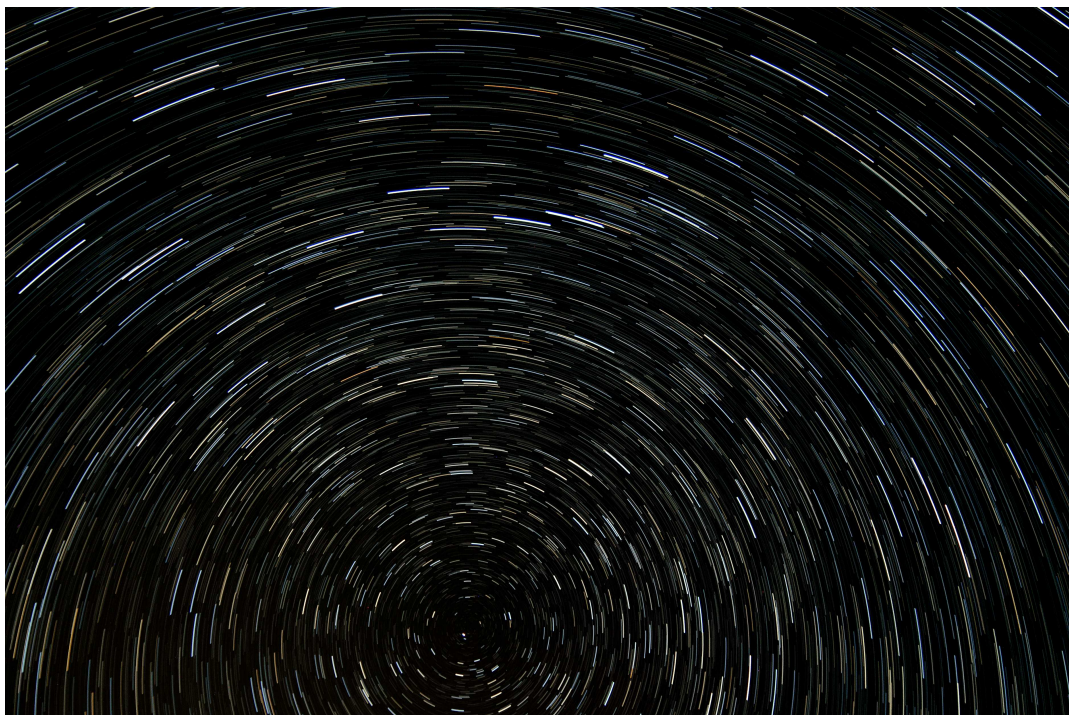
Vesoljska telesa so daleč, zato je gostota svetlobnega toka, ki pride od njih na Zemljo, zelo majhna. V astronomiji navadno namesto gostote svetlobnega toka uporabljamo pojem navidezni sij, ki je izražen v magnitudah. Izjemi sta seveda Sonce in Luna. Če hočemo na čip kamere ujeti šibko svetlobo daljnih vesoljskih teles, moramo fotografirati z dolgimi časi osvetlitve – od nekaj sekund pa do več ur. Potrebni čas osvetlitve je odvisen od več faktorjev, ki so opisani v nadaljevanju.

Poseben primer je snemanje svetlih planetov, ki se jih z nekoliko večjimi teleskopi in videokamerami lahko lotimo drugače kot snemanja zvezd in megličastih objektov.

Vrtenje neba

Verjetno ni potrebno poudarjati, da se nebo navidezno vrti okoli nebesnih polov, ker se Zemlja vrti okoli svoje osi. To pomeni, da nebesna telesa niso pri miru, kar onemogoča dolge čase osvetlitve, če njihove gibanju ne sledimo. Če fotoaparatus postavimo na stojalo, ga usmerimo v nebo in naredimo nekajminutno osvetlitev, potem zvezde na fotografiji niso pike temveč svetle sledi. Daljša kot je goriščna razdalja objektiva, daljše sledi se v enakem času osvetlitve zarišejo. Videli bomo, kako lahko to izkoristimo za nekaj astronomskih vaj.

S primerno kratkimi časi osvetlitve in izbiro kratkogoriščnih objektivov pa je navidezni premik nebesnih teles tako majhen, da so zvezde na fotografiji videti kot pike. Tudi to je zabaven način fotografi-



SLIKA 2.

Zvezdne sledi

ranja neba, ki mu nekateri pravijo kar nebesno krajinarstvo.

Seveda lahko fotoapararat pritrdimo tako, da sledi vrtenju neba. Takrat pa lahko čase osvetlite podaljšamo do meje, ki jo postavljajo druge okoliščine.

Ozračje

Plinasti omot Zemlje nam omogoča življenje, za astronomijo pa je pravi strup, in to iz več razlogov. Pri prehodu svetlobe vesoljskih teles skozi nemirno ozračje, se ta lomi, sipa, vpija. Zaradi gibanja zračnih gmot je slika nebesnih teles nemirna – migotana. Posledično lahko na nebu razločimo podrobnosti, ki so večje od zmazka slike, ki nastane zaradi migotanja. To pomeni, da nam ozračje omejuje ločljivost. Zvezde so točkasta svetila, vendar je zaradi tega pojava njihova slika razmazana v svetel krogec, katerega premer je odvisen od nemirnosti ozračja. V idealnih pogojih je premer tega kroga okoli kotne sekunde, pogosteje pa je mnogo večji, tudi do 10 kotnih sekund. Če je ozračje mirno, lahko razločimo

dve zvezdi, če sta na nebu eno kotno sekundo narazen, v slabih razmerah pa ne.

Težav z ozračjem je še veliko, od očitnih oblakov do manj očitne ekstinkcije, zaradi katere je isto nebesno telo nizko nad obzorjem videti manj svetlo, kot če je blizu zenita.

Svetlobno onesnaženje

Težave z ozračjem pa se ne končajo pri naravnih danostih. Svetloba, ki jo ponoči ustvarja človek, gre tudi v ozračje in ga razsvetljuje. Temu pravimo svetlobno onesnaženje, zaradi katerega je ozadje neba svetlejšo, kot če umetne razsvetljave ne bi bilo. Kako to vpliva na astronomsko fotografijo? Dramatično! Zaradi svetlobnega onesnaženja ne moremo videti in fotografirati svetlobno šibkejših nebesnih teles. Svetlobno onesnaženje lahko zlahka posnamete. Če podaljšujete čas osvetlitve nočnega neba, potem bo zaradi svetlobnega onesnaženja slika vse svetlejša, kot bi bil dan, in zvezdnih sledi ne bo več videti.





SLIKA 3.

Svetlobno onesnaženje

Optika

Za slikanje nočnega neba lahko uporabite vsak digitalni fotoaparati. Najboljši so zrcalnorefleksni fotoaparati, pri katerih lahko zamenjujete objektivne, če jih seveda imate.

Ker je sij nebesnih teles majhen, ozračje in vrtenje neba pa vam omejujeta trajanje osvetlitve, morate v čim krajšem času na tipalo fotoaparata spraviti čim več svetlobe. Pri tem je najpomembnejša t. i. svetlobna jakost objektiva, ki pomeni razmerje med goriščno razdaljo f in premerom objektiva D . Navadno je na objektivih oz. fotoaparatih označena z vrednostmi 1,8, 2,8, 3,5, 4, ki jih lahko spreminjamo z zaslonko. Manjša, kot je ta vrednost (razmerje f/D), več svetlobe pride v enakem času na tipalo oziroma svetlobno občutljivi čip fotoaparata. Pomen f/D je za astronomijo očiten.

Elektronika

Fotoaparati pa premorejo še en nadzor nad svetlostjo slike – občutljivost, ki jo izražamo v enotah ISO (kratica izhaja iz angleškega imena za Mednarodno organizacijo za standardizacijo). Navadno si občutljivosti sledijo kot 100 ISO, 200 ISO, 400 ISO, 800 ISO itd. Večja, kot je vrednost ISO, bolj je tipalo občutljivo na svetlobo – pri enaki osvetlitvi bo slika pri 800 ISO mnogo svetlejša kot pri 100 ISO.

To se zdi čudovita rešitev za astronomsko fotografijo, saj nekateri sodobni fotoaparati premorejo

tudi 100.000 ISO. Žal pa stvari niso tako enostavne. Z večanjem ISO se veča tudi »šum« na sliki, kar pomeni, da postane slika pri velikih ISO zelo »motna«. Pri enostavni astronomski fotografiji navadno uporabljamo nastavitve občutljivosti med 800 ISO in največ 3200 ISO, kar je odvisno od tipa fotoaparata.

Sledi nekaj astronomskih izzivov:

1. astrofotografski izziv

Izračunaj ali izmeri zorno polje svojega fotoaparata pri različnih goriščnih razdaljah objektiva (to velja za objektivne z zumom). Lahko pa zorno polje izračunaš in izmeriš ter nato primerjaš rezultate.

Namig. Če boš zorno polje poskušal izračunati, potem ugotovi velikost svetlobnega tipala v fotoaparatu (ne brskaj po fotoaparatu, temveč po internetu).

2. astrofotografski izziv

Izmerni mejno magnitudo zvezd na lastnem posnetku nočnega neba. Kako je ta odvisna od časa osvetlitve, svetlobne jakost objektiva, svetlobnega onesnaženja?

Namig. Za to vrsto fotografije ne potrebuješ sledenja. Pri določanju magnitud zvezd na posnetku si pomagaj s programom Stellarium (<http://www.stellarium.org>) ali podobnim računalniškim planetarijem.

3. astrofotografski izziv

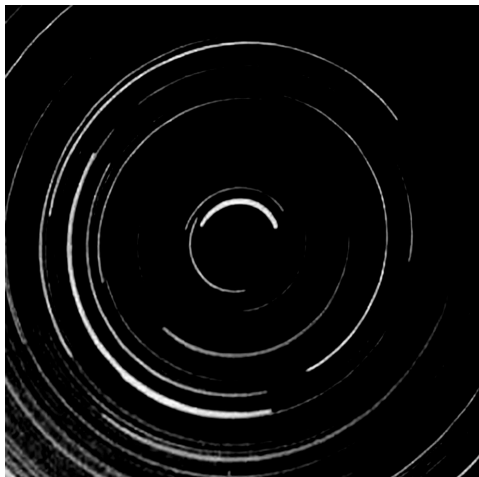
Na podlagi lastne fotografije izmeri oddaljenost Severnice od severnega nebesnega pola v kotnih minutah.

Namig. Pri fotografiranju uporabi objektiv s čim daljšo goriščno razdaljo. Pri fotografiranju ne potrebuješ sledenja. Dobro je poznati zorno polje, ki ga fotografija pokriva. Priložena fotografija (slika 4).

4. astrofotografski izziv

Ali so zvezde res različnih barv? Kakšnih?

Namig. Lahko posnameš zvezdne sledi. Lahko fotografiraš s krajšimi časi osvetlitve in z nekoliko nezostrenim fotoaparatom, da se slike zvezd spremenijo v nekoliko večje krožce.



SLIKA 4. Ker Severnica ni točno na severnem nebesnem polu, navidezno križi okoli njega.



SLIKA 5. Na neostri sliki so barve zvezd lepše vidne. Prepoznaš ozvezdje na sliki?

Križne vsote

↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števki od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratu na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.

		16	24		21	14
12				11		
15				16		
		6				5
	18					
7						
12				9		

↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE

4	5	6	5	7	12
1	2	9	9	7	18
5	1	3	2	6	
9	7	12	8	7	15
5	9	11	3	9	12
14	21		24	16	

× × ×

× × ×

Algoritem BatMiner za rudarjenje asociativnih pravil



IZTOK FISTER ML. IN IZTOK FISTER

→ Razvoj spletnega računalništva dandanes spremljata dva med seboj tesno prepletena izziva: velika količina neraziskanih podatkov v podatkovnih bazah in eksponentna rast računske moči računalniških sistemov. Prvi izziv je pripeljal do nastanka moderne računalniške discipline podatkovno rudarjenje, katerega cilj je odkrivanje informacij, skritih v podatkih, medtem ko drugi izziv poskuša zadovoljiti vse večje zahteve spletnega računalništva po procesorski moči in velikosti pomnilniških medijev. Dejansko je prav zadnji omogočil veliko rast in razvoj podatkovnega rudarjenja v zadnjem desetletju.

Podatkovno rudarjenje je multidisciplinarno področje, ki se zgleduje po principih ostalih znanstvenih področij, matematike, statistike, računalništva, fizike, inženirstva. Na to področje so imele največji vpliv naslednje discipline:

- statistika z uporabo statističnih metod in vizualizacijo podatkov,
- umetna inteligenca z uporabo metod strojnega učenja,
- metode računske inteligence in
- sistemi podatkovnih baz.

Dandanes se na tem področju pojavlja več vrst aplikacij, ki jih lahko razdelimo v napovedne in opisne.

Prvi tip aplikacij je namenjen napovedovanju (npr. klasifikacija, regresija) vrednosti ene ali več spremenljivk v prihodnosti na podlagi dela spremenljivk v podatkovnih bazah, medtem ko se drugi tip (npr. gručenje, rudarjenje asociativnih pravil, odkrivanje zaporednih vzorcev) ukvarja z identifikacijo vzorcev za opis podatkov, shranjenih v podatkovnih bazah, in njihovo vizualizacijo na način, ki je enostavno razumljiv uporabnikom. V tem članku se osredotočamo na rudarjenje asociativnih pravil.

Rudarjenje asociativnih pravil je proces identificiranja pravil odvisnosti med objekti znotraj velikih transakcijskih podatkovnih baz [4]. S temi pravili iščemo povezave med objekti oziroma napovedujemo pojavitev objektov v primeru, da se pojavi določeno sosledje drugih objektov.

Formalna definicija rudarjenja asociativnih pravil je naslednja: Predpostavimo, da sta podani množica objektov $O = \{o_1, \dots, o_n\}$ in množica transakcij T v transakcijski podatkovni bazi D , kjer je vsaka transakcija $t \in T$ podmnožica objektov $T \subseteq O$. Potem lahko asociativno pravilo definiramo kot implikacijo oblike

$$\blacksquare X \Rightarrow Y, \quad (1)$$

kjer velja $X \subset O$, $Y \subset O$ in $X \cap Y = \emptyset$. Množico mogočih pravil ocenimo z naslednjima meriloma [1]:

$$\blacksquare \text{supp}(X \Rightarrow Y) = \frac{|\{t \in T; X \cup t\}|}{|T|} \quad (2)$$

in

$$\blacksquare \text{conf}(X \Rightarrow Y) = \frac{\text{supp}(X \cup Y)}{\text{supp}(X)}, \quad (3)$$

kjer podpora $supp(X \Rightarrow Y)$ označuje, kako pogosto se objekt X pojavlja v transakcijski podatkovni bazi in zaupanje $conf(X \Rightarrow Y)$, kako pogosto asociativno pravilo $X \Rightarrow Y$ vrača vrednost *pravilno*. Iz te množice izberemo tista pravila, ki izpolnjujejo nasledni relaciji:

- $supp(X \Rightarrow Y) \geq S_{min}$

in

- $conf(X \Rightarrow Y) \geq C_{min}$,

kjer S_{min} označuje minimalno zaupanje in C_{min} minimalno podporo. Do danes je bilo razvitih veliko algoritmov za rudarjenje asociativnih pravil, kot npr. Apriori, Eclat, FP-Growth.

Zadnjih nekaj let poskušajo raziskovalci reševati ta problem tudi z uporabo algoritmov po vzorih iz narave. Med algoritme po vzorih iz narave štejemo evolucijske algoritme in algoritme inteligence rojev. Oboji spadajo med populacijske algoritme, kar pomeni, da operirajo s populacijo rešitev. Prva vrsta posnema Darwinovo evolucijsko teorijo, po kateri imajo v naravi največ možnosti za preživetje najuspešnejši posamezniki. Druga vrsta pa temelji na obnašanju delcev znotraj roja delcev, kjer delci delujejo kot agenti, ki so sposobni izvajanja relativno enostavnih opravil. Če ti agenti delujejo povezani v skupnost, so sposobni izvajanja tudi kompleksnejših opravil.

Več informacij o teh algoritmih lahko najde bralec v članku [2].

Eden izmed algoritmov za rudarjenje asociativnih pravil je tudi BatMiner, ki ga predstavljamo podrobneje v nadaljevanju članka. Ta temelji na algoritmu na osnovi obnašanja netopirjev [5] in ga je za rudarjenje asociativnih pravil potrebno prilagoditi. Pri tem sta najpomembnejši dve:

- prilagoditev predstavitve rešitev, in
- prilagoditev ocenitvene funkcije.

Rešitev algoritma za rudarjenje asociativnih pravil BatMiner je predstavljena kot vektor realnih števil:

- $\mathbf{x}_i^{(t)} = (x_{i,1}^{(t)}, \dots, x_{i,d}^{(t)}, x_{i,d+1}^{(t)}, x_{i,d+2}^{(t)})$,

kjer $x_{i,j}^{(t)} \in [0, 1)$ za $i = 1, \dots, n \wedge j = 1, \dots, d$ kodira značilnice v asociativnem pravilu, $x_{i,d+1}^{(t)}$ označuje točko reza, $x_{i,d+2}^{(t)}$ pa smer asociativnega pravila.

Spremenljivka n določa velikost populacije, d maksimalno število atributov v asociativnem pravilu in je t števec generacij. Točka reza določa, katere značilnice spadajo v predpostavko (angl. antecedent) in katere v posledico (angl. consequence) specifičnega asociativnega pravila.

Vsak element vektorja $x_{i,j}^{(t)}$ kodira dve vrsti informacije. Ko so elementi urejeni po naraščajočem vrstnem redu, pripadajoči indeksi tvorijo permutacijo značilnic, ki določa vrstni red pojavitve elementov v asociativnem pravilu. Povedano z drugimi besedami, glede na relacijo »manjši ali enak« dobimo naslednjo relacijo urejenosti:

- $x_{i,\pi(i,1)}^{(t)} \leq x_{i,\pi(i,2)}^{(t)} \leq \dots \leq x_{i,\pi(i,d)}^{(t)}$,

kjer $\pi(i, j)$ določa pripadajoči indeks atributa na j -ti poziciji i -tega vektorja.

Po drugi strani je območje dopustnih vrednosti značilnic v intervalu $x_{i,j}^{(t)} \in [0, 1]$ za $j = 0, \dots, d$ razdeljeno v $m_j + 1$ ekvidistantnih intervalov, kjer vsak interval $[k, k + 1]$ za $k = 0, \dots, m_j$ ustreza enemu izmed elementov množice atributov j -te značilnice $o_{i,j} \in \{a_{i,0}, a_{i,1}, \dots, a_{i,m_j}\}$ in parameter m_j označuje število elementov te množice. Atribut $a_{i,j}^{(t)}$ v generaciji t izračunamo po naslednji enačbi:

- $a_{i,j}^{(t)} = \left\lfloor \frac{x_{i,j}^{(t)}}{m_j + 1} \right\rfloor$, za $i = 0, \dots, n \wedge j = 0, \dots, d$.

(4)

Atribut $a_{i,0}^{(t)} = \text{NULL}$ ima poseben pomen, saj določa, da pripadajoče značilnice ni v asociativnem pravilu.

Točko reza $p_i^{(t)}$ asociativnega pravila določa nadzorni parameter $x_{i,d+1}^{(t)}$ in jo dekodiramo po naslednji enačbi:

- $p_i^{(t)} = \lfloor x_{i,d+1}^{(t)}(d - 2) \rfloor + 1$, za $i = 0, \dots, n$,

kjer dovoljujemo maksimalno $d - 2$ točk reza v vsakem asociativnem pravilu.

Element $x_{i,d+2}^{(t)} \in [0, 1]$ določa smer branja asociativnega pravila, ki ga dekodiramo po naslednji enačbi:

- $q_i^{(t)} = \begin{cases} 0, & \text{če } x_{i,d+1}^{(t)} \leq 0.5, \\ 1, & \text{če } x_{i,d+1}^{(t)} > 0.5, \end{cases}$ za $i = 0, \dots, n$.





Značilnica	Atributi	Vrednosti
TRAJANJE	KRATKO SREDNJE DOLGO	< 150 min ≥ 150 min ∧ < 300 min ≥ 300 min
DOLŽINA	KRATKA SREDNJA DOLGA	< 50 km ≥ 50 km ∧ < 120 km ≥ 120 km
PORABA	MAJHNA SREDNJA VISOKA	< 1200 kCal ≥ 1200 kCal ∧ < 2800 kCal ≥ 2800 kCal
UTRIP	MAJHEN SREDNJI VISOK	< 130 BPM ≥ 130 BPM ∧ < 170 BPM ≥ 170 BPM

TABELA 1.

Diskretizacija zveznih spremenljivk, ki služijo kot značilnice.

TRAJANJE	DOLŽINA	PORABA	UTRIP	VREME	TIP	SPANJE	KRČI	p	q
KRATKO	KRATKA	∅	∅	∅	INTERVAL	∅	∅	3	0
Predpostavka				Posledica				Nadz. par.	

TABELA 2.

Primer veljavne rešitve.

Če je vrednost $q_i^{(t)} = 0$, asociativno pravilo bremo z leve proti desni, če je $q_i^{(t)} = 1$ pa z desne proti levi.

Ocenitvena funkcija v algoritmu BatMiner je podobna funkciji, uporabljeni v [3] in jo izrazimo na naslednji način:

$$f(\mathbf{x}_i^{(t)}) = \begin{cases} \frac{\alpha * \text{conf}(\mathbf{x}_i^{(t)}) + \gamma * \text{supp}(\mathbf{x}_i^{(t)})}{\alpha + \gamma}, & \text{če } \text{feasible}(\mathbf{x}_i^{(t)}) = \text{true}, \\ -1, & \text{drugače,} \end{cases}$$

kjer je $\text{conf}()$ merilo zaupanja, $\text{supp}()$ merilo podpore pravila, α in γ so uteži, namenjene uravnoteževanju vpliva zaupanja in podpore ter funkcija $\text{feasible}(\mathbf{x}_i)$, ki določa, če je rešitev dopustna ali ne. Naloga optimizacije je poiskati maksimalno vrednost ocenitvene funkcije.

Algoritem BatMiner uporabimo za ugotavljanje značilnosti športnika v športnem treningu. S športnimi aktivnostmi se namreč v današnjih časih začne ukvarjati vse več ljudi, v kar jih največkrat prisili moderni življenjski slog. Ti športniki običajno spremljajo napredek svojega treniranja s pomočjo športnih ur oziroma mobilnih naprav, ki jih nosijo med treningom. Te naprave praviloma generirajo veliko število podatkov, ki lahko služijo športnim trenerjem pri načrtovanju športnih treningov, ugotavljanju trenutne pripravljenosti športnika v treningu, sestavljanju športnih jedilnikov ipd. V naši študiji uporabimo te podatke (tj. dolžino, trajanje, srčni utrip in porabo kalorij med treningom) kot osnovo za ugotavljanje značilnosti športnika v športnem treningu.

Pri tem podatke o spremljanju športnih treningov, pridobljenih z mobilnih naprav, dopolnimo s informacijami o psiho-fizičnem stanju športnika pred tre-

ningom (tj. vpliv vremena, tip treninga, nočno spanje pred treningom, morebitni krči) in vse skupaj shranimo v podatkovno bazo. Iz podatkov v podatkovni bazi izluščimo dejavnike, ki vplivajo na izvedbo športnega treninga posameznega športnika, in te shranimo kot značilnice (angl. features) v transakcijsko podatkovno bazo. Algoritem BatMiner za rudarjenje asociativnih pravil v tej bazi išče asociativna pravila, ki so za športnega trenerja lahko zelo uporabna pri napovedovanju športnikove forme ali odkrivanju problemov, povezanih s športnim treningom oziroma tekmovanji.

V našem primeru imamo opravka z osmimi značilnicami predstavljenimi kot zvezne oziroma diskretne spremenljivke. Zvezne značilnice, dobljene iz mobilnih naprav, je potrebno najprej diskretizirati. Primer diskretizacije podatkov, pridobljenih z mobilnih naprav, je prikazan v tabeli 1. Omenjena diskretizacija je narejena na osnovi teorije športnega treninga in velja tako za profesionalne kot amaterske športnike.

Diskretne značilnice, ki označujejo psiho-fizično stanje športnika, imajo preddefinirano število atributov. V našem primeru so to:

- VREME = {SONČNO, OBLAČNO, DEŽEVNO, SNEŽENO},
- TIP = {RAZPELJAVA, INTERVAL, MOČ, VZDRŽLJIVOST},
- SPANJE = {DOBRO, SREDNJE, SLABO},
- KRČI = {BREZ, RAHLI, VELIKI}.

Primer predstavitve asociativnega pravila, ki ga je odkril algoritem BatMiner v transakcijski podatkovni bazi z 80 transakcijami, prikazuje tabela 2, kjer nadzorni parameter $p = 3$ pomeni točko reza, ki deli pravilo na predpostavko in posledico, in kjer nadzorni parameter $q = 0$ določa smer branja asociativskega pravila z leve proti desni. Če predpostavimo, da značilnico združimo z atributom s pomočjo operacije združevanja (znak \triangleright_{\langle}), posledično iz rešitve dekodiramo naslednje asociativno pravilo

- TRAJANJE_KRATKO \wedge DOLŽINA_KRATKA \Rightarrow TIP_INTERVAL,

ki pravi: Če je trening kratke dolžine in kratkega trajanja, gre za intervalni tip treninga. Seveda je pravilo v skladu s teorijo športnega treninga, saj gre pri intervalnih treningih za zelo intenzivne kratkotrajne treninge kratkih dolžin.

Kot prikazuje zgornji primer, so algoritmi po vzorih iz narave uporabni tudi pri rudarjenju asociativnih pravil. V današnji družbi se ne moremo izogniti veliki rasti podatkov, ki nastajajo praktično na vsakem koraku, lahko pa se iz njih veliko novega naučimo. V prihodnosti lahko pričakujemo, da se bodo podobne rešitve z algoritmi po vzorih iz narave za podatkovno rudarjenje začele uporabljati tudi na ostalih področjih človekove dejavnosti.

Literatura

- [1] R. Agrawal, T. Imielínski in A. Swami, *Mining association rules between sets of items in large databases*, ACM SIGMOD Record, 22(2), 207–216, 1993.
- [2] I. Fister Jr., X.-S. Yang, I. Fister, J. Brest in D. Fister, *A brief review of nature-inspired algorithms for optimization*, Elektrotehniški vestnik, 80(3), 116–122, 2013.
- [3] K. E. Heraguemi, N. Kamel in H. Drias, *Association rule mining based on bat algorithm*, In Bio-Inspired Computing-Theories and Applications, 182–186, Springer, 2014.
- [4] G. Hrovat, G. Stiglic, P. Kokol in M. Ojsteršek, *Contrasting temporal trend discovery for large healthcare databases*, Computer methods and programs in biomedicine, 113(1), 251–257, 2014.
- [5] K. Ljubič in I. Fister Jr., *Algoritem na osnovi obnašanja netopirjev*, Presek, 42(3), 26–28, 2015.

× × ×

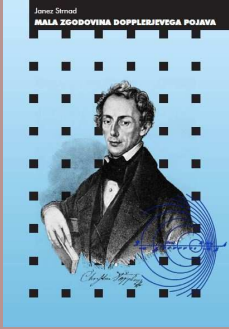
www.obzornik.si

www.dmfa-zaloznistvo.si

Novosti v naši ponudbi

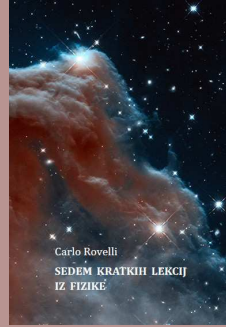
V DMFA – založništvo izdajamo različne vrste literature.

Predstavljamo vam dve zadnji novosti:



Janez Strnad:
**MALA ZGODOVINA
 DOPPLERJEVEGA
 POJAVA**

120 strani, format 14 × 20 cm
 15,50 EUR



Carlo Rovelli
**SEDEM KRATKIH LEKCIJ
 IZ FIZIKE**

76 strani, format 12 × 17 cm
 9,50 EUR

Poleg omenjenih lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih zbirk nalog. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse zbirke tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA-založništvo 20 % popusta, razen za najnovejše knjige! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (041) 721 264.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 44/4

→ Pravilna rešitev nagra-
 dne križanke iz četrte
 številke Preseka je **For-
 mula Strassnitzkega**.
 Izmed pravilnih rešitev
 so bili izžrebani LAURA
 PAVLIN GREGORČIČ iz
 Blance, IVANKA TOMPA
 iz Odrancev in NEJC
 HAUPTMAN iz Zgornje
 Kungote, ki so razpisane
 nagrade prejeli po pošti.



Temperaturna inverzija



LUKA SENEKOVIČ

→ Gotovo se je vsakomur že kdaj pripetilo, da je obisk gora zaznamovalo presenečenje ob prihodu na vrh, ko je bila temperatura tam višja kot pa v dolini. Ta pojav vremenoslovci imenujejo temperaturna inverzija. Gre torej za nenavadnost, za obrat v spreminjanju temperature z višino. Ob odhodu v gore namreč pričakujemo, da bo zrak v dolini toplejši kot na vrhu.

Sonce segreje zemeljsko površino, ta pa greje zrak nad njo. Nižine pokrivajo večji del zemeljskega površja. Nižine so sredi dneva, ko Sonce sveti najmočnejše, dokaj pravokotne na vpad sončnih žarkov, prejmejo več sončne energije in se bolj segrejejo. Še bolj se seveda segrevajo tla na prisojnih pobočjih, toda tam se zato pojavi veter, ki piha po pobočju navzgor, kar segrevanje zraka nad tlemi nekoliko zavira.

Tla se pričnejo ohlajati že popoldne, izrazito pa po sončnem zahodu. Posledično se prične ohlajati tudi zrak ob tleh. Zrak je slab prevodnik, zato traja

precej časa, preden se ohlajanje prenese tudi na višje ležeče plasti zraka, torej, preden se višje ležeče plasti zraka pričnejo ohlajati. Zato so plasti zraka po nižinah hladnejše in posledično gostejše kot višje ležeče. Razlika v gostoti še dodatno pripomore k temu, da se hladnejše plasti zadržujejo v nižinah, torej pod redkejšimi in toplejšimi. Saj se spomnimo, da gostejše v redkejšem »potone«? Tudi zato se vpliv ohlajanja ne prenaša v višine z mešanjem zraka, ki je sicer učinkovitejše od prevajanja.

Zrak sestavlja tudi vodna para, ki se lahko izloča v kapljicah. Kondenzacija se zgodi pri nižjih temperaturah, ko je relativna vlažnost zraka večja. V našem primeru nastane pri tleh megla, višje pa oblaki. Megla in oblaki naredijo nad kotlinami in dolinami »pokrov«, kar pomeni, da je prehajanje sončne svetlobe oteženo. Zato v primeru temperaturne inverzije nižin ne doseže toliko sončne svetlobe, posledica so nižje temperature kot v višinah, kjer je takrat sončne svetlobe v izobilju.

Najizrazitejši pojav inverzije je običajno pozimi, ko daljše noči omogočajo znatnejše ohladitve površja, ker je takrat sončne svetlobe manj posledica pa so večje temperaturne razlike med plastmi zraka bližje površju in tistimi višje ležečimi. Ob kondenzaciji se sprošča latentna toplota, ki zrak nekoliko ogreje, kar proces nekoliko zavira.

Pojav inverzije lahko opazujemo zjutraj oziroma dopoldan, kasneje se namreč površje spet segreje, z njim pa tudi nižje ležeče zračne mase. V posebnih primerih, kadar smo na območju visokega zračnega tlaka ali morda nad kotlino, lahko pojav opazujemo več dni skupaj, torej vlogo pri tem gotovo igrajo tudi razgibanost površja. Nižje temperature so razlog za povečanje gostote zraka in zato gostejši zrak polzi po pobočjih navzdol v doline in kotline. Izločanje vodne pare v obliki kapljic pa tvori meglo in nizko oblačnost.

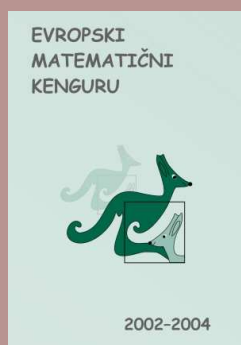
× × ×



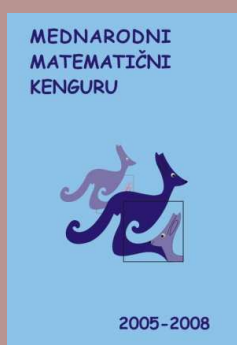
Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

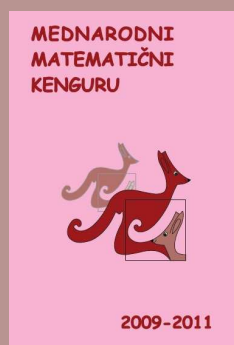
Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.



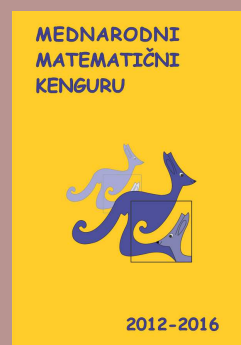
10,99 EUR



18,74 EUR



14,50 EUR



23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Evropski matematični kenguru 2002-2004*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2005-2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009-2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012-2016* (novost).

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitev so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA-založništvo 20 % popusta na zgornje cene - izkoristite ga!



Nagradna križanka

					PREMOŽENJE, KI GA DA ŽENIN NEVESTI ZA PRINESENO DOTO	SPODBUJEVALEC K DEJAVNOSTI	SREDIŠČE MAJHNE PREKMURSKE OBČINE	SIMBOL ZA STRONCIJ	MADŽARSKI PESNIK (ARPAD)	VELIK SLADKOVODNI KRAPOVEC	SKLADATELJ FIRŠT	ŽARNICA, IMENOVANA PO AMERIŠKEM IZUMITELJU	RIMSKA UTRDBA KVADRATNE OBLIKE						
					ČASOVNA ALI KRAJEVNA RAZLIKA ZA TEKMECEM		5												
					OZVEZDJE SEVERNEGA NEBA Z GALAKSIJO														
					PLOD BUKVE						GLAVNO MESTO SEVERNOAFRISKE DRŽAVE								
					SMUČARSKA SKAKALKA KLINEC						LISTNATO DREVO ALPSKO MESTO V ITALIJI								
					DRAMA-TRUGINJA MILČINSKI ANG. IGRALEC (ALAN)							VODITELJ LIBERIJE V 80. LETIH (SAMUEL) ADRESAR PRAVNIŠKI POKLIC							
										NIZOZEMSKA POGINULA ALI ONEMOGLA ŽIVAL			MOČNA ČUTNA ZELJA	ČEBELARSKI PROIZVOD					
AVTOR MARKO BOKALIČ	ODPORNE TRAJNE OBLIKE NEKATERIH BAKTERIJ	PRIMORSKI KRAJ OB CESTI PROTI SOCERGI	SOGLASNIKA V RAZORU	PREIZKUS ZNANJA KANDIDATA	NEKD. AVS. ZUNANJI MINISTER NASPROTJE OSEKE								SMUČAR HITRIH DISCIPLIN SKUPEK LAS						
NEKDANJI STROKOVNI USLUŽBENE V KNIŽNICI																			
SLIKOVNA SESTAVLJANKA IZ RAZLIČ. PLOŠČIC						ZAŠILJENA KONICA	JUDOVSKO SV. PISMO ROMAN WOLEJA SOYINKE	9					DAREŽ JIVOST MESTO NA VZHODU UKRAJINE						
NAJDALJŠA RUSKA REKA			ŠKOLJKA ZA MOŠKO URINIRANJE "POLOVICA" ZICE		4				SULTANOV URADNI RAZGLAS KOBRA				ARHITEKTURNA ZGODOVINARSKA KREČIC	MELODIČNI OKRASEK IZ HITRIH ZAPOREDNIH TONOV					
PREDPISAN RED						AMERIŠKA KUNA, SMRDUH				PODPISNIK VOJAŠKE POGODBE, ZAVEZNIK	BABICA, NONA EDEN OD STARŠEV				JURE IVANUŠIČ SPOŠTOVANJE				
TELEVIZIJKI CETINSKI MALNAR						STANJE BREZ SVETLOBE			POŠKODOVANKA RADIJ KROGA			1							
					ŠTORČEK, PANJIC													NAŠ PESNIK (ANTON) VRSTA PIHALA	
					NIZEK ŽENSKI GLAS										PODREDNI VEZNIK SVETOPISEMSKI OČAK			PREDSTOJNIK PRAVO-SLAVNE ZUPNIJE FIGURA	
					TRAVNIŠKA ZDRAVILNA RASTLINA													MOČEN ODSEV SVETLOBE ZOLTAN FABRI	
ZEMELJSKI NOVI VEK																			
IZDELEK ČLOVEŠKIH ROK																			



					FRANCOSKI SREDNJEVEŠKI ZGODOVINAPISEK IN PESNIK (JEAN)	AVS.-MADŽ. SKLADATELJ (FRANZ)	ENOTA ZA ELEKTRIČNI TOK	VESNA SLAPAR	ČRKA IZ DVEH PREKRIZANIH ČRT	HIMALAJSKO GOVEDO	NAŠ PISATELJ, LITERARNI KRITIK IN ZGODOVINAR (FRAN)	STRJENA JUHA, ŽOLCA	NAVPIČNO SKALNATO POBOČJE	VELIKA DVORANA
					RIMSKI ZGODOVINAR						AM. PEVEC COUNTRYJA (JOHNNY) BIZETOVA OPERA			
					MEDEL PAS SVETLOBE NA NOČNEM NEBU									
					OBMEJNI KRAJ PRI ČRNEM KALU			KIRURŠKI NOŽ JAVNA IGRA NA SREČO						
					BOSANSKI PESNIK SARAJLIČ. RAZPRŠENE KAPLJICE				NEUMEN, TRAPAST	ŠPAN. NOG. VRATAR (PEPE)	2			
														MUSLI-MANSKI BOG
PRIJETNO POČUTJE	NAŠ NEKDANJI POLITIK (BORIS)	GRŠKI JUNAK, AJANT	IZREDNA LEPOTA	STOŽČASTO RDEČE POKRIVALO MUSLI-MANOV		ZNAK ZA NIKELJ	FRANCOSKI IMPRESIONIST (CLAUDE)					FRANCOSKI SKLADATELJ DELIBES	VZKIPLJIV TEMPERAMENT	VRANIČNI PRISAD
				PRISTANIŠKO MESTO V ALŽIRIJI			OBRAMBNA IGRALKA MLAD PRIPRAVNIK ZA POKLIC							
				MESTO V ITALIJI IZDELEK ZA ČIŠČENJE ZOB					DIRIGENT LEONARD BERNSTEIN KOT PISEK (LENNY)	PRITOK DRINE IZ SRBIJE	ŽLAHTNI PLIN VRSTA MATEMAT. PRESLIKAVE			
							ZVOČNI ZNAK ZA NEVARNOST					ROMUNSKA REKA PRITOK INNA PRI INNSBRUCKU		
			KNJIŽNI IZRAZ ZA JAREM		7	FIZIK NEWTON	EGIPČAN. FARAON ZNAK ZA CERJ						ERBLJ NEVTRAL ZA MNOŽENJE IN DELJENJE	
		VELIKA ŠPANSKA REKA	PRIPRAVA ZA TRENJE LANU AM. REŽISER (MIKE)					OVIRA, PREPREKA SOL TITANOVE KISLINE						
					SUMATOR NALEZ-LJIVA OTROŠKA BOLEZEN					3				
ENAKOMEREN KONJSKI TEK	POKRAJINA V NIGERIJLI MADŽARSKI SKLADAT. (FERENC)						ULKUS, RAZJEDA			GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ	RIBIŠKA VRVICA			
				RADIJSKA MODERATORKA BAŠ			ASTAT TALINA, KI JO IZBRUHA VULKAN							NASELJE SREDI KORČULE
				OSEBA Z GOVORNO MOTNJO OZVEZDJE ZODIAKA										
		TRAKTORIST S PLOGOM LUTECLJ												6
AMERIŠKA PEVKA FITZGERALD							NEKD. AVS. SMUČARKA FENNINGER AVTONOMNA POKRAJINA							
IZ DVEH PLODNIH LISTOV NASTALI SUHI PLOD			8											SPECIALLITETA IZ IKER LUNINO ŠTEVILO V ASTRONOMIJI

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do 5. maja 2017, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

XXX